ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԲԱՅՐԱՄՅԱՆ ՎԱՀԱԳՆ ՀԱՅԿԻ

$\boldsymbol{n}$–ՃՇԳՐԻՏ ԵՎ GC_n ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՆՈՐ ՀԱՏԿՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ատենախոսություն

Ա.01.07 «Հաշվողական մաթեմատիկա»
Մասնագիտությամբ

Ֆիզիկա–մաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի համար

Գիտական ղեկավար՝
ֆիզ.–մաթ. գիտ. դոկտոր
Հ. Ա. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ ... 3
ԳԼՈՒԽ 1. ՄԻՋԱՐԿՈՒՄ, ՃՇԳՐԻՏ ԵՎ ԱՆԿԱԽ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ... 28
1.1 Միջարկում մեկ փոփոխականի բազմանդամներով ... 28
1.2 Միջարկում երկու փոփոխականի բազմանդամներով ... 30
1.2.1 Ճշգրիտ բազմություններ ... 30
1.2.2 Անկախություն և կախյալություն ... 33
1.3 GC_n բազմություններ: Գասքա–Մաեզթուի վարկածը ... 39
1.4 n–ճշգրիտ և GC_n բազմության օրինակներ ... 40
1.4.1 Բերզոլարի–Ռադոնի կոնստրուկցիա ... 41
1.4.2 Չանգ–Յաոյի բնական ցանց ... 42
1.4.3 Նյուտոնի ցանց ... 43
1.4.4 Քարնիսեր–Գասքայի ցանց ... 45
ԳԼՈՒԽ 2. ՄԱՔՍԻՄԱԼ ԿՈՐԵՐ, N_l և X_l բազմությունները ... 47
2.1 Մաքսիմալ կորեր ... 47
2.2 $\mathcal{N}_\ell$ և $\mathcal{X}_\ell$ բազմությունները ... 54
ԳԼՈՒԽ 3. ԳԱՍՔԱ ՄԱԵԶԹՈՒԻ ՎԱՐԿԱԾԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ... 59
3.1 GM–վարկածը $n = 3$ դեպքի համար ... 59
3.2 GM–վարկածը $n = 4$ դեպքի համար ... 60
ԳԼՈՒԽ 4. n–ՃՇԳՐԻՏ և GC_n ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՆՈՐ ՀԱՏԿՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ... 69
4.1 n–ճշգրիտ բազմության n–հանգույցանի ուղիղների վերաբերյալ ... 69
4.2 n–ճշգրիտ բազմության $(n-1)$–հանգույցանի ուղիղների վերաբերյալ ... 72
4.3 GC_n բազմության k–հանգույցանի ուղիղների վերաբերյալ ... 75
4.4 GC_n բազմության n–հանգույցանի ուղիղների վերաբերյալ ... 77
4.5 Թեորեմ 4.4.1–ի ապացույց ... 79
4.5.1 $n = 1$ դեպքը ... 79
4.5.2 $n = 2$ դեպքը ... 79
4.5.3 $n = 3$ դեպքը ... 80
4.5.4 Թեորեմ 4.4.1–ի ապացույցը $n \geq 4$ դեպքում ... 81
4.5.5 Հատուկ դեպքը ... 84
4.6 Վարկած GC_n բազմությունների վերաբերյալ ... 85
ԱՄՓՈՓՈՒՄ ... 89
ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ ... 90

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Թեմայի արդիականությունը. Միջարկումը (ինտերպոլացիա) որևէ բարդ ֆունկցիայի արժեքների մոտավոր հաշվումն է՝ օգտագործելով այդ ֆունկցիայի որոշ կետերում տրված արժեքները: Բազմանդամային միջարկման դեպքում որպես միջարկիչ ֆունկ– ցիաներ օգտագործվում են բազմանդամներ: Այսինքն, հարթության մեջ տրված են կետեր, պահանջվում է գտնել այնպիսի բազմանդամ, որի գրաֆիկը ճշգրիտ անցնում է այդ կետերով: Միջարկումը՝ բազմանդամներով կամ այլ ֆունկցիաներով, հաշվողա– կան մաթեմատիկայի բավականին հին մեթոդներից է:

Ներկայումս բազմանդամային միջարկումը մոտարկումների տեսության և հաշվո– ղական մաթեմատիկայի կարևորագույն բաժիններից մեկն է: Այն լայնորեն կիրառվում է բազմաթիվ մաթեմատիկական խնդիրներում:

Միաչափ բազմանդամային միջարկման խնդրի ամբողջական լուծումներ են տվել դեռևս Լագրանժը և Նյուտոնը: Մի քանի փոփոխականի բազմանդամային միջարկումը համեմատաբար նոր թեմա է և սկիզբ է առել 19–րդ դարի երկրորդ կեսերից՝ Վ. Բոր– չարդի և Լ. Կրոնեկերի աշխատանքներով:

Մի քանի փոփոխականի բազմանդամային միջարկման առաջին կարևոր արդյունք– ները ստացել են Բերզոլարին, Ռադոնը, ինչպես նաև Չանգը և Յաոն: Ներկայումս բազմաչափ բազմանդամային միջարկման տեսության մեջ կան շատ չլուծված կարևոր խնդիրներ: Մասնավորապես՝ լուծված չէ դեռևս 1982 թ.–ին Գասքայի և Մաեզթուի կողմից առաջադրված վարկածը, որը քննարկում ենք ատենախոսության մեջ:

Նշենք նաև, որ բազմաչափ բազմանդամային միջարկման խնդիրը սերտորեն առնչ– վում է հանրահաշվական երկրաչափության հետ: Ներկայումս մի քանի փոփոխական– ներով միջարկման ուղղությունը հանդիսանում է նաև հանրահաշվական երկրաչա– փության արդիական բաժիններից մեկը:

Ատենախոսական աշխատանքի նպատակը. Ճշգրիտ և GC_n բազմություններում ուղիղ– ների օգտագործման ուսումնասիրությունը, Գասքա–Մաեզթուի վարկածի հետազո– տություն:

Հետազոտման օբյեկտը. Երկու փոփոխականի բազմանդամային տարածություններ, միջարկման ճշգրիտ բազմություններ, միջարկման անկախ բազմություններ, GC_n բազմություններ, մաքսիմալ ուղիղներ, հանրահաշվական կորեր և մաքսիմալ կորեր:

Հետազոտման մեթոդները. Օգտագործվել են բազմաչափ բազմանդամային միջարկ– ման տեսության մեթոդները: Օգտագործվել են նաև գծային հանրահաշվի և հանրա– հաշվական երկրաչափության որոշ մեթոդներ:

Գիտական նորությունը. Ապացուցվել է n–ճշգրիտ և GC_n բազմությունների մի նոր կարևոր հատկություն: Ձևակերպվել է նոր վարկած GC_n բազմությունների համար: Այդ վարկածը ապացուցվել է որոշ կարևոր մասնավոր դեպքերում:

Կիրառական նշանակությունը. Ատենախոսության մեջ ստացված արդյունքներն ունեն ինչպես տեսական, այնպես էլ՝ կիրառական նշանակություն: Վերը նշված արդյունք– ները վերաբերում են անկախ և ճշգրիտ բազմությունների բնութագրմանը, որոնք կարևոր դեր են կատարում բազմաչափ միջարկումների տեսության մեջ: Այդ արդյունք– ները կարող են կիրառվել բոլոր այն խնդիրներում, որոնց լուծման մեջ օգտագործվում է բազմաչափ բազմանդամային միջարկումը:

Ստացված արդյունքների ապրոբացիան. Ատենախոսության արդյունքները զեկուցվել են ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի Թվային անալիզի և մաթեմատիկական մոդելավորման ամբիոնի սեմինարներում, ԵՊՀ Ինֆոր– մատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի ընդհանուր սեմինարում, Հարմոնիկ անալիզ և մոտարկումներ, VI, միջազգային կոնֆերանսում, 2015, Հայկական Մաթեմատիկական Միության 2016 թվականի տարեկան նստաշրջանում:

Հրատարակությունները. Ատենախոսության հիմնական արդյունքները տպագրված են չորս գիտական հոդվածներում և հետևյալ երկու կոնֆերանսների թեզիսներում՝ Հարմոնիկ անալիզ և մոտարկումներ VI, Միջազգային կոնֆերանս, Ծաղկաձոր 2015, Հայկական Մաթեմատիկական Միության տարեկան նստաշրջան, 2016:

Ատենախոսության կառուցվածքը և ծավալը. Ատենախոսությունը բաղկացած է ներա– ծությունից, չորս գլխից, ամփոփումից և գրականության ցանկից, որը ներառում է 29 աշխատանք: Ատենախոսության ծավալը 92 էջ է:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Գլուխ 1–ը նվիրվում է միջարկման խնդրին և ճշգրիտ, անկախ բազմություններին: Պարագրաֆ 1.1–ում ներկայացվում են մեկ փոփոխականի բազմանդամների համար Լագրանժի միջարկման խնդիրը և դրա լուծման Լագրանժի և Նյուտոնի մեթոդները:

Նշանակենք π_n–ով մեկ փոփոխականի $\leq n$ աստիճանի իրական գործակիցներով հանրահաշվական բազմանդամների տարածությունը՝

$$\pi_n = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i : \mid \ a_i \in R \right\}:$$

Դիտարկենք թվային առանցքի վրա իրարից տարբեր $x_i (i = 0,1,\ldots,s)$ կետեր(հանգույցներ): Դիցուք տրված են $c_i \in R,\ i = 0,1,\ldots,s$ ցանկացած արժեքներ: Լագրանժի միաչափ միաջարկման խնդիրը հետևյալն է. *Պահանջվում է գտնել այնպիսի $p \in \pi_n$ բազմանդամ, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝*

$$p(x_i) = c_i, \quad i = 0,1,\ldots,s: \tag{1.1.1}$$

Այդպիսի $p \in \pi_n$ բազմանդամն անվանում են միջարկիչ բազմանդամ, կետերը՝ միջարկման հանգույցներ, իսկ (1.1.1) պայմանները՝ միջարկման պայմաններ:

(1.1.1)–ը իրենից ներկայացնում է գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգ, $s + 1$ հավասարումներով և $n + 1$ անհայտներով, որտեղ անհայտները $p \in \pi_n$ բազմանդամի գործակիցներն են:

Հեշտ է նկատել, որ համակարգի, հետևաբար և միջարկման խնդրի, միակորեն լուծելիության անհրաժեշտ պայմանն է՝

$$s = n: \qquad (1.1.2)$$

Թեորեմ 1.1.1 (Լագրանժ)։ *Ցանկացած իրարից տարբեր* $x_0, x_1, \dots, x_n$ *հանգույցների և* $c_0, c_1, \dots, c_n$ *թվերի համար գոյություն ունի միակ* $p \in \pi_n$ *բազմանդամ այնպես, որ*

$$p(x_i) = c_i, \quad i = 0,1,\dots,n: \qquad (1.1.3)$$

Հայտնի են Լագրանժի միջարկման խնդրի բացահայտ բանաձևով լուծման երկու հիմնարար սկզբունքներ՝ Լագրանժի և Նյուտոնի։

Լագրանժի սկզբունքով լուծման ստացման համար նախապես կառուցվում են Լագրանժի ֆունդամենտալ բազմանդամները։

Սահմանում 1.1.2: *Կասենք, որ* $p_k^* \in \pi_n$ *բազմանդամը* x_k *հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամ է* π_n *տարածությունում, եթե բավարարվում են հետևյալ պայմանները՝*

$$p(x_k) = \delta_{ik}, \; i = 0,1,\dots,n,$$

որտեղ δ_{ik} *Կրոնեկերի սիմվոլն է։*

Հիշեցնենք, որ $\delta_{ik} = 1$, եթե $i = k$, և 0 հակառակ դեպքում։

Պարզ է, որ օգտվելով ֆունդամենտալ բազմանդամներից, Լագրանժի միջարկման խնդրի միակ լուծումը կարելի է ներկայացնել հետևյալ բանաձևով՝

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i p_i^*(x): \qquad (1.1.4)$$

Պարագրաֆ 1.2–ում դիտարկում ենք երկու փոփոխականներով Լագրանժի միջարկ– ման խնդիրը։ Սահմանում ենք ճշգրիտ և անկախ բազմությունները։

Նշանակենք Π_n–ով երկու փոփոխականի $\leq n$ աստիճանի իրական գործակիցներով բազմանդամների տարածությունը.

$$\Pi_n = \left\{ \sum_{i+j\le n} a_{ij} x^i y^j : | \, a_{ij} \in R \right\}:$$

Ունենք որ

$$N \coloneqq dim\Pi_n = \binom{n+2}{2}: \qquad (1.2.1)$$

Դիտարկենք s կետերի(հանգույցների) հետևյալ բազմությունը՝

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_s = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_s, y_s)\}:$$

$p \in \Pi_n$ բազմանդամի գտնելու խնդիրը, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

$$p(x_i, y_i) = c_i, \qquad i = 1,2, \dots, s \qquad (1.2.2)$$

կոչվում է Լագրանժի միջարկման խնդիր:

Սահմանում 1.2.1: *$\mathcal{X}_s$ հանգույցների բազմությունը կոչվում է n–ճշգրիտ, եթե ցան–կացած $c_1, \dots, c_s$ թվերի համար գոյություն ունի (1.2.2) պայմաններին բավարարող միակ $p \in \Pi_n$ բազմանդամ:*

Նկատենք, որ ինչպես և միաչափ դեպքում, միջարկման (1.2.2) պայմանները հանգում են N անհայտներով s գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգին՝

$$\sum_{i+j\le n} a_{ij} x_k^i y_k^j = c_k, \quad k = 1,2, \dots, s,$$

որտեղ անհայտները p բազմանդամի գործակիցներն են՝ a_{ij}: Հետևաբար $\mathcal{X}_s$ բազ–մության n–ճշգրտության անհրաժեշտ պայմանն է՝

$$|\mathcal{X}_s| = s = N = dim\Pi_n: \qquad (1.2.3)$$

Այսուհետև երբ դիտարկենք ճշգրիտ բազմություն, կենթադրենք, որ տեղի ունի (1.2.3) պայմանը՝ $\mathcal{X} = \mathcal{X}_N$:

Ի տարբերություն միաչափ դեպքի, բազմաչափ միջարկման խնդրի միակորեն լուծե– լիության համար միայն (1.2.3) պայմանը բավարար չէ: Բազմաչափ միջարկման համար բացի հանգույցների քանակի սահմանափակումից, պետք են նաև այլ պայմաններ՝ խնդրի միակորեն լուծելիությունն ապահովելու համար: Երկչափ դեպքում ճշգրտու– թյունն էապես կախված է ոչ միայն հանգույցների քանակից, այլ նաև դրանց երկրաչա– փական դասավորությունից:

Թեորեմ 1.2.2: *$\mathcal{X}_N$ հանգույցների բազմությունը՝ $|\mathcal{X}_N| = N = \binom{n+2}{2}$ հզորությամբ n–ճշգրիտ է այն և միայն այն դեպքում, եթե ցանկացած $p \in \Pi_n$ բազմանդամի համար տեղի ունի հետևյալ առնչությունը՝*

$$p(x_i, y_i) = 0, \;\; i = 1,2,\dots,N \quad \Longrightarrow \quad p \equiv 0$$

Այստեղից ստանում ենք.

Թեորեմ 1.2.3: *$\mathcal{X}_N$ հանգույցների բազմությունը՝ $|\mathcal{X}_N| = N = \binom{n+2}{2}$ հզորությամբ կլինի ոչ n–ճշգրիտ այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի $p \in \Pi_n,\; p \neq 0$ բազմանդամ, այնպիսին որ*

$$p(x_i, y_i) = 0, \qquad i = 1,2,\dots,N\ :$$

Մենք կօգտագործենք նույն նշանակումը $p(x,y) = 0$ հավասարումով բնութագրվող հանրահաշվական կորի և $p \in \Pi_k$ բազմանդամի համար: Ուղիղները և դրանց համապատասխան առաջին աստիճանի բազմանդամները կնշանակենք ℓ–ով:

Նշենք, որ ցանկացած $s < N$ կետերի համար գոյություն ունի $\leq n$ աստիճանի հանրա– հաշվական կոր, որն անցնում է այդ բոլոր հանգույցներով: Եվ իսկապես, համապա– տասխան համասեռ գծային համակարգը կունենա N անհայտ և s հավասարում, որն էլ նշանակում է, որ համակարգը ունի ոչ զրոյական լուծում: Այս փաստից, ինչպես նաև **Թեորեմ 1.2.3**–ից, ստանում ենք *երկչափ բազմանդամային միջարկման ճշգրտության երկրաչափական մեկնաբանությունը.*

$\mathcal{X}_N$ հանգույցների բազմությունը կլինի ոչ n–ճշգրիտ այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի n աստիճանի հանրահաշվական կոր, որը անցնում է $\mathcal{X}_N$–ի բոլոր հանգույցներով:

Լեմմա 1.2.4 ([22]): *Դիցուք տրված է n–ճշգրիտ $\mathcal{X}_N = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ բազմությունը: Այդ դեպքում գոյություն ունի ε դրական թիվ այնպիսին, որ ցանկացած*

$$\mathcal{X}'_N = \{(x'_i, y'_i)\}_{i=1}^N$$

բազմություն, որտեղ հեռավորությունը համապատասխան (x'_i, y'_i) և (x_i, y_i) հանգույցների միջև փոքր է ε–ից բոլոր i–երի համար, նս n–ճշգրիտ է:

Սահմանում 1.2.5: *$p \in \Pi_n$ բազմանդամը կոչվում է $A = (x_k, y_k) \in X_s$ հանգույցի n–ֆունդամենտալ բազմանդամ, եթե տեղի ունեն*

$$p(x_i, y_i) = \delta_{ik}, \qquad i = 1,2, \dots, s$$

հավասարությունները, որտեղ δ_{ik} Կրոնեկերի սիմվոլն է:
Մենք կնշանակենք $A \in \mathcal{X}_s$ հանգույցի n–ֆունդամենտալ բազմանդամը p_A^*–ով կամ $p_{A,\mathcal{X}_s}^*$–ով: Երբեմն ֆունդամենտալ բազմանդամը անվանում են նաև այն բազմանդամը, որը 0 է բոլոր հանգույցներում բացի մեկից:

Սահմանում 1.2.6: *$\mathcal{X}$ բազմությունը կոչվում է n–անկախ, եթե նրա բոլոր հանգույցները ունեն n–ֆունդամենտալ բազմանդամ: Հակառակ դեպքում $\mathcal{X}$–ը կոչվում է n–կախյալ:*

Պարզ է, որ ֆունդամենտալ բազմանդամները գծորեն անկախ են: Հետևաբար n–անկախության անհրաժեշտ պայմանն է՝ $|\mathcal{X}| \leq N$:

Դիտարկենք n–անկախ $\mathcal{X}$ բազմությունը: Օգտագործելով Լագրանժի հետևյալ բանաձևը՝

$$p = \sum_{A \in \mathcal{X}} c_A p_{A,\mathcal{X}}^*$$

Կստանանք (1.2.2) ինտերպոլացիոն պայմաններին բավարարող $p \in \Pi_n$ բազմանդամը: Այստեղից մենք կարող ենք տալ n–անկախության հետևյալ բնութագիրը.

$\mathcal{X} = \mathcal{X}_s$ բազմությունը n–անկախ է այն և միայն այն դեպքում երբ (1.2.2) ինտեր–պոլացիոն խնդիրը լուծելի է: Սա նշանակում է, որ ցանկացած $c_1, \dots, c_s$ թվերի համար գոյություն ունի (1.2.2) պայմաններին բավարարող (*ոչ անհրաժեշտաբար միակ*) $p \in \Pi_n$ բազմանդամ:

Հաջորդ երկու թեորեմները բնութագրում են n–անկախ բազմությունները, որպես n–ճշգրիտ բազմության ենթաբազմություն:

Թեորեմ 1.2.7 ([28]): *Ցանկացած n–անկախ $\mathcal{X}_s$ բազմություն $s < N$ հզորությամբ կարելի է ընդլայնել մինչև n–ճշգրիտ բազմություն:*

Թեորեմ 1.2.8: *$\mathcal{X}_N$ բազմությունը n–ճշգրիտ է այն և միայն այն դեպքում, եթե n–անկախ է:*

Այժմ դիտարկենք n–կախյալ $\mathcal{X}$ բազմությունը: Այս դեպքում ինչ–որ (x_{i_0}, y_{i_0}) հանգույց չունի n–ֆունդամենտալ բազմանդամ: Սա նշանակում է, որ ցանկացած $p \in \Pi_n$ բազ–մանդամի համար տեղի ունի հետևյալ առնչությունը.

$$p(x_i, y_i) = 0, i \in \{1,2, \dots, s\} \backslash \{i_0\} \quad \Longrightarrow \quad p(x_{i_0}, y_{i_0}) = 0$$

Ատենախոսության մեջ մենք գործ կունենանք n–կախյալ բազմության ավելի խիստ տարբերակի հետ:

Սահմանում 1.2.9: *$\mathcal{X}$ բազմությունը կոչվում է էապես n–կախյալ, եթե նրա ոչ մի հան–գույց չունի n–ֆունդամենտալ բազմանդամ:*

Հաջորդիվ ներկայացնենք մի պարզ նկատառում, որը օգտագործվում է գլուխ 4–ում:

Նկատառում 1.2.10: *Դիցուք ունենք $\mathcal{X}$ էապես n–կախյալ բազմությունը և $q \in \Pi_k, k \le n$ հանրահաշվական կորը: Այդ դեպքում $\mathcal{X}' \coloneqq \mathcal{X} \backslash q$ ենթաբազմությունը էապես $(n-k)$–կախյալ է, եթե իհարկե $\mathcal{X}' \neq \emptyset$:*

Ֆունդամենտալ բազմանդամները կարող են լինել նաև վերածելի, այսինքն ներ–կայացվեն ավելի ցածր կարգի բազմանդամների արտադրյալի տեսքով:

Սահմանում 1.2.11: *Տրված է n–ճշգրիտ* $\mathcal{X}$ *բազմությունը: Կասենք, որ* $A \in \mathcal{X}$ *հանգույցը օգտագործում է* $q \in \Pi_k$ *կորը, եթե* q*–ն* $p^*_{A,\mathcal{X}}$ *ֆունդամենտալ բազմանդամի բաժանարար է.*

$$p^*_{A,\mathcal{X}} = qr, \quad \text{որտեղ } r \in \Pi_{n-k}:$$

Ճշգրիտ բազմության ֆունդամենտալ բազմանդամների մի հատկություն ձևակերպենք լեմմայի տեսքով.

Լեմմա 1.2.12: *Դիցուք* $\mathcal{X}$ *բազմությունը n–ճշգրիտ է: Այդ դեպքում ցանկացած* $A \in \mathcal{X}$ *հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամ ճիշտ n–րդ աստիճանի բազմանդամ է՝* $deg\, p^*_A = n$*, և այն չի կարող ունենալ պատիկ արտադրիչներ:*

Եվ իրոք, եթե տանենք $A \in \mathcal{X}$ հանգույցով կամայական ℓ ուղիղ և ենթադրենք հակառակը՝ $deg\, p^*_A < n$, ապա $(p^*_A \cdot \ell) \in \Pi_n$ բազմանդամը կզրոյանա $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր հանգույցներում, որը ըստ **Թեորեմ 1.2.3**–ի հակասում է $\mathcal{X}$ բազմության ճշգրտությանը: Իսկ եթե p^*_A բազմանդամը ունենա պատիկ արտադրիչներ, ապա դրանք դեն նետելով՝ կստանանք նախորդ դեպքը:

Սահմանում 1.2.11–ից հետաքրքրություն է առաջանում, թե քանի հանգույց պետք է պարունակի q կորը, որպեսզի կարողանանք ասել, որ մնացած հանգույցները անպայմանորեն օգտագործում են այն:

Թեորեմ 1.2.13: *Դիցուք ունենք* ℓ *ուղիղը: Այդ դեպքում ցանկացած* $p \in \Pi_n$ *բազմանդամի համար տեղի ունեն հետևյալ դրույթները.*

1. *Եթե p բազմանդամը 0 է* ℓ*–ի* $n+1$ *կետերում, ապա այն 0 է ամբողջ* ℓ *ուղղի վրա*
2. *Եթե p բազմանդամը 0 է* ℓ *ուղղի վրա, ապա*

$$p = \ell r, \quad \text{որտեղ } r \in \Pi_{n-1}:$$

Այս թեորեմից ստանում ենք հետևյալ հետևանքները.

Հետևանք 1.2.14: $n+2$ *համագիծ հանգույցներից բաղկացած ցանկացած բազմություն էապես n–կախյալ է:*

Հետևանք 1.2.15 *Դիցուր $\mathcal{X}$ –ը n–ճշգրիտ բազմություն է: Այդ դեպքում ունենք՝*

1. *Ամենաշատը $n+1$ հանգույցներ կարող են լինել համագիծ,*
2. *$\mathcal{X}$ –ից $n+1$ հանգույցներ պարունակող ℓ ուղիղը օգտագործվում է $\mathcal{X}\backslash\ell$ բազմության բոլոր հանգույցների կողմից:*

Հաշվի առնելով այս ամենը՝ n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմության $n+1$ հանգույցներ պարունակող ℓ ուղիղը անվանում են մաքսիմալ ուղիղ: Հեշտությամբ կարելի է ապացուցել մաքսիմալ ուղիղների հետևյալ 2 հատկությունները՝

Հետևանք 1.2.16: *n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմության համար տեղի ունեն՝*

1. *$\mathcal{X}$ –ի ցանկացած 2 մաքսիմալ ուղիղ հատվում են $\mathcal{X}$ –ի հանգույցում*
2. *$\mathcal{X}$ –ի ցանկացած 3 մաքսիմալ ուղիղ չեն կարող հատվել $\mathcal{X}$ –ի մեկ կետում:*

Հետևաբար n–ճշգրիտ բազմության մաքսիմալ ուղիղները գտնվում են ընհանուր դրության մեջ, այսինքն՝ ոչ մի երկուսը զուգահեռ չեն և ոչ մի երեքը չեն հատվում մեկ կետում: Հաշվի առնելով (1.2.1) հավասարությունը, կարող ենք ասել, որ n–ճշգրիտ բազմությունը ամենաշատը կարող է պարունակել $n+2$ մաքսիմալ ուղիղ:

Եվ վերջին հետևանքը, որը բխում է **Թեորեմ 1.2.13**–ից՝

Հետևանք 1.2.17: *Դիտարկենք m ուղիղներ՝ $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$, որտեղ $m \le n$ և $(n+1)+n+\cdots+(n+2-m)$ հանգույցների այնպիսի $\mathcal{X}$ բազմություն, որի*

$$n+2-k \text{ հանգույցներ պատկանում } \ell_k \setminus \cup_{j=1}^{k-1} \ell_j, \; k=1,\dots,m:$$

Այդ դեպքում $\mathcal{X}$ –ի հանգույցներում զրոյացող ցանկացած $p \in \Pi_n$ բազմանդամի համար տեղի ունի

$$p = \ell_1 \dots \ell_m q, \;\; \text{որտեղ } q \in \Pi_{n-m}:$$

Այժմ բերենք անկախության և կախյալության վերաբերյալ մի քանի արդյունքներ:

Սկենք Սևերի հետևյալ պարզ, բայց կարևոր արդյունքից.

Թեորեմ 1.2.18 (Սևերի [15]): *Ամենաշատը $n+1$ հանգույց պարունակող ցանկացած բազմություն n–անկախ է:*

Իսկապես: Դիցուք $\mathcal{X}$–ը բազմություն է, որը պարունակում է ամենաշատը $n+1$ հանգույց: Ֆիքսենք, որևէ $A \in \mathcal{X}$ հանգույց: Մնացած հանգույցներով տանենք մեկական ուղիղ, որը չի անցնում A հանգույցով: Ստացված ուղիղների արտադրյալը կլինի $A \in \mathcal{X}$ հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամը:

Հաջորդիվ մենք կդիտարկենք ամենաշատը $2n+1$ հանգույց պարունակող բազմությունները

Թեորեմ 1.2.19 (Էյսենբադ, Գրին, Հարիս [16]): *Ամենաշատը* $2n+1$ *հանգույց պարունակող ցանկացած բազմություն n–անկախ է այն և միայն այն դեպքում, երբ դրանցից ոչ մի* $n+2$*–ը համագիծ չեն:*

Այս շարքի երրորդ արդյունքը հետևյալն է.

Թեորեմ 1.2.20 (Հակոբյան, Մալինյան [18]): *Ամենաշատը* $3n-1$ *հանգույց պարունակող ցանկացած բազմություն n–անկախ է այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունեն հետևյալ երկու պայմանները՝*

1. *ոչ մի* $n+2$ *հանգույցներ համագիծ չեն,*
2. *ոչ մի* $2n+2$ *հանգույցներ չեն գտնվում 2 կարգի կորի վրա:*

Պարագրաֆ 1.3–ում դիտարկում ենք n–ճշգրիտ բազմությունների մասնավոր դեպք՝ GC_n բազմությունները և ձևակերպում ենք Գասքա–Մաեզթուի հայտնի վարկածը:

Սահմանում 1.3.1 (Չանգ, Յաո[14]): *n–ճշգրիտ* $\mathcal{X}$ *բազմությունը կոչվում է* GC_n *բազմություն, եթե յուրաքանչյուր* $A \in \mathcal{X}$ *հանգույցի n–ֆունդամենտալ բազմանդամը վերլուծվում է n գծային արտադրիչների:*

Այլ խոսքով GC_n բազմությունը այն բազմությունն է, որի յուրաքանչյուր հանգույց օգտագործում է ճիշտ n ուղիղ: Այժմ մենք կարող ներկայացնել Գասքա–Մաեզթուի վարկածը, որը կարճ անվանում են GM–վարկած:

Վարկած 1.3.2 (Գասքա, Մաեզթու [20]): *Ցանկացած* GC_n *բազմություն պարունակում է* $n+1$ *համագիծ հանգույց:*

Այլ խոսքով GM–վարկածը պնդում է, որ ցանկացած GC_n բազմություն պարունակում է մաքսիմալ ուղիղ:

Վարկածի մասին ավելի մանրամասն կդիտարկենք 3–րդ գլխում:

Լեմմա 1.3.3 ([26]): *Դիցուք $\mathcal{X}$–ը GC_n բազմություն է: Այդ դեպքում յուրաքանչյուր հանգույցի համար գոյություն ունի միակ n ուղիղների բազմություն, պարունակող մնացած հանգույցները. մասնավորապես այդ ուղիղներից յուրաքանչյուրը անցնում է առնվազն երկու հանգույցով:*

Հաջորդիվ մենք կօգտագործենք GM–վարկածից բխող Քարնիսերի և Գասքայի կողմից ստացվող հետևյալ կարևոր արդյունքը

Թեորեմ 1.3.4 (Քարնիսեր, Գասքա [12]): *Եթե Գասքա–Մաեզթուի վարկածը ճիշտ է, ապա ցանկացած GC_n բազմություն պարունակում է ամենաքիչը 3 մաքսիմալ ուղիղ:*

Սրանից ակնհայտորեն հետևում է, որ n–ճշգրիտ բազմության յուրաքանչյուր հանգույց օգտագործում է մաքսիմալ ուղիղ:

Պարագրաֆ 1.4–ում դիտարկում ենք հետևյալ 4 կոնստրուկցիաները՝ Բերզոլարի–Ռադոնի ցանց, Նյուտոնի ցանց, Չանգ–Յաոյի ցանց և Քարնիսեր–Գասքայի ցանց: Առաջինը n–ճշգրիտ բազմության օրինակ է, իսկ մյուս 3–ը՝ GC_n բազմության:

Սահմանենք Բերզոլարի [6] և Ռադոնի [7] կողմից ներմուծված կոնստրուկցիան

Սահմանում 1.4.1: *Կասենք, որ $N = 1 + 2 + \cdots + (n + 1)$ հանգույցներ պարունակող $\mathcal{X}$ բազմությունը բավարարում է Բերզոլարի–Ռադոնի կոնստրուկցիային կամ BR_n բազմություն է, եթե գոյություն ունեն $n + 1$ ուղիղներ $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{n+1}$, այնպես որ՝*

$$\begin{aligned} &\ell_1\text{–ը պարունակում է } n + 1 \text{ հանգույց } \mathcal{X}\text{–ից},\\ &\ell_2 \setminus \ell_1 \text{ պարունակում է } n \text{ հանգույց } \mathcal{X}\text{–ից},\\ &\vdots\\ &\ell_{n+1} \setminus \cup_{i=1}^{n} \ell_i \text{ պարունակում է 1 հանգույց } \mathcal{X}\text{–ից:} \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

Թեորեմ 1.4.2: *Բերզոլարի–Ռադոնի կոնստրուկցիայով բազմությունը n–ճշգրիտ է:*

Նկատենք, որ Գասքա–Մաեզթուի վարկածը համարժեք է նրան, որ ցանկացած GC_n բազմություն ունի Բերզոլարի–Ռադոնի կոնստրուկցիա:

Դիտարկենք ընդհանուր դրության մեջ գտնվող $n+2$ ուղիղների $\mathcal{L}$ բազմությունը: Այդ ուղիղների հատման կետերի $\mathcal{X}$ բազմությունը կոչվում է Չանգ–Յաոյի ցանց կամ բնական ցանց: Պարզ է, որ $|\mathcal{X}| = \binom{n+2}{2}$ և $\mathcal{L}$–ի ուղիղները հանդիսանում են մաքսիմալ ուղիղներ: Յուրաքանչյուր հանգույց հանդիսանում է ճիշտ 2 մաքսիմալ ուղիղների հատման կետ և չի պատկանում մնացած n ուղիղներին: Ավելին՝ այդ n ուղիղների արտադրյալը հանդիսանում է այդ կետի ֆունդամենտալ բազմանդամը: Ցանկացած Չանգ–Յաոյի ցանց բնութագրվում է, որպես $n+2$ մաքսիմալ ուղիղ պարունակող GC_n բազմություն: Ինչպես նշվել է ավելի վաղ գոյություն չունեն $n+2$ մաքսիմալ ուղիղ–ներից ավելին պարունակող n–ճշգրիտ բազմություններ:

Նյուտոնի ցանցը կամ այսպես կոչված հիմնական ցանցը հանդիսանում է GC_n պայմանին բավարարող մեկ այլ ցանցի օրինակ: Դիցուք ունենք՝

$$\mathcal{X} = \{(j,k) \in Z_+^2: \quad j + k \leq n\}$$

հանգույցների բազմությունը: Դիտարկենք ուղիղների երեք ընտանիքներ՝ $\ell_k^{(1)}, \ell_k^{(2)}$ և $\ell_k^{(3)}, k = 0, \dots, n$, որտեղ $\ell_k^{(1)}$ ուղիղներից յուրաքանչյուրը տրվում է $x = k$ հավասարու–մով, $\ell_k^{(2)}$–ը՝ $y = k$ հավասարումով և $\ell_k^{(3)}$–ը՝ $x + y = k$ հավասարումով: Պարզ է որ $\mathcal{X}$ բազմությունը կլինի ուղիղների երեք ընտանիքների հատման կետերի բազմությունը՝

$$(j,k) = \ell_j^{(1)} \cap \ell_k^{(2)} \cap \ell_{j+k}^{(3)}:$$

Յուրաքանչյուր հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամ տրվում է հետևյալ կերպ.

$$p_{(j,k)}^* = \prod_{i=0}^{j-1} \ell_i^{(1)} \prod_{i=0}^{k-1} \ell_i^{(2)} \prod_{i=0}^{n} \ell_i^{(3)}:$$

Այստեղից երևում է, որ Նյուտոնի կոնստրուկցիայում յուրաքանչյուր հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամ կազմված է (1), (2) և (3) ընտանիքներից ուղիղների արտադրյալից. յուրաքանչյուր հանգույց օգտագործում է իրենից ձախ գտնվող (1) ընտանիքի բոլոր ուղիղները, (2) ընտանիքի՝ իրենից ներքև բոլոր ուղիղները և (3) ընտանիքի՝ իրենից աջ գտնվող բոլոր ուղիղները: Հետևաբար $\mathcal{X}$ բազմությունը բավա–րարում է GC_n պայմանին:

Այժմ նկարագրենք GC_n պայմանին բավարարող վերջին օրինակը:

Դիտարկենք ընդհանուր դրության մեջ գտնվող $n+1$ ուղիղների $\mathcal{L}$ բազմությունը: Կասենք որ $\mathcal{X}$ բազմությունը հանդիսանում է Քարնիսեր–Գասքայի ցանց, եթե $\mathcal{X} = \mathcal{X}' \cup \mathcal{X}''$ որտեղ $\mathcal{X}'$–ը $\mathcal{L}$–ի $n+1$ ուղիղների հատման կետերի բազմությունն է, որոնց անվանում ենք հիմնական հանգույցներ, իսկ $\mathcal{X}''$–ը $n+1$ ոչ համազիծ կետերի բազ–մություն է, մեկական յուրաքանչյուր ուղղի վրա, որոնց անվանում ենք ազատ հան–գույցներ: Ունենք որ $|\mathcal{X}| = \binom{n+1}{2} + n + 1 = \binom{n+2}{2}$: Յուրաքանչյուր ազատ հանգույց գտվում է $\mathcal{L}$–ի ճիշտ 1 ուղղի վրա: Մնացած n ուղիղների արտադրյալը տալիս է ազատ հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամը: Յուրաքանչյուր հիմնական հանգույց գտնվում է $\mathcal{L}$–ի ճիշտ 2 ուղղի վրա: Մնացած $n-1$ ուղիղների և այդ 2 ուղղի վրա գտնվող ազատ հանգույցներով անցնող ուղղի արտադրյալը տալիս է հիմնական հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամը: Ուստի $\mathcal{X}$–ը GC_n բազմություն է: Պարզ է, որ $\mathcal{X}$–ը պարունակում ճիշտ $n+1$ մաքսիմալ ուղիղ, որոնք $\mathcal{L}$–ի ուղիղներն են: Իրոք, **Հետևանք 1.2.16**–ի 2–րդ կետից հետևում է որ բացի $\mathcal{L}$–ի ուղիղներից կարող է լինել մեկ այլ մաքսիմալ ուղիղ անցնող $n+1$ ազատ հանգույցներով, ինչը իսկբանէ բացառված էր: Հակառակը նույնպես ճիշտ է: Ցանկացած n–ճշգրիտ բազմություն ճիշտ $n+1$ մաքսիմալ ուղիղներով Քարնիսեր–Գասքայի ցանց է:

Գլուխ 2–ը նվիրվում է մաքսիմալ կորերին, $\mathcal{N}_\ell$ և $\mathcal{X}_\ell$ բազմություններին:

Պարագրաֆ 2.1–ում սահմանում ենք մաքսիմալ կորերը և բերում, դրանց վերաբերյալ որոշ թեորեմներ:

Սկսենք **Թեորեմ 1.2.13**–ի ընդհանրացումից ավելի բարձր կարգի հանրահաշվական կորերի համար: Նշանակենք $k \leq n$–ի համար

$$d(n,k) \coloneqq \ dim\Pi_n - dim\Pi_{n-k} = \frac{1}{2}k(2n+3-k):$$

Թեորեմ 2.1.1 (Ռաֆայելյան [21]): *Դիցուք q–ն $k \leq n$ կարգի հանրահաշվական կոր է, առանց պատիկ արտադրիչների: Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալը՝*

1. *$d(n,k)$–ից ավել հանգույցներից բաղկացած q–ի ցանկացած ենթաբազմություն n–կախյալ է;*
2. *Ճիշտ $d(n,k)$ հանգույցներից բաղկացած $\mathcal{X} \subset q$ ենթաբազմությունը n–անկախ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $p \in \Pi_n$ բազմանդամի համար տեղի ունի հետևյալ առնչությունը՝*

$$p(x) = 0 \ \forall x \in \mathcal{X} \quad \Rightarrow \quad p = qr, \quad r \in \Pi_{n-k}$$

Ինչպես ուղիղների դեպքում (**Հետևանք 1.2.15**), այստեղ էլ ստանում ենք.

Հետևանք 2.1.2: *Ցանկացած n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմության համար տեղի ունեն՝*

1. *Ամենաշատը $d(n,k)$ հանգույցներ կարող են գտնվել k–րդ կարգի կորի վրա,*
2. *$\mathcal{X}$–ից $d(n,k)$ հանգույցներ պարունակող $k \leq n$ կարգի q կորը օգտագործվում է $\mathcal{X} \backslash q$ բազմության բոլոր հանգույցների կողմից:*

Հաջորդիվ մենք կտանք մաքսիմալ ուղիղ գաղափարի ընդհանրացումը

Սահմանում 2.1.3: Դիցուք *$\mathcal{X}$–ը n–ճշգրիտ բազմություն է: $k \leq n$ կարգի կորը, որը պարունակում է $\mathcal{X}$–ի ճիշտ $d(n,k)$ հանգույցներ կոչվում է մաքսիմալ կոր:*

Ուստի մաքսիմալ ուղիղը, երկրորդ կարգի կորը (*կոնիկ*) և երրորդ կարգի կորը (*կուբիկ*) համապատասխանաբար պարունակում են $\mathcal{X}$ բազմության $n+1$, $2n+1$ և $3n$ հանգույցներ:

Հաջորդ թեորեմը, բնութագրում է մաքսիմալ կորերին:

Թեորեմ 2.1.4 (Ռաֆայելյան [21]): *Դիցուք ունենք n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմությունը և առանց պատիկ արտադրիչների $k \leq n$ կարգի q կորը: Այդ դեպքում հետևյալ պնդումները համարժեք են.*

1. *q–ն մաքսիմալ կոր է $\mathcal{X}$ բազմության համար,*
2. *$\mathcal{Y} = \mathcal{X} \backslash q$ բազմության բոլոր հանգույցները օգտագործում են q կորը,*
3. *$\mathcal{Y}$ բազմությունը $n-k$–ճշգրիտ է: Ավելին, եթե $\mathcal{X}$–ը GC_n բազմություն է, ապա $\mathcal{Y}$–ը GC_{n-k} բազմություն է:*

Հայտնի է որ, n–ճշգրիտ ցանկացած $N-1$ հանգույցներով միակորեն որոշվում է n–րդ կարգի կորը: Հարց է առաջանում, թե քանի հանգույցներով է միակորեն որոշվում ավելի ցածր կարգի կորերը:

Մեզ անհրաժեշտ կլինի հետևյալ լեմման՝

Լեմմա 2.1.5: *Դիցուք երկու տարբեր ՝ամենաշատը k–րդ աստիճանի կորեր անցնում են $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր հանգույցներով: Այդ դեպքում ցանկացած $A \notin \mathcal{X}$ հանգույցի համար գոյություն կունենա k–րդ աստիճանի կոր, որն անցնում է $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր կետերով և A–ով:*

Այնուհետև ապացուցում ենք հետևյալը.

Թեորեմ 2.1.6 ([3]): *Դիցուք ունենք n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմությունը: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$–ի ցանկացած $N-4$ հանգույցների ենթաբազմությունով, անցնում է ամենաշատը մեկ $n-1$–րդ կարգի հանրահաշվական կոր: Ավելին, գոյություն ունի n–անկախ $N-5$ հանգույցների այնպիսի բազմություն, որի բոլոր հանգույցներով անցնում են մեկից ավելի $(n-1)$–րդ կարգի կորեր:*

Այս արդյունքի ընդհանրացումը կամայական աստիճանի կորերի վերաբերյալ կարելի է տեսնել [24], [25]–ում:

Այժմ ներկայացնենք Քելի–Բախարախի թեորեմը (տես [16], [28])՝ երկու կորերի հատ–ման կետերի բազմության անկախության մասին:

Թեորեմ 2.1.7: (Քելի–Բախարախ). *Դիցուք m և n աստիճանի ոչ պատիկի արտադրիչ–ներով երկու կորեր հատվում են ճիշտ mn կետերում: Այդ դեպքում հատման կետերի $\mathcal{X}$ բազմությունը $m+n-2$–անկախ է և էապես $m+n-3$–կախյալ է:*

Պարագրաֆ 2.2–ում սահմանվում են $\mathcal{N}_\ell$ և $\mathcal{X}_\ell$ բազմությունները, ինչպես նաև ներկայացվում է ատենախոսության արդյունքներից մեկը կապված 2–հանգույցանի ուղղի օգտագործման հետ:

Սահմանենք $\mathcal{X}$ բազմության $\mathcal{N}_\ell$ և $\mathcal{X}_\ell$ ենթաբազմությունները, որտեղ ℓ–ը ուղիղ է:

1. $\mathcal{X}_\ell$–ը $\mathcal{X}$ բազմության այն ենթաբազմությունն է, որի հանգույցները օգտագործում են ℓ ուղիղը;
2. $\mathcal{N}_\ell$–ը $\mathcal{X}$ բազմության այն ենթաբազմությունն է, որի հանգույցները չեն օգտագործում ℓ ուղիղը և ընկած չեն ℓ–ի վրա:

Նկատենք, որ՝

$$\mathcal{X}_\ell \cup \mathcal{N}_\ell = \mathcal{X} \setminus \ell \qquad (2.2.1)$$

Դիցուք ունենք n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմությունը և M մաքսիմալ ուղիղը: Պարզ է որ այդ դեպքում $\mathcal{X}\setminus M$–ը $n-1$–ճշգրիտ բազմություն է և ցանկացած $A \in \mathcal{X}\setminus M$ հանգույցի համար $p^*_{A,\mathcal{X}} = Mp^*_{A,\mathcal{X}\setminus M}$: **Թեորեմ 1.2.13**–ից հետևում է՝

$$\mathcal{X}_\ell \setminus M = (\mathcal{X}\setminus M)_\ell \qquad (2.2.2)$$

Որտեղ $\ell \neq M$ կամայական ուղիղ է:

$\mathcal{X}_\ell$ բազմության համար **Թեորեմ 2.1.6**–ից հետևում է

Թեորեմ 2.2.1: *Ցանկացած n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմության համար*՝

$$\mathcal{X}_\ell \leq 1, \text{ եթե } \ell\text{–ը } 2\text{–հանգույցանի ուղիղ է:} \qquad (2.2.3)$$

Այս արդյունքի ընդհանրացումը 3–հանգույցանի ուղիղների վերաբերյալ կարելի է տեսնել [25]–ում: Նշենք որ (2.2.3) արդյունքը, այն դեպքում երբ $\mathcal{X}$–ը GC_n բազմություն է, ավելի վաղ ապացուցվել է Քարնիսերի և Գասքայի կողմից ([12]):

Հետևյալ թեորեմը բնութագրում է $\mathcal{N}_\ell$ բազմության կարևոր հատկություն:

Թեորեմ 2.2.2 (Քարնիսեր, Գասքա, [13]): *Դիցուք ունենք n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմությունը և ℓ ուղիղը: Այդ դեպքում*՝

1. $\mathcal{N}_\ell = \emptyset$ *այն և միայն այն դեպքում, երբ* ℓ*–ը մաքսիմալ ուղիղ է,*
2. *եթե* $\mathcal{N}_\ell$*–ը դատարկ չէ, ապա էապես* $(n-1)$*–կախյալ է:*

Գլուխ 4–ում մենք հաճախակի օգտագործում ենք հետևյալ 2 լեմմաները ([11]): Նշենք, որ այս լեմմաները **Թեորեմ 4.4.1**–ի ապացույցի մի մաս է:

Լեմմա 2.2.3 (Քարնիսեր, Գասքա, [12]): *Դիցուք ունենք* n*–ճշգրիտ* $\mathcal{X}$ *բազմությունը և* ℓ *ուղիղը, այնպես որ* $|\ell \cap \mathcal{X}| \leq n$*: Ենթադրենք նաև, որ գոյություն ունի այնպիսի* M *մաքսիմալ ուղիղ, որ* $M \cap \ell \cap \mathcal{X} = \emptyset$*: Այդ դեպքում՝*

$$\mathcal{X}_\ell = (\mathcal{X} \backslash M)_\ell: \tag{2.2.4}$$

Եթե ℓ*–ը ճիշտ* n*–հանգույցանի ուղիղ է, ապա ունենք, նաև՝*

$$\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \backslash (\ell \cup M), \text{ որտեղից հետևում է, որ } \mathcal{X}_\ell\text{–ը } n-2\text{–կախյալ է և } |\mathcal{X}_\ell| = \binom{n}{2}:$$

Լեմմա 2.2.4 (Քարնիսեր, Գասքա [5]): *Դիցուք ունենք* n*–ճշգրիտ* $\mathcal{X}$ *բազմությունը և* ℓ *ուղիղը այնպես որ* $|\ell \cap \mathcal{X}| \leq n$*: Ենթադրենք նաև, որ գոյություն ունեն այնպիսի երկու* M', M'' *մաքսիմալ ուղիղներ, որ* $M' \cap M'' \cap \ell \in \mathcal{X}$*: Այդ դեպքում՝*

$$\mathcal{X}_\ell = (\mathcal{X}(M' \cup M''))_\ell: \tag{2.2.5}$$

Եթե ℓ*–ը ճիշտ* n*–հանգույցանի ուղիղ է, ապա ունենք, որ՝*

$$\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \backslash (\ell \cup M' \cup M''), \text{ որտեղից հետևում է, որ } \mathcal{X}_\ell\text{–ը } (n-3)\text{–կախյալ է}$$
$$\text{և } |\mathcal{X}_\ell| = \binom{n-1}{2}:$$

Գլուխ 3–ում ավելի մանրամասն կդիտարկենք Գլուխ 1–ում ձևակերպված **Վարկած 1.3.2**–ը: Վարկածը հաստատվել է մինչև $n \leq 5$ դեպքերի համար: $n = 2$ դեպքի համար վարկածը ակնհայտ է:

Դիցուք $\mathcal{X}$–ը 6 հանգույցներից բաղկացած GC_2 բազմություն է: Ըստ GM–վարկածի այդ բազմության մեջ կան 3 համազիծ հանգույցներ:

Պարագրաֆ 3.1–ում ապացուցում ենք GM–վարկածը $n = 3$ դեպքի համար:

Թեորեմ 3.1.1: *Դիցուք $\mathcal{X}$–ը 10 հանգույցներից բաղկացած GC_3 բազմություն է: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$–ում գոյություն ունեն 4 համագիծ հանգույցներ:*

Պարագրաֆ 3.2–ում ապացուցում ենք GM–վարկածը $n = 4$ դեպքի համար: Տրվում է նոր, պարզ ապացույց:

Թեորեմ 3.2.1: *Դիցուք $\mathcal{X}$–ը 15 հանգույցներից բաղկացած GC_4 բազմություն է: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$–ում գոյություն ունեն 5 համագիծ հանգույցներ:*

Կապացուցենք հետևյալ 2 լեմմանները, ի նկատի ունենալով, որ մաքսիմալ ուղիղ չկա:

Լեմմա 3.2.2: *Ցանկացած 2 կամ 3–հանգույցանի ուղիղ կարող է օգտագործվել ամենա–շատը մեկ հանգույցի կողմից:*

Լեմմա 3.2.3: *Ցանկացած 4–հանգույցանի ուղիղ կարող է օգտագործվել ամենաշատը երեք հանգույցի կողմից:*

Այնուհետև ցույց ենք տալիս, որ $\mathcal{X}$–ում չկան երկրորդային հանգույցներ, ինչպես նաև չկան $\mathcal{X}$–ի ճիշտ 3 հանգույցներով ուղիղներ:

Ֆիքսենք որևէ $A \in \mathcal{X}$ կետ և դիտարկենք A–ով ու $\mathcal{X}$ բազմության այլ հանգույցով (կամ հանգույցներով) անցնող ուղիղները: Նշանակենք $n_m(A)$–ով այն ուղիղների քանակը, որոնք անցնում են $\mathcal{X}$–ի ճիշտ m հանգույցներով՝ ներառյալ A–ն: Հաշվի առնելով այն փաստը, որ 5 հանգույցներով անցնող ուղիղ չունենք ստանում ենք.

$$1n_2(A) + 2n_3(A) + 3n_4(A) = |(\mathcal{X} \setminus \{A\})| = 14: \qquad (3.2.4)$$

(3.2.4) առնչության մեջ՝ A հանգույցով անցնող ուղիղների միջոցով հաշվում ենք ֆիքսված A հանգույցից բացի մնացած $\mathcal{X} \setminus \{A\}$ հանգույցների քանակը: $n_2(A)$–ի գործակիցը 1 է, քանի որ 2 հանգույցով (այդ թվում նաև A–ով) անցնող ուղղի վրա բացի A–ից կա միայն մեկ հանգույց, $n_3(A)$–ի գործակիցը 2 է, քանի որ 3 հանգույցով (այդ թվում նաև A–ով) անցնող ուղղի վրա բացի A–ից կան երկու հանգույցներ, նույն կերպ նաև $n_4(A)$–ն:

Օգտվելով (3.2.4) հավասարությունից ապացուցում ենք հետևյալ լեմման ([27]):

Լեմմա 3.2.4. *Դիցուք* $\mathcal{X}$ *–ը* GC_4 *բազմություն է՝ առանց մաքսիմալ ուղղի: Այդ դեպքում տեղի ունի.*

1. *Ոչ մի ուղիղ չի անցնում* $\mathcal{X}$ *բազմության ճիշտ երեք հանգույցներով,*
2. *Միևնույն հանգույցի կողմից օգտագործվող երկու ուղիղներ չեն հատվում* $\mathcal{X}$ *–ի հանգույցում:*

Վերոնշյալ **Լեմմա 3.2.4**–ի երկրորդ պնդումից ելնելով՝ ստանում ենք, որ $\mathcal{X}$–ում չկան երկրորդային հանգույցներ: Հետևաբար, ֆունդամենտալ բազմանդամների հնարավոր (3.2.1) ներկայացումները կստանան հետևյալ տեսքը.

$$p_A^* = \ell_{=4}\ell'_{=4}\ell''_{=4}\ell_{=2}, \quad (3.2.5)$$

$$p_A^* = \ell_{=4}\ell'_{=4}\ell_{=3}\ell'_{=3}: \quad (3.2.6)$$

Այնուհետև, օգտագործելով **Լեմմա 3.2.4**–ի պնդումներից առաջինը՝ ստանում ենք, որ $\mathcal{X}$–ի ոչ մի հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամ չի կարող ունենալ (3.2.6) ներ–կայացումը: Մնում է դիտարկենք ֆունդամենտալ բազմանդամի հնարավոր վերջին՝ (3.2.5) ներկայացումը:

Այնուհետև բացառելով (3.2.5)–ը ապացուցում ենք թեորեմը:

Նշենք, որ $n = 5$ դեպքը ապացուցվել է վերջերս [27]–ում, իսկ Գասքա–Մաեզթուի վար–կածի ընդհանրացումը մաքսիմալ կորերի համար կարելի է տեսնել [29]–ում:

Եվ վերջապես 4–րդ գլխում ներկայացնում են n–ճշգրիտ և GC_n բազմությունների նոր հատկություն: Ձևակերպում ենք նոր վարկած, և ապացուցում այն, որոշ կարևոր մաս–նավոր դեպքերում

Պարագրաֆ 4.1–ում ապացուցվում ատենախոսության արդյունքներից մեկը՝ n–ճշգրիտ բազմության n–հանգույցանի ուղիղների վերաբերյալ.

Թեորեմ 4.1.1 ([4]): *Դիցուք ունենք* n*–ճշգրիտ* $\mathcal{X}$ *բազմությունը և* ℓ *ուղիղը, որը պարու–նակում է ճիշտ* n *հանգույց* $\mathcal{X}$ *–ից: Այդ դեպքում տեղի ունենք՝*

1. $|\mathcal{X}_\ell| \le \binom{n}{2}$*;*
2. *Եթե* $|\mathcal{X}_\ell| \ge \binom{n-1}{2} + 1$, *ապա* $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n}{2}$*: Ավելին,* $\mathcal{X}_\ell$*–ը* $(n-2)$*–ճշգրիտ բազմություն է և* $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \backslash (\ell \cup M)$, *որտեղ* M*–ը մաքսիմալ ուղիղ է, այնպիսին, որ* $M \cap \ell \cap \mathcal{X} = \emptyset$*;*
3. *Եթե* $\binom{n-1}{2} \ge |\mathcal{X}_\ell| \ge \binom{n-2}{2} + 2$, *ապա* $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n-1}{2}$*: Ավելին,* $\mathcal{X}_\ell$*–ը* $(n-3)$*–ճշգրիտ բազմություն է և* $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \backslash (\ell \cup \beta)$, *որտեղ* β*–ն կոնիկ է, այնպիսին, որ* $\mathcal{N}_\ell = (\beta \backslash \ell) \cap \mathcal{X}$ *և* $|\mathcal{N}_\ell| = 2n$*: Բացի այդ* $2n$ *հանգույցներից կոնիկը կարող է պարունակել ամենաշատը 1 հանգույց, որը անհրաժեշտորեն պատկանում է* ℓ*–ին: Բացի այդ, եթե* β*–ը կոնիկը վերլուծելի է.* $\beta = \ell_1 \ell_2$, *ապա ունենք, որ* $|\ell_i \cap \mathcal{X} \backslash \ell| = n,\ i = 1,2$*:*

Պարագրաֆ 4.2–ում ապացուցվում է ատենախոսության արդյունքներից մեկը՝ n–ճշգրիտ բազմության $(n-1)$–հանգույցանի ուղիղների վերաբերյալ.

Թեորեմ 4.2.1 ([4]): *Դիցուք ունենք* n*–ճշգրիտ* $\mathcal{X}$ *բազմությունը և* ℓ *ուղիղը, որը պարունակում է ճիշտ* $n-1$ *հանգույց* $\mathcal{X}$*–ից: Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալը՝*

1. $|\mathcal{X}_\ell| \le \binom{n-1}{2}$*;*
2. *Եթե* $|\mathcal{X}_\ell| \ge \binom{n-2}{2} + 3$, *ապա* $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n-1}{2}$*: Ավելին,* $\mathcal{X}_\ell$*–ը* $(n-3)$*–ճշգրիտ բազմություն է և* $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \backslash (\ell \cup \beta)$, *որտեղ* β*–ն մաքսիմալ կոնիկ է, այնպիսին, որ* $\beta \cap \ell \cap \mathcal{X} = \emptyset$, *որտեղից հետևում է, որ* $\mathcal{N}_\ell = \beta \cap \mathcal{X}$ *և* $|\mathcal{N}_\ell| = 2n+1$*: Բացի այդ, եթե* β *կոնիկը վերլուծելի է.* $\beta = \ell_1 \ell_2$, *ապա* $\mathcal{N}_\ell$*–ի* $n+1$ *հանգույցները ընկած են 1 ուղղի, օրինակ* ℓ_1*–ի, վրա և մնացած* n *հանգույցները ընկած են* $\ell_2 \backslash \ell_1$ *վրա:*

Պարագրաֆ 4.3–ում ապացուցվում է ատենախոսության արդյունքներից մեկը՝ GC_n բազմության k–հանգույցանի ուղիղների վերաբերյալ.

Թեորեմ 4.3.1 ([4]): *Ենթադրենք, որ GM–վարկածը ճիշտ է* υ*–ն չգերազանցող բոլոր աստիճանների համար: Դիցուք* $\mathcal{X}$*–ը* GC_n *բազմություն է, որտեղ* $n \le \upsilon$, *և ունենք* ℓ *ուղիղը, որը օգտագործվում է առնվազն մեկ հանգույցի կողմից և որը պարունակում է ճիշտ* k *հանգույց* $\mathcal{X}$*–ից, որտեղ* $1 \le k \le n+1$*: Այդ դեպքում* $\mathcal{X}_\ell$*–ը* $k-2$*–անկախ բազ–*

մություն է: Ավելին յուրաքանչյուր $A \in \mathcal{X}_\ell$ հանգույց ունի $k-2$–ֆունդամենտալ բազ– մանդամը $\mathcal{X}_\ell$–ում, որը $\mathcal{X}$–ում A–ի n–ֆունդամենտալ բազմանդամի արտադրիչ է:

Հաջորդիվ կբերենք մի քանի հետևանքներ այն փաստից, որ $\mathcal{X}_\ell$–ը $k-2$–անկախ բազմություն է:

Հետևանք 4.3.2 ([4]): *Ենթադրենք, որ **Թեորեմ 4.3.1**–ի պայմանները տեղի ունեն: Այդ դեպքում ունենք՝*

1. $|\mathcal{X}_\ell| \le \binom{k}{2}$;
2. *$\mathcal{X}_\ell$–ը պարունակում է ամենաշատը $k-1$ համագիծ հանգույցներ;*
3. *Ցանկացած $m \le k-2$ կարգի q կորի համար ունենք, որ*

$$|\mathcal{X}_\ell \cap q| \le d(k-2, m):$$

Նկատենք, որ 2–րդ կետը 3–րդ կետի մասնավոր դեպք է, երբ $m = 1$: Նշենք, որ 1–ին և 2–րդ կետերը ապացուցվել են Քարնիսերի և Գասքայի կողմից (Թեորեմ 4.5):

Պարագրաֆ 4.4–ում ապացուցվում է ատենախոսության հիմնական արդյունքներից մեկը՝ GC_n բազմության n–հանգույցանի ուղիղների վերաբերյալ.

Թեորեմ 4.4.1 ([4]): *Ենթադրենք, որ GM–վարկածը ճիշտ է ν–ն չգերազանցող բոլոր աս– տիճանների համար: Դիցուք $\mathcal{X}$–ը GC_n բազմություն է, որտեղ $n \le \nu$, և ունենք ℓ ուղիղը, որը պարունակում է ճիշտ n հանգույց $\mathcal{X}$–ից: Այդ դեպքում ունենք, որ*

$$|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n}{2} \text{ կամ } \binom{n-1}{2}: \qquad (4.4.1)$$

Ավելին տեղի ունեն՝

1. *$|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n}{2}$ այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունի M մաքսիմալ ուղիղ՝ այնպիսին, որ $M \cap \ell \cap \mathcal{X} = \emptyset$: Այս դեպքում ունենք, որ $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \setminus (\ell \cup M)$: Ուստի $\mathcal{X}_\ell$–ը GC_{n-2} բազմություն է:*

2. $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n-1}{2}$ *այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունեն երկու* M', M'' *մաքսիմալ ուղիղներ՝ այնպիսին, որ* $M' \cap M'' \cap \ell \in \mathcal{X}$*: Այս դեպքում ունենք, որ* $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \setminus (\ell \cup M' \cup M'')$*: Ուստի* $\mathcal{X}_\ell$*–ը* GC_{n-3} *բազմություն է:*

Նկատենք, որ 2–րդ դեպքում $\ell \cap M''' \in \mathcal{X}$, որտեղ M'''–ը 3–րդ մաքսիմալ ուղիղն է, որը գոյություն ունի համաձայն **Թեորեմ 1.3.4**–ի: Հակառակ դեպքում կունենայինք 1–ին դեպքը և կստանայինք որ $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n}{2} \neq \binom{n-1}{2}$:

Սկզբից ենթադրում ենք, որ **Թեորեմ 4.4.1**–ը ճիշտ է և ապացուցում հետևյալը.

Հետևանք 4.4.2 ([4]): *Ենթադրենք տեղի ունի **Թեորեմ 4.4.1**–ի պայմանները: Այդ դեպքում ցանկացած* $M \in \mathcal{X}$ *մաքսիմալ ուղղի համար տեղի՝*

1. $M \cap \mathcal{X}_\ell = \emptyset$*, եթե* M*–ը բավարարում են հետևյալ պայմաններից մեկին*
   ա) $M \cap \ell \cap \mathcal{X} = \emptyset$*;*
   բ) գոյություն ունի մեկ այլ M' *մաքսիմալ ուղիղ, այնպիսին որ* $M \cap M' \cap \ell \in \mathcal{X}$*:*
2. *Եթե* M*–ը չի բավարարում ա) և բ) պայմաններին, ապա* $|M \cap \mathcal{X}_\ell| = s - 1$*, որտեղ* s*–ը որոշվում է* $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{s}{2}$ *պայմանից,* $s = n, n-1$*:*

Նկատառում 4.4.3: *Ենթադրենք, որ տեղի ունեն **Թեորեմ 4.4.1**–ի պայմանները և* $\mathcal{X}_\ell \neq \emptyset$*: Ենթադրենք նաև, որ* $\mathcal{X}$*–ի* M *մաքսիմալ ուղիղը հատում է* ℓ *ուղիղը* $\mathcal{X}$*–ի հանգույցում և* M*–ի ոչ մի հանգույց չի օգտագործում* ℓ *ուղիղը, կամ որ նույն է՝* $M \cap \mathcal{X}_\ell = \emptyset$*: Այդ դեպքում գոյություն ունի մեկ այլ* M' *մաքսիմալ ուղիղ, այնպիսին որ* $M \cap M' \cap \ell \in \mathcal{X}$ *և հետևաբար* M'*–ի ոչ մի հանգույց նույնպես չի օգտագործում* ℓ *ուղիղը:*

Պարագրաֆ 4.5–ում ապացուցվում է հիմնական թեորեմը՝ **Թեորեմ 4.4.1**–ը:

Նկատառում 4.5.1: *Ինչպես նշվել է, GM–վարկածը ապացուցված է* $n \leq 5$ *դեպքերի համար: Ուստի այս դեպքերում **Թեորեմ 4.4.1**–ից մենք կարող ենք հանել ենթադրությունը կապված GM–վարկածի ճիշտ լինելու վերաբերյալ:*

Պարագրաֆ 4.6–ում ձևակերպվում է վարկած GC_n բազմությունների k–հանգույցանի ուղիղների վերաբերյալ և այն ապացուցվում է որոշ կարևոր մասնավոր դեպքերում:

Վարկած 4.6.1 ([4]): *Ենթադրենք, որ GM–վարկածը ճիշտ է* υ *չգերազանցող բոլոր աստիճանների համար: Դիցուք* $\mathcal{X}$*–ը* GC_n *բազմություն է, որտեղ* $n \le \upsilon$, *և ունենք* k*–հանգույցանի* ℓ *ուղիղը,* $1 \le k \le n+1$*: Այդ դեպքում ունենք, որ*

$$|\mathcal{X}_\ell| = \binom{s}{2}, \text{ որտեղ } 2k-n-1 \le s \le k: \qquad (4.6.1)$$

Ավելին, $\mathcal{X}_\ell$*–ը* GC_{s-2} *բազմություն է և* $\mathcal{X}$*–ի ցանկացած* M *մաքսիմալ ուղղի համար տեղի ունեն՝*

1. $M \cap \mathcal{X}_\ell = \emptyset$ *եթե* M*–ը բավարարում է այս պայմաններից մեկին*
   (i) $M \cap \ell \cap \mathcal{X} = \emptyset$;
   (ii) *գոյություն մեկ այլ* M' *մաքսիմալ ուղիղ, այնպիսին որ* $M \cap M' \cap \ell \in \mathcal{X}$*:*
2. *Եթե* M*–ը չի բավարարում (i) և (ii) պայմաններին, ապա* $|M \cap \mathcal{X}_\ell| = s-1$, *որտեղ* s*–ը որոշվում է (4.6.1) հավասարությունից:*

Նկատենք, որ հաշվի առնելով **Հետևանք 1.2.14**–ը և **1.2.15**–ը, **Վարկած 4.6.1**–ը ճիշտ է, երբ ℓ–ը մաքսիմալ ուղիղ է: Համաձայն **Թեորեմ 4.4.1**–ի այն ճիշտ է նաև n–հանգույցանի ուղիղների համար: Նաև հեշտ է տեսնել, որ **Վարկած 4.6.1**–ը ճիշտ է Չանգ–Յաոյի ցանցի համար: Իսկապես այստեղ միակ օգտագործվող ուղիղները մաքսիմալ ուղիղներն են: Մնացած k–հանգույցանի ուղիղների համար ունենք, որ $2k-n-1 \le 0$, քանի որ յուրաքանչյուր հանգույցով անցնում է 2 մաքսիմալ ուղիղ: Ուստի այս ուղիղների համար տեղի ունի հավասարում (4.6.1)–ը և **Վարկած 4.6.1**–ի (ii) պնդումը $s=1$ պայմանով: Հաշվի առնելով **Լեմմա 2.2.3**–ը և **2.2.4**–ը, ստանում ենք, որ տեղի ունի նաև **Վարկած 4.6.1**–ի (i) պնդումը:

Թեորեմ 4.6.2 ([4]): ***Վարկած 4.6.1****–ը ճիշտ է Քարնիսեր–Գասքայի ցանցի համար: Ավելին ցանկացած* n, k *և* s *բնական թվերի համար, որոնք բավարարում են* $2k-n-1 \le s \le k$, *պայմանին, գոյություն ունի այնպիսի* $\mathcal{X}$ *Քարնիսերի–Գասքայի ցանց և* k*–հանգույցանի* ℓ *ուղիղ, որ* $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{s}{2}$*:*

Եվ վերջում ցույց ենք տալիս, որ **Վարկած 4.6.1**–ը ճիշտ է այն GC_n բազմությունների համար, որոնք պարունակում $\ge n$ մաքսիմալ ուղիղներ:

Փաստորեն ստացվում է, որ **Վարկած 4.6.1**–ը ճիշտ է հետևյալ մասնավոր դեպքերում՝

1. $k \geq n$,
2. GC_n բազմությունների համար, որոնք ունեն առնվազն n մաքսիմալ ուղիղ:

ԳԼՈՒԽ 1.

ՄԻՋԱՐԿՈՒՄ, ՃՇԳՐԻՏ ԵՎ ԱՆԿԱԽ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1.1 Միջարկում մեկ փոփոխականի բազմանդամներով

Նշանակենք π_n–ով մեկ փոփոխականի $\leq n$ աստիճանի իրական գործակիցներով հանրահաշվական բազմանդամների տարածությունը՝

$$\pi_n = \left\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i : | \ a_i \in R\right\}:$$

Դիտարկենք թվային առանցքի վրա իրարից տարբեր $x_i (i = 0,1, \dots, s)$ կետեր (հանգույցներ): Դիցուք տրված են $c_i \in R$, $i = 0,1, \dots, s$ ցանկացած արժեքներ: Լագ–րանժի միաչափ միաջարկման խնդիրը հետևյալն է. *Պահանջվում է գտնել այնպիսի $p \in \pi_n$ բազմանդամ, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝*

$$p(x_i) = c_i, \quad i = 0,1, \dots, s: \tag{1.1.1}$$

Այդպիսի $p \in \pi_n$ բազմանդամն անվանում են միջարկիչ բազմանդամ, կետերը՝ միջարկման հանգույցներ, իսկ (1.1.1) պայմանները՝ միջարկման պայմաններ:

(1.1.1)–ը իրենից ներկայացնում է գծային հանրահաշվական հավասարումների համա–կարգ, $s + 1$ հավասարումներով և $n + 1$ անհայտներով, որտեղ անհայտները $p \in \pi_n$ բազմանդամի գործակիցներն են:

Հեշտ է նկատել, որ համակարգի, հետևաբար և միջարկման խնդրի, միակորեն լուծե–լիության անհրաժեշտ պայմանն է՝

$$s = n: \tag{1.1.2}$$

Թեորեմ 1.1.1 (Լագրանժ): *Ցանկացած իրարից տարբեր $x_0, x_1, \dots, x_n$ հանգույցների և $c_0, c_1, \dots, c_n$ թվերի համար գոյություն ունի միակ $p \in \pi_n$ բազմանդամ այնպես, որ*

$$p(x_i) = c_i, \quad i = 0,1,\dots,n: \tag{1.1.3}$$

Հայտնի են Լագրանժի միջարկման խնդրի բացահայտ բանաձևով լուծման երկու հիմնարար սկզբունքներ՝ Լագրանժի և Նյուտոնի:

Լագրանժի սկզբունքով լուծման ստացման համար նախապես կառուցվում են Լագրանժի ֆունդամենտալ բազմանդամները:

Սահմանում 1.1.2: *Կասենք, որ $p_k^* \in \pi_n$ բազմանդամը x_k հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամ է π_n տարածությունում, եթե բավարարվում են հետևյալ պայմանները՝*

$$p(x_k) = \delta_{ik}, \; i = 0,1,\dots,n,$$

որտեղ δ_{ik} Կրոնոկերի սիմվոլն է:

Հիշեցնենք, որ $\delta_{ik} = 1$, եթե $i = k$ և 0 հակառակ դեպքում:

Պարզ է, որ օգտվելով ֆունդամենտալ բազմանդամներից, Լագրանժի միջարկման խնդրի միակ լուծումը կարելի է ներկայացնել հետևյալ բանաձևով՝

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i p_i^*(x): \tag{1.1.4}$$

Ֆունդամենտալ բազմանդամները կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$p_i^*(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}:$$

Այս ներկայացումից (1.1.4) Լագրանժի բանաձևը կլինի՝

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

Վերջում նշենք, որ հայտնի են միջարկման խնդրի լուծման Նյուտոնի մեթոդը, իսկ պատիկ հանգույցների դեպքում Հերմիթի մեթոդը:

Այսպիսով մեկ փոփոխականի դեպքում միջարկման խնդիրը ամբողջությամբ լուծված է:

Բազմաչափ բազմանդամային միջարկման տեսության կարևորագույն հարցերից է Լագրանժի և Նյուտոնի բանաձևերի ընդհանրացումը: Պարզվում է, որ այդ բանաձևերը բազմաչափ դեպքի համար անմիջականորեն ընդհանրացնելիս առաջ են գալիս մի շարք բարդություններ: Հիմնական պատճառը այն է, որ երկու և ավել փոփոխականի բազմանդամներով միջարկման խնդրի լուծելիությունը էապես կախված է ոչ միայն հանգույցների քանակից, այլ նաև նրանց երկրաչափական դիրքից: Մասնավորապես n–րդ աստիճանի բազմանդամներով երկչափ միջարկման խնդիրը հարթության վրայի հանգույցներով կլինի լուծելի այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ հանգույցները չեն գտնվում որևէ n–րդ կարգի հանրահաշվական կորի վրա (տես ստորև՝ **Թեորեմ 1.2.3**): Հետևաբար բազմաչափ միջարկման տեսության մեջ կարևորագույն հարցերից է միջարկման հանգույցների փոխդասավորության բնութագրումը, որոնց համապա–տասխան միջարկման խնդիրը լուծելի է:

1.2 Միջարկում երկու փոփոխականի բազմանդամներով

1.2.1 Ճշգրիտ բազմություններ:

Նշանակենք Π_n–ով երկու փոփոխականի $\leq n$ աստիճանի իրական գործակիցներով բազմանդամների տարածությունը.

$$\Pi_n = \left\{ \sum_{i+j\leq n} a_{ij} x^i y^j : | \, a_{ij} \in R \right\}:$$

Ունենք որ

$$N \coloneqq dim\Pi_n = \binom{n+2}{2}: \qquad (1.2.1)$$

Դիտարկենք s կետերի (հանգույցների) հետևյալ բազմությունը՝

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_s = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_s, y_s)\}:$$

$p \in \Pi_n$ բազմանդամի գտնելու խնդիրը, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

$$p(x_i, y_i) = c_i, \qquad i = 1,2, \ldots, s \tag{1.2.2}$$

կոչվում է Լագրանժի միջարկման խնդիր:

Սահմանում 1.2.1: *$\mathcal{X}_s$ հանգույցների բազմությունը կոչվում է n–ճշգրիտ, եթե ցան–կացած $c_1, \ldots, c_s$ թվերի համար գոյություն ունի (1.2.2) պայմաններին բավարարող միակ $p \in \Pi_n$ բազմանդամ:*

Նկատենք, որ ինչպես և միաչափ դեպքում, միջարկման (1.2.2) պայմանները հանգում են N անհայտներով s գծային հանրահաշվական հավասարումների հետևյալ համա–կարգին

$$\sum_{i+j \le n} a_{ij} x_k^i y_k^j = c_k, \quad k = 1,2, \ldots, s,$$

որտեղ անհայտները p բազմանդամի գործակիցներն են՝ a_{ij}: Հետևաբար $\mathcal{X}_s$ բազ–մության n–ճշգրտության անհրաժեշտ պայմանն է՝

$$|\mathcal{X}_s| = s = N = dim\Pi_n: \tag{1.2.3}$$

Այսուհետև երբ դիտարկենք ճշգրիտ բազմություն, կենթադրենք, որ տեղի ունի (1.2.3) պայմանը՝ $\mathcal{X} = \mathcal{X}_N$:

Ի տարբերություն միաչափ դեպքի, բազմաչափ միջարկման խնդրի միակորեն լուծե–լիության համար միայն (1.2.3) պայմանը բավարար չէ: Դիտարկենք մի օրինակ: Դիցուք ունենք միջարկման խնդիր $\mathcal{X}_1 = \{(0,1), (0,2), (0,3)\}$ հանգույցների բազմությունով և $\Pi_1 = \{a_{00} + a_{10}x + a_{01}y \mid a_{00}, a_{10}, a_{01} \in R\}$ բազմանդամային տարածության համար: Միջարկման (1.2.2) պայմանները կգրվեն հետևյալ տեսքով.

$$a_{00} + a_{01} = c_1,$$

$$a_{00} + 2a_{01} = c_2,$$

$$a_{00} + 3a_{01} = c_3:$$

Քանի որ a_{10}–ի գործակիցն ամեն տեղ զրո է, մենք ստանում ենք ոչ թե 3 անհայտով 3 հավասարումներ, այլ 2 անհայտով 3 հավասարումներ, հետևաբար այս դեպքում միջարկման խնդիրը նշված հանգույցների բազմությամբ ճշգրիտ չէ: Այժմ դիտարկենք Π_1–ով և $\mathcal{X}_2 = \{(1,1), (0,1), (1,0)\}$ հանգույցներով միջարկման խնդիր, որի համար (1.2.2) պայմաններն ունեն հետևյալ տեսքը.

$$a_{00} + a_{10} + a_{01} = c_1,$$

$$a_{00} + a_{01} = c_2,$$

$$a_{00} + a_{10} = c_3:$$

Ակնհայտ է, որ այսպիսի հանգույցների բազմության ընտրությամբ ունենք ճշգրտու–թյուն:

Այս օրինակներից հետևում է, որ բազմաչափ միջարկման համար բացի հանգույցների քանակի սահմանափակումից, պետք են նաև այլ պայմաններ՝ խնդրի միակորեն լուծե–լիությունն ապահովելու համար: Վերը նշված օրինակում 3 հանգույցները չպետք է լինեն համագիծ, կամ որ նույնն է հանգույցները չպետք է գտնվեն 1–ին կարգի կորի վրա:

Թեորեմ 1.2.2: *$\mathcal{X}_N$ հանգույցների բազմությունը՝ $|\mathcal{X}_N| = N = \binom{n+2}{2}$ հզորությամբ n–ճշգրիտ է այն և միայն այն դեպքում, եթե ցանկացած $p \in \Pi_n$ բազմանդամի համար տեղի ունի հետևյալ առնչությունը՝*

$$p(x_i, y_i) = 0, \;\; i = 1,2, \dots, N \quad \Longrightarrow \quad p \equiv 0$$

Այստեղից ստանում ենք.

Թեորեմ 1.2.3: *$\mathcal{X}_N$ հանգույցների բազմությունը՝ $|\mathcal{X}_N| = N = \binom{n+2}{2}$ հզորությամբ կլինի ոչ n–ճշգրիտ այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի $p \in \Pi_n$, $p \neq 0$ բազմանդամ, այնպիսին որ*

$$p(x_i, y_i) = 0, \qquad i = 1,2, \dots, N:$$

Մենք կօգտագործենք նույն նշանակումը $p(x,y)=0$ հավասարումով բնութագրվող հանրահաշվական կորի և $p \in \Pi_k$ բազմանդամի համար: Ուղիղները և դրանց համապատասխան առաջին աստիճանի բազմանդամները կնշանակենք ℓ–ով:

Նշենք, որ ցանկացած $s<N$ կետերի համար գոյություն ունի $\leq n$ աստիճանի հանրահաշվական կոր, որն անցնում է այդ բոլոր հանգույցներով: Եվ իսկապես, համապատասխան համասեռ գծային համակարգը կունենա N անհայտ և s հավասարում, որն էլ նշանակում է, որ համակարգը ունի ոչ զրոյական լուծում: Այս փաստից, ինչպես նաև **Թեորեմ 1.2.3**–ից, ստանում ենք *երկչափ բազմանդամային միջարկման ճշգրտության երկրաչափական մեկնաբանությունը.*

$\mathcal{X}_N$ հանգույցների բազմությունը կլինի ոչ n–ճշգրիտ այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի n աստիճանի հանրահաշվական կոր, որը անցնում է $\mathcal{X}_N$–ի բոլոր հան–գույցներով:

Լեմմա 1.2.4 ([22]): *Դիցուք տրված է* n*–ճշգրիտ* $\mathcal{X}_N=\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^N$ *բազմությունը: Այդ դեպքում գոյություն ունի* ε *դրական թիվ այնպիսին, որ ցանկացած*

$$\mathcal{X}_N'=\{(x_i',y_i')\}_{i=1}^N$$

բազմություն, որտեղ հեռավորությունը համապատասխան (x_i',y_i') *և* (x_i,y_i) *հան–գույցների միջև փոքր է* ε*–ից բոլոր* i*–երի համար, ևս* n*–ճշգրիտ է:*

1.2.2 Անկախություն և կախյալություն

Սահմանում 1.2.5: $p \in \Pi_n$ *բազմանդամը կոչվում է* $A=(x_k,y_k)\in X_s$ *հանգույցի* n*–ֆունդամենտալ բազմանդամ, եթե տեղի ունեն*

$$p(x_i,y_i)=\delta_{ik}, \qquad i=1,2,\dots,s$$

հավասարությունները, որտեղ δ_{ik} *Կրոնեկերի սիմվոլն է:*

Մենք կնշանակենք $A \in \mathcal{X}_s$ հանգույցի n–ֆունդամենտալ բազմանդամը p_A^*–ով կամ $p_{A,\mathcal{X}_s}^*$–ով: Երբեմն ֆունդամենտալ բազմանդամը անվանում են նաև այն բազմանդամը, որը 0 է բոլոր հանգույցներում բացի մեկից:

Սահմանում 1.2.6: *$\mathcal{X}$ բազմությունը կոչվում է n–անկախ, եթե նրա բոլոր հանգույցները ունեն n–ֆունդամենտալ բազմանդամ: Հակառակ դեպքում $\mathcal{X}$–ը կոչվում է n–կախյալ:*

Պարզ է, որ ֆունդամենտալ բազմանդամները գծորեն անկախ են: Հետևաբար n–անկախության անհրաժեշտ պայմանն է՝ $|\mathcal{X}| \leq N$:

Դիտարկենք n–անկախ $\mathcal{X}$ բազմությունը: Օգտագործելով Լագրանժի հետևյալ բանաձևը՝

$$p = \sum_{A \in \mathcal{X}} c_A p_{A,\mathcal{X}}^*$$

Կստանանք (1.2.2) պայմաններին բավարարող $p \in \Pi_n$ բազմանդամը:
Այստեղից մենք կարող ենք տալ n–անկախության հետևյալ բնութագիրը.
$\mathcal{X} = \mathcal{X}_s$ բազմությունը n–անկախ է այն և միայն այն դեպքում երբ (1.2.2) միջարկման խնդիրը լուծելի է: Սա նշանակում է, որ ցանկացած $c_1, \ldots, c_s$ թվերի համար գոյություն ունի (1.2.2) պայմաններին բավարարող (*ոչ անհրաժեշտաբար միակ*) $p \in \Pi_n$ բազմանդամ:

Հաջորդ երկու թեորեմները բնութագրում են n–անկախ բազմությունները, որպես n–ճշգրիտ բազմության ենթաբազմություն:

Թեորեմ 1.2.7 ([28]): *Ցանկացած n–անկախ $\mathcal{X}_s$ բազմություն $s < N$ հզորությամբ կարելի է ընդլայնել մինչև n–ճշգրիտ բազմություն:*

Թեորեմ 1.2.8: *$\mathcal{X}_N$ բազմությունը n–ճշգրիտ է այն և միայն այն դեպքում, եթե n–անկախ է:*

Այժմ դիտարկենք n–կախյալ $\mathcal{X}$ բազմությունը: Այս դեպքում ինչ–որ (x_{i_0}, y_{i_0}) հանգույց չունի n–ֆունդամենտալ բազմանդամ: Սա նշանակում է, որ ցանկացած $p \in \Pi_n$ բազմանդամի համար տեղի ունի հետևյալ առնչությունը.

$$p(x_i, y_i) = 0, i \in \{1,2,\dots,s\}\backslash\{i_0\} \quad \Rightarrow \quad p\left(x_{i_0}, y_{i_0}\right) = 0$$

Ատենախոսության մեջ մենք գործ կունենանք n–կախյալ բազմության ավելի խիստ տարբերակի հետ:

Սահմանում 1.2.9: *$\mathcal{X}$ բազմությունը կոչվում է էապես n–կախյալ, եթե նրա ոչ մի հանգույց չունի n–ֆունդամենտալ բազմանդամ:*

Հաջորդիվ ներկայացնենք մի պարզ նկատառում, որը կօգտագործենք գլուխ 4–ում:

Նկատառում 1.2.10: *Դիցուք ունենք $\mathcal{X}$ էապես n–կախյալ բազմությունը և $q \in \Pi_k, k \le n$ հանրահաշվական կորը: Այդ դեպքում $\mathcal{X}' \coloneqq \mathcal{X}\backslash q$ ենթաբազմությունը էապես $(n-k)$–կախյալ է, եթե իհարկե $\mathcal{X}' \neq \emptyset$:*

Ապացույց: Ենթադրենք հակառակը, որ $A \in \mathcal{X}'$ ունի $n-k$–ֆունդամենտալ բազմանդամ՝ $r \in \Pi_{n-k}$: Այդ դեպքում $qr \in \Pi_n$ բազմանդամը կլինի A–ի n–ֆունդամենտալ բազմանդամը $\mathcal{X}$–ում, ինչը հակասում է $\mathcal{X}$–ի էապես n–կախյալ լինելուն: □

Ֆունդամենտալ բազմանդամները կարող են լինել նաև վերածելի, այսինքն ներկայացվեն ավելի ցածր կարգի բազմանդամների արտադրյալի տեսքով:

Սահմանում 1.2.11: *Տրված է n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմությունը: Կասենք, որ $A \in \mathcal{X}$ հանգույցը օգտագործում է $q \in \Pi_k$ կորը, եթե q–ն $p^*_{A,\mathcal{X}}$ ֆունդամենտալ բազմանդամի բաժանարար է.*

$$p^*_{A,\mathcal{X}} = qr, \quad \text{որտեղ } r \in \Pi_{n-k}:$$

Ճշգրիտ բազմության ֆունդամենտալ բազմանդամների մի հատկություն ձևակերպենք լեմմայի տեսքով.

Լեմմա 1.2.12: *Դիցուք $\mathcal{X}$ բազմությունը n–ճշգրիտ է: Այդ դեպքում ցանկացած $A \in \mathcal{X}$ հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամ ճիշտ n–րդ աստիճանի բազմանդամ է՝ $\deg p^*_A = n$, և այն չի կարող ունենալ պատիկ արտադրիչներ:*

Եվ իրոք, եթե տանենք $A \in \mathcal{X}$ հանգույցով կամայական ℓ ուղիղ և ենթադրենք հակառակը՝ $\deg p^*_A < n$, ապա $(p^*_A \cdot \ell) \in \Pi_n$ բազմանդամը կզրոյանա $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր

հանգույցներում, որը ըստ **Թեորեմ 1.2.3**–ի հակասում է $\mathcal{X}$ բազմության ճշգրտությանը: Իսկ եթե p_A^* բազմանդամը ունենա պատիկ արտադրիչներ, ապա դրանք դեն նետելով՝ կստանանք նախորդ դեպքը:

Սահմանում 1.2.11–ից հետաքրքրություն է առաջանում, թե քանի հանգույց պետք է պարունակի q կորը, որպեսզի կարողանանք ասել, որ մնացած հանգույցները այնպայ–մանորեն օգտագործում են այն:

Թեորեմ 1.2.13: *Դիցուք ունենք* ℓ *ուղիղը: Այդ դեպքում ցանկացած* $p \in \Pi_n$ *բազմանդամի համար տեղի ունեն հետևյալ դրույթները.*

1. *Եթե* p *բազմանդամը 0 է* ℓ*–ի* $n+1$ *կետերում, ապա այն 0 է ամբողջ* ℓ *ուղղի վրա,*
2. *Եթե* p *բազմանդամը 0 է* ℓ *ուղղի վրա, ապա*

$$p = \ell r, \quad \text{որտեղ } r \in \Pi_{n-1}:$$

Ամբողջականության համար ներկայացնենք թեորեմի ապացույցը:

Ապացույց: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ ℓ ուղղի հավասարումն է՝

$$y = kx + b:$$

Դիտարկենք հետևյալ բազմանդամը՝

$$q(x) = p(x, kx + b):$$

Պարզ է, որ վերջինս ոչ ավելի քան n աստիճանի՝ մի փոփոխականի բազմանդամ է: Նկատենք, որ

$$p(x_i, y_i) = 0, \ \text{ որտեղ } (x_i, y_i) \in \ell, \ i = 0, \dots, n,$$

պայմաններից հետևում է, որ

$$q(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n:$$

Օգտվելով Բեզուի հայտնի թեորեմից, որ եթե n աստիճանի բազմանդամը ունի $n+1$ արմատ, ապա այն նույնաբար զրո է, կստանանք, որ

$$q(x) \equiv 0, \text{ կամ որ նույն է՝ } p|_{\ell} = 0:$$

Անցնենք 2–րդ դրույթի ապացույցին: Ունենք որ

$$p(x, kx+b) \equiv 0:$$

Դիցուք

$$p(x,y) = \sum_{i+j \le n} a_{ij} x^i y^j,$$

որտեղից ստանում ենք

$$|\mathcal{X}_s| p(x,y) = p(x,y) - p(x,kx+b) = \sum_{i+j \le n} a_{ij} x^i [y^j - (kx+b)^j]: \qquad (1.2.4)$$

Վերջինիս փակագծերում գրված արտահայտության համար կիրառելով հետևյալ նույնությունը՝

$$\lambda^k - \mu^k = (\lambda - \mu) \sum_{i=0}^{k} \lambda^i \mu^{k-i},$$

կստանանք, որ (1.2.4)–ում քառակուսի փակագծերում գրվածը հավասար է 0–ի, երբ $j = 0$, և բաժանվում է $(y - (kx+b))$–ի վրա, երբ $j \ge 1$: □

Այս թեորեմի ընդհանրացված տարբերակին(պատիկ հանգույցների դեպքում) կարելի է ծանոթանալ [22]–ում:

Այս թեորեմից ստանում ենք հետևյալ հետևանքները.

Հետևանք 1.2.14: $n+2$ *համազիծ հանգույցներից բաղկացած ցանկացած բազմություն էապես* n*–կախյալ է:*

Հետևանք 1.2.15: *Դիցուք $\mathcal{X}$ –ը n–ճշգրիտ բազմություն է: Այդ դեպքում տեղի ունեն հետևյալ պնդումները՝*

1. *Ամենաշատը $n+1$ հանգույցներ կարող են լինել համագիծ,*
2. *$\mathcal{X}$ –ից $n+1$ հանգույցներ պարունակող ℓ ուղիղը օգտագործվում է $\mathcal{X}\setminus\ell$ բազմության բոլոր հանգույցների կողմից.*

Հաշվի առնելով այս ամենը՝ n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմության $n+1$ հանգույցներ պարու– նակող ℓ ուղիղը անվանում են մաքսիմալ ուղիղ: Հեշտությամբ կարելի է ապացուցել մաքսիմալ ուղիղների վերաբերյալ հետևյալ 2 հատկությունները՝

Հետևանք 1.2.16: *Դիցուք $\mathcal{X}$ –ը n–ճշգրիտ բազմություն է: Այդ դեպքում տեղի ունեն՝*

1. *$\mathcal{X}$ –ի ցանկացած 2 մաքսիմալ ուղիղ հատվում են $\mathcal{X}$ –ի հանգույցում,*
2. *$\mathcal{X}$ –ի ցանկացած 3 մաքսիմալ ուղիղ չեն կարող հատվել մեկ կետում:*

Ապացույց: Սկսենք 1–ին կետից: Ենթադրենք հակառակը, որ 2 մաքսիմալ ուղիղ չեն հատվում: Դիտարկենք այդ մաքսիմալ ուղիղներից որևէ մեկ հանգույց: Երկու անգամ կիրառելով **Թեորեմ 1.2.13**–ը կստանանք, որ այդ հանգույցի ֆունդամենտալ բազ– մանդամը 2 մաքսիմալ ուղիղներն էլ պարունակում է արտադրիչ և հետևաբար զրոյա– նում է նաև այդ հանգույցում, ինչը հակասություն է: Համանմանորեն ապացուցվում է նաև 2–րդ կետը: □

Հետևաբար n–ճշգրիտ բազմության մաքսիմալ ուղիղները գտնվում են ընհանուր դրության մեջ, այսինքն՝ ոչ մի երկուսը զուգահեռ չեն և ոչ մի երեքը չեն հատվում մեկ կետում: Հաշվի առնելով (1.2.1) հավասարությունը, կարող ենք ասել, որ n–ճշգրիտ բազ–մությունը ամենաշատը կարող է պարունակել $n+2$ մաքսիմալ ուղիղ:

Եվ վերջին հետևանքը, որը բխում է **Թեորեմ 1.2.13**–ից՝

Հետևանք 1.2.17: *Դիտարկենք m ուղիղներ՝ $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m$, որտեղ $m \le n$ և $(n+1)+n+\cdots+(n+2-m)$ հանգույցների այնպիսի $\mathcal{X}$ բազմություն, որի*

$$n+2-k \text{ հանգույցներ պատկանում } \ell_k \setminus \cup_{j=1}^{k-1} \ell_j\,,\ k=1,\ldots,m:$$

Այդ դեպքում $\mathcal{X}$ –ի հանգույցներում զրոյացող ցանկացած $p \in \Pi_n$ բազմանդամի համար տեղի ունի

$$p = \ell_1 \dots \ell_m q, \quad \text{որտեղ } q \in \Pi_{n-m}:$$

Այժմ բերենք անկախության և կախյալության վերաբերյալ մի քանի արդյունքներ:

Սկենք Սևերի հետևյալ պարզ, բայց կարևոր արդյունքից.

Թեորեմ 1.2.18 (Սևերի [15]): *Ամենաշատը* $n+1$ *հանգույց պարունակող ցանկացած բազմություն* n*–անկախ է:*

Իսկապես: Դիցուք $\mathcal{X}$–ը բազմություն է, որը պարունակում է ամենաշատը $n+1$ հանգույց: Ֆիքսենք, որևէ $A \in \mathcal{X}$ հանգույց: Մնացած հանգույցներով տանենք մեկական ուղիղ, որը չի անցնում A հանգույցով: Ստացված ուղիղների արտադրյալը կլինի $A \in \mathcal{X}$ հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամը:

Հաջորդիվ մենք կդիտարկենք ամենաշատը $2n+1$ հանգույց պարունակող բազմությունները

Թեորեմ 1.2.19 (Էյսենբադ, Գրին, Հարիս [16]): *Ամենաշատը* $2n+1$ *հանգույց պարունակող ցանկացած բազմություն* n*–անկախ է այն և միայն այն դեպքում երբ դրանցից ոչ մի* $n+2$*–ը համագիծ չեն:*

Այս շարքի երրորդ արդյունքը հետևյալն է.

Թեորեմ 1.2.20 (Հակոբյան, Մալինյան [18]): *Ամենաշատը* $3n-1$ *հանգույց պարունակող ցանկացած բազմություն* n*–անկախ է այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունեն հետևյալ երկու պայմանները՝*

1. *ոչ մի* $n+2$ *հանգույցներ համագիծ չեն,*
2. *ոչ մի* $2n+2$ *հանգույցներ չեն գտնվում 2 կարգի կորի վրա:*

Այս թեորեմների ընդհանրացումների մասին տրված են [17], [18] և [19] աշխատանքներում:

1.3 GC_n բազմություններ: Գասքա–Մաեզթուի վարկածը

Դիտարկենք n–ճշգրիտ բազմության հատուկ դեպք, որը կոչվում GC_n բազմություն:

Սահմանում 1.3.1 (Չանգ, Յաո [14]): *n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմությունը կոչվում է GC_n բազ– մություն, եթե յուրաքանչյուր $A \in \mathcal{X}$–ի հանգույցի n–ֆունդամենտալ բազմանդամը վերլուծվում է n գծային արտադրիչների:*

Այլ բառերով GC_n բազմությունը այն բազմություն է, որի յուրաքանչյուր հանգույց օգտագործում է ճիշտ n ուղիղ: Այժմ մենք կարող ենք ներկայացնել Գասքա–Մաեզթուի վարկածը որը կարճ անվանում են GM–վարկած:

Վարկած 1.3.2 (Գասքա, Մաեզթու [20]): *Ցանկացած GC_n բազմություն պարունակում է $n + 1$ համագիծ հանգույց:*

GM–վարկածը պնդում է, որ ցանկացած GC_n բազմություն պարունակում է մաքսիմալ ուղիղ:

Վարկածի մասին ավելի մանրամասն կդիտարկենք 3–րդ գլխում:

Լեմմա 1.3.3 ([26]): *Դիցուք $\mathcal{X}$–ը GC_n բազմություն է: Այդ դեպքում յուրաքանչյուր հանգույցի համար գոյություն ունի միակ n ուղիղների բազմություն, պարունակող մնացած հանգույցները. մասնավորապես այդ ուղիղներից յուրաքանչյուրը անցնում է առնվազն երկու հանգույցով:*

Հաջորդիվ մենք կօգտագործենք GM–վարկածից բխող Քարնիսերի և Գասքայի կողմից ստացվող հետևյալ կարևոր արդյունքը

Թեորեմ 1.3.4 (Քարնիսեր, Գասքա [12]): *Եթե Գասքա–Մաեզթուի վարկածը ճիշտ է, ապա ցանկացած GC_n բազմություն պարունակում է ամենաքիչը 3 մաքսիմալ ուղիղ:*

Այստեղից հետևում է, որ n–ճշգրիտ բազմության յուրաքանչյուր հանգույց օգտագոր– ծում է մաքսիմալ ուղիղ:

1.4 n–ճշգրիտ և GC_n բազմության օրինակներ:

Կդիտարկենք հետևյալ 4 կոնստրուկցիաները՝ Բերզոլարի–Ռադոնի կոնստրուկ– ցիա, Նյուտոնի ցանց, Չանգ–Յաոյի ցանց և Քարնիսեր–Գասքայի ցանց: Առաջինը n–ճշգրիտ բազմության օրինակ է, իսկ մյուս 3–ը՝ GC_n բազմության:

1.4.1 Բերզոլարի–Ռադոնի կոնստրուկցիա

Սահմանենք Բերզոլարի [6] և Ռադոնի [7] կողմից ներմուծված կոնստրուկցիան

Սահմանում 1.4.1: *Կասենք, որ* $N = 1 + 2 + \cdots + (n+1)$ *հանգույցներ պարունակող* $\mathcal{X}$ *բազմությունը բավարարում է Բերզոլարի–Ռադոնի կոնստրուկցիային կամ* BR_n *բազմություն է, եթե գոյություն ունեն* $n+1$ *ուղիղներ* $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{n+1}$, *այնպես որ՝*

$$\begin{aligned} &\ell_1\text{–ը պարունակում է } n+1 \text{ հանգույց } \mathcal{X}\text{–ից,} \\ &\ell_2 \backslash \ell_1 \text{ պարունակում է } n \text{ հանգույց } \mathcal{X}\text{–ից,} \\ &\vdots \\ &\ell_{n+1} \backslash \cup_{i=1}^{n} \ell_i \text{ պարունակում է 1 հանգույց } \mathcal{X}\text{–ից:} \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

Թեորեմ 1.4.2: *Բերզոլարի–Ռադոնի կոնստրուկցիայով բազմությունը* n*–ճշգրիտ է:*

Ապացույց: Դիցուք $\mathcal{X}$–ը BR_n բազմություն է, այսինքն գոյություն ունեն (1.4.1) պայմաններին բավարարող $\ell_1, \dots, \ell_{n+1}$ ուղիղներ: Դիտարկենք որևէ $p \in \Pi_n$ բազմանդամ, որը զրոյանում է $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր հանգույցներում: Քանի որ p–ն զրոյանում է ℓ_1–ի $n+1$ հանգույցներում, ապա, ըստ **Թեորեմ 1.2.13**–ի, տեղի ունի

$$p = \ell_1 r_1, \quad \text{որտեղ } r_1 \in \Pi_{n-1}:$$

Այնուհետև, p–ն զրոյանում է ℓ_2–ի n կետերում և ըստ (1.4.1) պայմանների, դրանք չեն գտնվում ℓ_1–ի վրա: Հետևաբար $r_1 \in \Pi_{n-1}$ բազմադամի համար ըստ **Թեորեմ 1.2.13**–ի կստանանք՝

$$r_1 = \ell_2 r_2, \quad \text{որտեղ } r_2 \in \Pi_{n-2}:$$

Ուստի

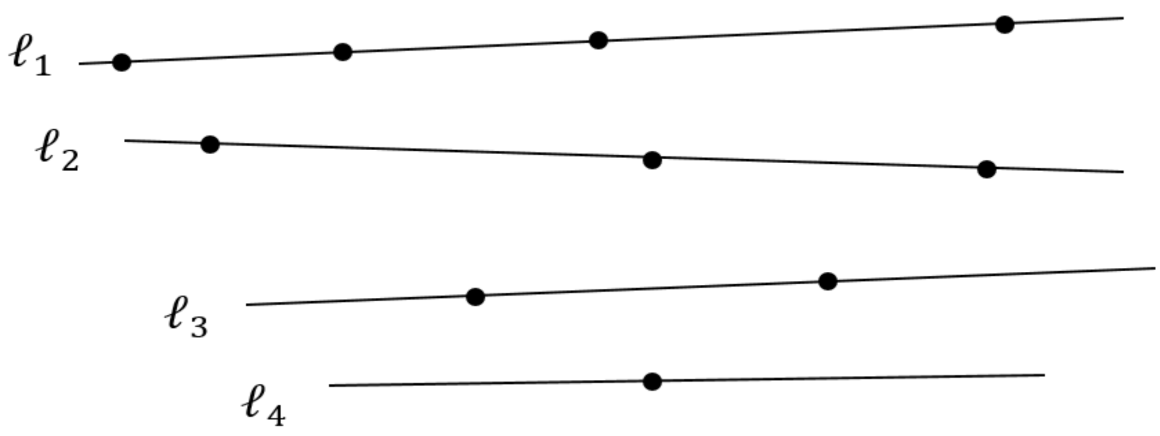
$$p = \ell_1 \ell_2 r_2:$$

Շարունակելով նույն դատողությունները՝ ի վերջո կստանանք

$$p = \ell_1 \ell_2 \dots \ell_n r_n\,, \qquad \text{որտեղ } r_n \in \Pi_0\text{:}$$

այսինքն՝ r_n–ը հաստատուն է: Քանի որ $\mathcal{X}$–ի վերջին հանգույցը չի պատկանում $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ ուղիղներից ոչ մեկին, հետևաբար այդ հանգույցում p–ի զրոյանալուց հետևում է, որ $r_n = 0$, և ուրեմն $p \equiv 0$: Հաշվի առնելով **Թեորեմ 1.2.2**–ը՝ ստանում ենք, որ $\mathcal{X}$–ը n–ճշգրիտ է: □

Նկատենք, որ Գասքա–Մաեզթուի վարկածը համարժեք է այն պնդմանը, որ ցանկացած GC_n բազմություն ունի Բերզոլարի–Ռադոնի կոնստրուկցիա: *Գծագիր 1.4.1*–ում բերված է Բերզոլարի–Ռադոնի կոնստրուկցիայի օրինակ:

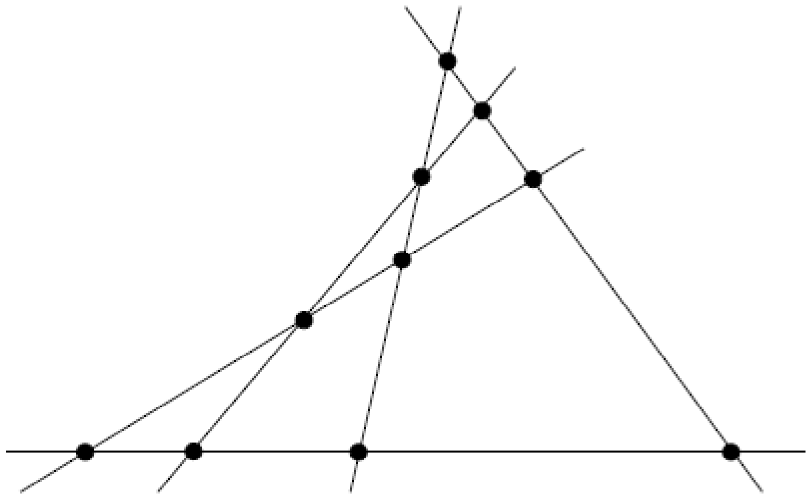


Գծագիր 1.4.1: Բերզոլարի–Ռադոնի կոնստրուկցիա ($n = 3$)

1.4.2 Չանգ–Յաոյի բնական ցանց

Դիտարկենք ընդհանուր դրության մեջ գտնվող $n + 2$ ուղիղների $\mathcal{L}$ բազմությունը: Այդ ուղիղների հատման կետերի $\mathcal{X}$ բազմությունը կոչվում է Չանգ–Յաոյի ցանց կամ բնական ցանց: Պարզ է որ $|\mathcal{X}| = \binom{n+2}{2}$ և $\mathcal{L}$–ի ուղիղները հանդիսանում են մաքսիմալ ուղիղներ: Յուրաքանչյուր հանգույց հանդիսանում է ճիշտ 2 մաքսիմալ ուղիղների հատման կետ և չի պատկանում մնացած n ուղիղներին: Ավելին՝ այդ n ուղիղների

արտադրյալը հանդիսանում է այդ կետի ֆունդամենտալ բազմանդամը: Ցանկացած Չանգ–Յաոյի ցանց բնութագրվում է, որպես $n+2$ մաքսիմալ ուղիղ պարունակող GC_n բազմություն: Ինչպես նշվել է ավելի վաղ գոյություն չունեն $n+2$ մաքսիմալ ուղիղ–ներից ավելին պարունակող n–ճշգրիտ բազմություններ: *Գծապիր 1.4.2*–ում բերված է Չանգ–Յաոյի ցանցի օրինակ:



Գծապիր 1.4.2: Չանգ–Յաոյի բնական ցանց ($n=3$)

1.4.3 Նյուտոնի ցանց

Նյուտոնի ցանցը կամ այսպես կոչված հիմնական ցանցը հանդիսանում է GC_n պայմանին բավարարող մեկ այլ ցանցի օրինակ: Դիցուք ունենք՝

$$\mathcal{X}=\{(j,k)\in Z_+^2: \quad j+k\le n\}$$

հանգույցների բազմությունը: Դիտարկենք ուղիղների երեք ընտանիքներ՝ $\ell_k^{(1)}, \ell_k^{(2)}$ և $\ell_k^{(3)}, k=0,\dots,n,$ որտեղ $\ell_k^{(1)}$ ուղիղներից յուրաքանչյուրը տրվում է $x=k$ հավասարումով, $\ell_k^{(2)}$–ը՝ $y=k$ հավասարումով և $\ell_k^{(3)}$–ը՝ $x+y=k$ հավասարումով: Պարզ է որ $\mathcal{X}$ բազմությունը կլինի ուղիղների երեք ընտանիքների հատման կետերի բազմությունը՝

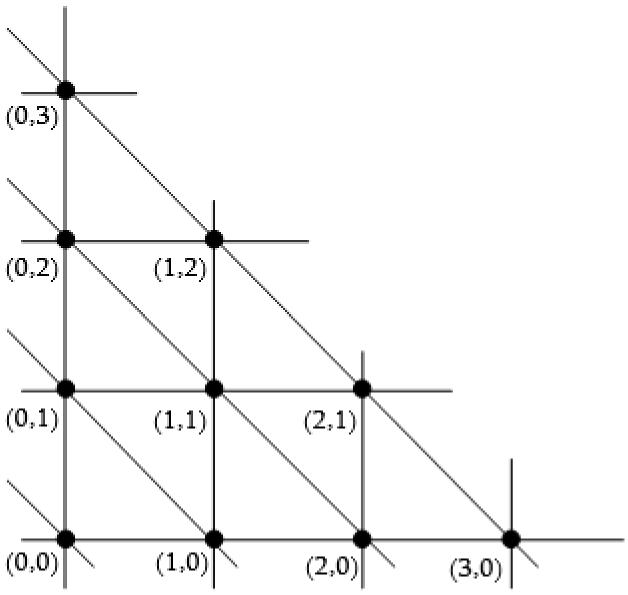
$$(j,k) = \ell_j^{(1)} \cap \ell_k^{(2)} \cap \ell_{j+k}^{(3)}:$$

Յուրաքանչյուր հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամ տրվում է հետևյալ կերպ.

$$p_{(j,k)}^* = \prod_{i=0}^{j-1} \ell_i^{(1)} \prod_{i=0}^{k-1} \ell_i^{(2)} \prod_{i=0}^{n} \ell_i^{(3)}:$$

Այստեղից երևում է, որ Նյուտոնի կոնստրուկցիայում յուրաքանչյուր հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամ կազմված է (1), (2) և (3) ընտանիքներից ուղիղների արտադրյալից. յուրաքանչյուր հանգույց օգտագործում է իրենից ձախ գտնվող (1) ընտանիքի բոլոր ուղիղները, (2) ընտանիքի՝ իրենից ներքև բոլոր ուղիղները և (3) ընտանիքի՝ իրենից աջ գտնվող բոլոր ուղիղները: Հետևաբար $\mathcal{X}$ բազմությունը բավարարում է GC_n պայմանին:

Գծագիր 1.4.3–ում ներկայացված է Նյուտոնի ցանցի օրինակ:



Գծագիր 1.4.3: Նյուտոնի ցանց ($n = 3$)

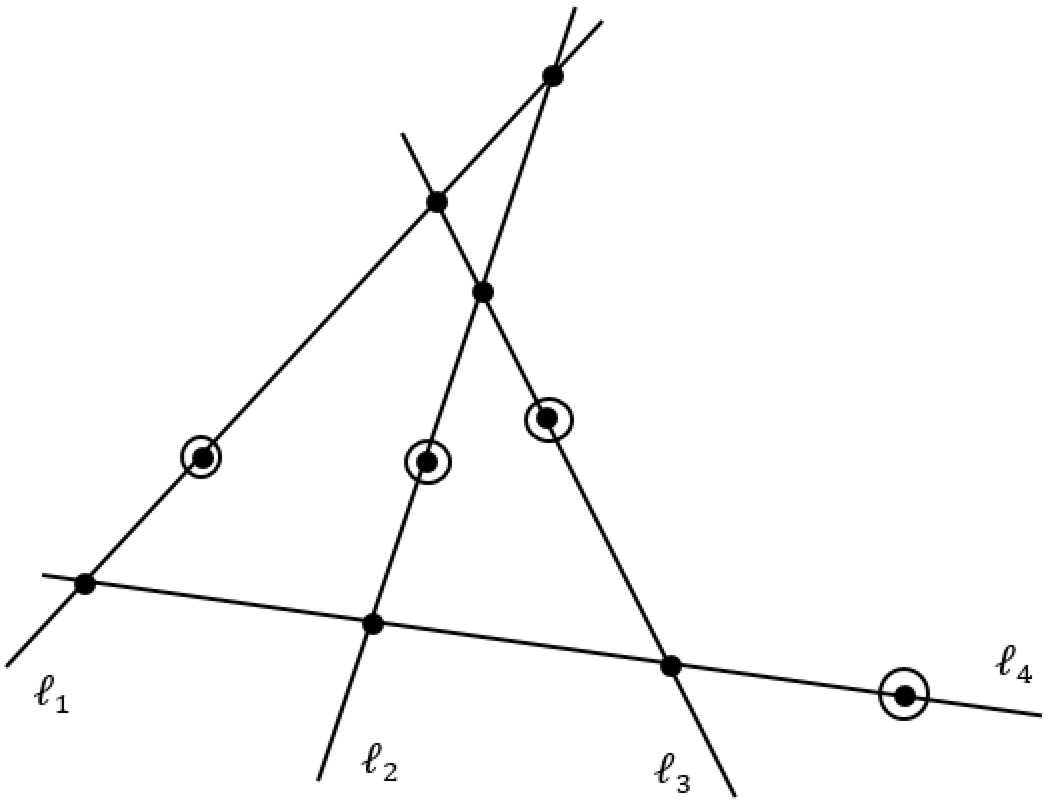
1.4.4 Քարնիսեր–Գասքայի ցանց

Այժմ նկարագրենք GC_n պայմանին բավարարող վերջին օրինակը:

Դիտարկենք ընդհանուր դրության մեջ գտնվող $n+1$ ուղիղների $\mathcal{L}$ բազմությունը: Կասենք որ $\mathcal{X}$ բազմությունը հանդիսանում է Քարնիսեր–Գասքայի ցանց, եթե $\mathcal{X} = \mathcal{X}' \cup \mathcal{X}''$ որտեղ $\mathcal{X}'$–ը $\mathcal{L}$–ի $n+1$ ուղիղների հատման կետերի բազմությունն է, որոնց կանվանենք հիմնական հանգույցներ, իսկ $\mathcal{X}''$–ը $n+1$ ոչ համագիծ կետերի բազմություն է, յուրաքանչյուր ուղղի վրա մեկական, որոնց կանվանենք ազատ հանգույցներ: Ունենք որ $|\mathcal{X}| = \binom{n+1}{2} + n + 1 = \binom{n+2}{2}$: Յուրաքանչյուր ազատ հանգույց գտվում է $\mathcal{L}$–ի ճիշտ 1 ուղղի վրա: Մնացած n ուղիղների արտադրյալը տալիս է ազատ հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամը: Յուրաքանչյուր հիմնական հանգույց գտնվում է $\mathcal{L}$–ի ճիշտ 2 ուղղի վրա: Մնացած $n-1$ ուղիղների և այդ 2 ուղղի վրա գտնվող ազատ հան–գույցներով անցնող ուղղի արտադրյալը տալիս է հիմնական հանգույցի ֆունդամեն–տալ բազմանդամը: Ուստի $\mathcal{X}$–ը GC_n բազմություն է: Պարզ է, որ $\mathcal{X}$–ը պարունակում ճիշտ $n+1$ մաքսիմալ ուղիղ, որոնք $\mathcal{L}$–ի ուղիղներն են: Իրոք, **հետևանք 1.2.16**–ի 2–րդ կետից հետևում է որ բացի $\mathcal{L}$–ի ուղիղներից կարող է լինել մեկ այլ մաքսիմալ ուղիղ անցնող $n+1$ ազատ հանգույցներով, ինչը իսկբանէ բացառված էր:

Հակառակը նույնպես ճիշտ է: Ցանկացած n–ճշգրիտ բազմություն ճիշտ $n+1$ մաքսիմալ ուղիղներով Քարնիսեր–Գասքայի ցանց է ([13] թեորեմ 2.3): Իրոք **հետևանք 1.2.16**–ից ստացվում է որ այդ $n+1$ ուղիղները ընդհանուր դրության մեջ են և հանգույցների քանակը հավասար է $\binom{n+1}{2}$–ի: Հետևաբար յուրաքանչյուր ուղղի վրա կա ճիշտ n հիմնական հանգույց: Հետևաբար կան ուրիշ $n+1$ ազատ հանգույցներ մեկական յուրաքանչյուր ուղղի վրա: Այդ հանգույցները համագիծ չեն, հակառակ դեպքում կստանայինք ևս մեկ մաքսիմալ ուղիղ:

Գծագիր 1.4.4–ում ներկայացված է Քարնիսեր–Գասքայի ցանցի օրինակ: Բաց օղակներով կետերը ազատ հանգույցներն են:



Գծագիր 1.4.4: Քարնիսեր–Գասքայի ցանց ($n = 3$)

ԳԼՈՒԽ 2.

ՄԱՔՍԻՄԱԼ ԿՈՐԵՐ, $\mathcal{N}_\ell$ և $\mathcal{X}_\ell$ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ:

1.1 Մաքսիմալ կորեր

Սկսենք **Թեորեմ 1.2.13**–ի ընդհանրացումից ավելի բարձր կարգի հանրահաշվական կորերի համար: Նշանակենք $k \le n$–ի համար

$$d(n,k) := \dim\Pi_n - \dim\Pi_{n-k} = \frac{1}{2}k(2n+3-k):$$

Թեորեմ 2.1.1 (Ռաֆայելյան [21]): *Դիցուք q–ն $k \le n$ կարգի հանրահաշվական կոր է, առանց պատիկ արտաղրիչների: Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալը՝*

1. *$d(n,k)$–ից ավել հանգույցներից բաղկացած q–ի ցանկացած ենթաբազմություն n–կախյալ է,*
2. *ճիշտ $d(n,k)$ հանգույցներից բաղկացած $\mathcal{X} \subset q$ ենթաբազմությունը n–անկախ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $p \in \Pi_n$ բազմանդամի համար տեղի ունի հետևյալ առնչությունը՝*

$$p(x) = 0 \; \forall x \in \mathcal{X} \quad \Rightarrow \quad p = qr, \quad r \in \Pi_{n-k}$$

Ինչպես ուղիղների դեպքում (**Հետևանք 1.2.15**), այստեղ էլ ստանում ենք.

Հետևանք 2.1.2: *Ցանկացած n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմության համար տեղի ունեն՝*

1. *Ամենաշատը $d(n,k)$ հանգույցներ կարող են գտնվել k–րդ կարգի կորի վրա,*
2. *$\mathcal{X}$–ից $d(n,k)$ հանգույցներ պարունակող $k \le n$ կարգի q կորը օգտագործվում է $\mathcal{X} \backslash q$ բազմության բոլոր հանգույցների կողմից:*

Հաջորդիվ դիտարկենք մաքսիմալ ուղիղ գաղափարի ընդհանրացումը(տես [10])

Սահմնաում 2.1.3: *Դիցուք $\mathcal{X}$–ը n–ճշգրիտ բազմություն է: $k \le n$ կարգի կորը, որը պարունակում է $\mathcal{X}$–ի ճիշտ $d(n,k)$ հանգույցներ կոչվում է մաքսիմալ կոր:*

Ուստի մաքսիմալ ուղիղը, երկրորդ կարգի կորը (*կոնիկ*) և երրորդ կարգի կորը (*կուբիկ*) համապատասխանաբար պարունակում են $\mathcal{X}$ բազմության $n+1$, $2n+1$ և $3n$ հանգույցներ:

Հաջորդ թեորեմը, բնութագրում է մաքսիմալ կորերը:

Թեորեմ 2.1.4 (Ռաֆայելյան [21]): *Դիցուք ունենք n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմությունը և առանց պատիկ արտադրիչների $k \leq n$ կարգի q կորը: Այդ դեպքում հետևյալ պնդումները համարժեք են.*

1. *q–ն մաքսիմալ կոր է $\mathcal{X}$ բազմության համար,*
2. *$\mathcal{Y} = \mathcal{X} \setminus q$ բազմության բոլոր հանգույցները օգտագործում են q կորը,*
3. *$\mathcal{Y}$ բազմությունը $n-k$–ճշգրիտ է: Ավելին, եթե $\mathcal{X}$–ը GC_n բազմություն է, ապա $\mathcal{Y}$–ը GC_{n-k} բազմություն է:*

Հայտնի է որ, n–ճշգրիտ բազմության ցանկացած $N-1$ հանգույցներով միակորեն որոշվում է n–րդ կարգի կորը: Հարց է առաջանում, թե քանի հանգույցներով է միա– կորեն որոշվում ավելի ցածր կարգի կորերը:

Մեզ անհրաժեշտ կլինի հետևյալ լեմման՝

Լեմմա 2.1.5: *Դիցուք երկու տարբեր ՝ամենաշատը k–րդ աստիճանի կորեր անցնում են $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր հանգույցներով: Այդ դեպքում ցանկացած $A \notin \mathcal{X}$ հանգույցի համար գոյություն կունենա k–րդ աստիճանի կոր, որն անցնում է $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր կետերով և A–ով:*

Եվ իրոք, եթե տրված կորերն են q_1–ը և q_2–ը, ապա կարող ենք ընտրել այնպիսի c_1 և c_2 հաստատուններ, որ $c_1q_1 + c_2q_2$ գծային կոմբինացիան լինի A հանգույցում:

Թեորեմ 2.1.6 ([3]): *Դիցուք ունենք n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմությունը: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$–ի ցան– կացած $N-4$ հանգույցներով, անցնում է ամենաշատը մեկ $(n-1)$–րդ կարգի հանրա– հաշվական կոր: Ավելին, գոյություն ունի n–անկախ $N-5$ հանգույցների այնպիսի բազմություն, որի բոլոր հանգույցներով անցնում են մեկից ավելի $(n-1)$–րդ կարգի կորեր:*

Ապացույց: Սկզբից սկսենք թեորեմի երկրորդ հատվածից: Բերենք n–անկախ $N-5$ հանգույցների բազմության օրինակ, որի բոլոր հանգույցներով անցնում են մեկից ավելի $(n-1)$–րդ կարգի կորեր: Դիտարկենք BR_n–բազմության մի մասը, որը պարունակում է կոնստրուկցիայի առաջին $n-2$ ուղիղները՝ $\ell_1, \ldots, \ell_{n-2}$–ը. նշանակենք այդ բազմությունը՝

$$\mathcal{X}' = BR_n \cap [\ell_1 \cup \ldots \cup \ell_{n-2}]:$$

Այսպիսով, $\mathcal{X}'$ բազմությունը բաղկացած է $|\mathcal{X}'| = (n+1) + n + (n-1) + \cdots + 4 = N-6$ հանգույցներից: Այս բազմությանն ավելացնենք $A \in BR_n \setminus \mathcal{X}'$ հանգույց և կստանանք նոր $\mathcal{X}''$ բազմություն՝ $\mathcal{X}'' \coloneqq \mathcal{X}' \cup \{A\}$, որը և: Տեսնենք, որ $\mathcal{X}''$ բազմության հանգույցներով անցնում են մեկից ավել $(n-1)$–րդ կարգի կորեր:

Նախ $|\mathcal{X}''| = N-5$ և մյուս կողմից էլ $\mathcal{X}''$–ը n–ճշգրիտ BR_n–բազմության ենթա–բազմություն է, հետևաբար, n–անկախ է: Այժմ դիտարկենք ℓq_{n-2} տեսքի $(n-1)$–րդ կարգի կորեր, որտեղ ℓ–ը A–ով անցնող կամայական ուղիղ է, իսկ $q_{n-1} = \ell_1 \ldots \ell_{n-2}$: Այս բոլոր $(n-1)$–րդ կարգի կորերն անցնում են $\mathcal{X}''$ բազմության բոլոր հանգույցներով, ուստի Թեորեմի երկրորդ հատվածն ապացուցված է:

Այժմ անցնենք առաջին հատվածի ապացույցին: Ապացույցը կատարենք հակասող ենթադրությամբ. դիցուք $\mathcal{X}$–ը այնպիսի n–անկախ $N-4$ հանգույցների բազմություն է, որի բոլոր հանգույցներով անցնում են երկու տարբեր $(n-1)$–րդ կարգի կորեր: Հա–մաձայն **Թեորեմ 1.2.7–ի**՝ ընդլայնենք $\mathcal{X}$ բազմությունը մինչև n–ճշգրիտ $\mathcal{X}_1$ բազմություն՝ ավելացնելով չորս հանգույցներ՝ B_1, B_2, B_3 և A: Ըստ **Լեմմա 2.1.5–ի**՝ գոյություն ունի յուրաքանչյուր B_i հանգույցով և $\mathcal{X}$–ի բոլոր հանգույցներով անցնող $p_i \in \Pi_{n-1}$ կոր, $i = 1, 2, 3$:

Նշանակենք B_i–ով և B_j–ով անցնող ուղիղը ℓ_{ij} , $1 \leq i \neq j \leq 3$: Համաձայն **Լեմմա 1.2.4**–ի B_1, B_2, B_3 հանգույցներ կարող ենք այնպես ընտրել, որ դրանք չգտնվեն մի ուղղի վրա և $\ell_{12}, \ell_{23}, \ell_{13}$ ուղիղները չանցնեն $\mathcal{X}$–ի ոչ մի հանգույցով, այսինքն, կարող ենք ապահովել, որ

$$\mathcal{X} \cap \ell_{ij} = \emptyset, \qquad 1 \leq i < j \leq 3: \qquad (2.1.1)$$

Այսպիսով, վերջին ավելացված հանգույցի՝ A–ի ֆունդամենտալ բազմանդամի համար ստանում ենք հետևյալ երեք ներկայացումները.

$$p_A^* = \ell_{23}p_1,$$

$$p_A^* = \ell_{13}p_2,$$

$$p_A^* = \ell_{12}p_3:$$

Իսկապես, պարզ է, որ նշված հավասարությունների աջ կողմի արտադրյալները այն–պիսի ոչ զրոյական բազմանդամներ են Π_n բազմանդամային տարածությունից, որոնք զրոյանում են $\mathcal{X}_1 \setminus \{A\}$ բազմության բոլոր հանգույցներում: Մյուս կողմից, դրանք չեն զրոյանում A–ում, քանի որ $\mathcal{X}_1$ բազմությունը n–ճշգրիտ է:

Սակայն n–ճշգրիտ բազմությունների ֆունդամենտալ բազմանդամները միակն են, իսկ ℓ_{ij} ուղիղները տարբեր են, հետևաբար անհրաժեշտաբար p_A^* բազմանդամը պետք է ունենա հետևյալ տեսքը.

$$p_A^* = \ell_{12}\ell_{23}\ell_{31}q, \text{ որտեղ } q \in \Pi_{n-3}:$$

Այս արդյունքից և (2.1.1)–ից ստանում ենք, որ q–ն զրոյանում է $\mathcal{X}$–ի բոլոր հանգույցներում: Սա հակասություն է, քանի որ, համաձայն **Հետևանք 2.1.2**–ի, Π_{n-3} բազմանդամային տարածությունից բազմանդամը կարող է զրոյանալ ամենաշատը $d(n, n-3) = N - 10$ n–անկախ հանգույցներում: □

Այս արդյունքի ընդհանրացումը կամայական աստիճանի կորերի վերաբերյալ կարելի է տեսնել [24], [25]–ում:

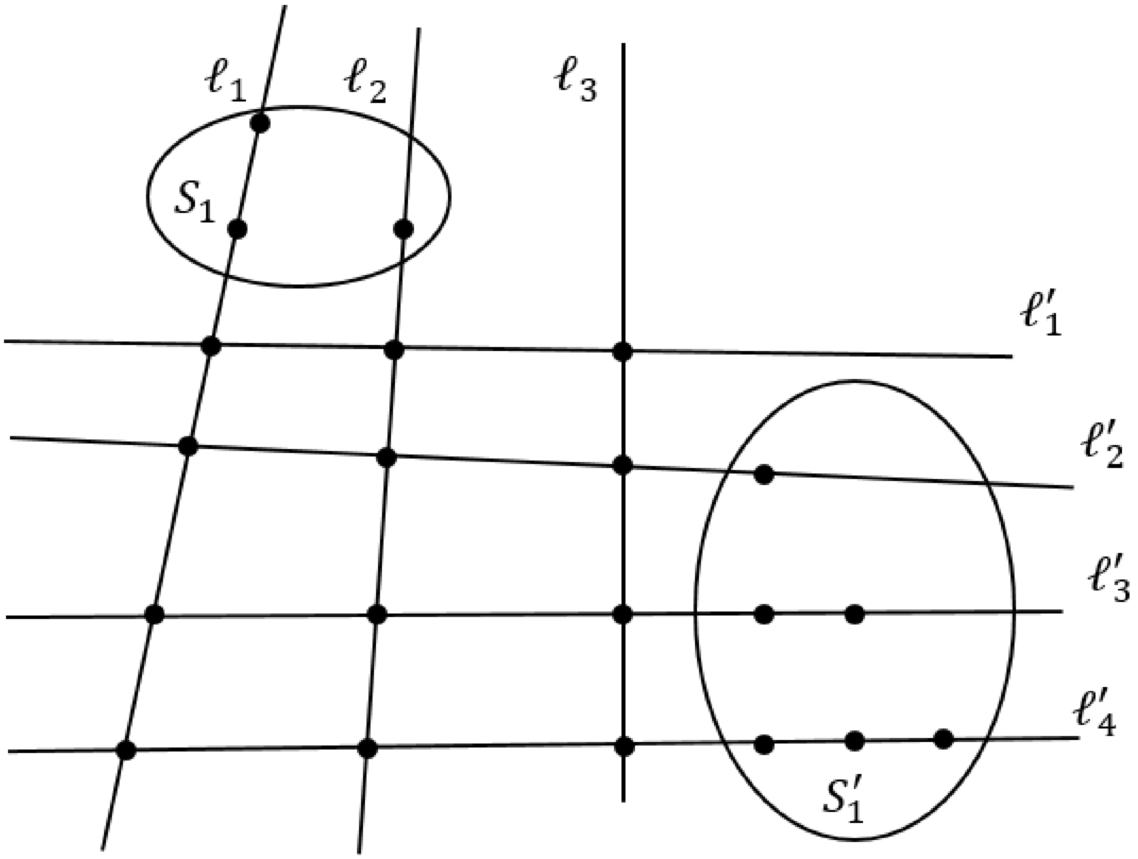
Այժմ ներկայացնենք Քելի–Բախարախի թեորեմը (տես [16], [28])՝ երկու կորերի հատ–ման կետերի բազմության անկախության մասին:

Թեորեմ 2.1.7: (Քելի–Բախարախ)։ *Դիցուք m և n աստիճանի երկու կորեր հատվում են ճիշտ mn կետերում: Այդ դեպքում հատման կետերի $\mathcal{X}$ բազմությունը $(m+n-2)$–ան–կախ է և էապես $(m+n-3)$–կախյալ է:*

Տանք այս արդյունքի ապացույցը այն դեպքում երբ թեորեմում նշված կորերն իրենցից ներկայացնում են ուղիղների արտադրյալ (տես [3]): Նշենք, որ թեորեմի ապացույցը հիմնված է **Հետևանք 1.2.17**–ի վրա:

Ապացույց: Դիցուք $p = \ell_1 \dots \ell_m$ և $q = \ell'_1 \dots \ell'_n$ կորերը հատվում են ճիշտ mn տարբեր կետերում: Նշանակենք հատման կետերի բազմությունը $\mathcal{Y}$–ով: Նախ ապացուցենք, որ $\mathcal{Y}$ բազմությունը $m + n - 2$–անկախ է:

Դիտարկենք հանգույցների երկու բազմություն. S_1 բազմություն՝ բաղկացած $1 + 2 + \cdots + (m - 1)$ կետերից, որոնք ընտրված են այնպես, որ $(m - k)$ կետեր ℓ_k ուղղի վրա են, $k = 1, \dots, m - 1$, և S'_1 բազմություն՝ բաղկացած $1 + 2 + \cdots + (n - 1)$ կետերից, որոնք ընտրված են այնպես, որ դրանցից $(n - k)$–ն ℓ'_k ուղղի վրա են, $k = 1, \dots, n - 1$: Պահանջենք, որ այս բոլոր կետերը չհանդիսանան դիտարկված երկու խումբ ուղիղների հատման կետեր(*Գծագիր 3.1.1*): Նշանակենք $\mathcal{X}_1 \coloneqq \mathcal{Y} \cup S_1 \cup S'_1$:



Գծագիր 3.1.1: S_1 և S'_1 բազմությունները $m = 3,\ n = 4$.

Նախ ցույց տանք, որ $\mathcal{X}_1$ բազմությունը Π_{m+n-2}–ճշգրիտ է: Իսկապես, հաշվի առնելով այն, որ $N_k = \binom{k+2}{2} = 1 + 2 + \cdots + (k+1)$, ստանում ենք.

$$|\mathcal{X}_1| = |\mathcal{Y}| + |S_1| + |S_1'| =$$

$$mn + N_{m-2} + N_{n-2} = N_{m+n-2}:$$

Այնուհետև, դիտարկենք կամայական $p \in \Pi_{m+n-2}$ բազմանդամ, որը զրոյանում է $\mathcal{X}_1$–ի հանգույցներում և ցույց տանք, որ $p = 0$: Այդ դեպքում **Թեորեմ 1.2.2**–ից կհետևի, որ $\mathcal{X}_1$ բազմությունը $(m + n - 2)$–ճշգրիտ է:

Կիրառելով **Հետևանք 1.2.17–ը** կստանանք՝ $p = \ell_1 \ldots \ell_m q$, որտեղ $q \in \Pi_{n-2}$: Նորից կիրառելով **Հետևանք 1.2.17**–ը q–ի համար կստանանք, որ $q = C\ell_1' \ldots \ell_{n-2}'$, որտեղ $C = const$: Հետևաբար

$$p = C\ell_1 \ldots \ell_m \ell_1' \ldots \ell_{n-2}':$$

Մնաց միայն ℓ_{n-1}' ուղղի վրա գտնվող S_1' բազմության մեկ կետը, որում p բազմանդամը զրոյանում է: Հաշվի առնելով այս փաստը՝ ստանում ենք, որ $C = 0$, հետևաբար $p = 0$:

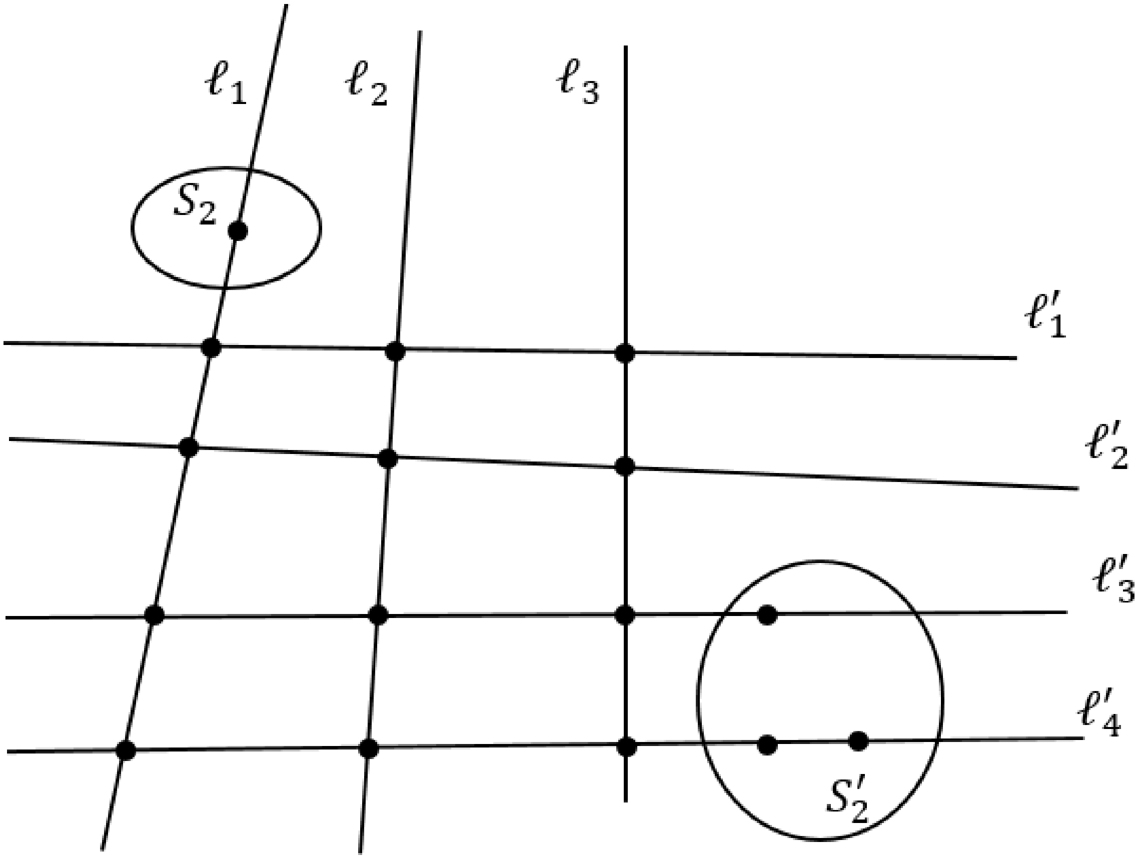
Այսպիսով, $\mathcal{X}_1$ բազմությունը $(m + n - 2)$–ճշգրիտ է և, քանի որ $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}_1$, հետևաբար $\mathcal{Y}$ –ը $(m + n - 2)$–անկախ է:

Այժմ մնաց ցույց տալ, որ ոչ մի $M \in \mathcal{Y}$ կետ չունի $(m + n - 3)$ աստիճանի ֆուն–դամենտալ բազմանդամ: Այլ կերպ ասած պետք է ցույց տալ, որ $\mathcal{Y}_0 = \mathcal{Y} \setminus M$–ում զրո–յացող կամայական $p \in \Pi_{m+n-3}$ բազմանդամի համար տեղի ունի $p(M) = 0$: Առանց ընդհանրությունը խախտելու ենթադրենք, որ $M = \ell_m \cap \ell_1'$:

Նախորդ դեպքի նմանությամբ դիտարկենք հանգույցների երկու բազմություն. S_2 բազմություն՝ բաղկացած $1 + 2 + \cdots + (m-2)$ կետերից, որոնք ընտրված են այն կերպ, որ $(m - 1 - k)$ կետեր ℓ_k ուղղի վրա են, $k = 1, \ldots, m-2$; S_2' բազմություն՝ բաղկացած $1 + 2 + \cdots + (n-2)$ կետերից, որոնք ընտրված են այնպես, որ դրանցից $(n - 1 - k)$ կետեր ℓ_k' ուղղի վրա են, $k = 1, \ldots, n-2$: Նորից պահանջենք, որ այս բոլոր կետերը չհանդիսանան դիտարկված երկու խումբ ուղիղների հատման կետեր(*Գծագիր 3.1.2*):

Նշանակենք $\mathcal{X}_2 \coloneqq \mathcal{Y}_0 \cup S_2 \cup S_2'$: Կատարելով նույն դատողությունները, ինչ նախորդ դեպքում՝ ստանում ենք, որ $\mathcal{X}_2$ բազմությունը $m+n-3$–ճշգրիտ է:

Դիտարկենք կամայական $p \in \Pi_{m+n-3}$ բազմանդամ և ենթադրենք, որ այն զրոյանում է $\mathcal{Y}_0$ բազմության բոլոր հանգույցներում:



Գծապատկեր 3.1.2: S_2 և S_2' բազմությունները $m = 3, n = 4$.

Օգտագործելով Լագրանժի բանաձևը $m+n-3$–ճշգրիտ $\mathcal{X}_2$ բազմության համար՝ կստանանք.

$$p(M) = \sum_{A \in \mathcal{Y}_0} p(A) p^*_{A,\mathcal{X}_2}(M) + \sum_{A \in S_2} p(A) p^*_{A,\mathcal{X}_2}(M) + \sum_{A \in S_2'} p(A) p^*_{A,\mathcal{X}_2}(M)$$

Քանի որ p–ն զրոյանում է $\mathcal{Y}_0$–ի բոլոր հանգույցներում, ապա հավասարման աջ կողմի առաջին գումարելին հավասար է զրոյի: Երկրորդ գումարելու մեջ մասնակցում են

միայն $A \in S_2$ հանգույցների $p^*_{A,\mathcal{X}_2}(M)$ ֆունդամենտալ բազմանդամները, որոնք, ըստ **Հետևանք 1.2.17**–ի, զրոյանում են բոլոր $\ell'_1, \dots, \ell'_n$ ուղիղների վրա: Նույն դատողությունները կատարելով՝ ստանում ենք, որ երրորդ գումարելու ֆունդամենտալ բազմանդամներն էլ զրոյանում են $\ell_1, \dots, \ell_m$ ուղիղների վրա: Քանի որ $M = \ell_m \cap \ell'_1$, հետևաբար այս բոլոր ֆունդամենտալ բազմանդամները զրոյանում են M կետում:

Այստեղից կարող ենք անել հետևություն, որ $\mathcal{Y}$ բազմության ոչ մի հանգույց չունի $(m+n-3)$ աստիճանի ֆունդամենտալ բազմանդամ, ուստի այն էապես $(m+n-3)$–կախյալ է: □

1.2 $\mathcal{N}_\ell$ և $\mathcal{X}_\ell$ բազմությունները

Այժմ սահմանենք $\mathcal{X}$ բազմության $\mathcal{N}_\ell$ և $\mathcal{X}_\ell$ ենթաբազմությունները, որտեղ ℓ–ը ուղիղ է:

1. $\mathcal{X}_\ell$–ը $\mathcal{X}$ բազմության այն ենթաբազմությունն է, որի հանգույցները օգտագործում են ℓ ուղիղը;
2. $\mathcal{N}_\ell$–ը $\mathcal{X}$ բազմության այն ենթաբազմությունն է, որի հանգույցները չեն օգտագործում ℓ ուղիղը և ընկած չեն ℓ–ի վրա:

Նկատենք, որ՝

$$\mathcal{X}_\ell \cup \mathcal{N}_\ell = \mathcal{X} \backslash \ell \tag{2.2.1}$$

Դիցուք ունենք n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմությունը և M մաքսիմալ ուղիղը: Պարզ է որ այդ դեպքում $\mathcal{X}\backslash M$–ը $n-1$–ճշգրիտ բազմություն է և ցանկացած $A \in \mathcal{X}\backslash M$ հանգույցի համար $p^*_{A,\mathcal{X}} = M p^*_{A,\mathcal{X}\backslash M}$: **Թեորեմ 1.2.13**–ից հետևում է՝

$$\mathcal{X}_\ell \backslash M = (\mathcal{X}\backslash M)_\ell \tag{2.2.2}$$

Որտեղ $\ell \neq M$ կամայական ուղիղ է:

$\mathcal{X}_\ell$ բազմության համար **Թեորեմ 2.1.6**–ից հետևում է

Թեորեմ 2.2.1 ([1]): *Ցանկացած n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմության համար՝*

$$|\mathcal{X}_\ell| \le 1, \text{ եթե } \ell\text{–ը } 2\text{–հանգույցանի ուղիղ է:} \quad (2.2.3)$$

Ապացույց: Ենթադրենք հակառակը, որ $A, B \in \mathcal{X}$ երկու հանգույցները օգտագործում են ℓ ուղիղը: Այդ դեպքում՝

$$p_A^* = \ell q_1, \ \ p_B^* = \ell q_2 \text{ որտեղ } q_1, q_2 \in \Pi_{n-1}:$$

Նկատենք, որ q_1, q_2 կորերը բացի A, B և ℓ–ի 2 հանգույցներից անցնում են $\mathcal{X}$–ի $N-4$ հանգույցներով: Ըստ **Թեորեմ 2.1.6**–ի q_1 և q_2 կորերը համընկնում են: Հետևաբար համընկնում են նաև p_A^*–ն և p_B^*–ն, ինչը հակասություն է: □

Նշենք որ (2.2.3) արդյունքը, այն դեպքում երբ $\mathcal{X}$–ը GC_n բազմություն է, ավելի վաղ ապացուցվել է Քարնիսերի և Գասքայի կողմից [12]–ում:

Հետևյալ թեորեմը բնութագրում է $\mathcal{N}_\ell$ բազմության կարևոր հատկություն:

Թեորեմ 2.2.2 (Քարնիսեր, Գասքա, [13]): *Դիցուք ունենք n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմությունը և ℓ ուղիղը: Այդ դեպքում՝*

1. *$\mathcal{N}_\ell = \emptyset$ այն և միայն այն դեպքում երբ ℓ–ը մաքսիմալ ուղիղ է,*
2. *եթե $\mathcal{N}_\ell$–ը դատարկ չէ, ապա էապես $(n-1)$–կախյալ է:*

Ապացույց: 1. Ենթադրենք ℓ–ը մաքսիմալ ուղիղ է: Ըստ **Հետևանք 1.2.15**–ի 2–րդ կետի $\mathcal{N}_\ell = \emptyset$:

Այժմ ենթադրենք $\mathcal{N}_\ell = \emptyset$ և ցույց տանք, որ ℓ–ը մաքսիմալ ուղիղ է: ℓ ուղղի հան–գույցները նշանակենք $A_1, A_2, \dots, A_k$ և ցույց տանք, որ $k = n+1$: Դրա համար բավական է ցույց տալ, որ ցանկացած $p \in \Pi_n$ բազմանդամի համար $p(A_i) = 0,\ i = 1, \dots, k$ պայմաններից հետևում է, որ $p = \ell r$, որտեղ $r \in \Pi_{n-1}$:

Օգտվենք Լագրանժի բանաձևից.

$$p(x,y) = \sum_{i=1}^{N} p(x_i, y_i) p_i^*(x,y):$$

Ունենք որ $p(A_i) = 0, i = 1, \dots, k$, ուստի կստանանք՝

$$p(x, y) = \sum_{\substack{i=1 \\ (x_i, y_i) \notin \ell}}^{N} p(x_i, y_i) p_i^*(x, y):$$

Քանի որ $\mathcal{N}_\ell = \emptyset$, ուստի կստանանք, որ վերը նշված բանաձևում բոլոր $p_i^*(x, y)$–երը պարունակում են ℓ–ը որպես արտադրիչ: Հետևաբար $p(x, y) = \ell r$, որտեղ $r \in \Pi_{n-1}$: Ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

2. Այժմ ենթադրենք, որ $\mathcal{N}_\ell \neq \emptyset$ և ցույց տանք, որ $\mathcal{N}_\ell$–ի ոչ մի կետ չունի $n-1$– ֆունդամենտալ բազմանդամ:

Ենթադրենք հակառակը, $\exists A \in \mathcal{N}_\ell$, որի համար $\exists p_{A,\mathcal{N}_\ell}^*$ $n-1$ աստիճանի ֆունդամենտալ բազմանդամ: Դիցուք $p_{A,\mathcal{X}}^*$–ը A–ի ֆունդամենտալ բազմանդամն է $\mathcal{X}$–ում: Դիտարկենք հետևյալ

$$q = p_{A,\mathcal{X}}^* - \gamma p_{A,\mathcal{N}_\ell}^* \ell \in \Pi_n$$

բազմանդամը: γ–ն ընտրենք այնպես, որ $q(A) = 0$: Դա կարող ենք անել, քանի որ $p_{A,\mathcal{X}}^*(A) = 1$, $p_{A,\mathcal{N}_\ell}^*(A) = 1$, $\ell(A) \neq 0$ քանի որ $A \in \mathcal{N}_\ell$–ից հետևում է, որ $A \notin \ell$:

Նկատենք, որ $q|_{\mathcal{N}_\ell} = 0$ և $q|_\ell = 0$: Իսկապես $p_{A,\mathcal{X}}^*|_{\mathcal{N}_\ell} = 0$, $p_{A,\mathcal{N}_\ell}^*$–ը 0 է $\mathcal{N}_\ell$–ի բոլոր հանգույցներում բացի A–ից, իսկ քանի որ $q(A) = 0$ հետևաբար $q|_{\mathcal{N}_\ell} = 0$: $p_{A,\mathcal{X}}^*|_\ell = 0$ քանի որ $A \notin \ell$, հետևաբար $q|_\ell = 0$:

q բազմանդամի համար գրենք Լագրանժի բանաձևը.

$$q(x, y) = \sum_{i=1}^{N} q(x_i, y_i) p_i^*(x, y):$$

$\mathcal{X}$–ը կբաժանվի 3 մասի, $\mathcal{N}_\ell$–ը $\mathcal{X}_\ell$–ը և ℓ ուղղի հանգույցները: Ուստի կստանանք՝

$$q(x, y) = \sum_{\mathcal{X}_\ell} q(x_i, y_i) p_i^*(x, y) + \sum_{\mathcal{N}_\ell} q(x_i, y_i) p_i^*(x, y) + \sum_{\ell} q(x_i, y_i) p_i^*(x, y):$$

Վերջին 2 գումարելիները 0 են: Եվ քանի որ $\mathcal{X}_\ell$–ի բոլոր հանգույցները օգտագործում են ℓ ուղիղը, ուստի ստանում ենք, որ q–ն ℓ–ը պարունակում է, որպես արտադրիչ: Հետե–վաբար $p^*_{A,\mathcal{X}}$–ը ևս ℓ–ը պարունակում է, որպես արտադրիչ, ինչը հակասություն է, քանի որ $A \in \mathcal{N}_\ell$: □

Գլուխ 4–ում մենք կօգտագործենք հետևյալ 2 լեմմաները: Նշենք, որ այս լեմմաները կազմում են **Թեորեմ 4.4.1**–ի ապացույցի մի մաս:

Լեմմա 2.2.3 (Քարնիսեր, Գասքա[12]): *Դիցուք ունենք n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմությունը և ℓ ուղիղը, այնպես որ $|\ell \cap \mathcal{X}| \leq n$: Ենթադրենք նաև, որ գոյություն ունի այնպիսի M մաքսիմալ ուղիղ, որ $M \cap \ell \cap \mathcal{X} = \emptyset$: Այդ դեպքում՝*

$$\mathcal{X}_\ell = (\mathcal{X} \backslash M)_\ell: \tag{2.2.4}$$

Եթե ℓ–ը ճիշտ n–հանգույցանի ուղիղ է, ապա ունենք, որ՝

$$\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \backslash (\ell \cup M), \text{ որտեղից հետևում է, որ } \mathcal{X}_\ell\text{–ը } (n-2)\text{–կախյալ է և } |\mathcal{X}_\ell| = \binom{n}{2}:$$

Ապացույց: Ենթադրենք հակառակը, որ (2.2.4)–ը տեղի չունի, այսինքն ինչ–որ $A \in M$ հանգույց օգտագործում է ℓ–ը.

$$p^*_{A,\mathcal{X}} = \ell q, \quad q \in \Pi_{n-1}:$$

Քանի որ $M \cap \ell \cap \mathcal{X} = \emptyset$, ապա հետևում է, որ q–ն 0–անում է $M \backslash A$–ի հանգույցներում: **Թեորեմ 1.2.13**–ից հետևում է, որ q–ն հետևաբար նաև $p^*_{A,\mathcal{X}}$–ը M–ը պարունակում են արտադրիչ: Մասնավորապես $p^*_{A,\mathcal{X}}$–ը 0 է A կետում, ինչը հակասություն է:

Այժմ դիտարկենք ℓ n–հանգույցանի ուղիղը և $A \notin M \cup \ell$ հանգույցը: Ունենք որ

$$p^*_{A,\mathcal{X}} = Mq, \quad q \in \Pi_{n-1}:$$

Նկատենք որ q–ն 0–անում է ℓ–ի n հանգույցներում: **Թեորեմ 1.2.13**–ից հետևում է, որ $q = \ell r$, $r \in \Pi_{n-2}$: Այստեղից ստանում ենք $p^*_{A,\mathcal{X}} = M\ell r$, և որ $A \in \mathcal{X}_\ell$: □

Լեմմա 2.2.4 (Քարնիսեր, Գասքա [5]): *Դիցուք ունենք n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմությունը և ℓ ուղիղը այնպես որ $|\ell \cap \mathcal{X}| \leq n$: Ենթադրենք նաև, որ գոյություն ունեն այնպիսի երկու M', M'' մաքսիմալ ուղիղներ, որ $M' \cap M'' \cap \ell \in \mathcal{X}$: Այդ դեպքում՝*

$$\mathcal{X}_\ell = (\mathcal{X}(M' \cup M''))_\ell: \qquad (2.2.5)$$

Եթե ℓ–ը ճիշտ n–հանգույցանի ուղիղ է, ապա ունենք, որ՝

$$\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \backslash (\ell \cup M' \cup M''), \text{ որտեղից հետևում է, որ } \mathcal{X}_\ell\text{–ը } (n-3)\text{–կախյալ է}$$
$$\text{և } |\mathcal{X}_\ell| = \binom{n-1}{2}:$$

Ապացույց. Կիրառելով (2.2.2) հավասարությունը երկու անգամ, կստանանք՝

$$\mathcal{X}_\ell \backslash (M' \cup M'') = (\mathcal{X} \backslash (\ell \cup M' \cup M''))_\ell:$$

Ենթադրենք հակառակը, որ (2.2.5)–ը տեղի չունի, այսինքն ինչ–որ $A \in (M' \cup M'') \backslash \ell$ հանգույց օգտագործում է ℓ–ը.

$$p^*_{A,\mathcal{X}} = \ell q, \qquad q \in \Pi_{n-1}:$$

Ենթադրենք $A \in M'$: Այդ դեպքում $A \notin M''$: Նկատենք որ q–ն 0–անում է $M'' \backslash \ell$–ի n հանգույցներում: **Թեորեմ 1.2.13**–ից հետևում է, որ $q = M'' r$, $r \in \Pi_{n-2}$: Իր հերթին r–ը 0–անում է A–ից տարբեր $M' \backslash \ell$–ի $n-1$ հանգույցներում: Հետևաբար r–ը նաև $p^*_{A,\mathcal{X}}$–ը M'–ը պարունակում են արտադրիչ: Մասնավորապես $p^*_{A,\mathcal{X}}$–ը 0 է A կետում, ինչը հակասություն է:

Այժմ դիտարկենք ℓ n–հանգույցաների ուղիղը և $A \notin \ell \cup M' \cup M''$ հանգույցը: Ունենք որ՝

$$p^*_{A,\mathcal{X}} = M' M'' q, \qquad q \in \Pi_{n-2}:$$

Նկատենք որ q–ն 0–անում է ℓ–ի $n-1$ հանգույցներում բացի մաքսիմալ ուղիղների հատման կետից: Նորից **Թեորեմ 1.2.13**–ից հետևում է, որ $q = \ell r$, $r \in \Pi_{n-3}$: Այստեղից ստանում ենք $p^*_{A,\mathcal{X}} = M' M'' \ell r$, և որ $A \in \mathcal{X}_\ell$: □

ԳԼՈՒԽ 3.

ԳԱՄՔԱ–ՄԱԵՋԹՈՒԻ ՎԱՐԿԱԾԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Այս գլխում ավելի մանրամասն կդիտարկենք Գլուխ 1–ում ձևակերպված **Վարկած 1.3.2**–ը: Վարկածը հաստատվել է մինչև $n \leq 5$ դեպքերի համար: $n = 2$ դեպքի համար վարկածը ակնհայտ է:

Դիցուք $\mathcal{X}$–ը 6 հանգույցներից բաղկացած GC_2 բազմություն է: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$–ում գոյություն ունեն 3 համագիծ հանգույցներ:

Եվ իսկապես, եթե 6 հանգույցները կազմում են GC_2 բազմություն, ապա ցանկացած հանգույց առանձնացնելու դեպքում մնացած 5–ը պետք է գտնվեն երկու ուղիղների վրա, հետևաբար կան երեք համագիծ հանգույցներ:

3.1 GM–վարկածը $n = 3$ դեպքի համար:

Այստեղ կապացուցենք GM–վարկածը $n = 3$ դեպքի համար:

Թեորեմ 3.1.1: *Դիցուք $\mathcal{X}$–ը 10 հանգույցներից բաղկացած GC_3 բազմություն է: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$–ում գոյություն ունեն 4 համագիծ հանգույցներ:*

Ապացույց: Ենթադրենք հակառակը՝ $\mathcal{X}$–ում չկան 4 համագիծ հանգույցներ: Այդ դեպքում կամայական կետի ֆունդամենտալ բազմանդամ կհանդիսանա երեք ուղիղների արտադրյալ, որոնցից յուրաքանչյուրն անցնում է $\mathcal{X}$–ի երեք հանգույցներով: Ցույց տանք որ գոյություն ունի 2 հանգույց, որոնք օգտագործում են միևնույն ուղիղը: Դիտարկենք մի ուղիղ, որի վրա կան 3 հանգույցներ: Ֆիքսենք այդ ուղղի որևէ հանգույց և նշանակենք C–ով: Մնաց 7 հանգույց:Այդ 7 հանգույցներից և այդ ուղղի մնացած 2 հանգույցներից ցանկացածի ֆունդամենտալ բազմանդամը C հանգույցում պետք է 0 լինի, հետևաբար պետք է ունենա գծային արտադրիչ անցնող C հանգույցով: Ունենք 9 հանգույց և 8 տարբեր ուղիղներ: Հետևաբար կա ուղիղ, որը օգտագործվում է առնվազն

2 հանգույցի կողմից: Ըստ **Թեորեմ 2.2.1**–ի այդ ուղիղը պարունակում է առնվազն 3 հանգույց, իսկ հակասող ենթադրությունից հետևում է, որ այն պարունակում է ճիշտ 3 հանգույց: Ենթադրենք A, B հանգույցները օգտագործում են ինչ–որ 3–հանգույցանի ℓ ուղիղ: Ունենք, որ $|\mathcal{N}_\ell| \leq 5$: Ըստ **Թեորեմ 1.2.19**–ի ≤ 5 հզորությամբ բազմությունը կլինի 2–կախյալ այն և միայն այն դեպքում, երբ 4 հանգույց համագիծ են: Թեորեմը ապացուցված է: □

3.2 GM–վարկածը $n = 4$ դեպքի համար:

Այստեղ մենք կներկայացնենք $n = 4$ դեպքի նոր, պարզ ապացույց: Նշենք, որ $n = 4$ դեպքը առաջին անգամ ապացուցվել է Busch–ի կողմից 1990–ին [9]: Կան նաև այլ ապացույցներ, որոնք կարելի է տեսնել [10] և [26]–ում:

Թեորեմ 3.2.1 ([2]): *Դիցուք $\mathcal{X}$–ը 15 հանգույցներից բաղկացած GC_4 բազմություն է: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$–ում գոյություն ունեն 5 համագիծ հանգույցներ:*

Այս թեորեմը կապացուցենք հակասող ենթադրությամբ, այն է, որ գոյություն չունի 5 համագիծ հանգույց:

Յուրաքանչյուր $A \in \mathcal{X}$ հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամը 4 գծային արտադրիչ–ների արտադրյալ է: Հակասող ենթադրությունից և **Լեմմա 1.3.3**–ից հետևում է, որ մնա–ցած 14 հանգույցները դասավորված են 4 ուղիղների վրա երկու հնարավոր ձևով. $4+4+4+2$ կամ $4+4+3+3$: Այդ դասավորվածություններին համապատասխան մենք կարող ենք p_A^*–ն ներկայացնել հետևյալ երկու ձևով.

$$p_A^* = \ell_{=4}\ell'_{=4}\ell''_{=4}\ell_{\geq 2}, \text{ կամ } p_A^* = \ell_{=4}\ell'_{=4}\ell_{\geq 3}\ell'_{\geq 3}: \quad (3.2.1)$$

Այստեղ 14 հանգույցները մենք աոնցացնում ենք հերթական ուղղին և անվանում այդ ուղղի հիմնական հանգույց: $=k$ ինդեքսով ուղիղները կոչվում են k–հանգույցանի ուղիղներ և բաղկացած են ճիշտ k հանգույցից, որոնք հիմնական են այդ ուղղի համար: $\geq k$ ինդեքսով ուղիղները անցնում են k հիմնական հանգույցներով ինչպես նաև կարող են անցնել այլ հանգույցներով, որոնք կոչվում են երկրորդական հանգույցներ և աոն–

ցացված են այլ ուղղի հետ, որպես հիմնական հանգույց: Երկրորդական հանգույցները ուղիղների հատման հանգույցներն են: Հաջորդիվ մենք կդիտարկենք $2,3$ և 4–հանգույցանի ուղիղները և կտեսնենք, թե քանի հանգույցի կողմից կարող են օգտագործվել:

Այժմ ապացուցենք հետևյալ 2 լեմմանները, ի նկատի ունենալով, որ մաքսիմալ ուղիղ չկա:

Լեմմա 3.2.2: *Ցանկացած 2 կամ 3–հանգույցանի ուղիղ կարող է օգտագործվել ամենաշատը մեկ հանգույցի կողմից:*

Ապացույց: Դիցուք $\tilde{\ell}$–ը 2 կամ 3–հանգույցանի ուղիղ է: Ենթադրենք հակառակը, որ երկու հանգույց $A, B \in \mathcal{X}$ օգտագործում են այն: Դիտարկենք A հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամը: Այն պարունակում է $\tilde{\ell}$–ը որպես արտադրիչ և երեք այլ ուղիղներ, որոնք բաղկացած են $\mathcal{X}\backslash(\tilde{\ell} \cup \{A\})$–ի մնացած ≥ 11 հանգույցներից՝ ներառյալ B–ն: Քանի որ 5–հանգույցանի ուղիղ չկա, ստանում ենք, որ՝

$$p_A^* = \tilde{\ell}\ell_{=4}\ell'_{=4}\ell_{\geq 3}:$$

Ենթադրենք, որ B–ն պատկանում է 4–հանգույցանի ուղիղներից մեկին, օրինակ $\ell'_{=4}$–ին: Ունենք նաև, որ

$$p_B^* = \tilde{\ell}q, \text{ որտեղ } q \in \Pi_3:$$

Նկատենք, որ q–ն զրոյանում է $\ell_{=4}$–ի 4 հանգույցներում և $\ell'_{=4}$–ի 3 հանգույցներում (բացի B–ից): Հետևաբար **Թեորեմ 1.2.13**–ից ստանում ենք, որ q–ն, ուստի և p_B^*–ն զրոյանում են $\ell_{=4}$–ի և $\ell'_{=4}$–ի բոլոր կետերում ներառյալ B–ում ինչը հակասություն է:

Այժմ ենթադրենք, որ B–ն պատկանում է $\ell_{\geq 3}$–ին: Այս դեպքում q–ն զրոյանում է $\ell_{=4}$–ի 4 հանգույցներում, $\ell'_{=4}$–ի $4(\geq 3)$ հանգույցներում և $\ell_{\geq 3}$–ի առնվազն 2 հանգույցում: Հետևաբար նորից **Թեորեմ 1.2.13**–ից ստանում ենք, որ q–ն, ուստի և p_B^*–ն զրոյանում են $\ell_{=4}$–ի, $\ell'_{=4}$–ի և $\ell_{\geq 3}$–ի բոլոր կետերում ներառյալ B–ում, ինչը հակասություն է: □

Լեմմա 3.2.3: *Ցանկացած 4–հանգույցանի ուղիղ կարող է օգտագործվել ամենաշատը երեք հանգույցի կողմից:*

Ապացույց: Ենթադրենք 4–հանգույցանի $\tilde{\ell} = \ell_{=4}$ ուղիղը օգտագործվում է $A, B \in \mathcal{X}$ հանգույցների կողմից: Դիտարկենք A կետի ֆունդամենտալ բազմանդամը՝ p_A^*–ն: Այն պարունակում է $\tilde{\ell}$–ը որպես արտադրիչ և երեք այլ ուղիղներ, որոնք բաղկացած են $\mathcal{X} \backslash (\tilde{\ell} \cup \{A\})$–ի մնացած 10 հանգույցներից՝ ներառյալ B–ն: p_A^*–ն կարող ենք ներկայաց– նել երկու հնարավոր ձևով.

$$p_A^* = \tilde{\ell}\ell_{=4}\ell'_{=4}\ell_{\geq 2}, \tag{3.2.2}$$

$$p_A^* = \tilde{\ell}\ell_{=4}\ell_{\geq 3}\ell'_{\geq 3}: \tag{3.2.3}$$

Դիտարկենք առաջին ներկայացումը՝ (3.2.2) –ը: **Լեմմա 3.2.2**–ի ապացույցում մենք արդեն ստացել ենք, որ այսպիսի իրադրությունում B–ն չի կարող պատկանել որևէ 4–հանգույցանի ուղղի: Հետևաբար B–ն պատկանում է $\ell_{\geq 2}$ ուղղին: Քանի որ $\tilde{\ell}\ell_{=4}\ell'_{=4}$–ը կազմում եմ մաքսիմալ կոր, ուստի պարզ է, որ է $\ell_{\geq 2}$ ուղղի մյուս հիմնական հանգույցը՝ որը կնշանակենք C–ով, ևս օգտագործում է $\tilde{\ell}$ ուղիղը: Այսպիսով Լեմման ապացուցված է (3.2.2) դեպքում: Նշենք, որ այս դեպքում B–ն (A, C) օգտագործում է $\tilde{\ell}, \ell_{=4}, \ell'_{=4}$ ուղիղները և ℓ_{AC} (ℓ_{BC}, ℓ_{AB}) ուղիղը, որտեղ ℓ_{AC}–ն A և C հանգույցները միացնող ուղիղն է:

Դիտարկենք այն դեպքը, երբ p_A^*–ն տրված է (3.2.3) տեսքով:

Եթե B–ն պատկանար որևէ 3–հանգույցանի ուղղի, ապա, նորից **Լեմմա 3.2.2**–ում ար– ված դատողություններով կստանայինք, որ p_B^*–ը զրոյանում է B հանգույցում: Հետևա– բար B–ն պետք է պատկանա $\ell_{=4}$ ուղղին:

Այժմ պարզենք B կետի ֆունդամենտալ բազմանդամի տեսքը: Եթե այն տրված լինի (3.2.2) տեսքով, ապա Լեմմայի ապացույցի առաջին հատվածը նույնությամբ կկիրա– ռենք A հանգույցի համար և կստանանք հակասություն:

Մնում է դիտարկել այն դեպքը, երբ B հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամի տեսքն է

$$p_B^* = \tilde{\ell}\alpha_{=4}\alpha_{\geq 3}\alpha'_{\geq 3},$$

որտեղ $\alpha_{=4}, \alpha_{\geq 3}, \alpha'_{\geq 3} \in \Pi_1$: Փաստորեն ստանում ենք, որ թե՛ p_A^*–ն և թե՛ p_B^*–ն տրված են (3.2.3) տեսքով: Ավելին ունենք նաև, որ A կետն էլ իր հերթին գտնվում է $\alpha_{=4}$ ուղղի վրա:

Այժմ տեսնենք, որ $\tilde{\ell}$–ից բացի այլ ուղիղներ չկան, որ օգտագործվեն A–ի և B–ի կողմից միաժամանակ: Իսկապես, $\alpha_{=4}$ և $\ell_{=4}$ ուղիղները պարունակում են համապատասխա– նաբար A և B կետերը, հետևաբար չեն կարող լինել A–ի և B–ի ընդհանուր օգտագործ– վողների մեջ: Կատարենք հակասող ենթադրություն՝ այն է գոյություն ունի ևս մի ուղիղ, որ միաժամանակ օգտագործվում է A և B հանգույցների կողմից: Առանց ընդհանրու– թյունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ $\ell'_{\geq 3} \equiv \alpha'_{\geq 3}$:

Այսպիսով ստացանք, որ

$$p_B^* = \tilde{\ell}\,\ell'_{\geq 3} q, \text{ որտեղ } q \in \Pi_2:$$

Այնուհետև, ըստ (3.2.3)–ի, q–ն զրոյանում է $\ell_{\geq 3}$–ի 3 հանգույցներում և $\ell_{=4}$–ի առնվազն 2 հանգույցներում (բացի B–ից և $\ell'_{\geq 3}$–ի հնարավոր երկրորդային հանգույցից): Հետևա– բար, **Թեորեմ 1.2.13**–ից, ստանում ենք, որ q–ն զրոյանում է $\ell_{\geq 3}$ և $\ell_{=4}$ ուղիղների բոլոր կետերում՝ ներառյալ B–ն: Ուրեմն, p_B^*–ը զրոյանում է B–ում, որը հակասություն է:

Ամփոփելով բոլոր դատողությունները՝ ունենք, որ օգտագործվող ուղիղների $\ell_{=4}, \ell_{\geq 3}, \ell'_{\geq 3}$ և $\alpha_{=4}, \alpha_{\geq 3}, \alpha'_{\geq 3}$ եռյակները հատվում են $\mathcal{T} = \mathcal{X} \setminus \left\{\tilde{\ell} \cup \{A, B\}\right\}$ բազմության ճիշտ 9 հանգույցներում:

Եթե որևէ երրորդ կետ՝ C, օգտագործում է $\tilde{\ell}$–ը, ապա $C \in \mathcal{T}$ և

$$p_C^* = \tilde{\ell} r, \qquad \text{որտեղ } r \in \Pi_3:$$

Այժմ նշենք, որ r–ը հանդիսանում է C–ի երրորդ աստիճանի ֆունդամենտալ բազ– մանդամ՝ $\mathcal{T}$ բազմության մեջ, որը հակասում է **Թեորեմ 2.1.7**–ին, քանի որ $\mathcal{T}$–ն էապես 3–կախյալ է: Հետևաբար 4–հանգույցանի $\tilde{\ell}$ ուղիղը այս դեպքում կարող է օգտագործվել ամենաշատը երկու անգամ:

Լեմման ապացուցված է: □

Անցնենք **Թեորեմ 3.2.1**–ի ապացույցին:

Ցույց տանք, որ $\mathcal{X}$–ում չկան երկրորդային հանգույցներ, ինչպես նաև չկան $\mathcal{X}$–ի ճիշտ երեք հանգույցներով անցնող ուղիղներ:

Ֆիքսենք որևէ $A \in \mathcal{X}$ կետ և դիտարկենք A–ով ու $\mathcal{X}$ բազմության այլ հանգույցով (կամ հանգույցներով) անցնող ուղիղները: Նշանակենք $n_m(A)$–ով այն ուղիղների քանակը, որոնք անցնում են $\mathcal{X}$–ի ճիշտ m հանգույցներով՝ ներառյալ A–ն: Հաշվի առնելով այն փաստը, որ 5 հանգույցներով անցնող ուղիղ չունենք ստանում ենք.

$$1n_2(A) + 2n_3(A) + 3n_4(A) = |(\mathcal{X} \setminus \{A\})| = 14: \tag{3.2.4}$$

(3.2.4) հավասարության մեջ՝ A հանգույցով անցնող ուղիղների միջոցով հաշվում ենք ֆիքսված A հանգույցից բացի մնացած $\mathcal{X} \setminus \{A\}$ հանգույցների քանակը: $n_2(A)$–ի գործակիցը 1 է, քանի որ 2 հանգույցով (այդ թվում նաև A–ով) անցնող ուղղի վրա բացի A–ից կա միայն մեկ հանգույց, $n_3(A)$–ի գործակիցը 2 է, քանի որ 3 հանգույցով (այդ թվում նաև A–ով) անցնող ուղղի վրա բացի A–ից կան երկու հանգույցներ, նույն կերպ նաև $n_4(A)$–ն:

Այժմ ապացուցենք հետևյալ լեմման ([27]):

Լեմմա 3.2.4. *Դիցուք $\mathcal{X}$–ը GC_4 բազմություն է՝ առանց մաքսիմալ ուղղի: Այդ դեպքում տեղի ունի.*

1. *Ոչ մի ուղիղ չի անցնում $\mathcal{X}$ բազմության ճիշտ երեք հանգույցներով,*
2. *Միևնույն հանգույցի կողմից օգտագործվող երկու ուղիղներ չեն հատվում $\mathcal{X}$–ի հանգույցում:*

Ապացույց: Ապացուցենք 1–ին կետը: Ֆիքսենք $\mathcal{X}$ բազմության որևէ A կետ և դիտարկենք A–ով ու $\mathcal{X}$–ի այլ հանգույցով (հանգույցներով) անցնող բոլոր ուղիղները: Նշենք, որ $\mathcal{X} \setminus \{A\}$ բազմության յուրաքանչյուր հանգույց պետք է օգտագործի A կետով անցնող առնվազն մեկ ուղիղ: Նշանակենք $M(A)$–ով A կետով անցնող ուղիղների օգտագործումների գումարային քանակը: Փորձենք գնահատել $M(A)$–ն:

Քանի որ 14 հանգույցներից յուրաքանչյուրը պետք է օգտագործի A –ով անցնող ուղիղ, հետևաբար 14 հանգույցների օգտագործումների գումարային քանակը պիտի լինի առնվազն 14: Մյուս կողմից, ըստ **Լեմմա 3.2.2**–ի և **Լեմմա 3.2.3**–ի, 2 և 3–հանգույցանի անցնող ուղիղները կարող են օգտագործվել ամենաշատը մեկ անգամ, իսկ 4–հան–գույցանի ուղիղը կարող է օգտագործվել ամենաշատը 4 անգամ, հետևաբար կստա-նանք հետևյալ առնչությունը.

$$14 \leq M(A) \leq 1n_2(A) + 1n_3(A) + 3n_4(A):$$

Համեմատելով սա (3.2.4)–ի հետ կարող ենք եզրակացնել, որ անհրաժեշտաբար

$$M(A) = 14 \text{ և } n_3 = 0, \tag{0.2.4}$$

որտեղից էլ ստանում ենք, որ ℓ–ը չի կարող անցնել ճիշտ երեք հանգյուցներով:

Այժմ ապացուցենք 2–րդ կետը: Ենթադրենք, որ $B \in \mathcal{X}$ կետը օգտագործում է ℓ_1, ℓ_2 ուղիղները, որոնք երկուսն էլ անցնում են $A \in \mathcal{X}$ հանգույցով: Այս դեպքում $M(A)$ թիվը մեծանում է մեկով և մենք ստանում ենք $M(A) \geq 15$, որը հակասում է ապացուցված (3.6) արդյունքին: □

Վերոնշյալ **Լեմմա 3.2.4**–ի երկրորդ պնդումից ելնելով՝ ստանում ենք, որ $\mathcal{X}$–ում չկան երկրորդային հանգույցներ: Հետևաբար, ֆունդամենտալ բազմանդամների հնարավոր (3.2.1) ներկայացումները կստանան հետևյալ տեսքը.

$$p_A^* = \ell_{=4}\ell'_{=4}\ell''_{=4}\ell_{=2}, \tag{3.2.5}$$

$$p_A^* = \ell_{=4}\ell'_{=4}\ell_{=3}\ell'_{=3}: \tag{3.2.6}$$

Այնուհետ, օգտագործելով **Լեմմա 3.2.4**–ի պնդումներից առաջինը՝ ստանում ենք, որ $\mathcal{X}$–ի ոչ մի հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամ չի կարող ունենալ (3.2.6) ներկա–յացումը: Մնում է դիտարկենք ֆունդամենտալ բազմանդամի հնարավոր վերջին՝ (3.2.5) ներկայացումը:

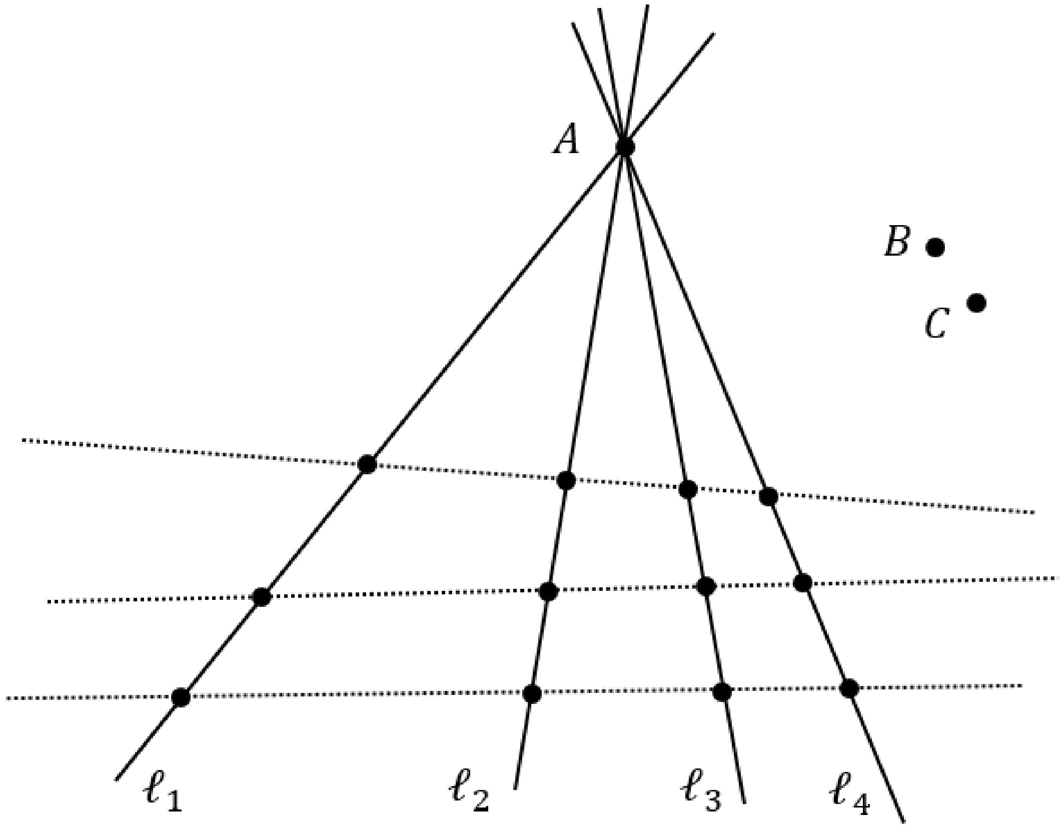
Այսպիսով, եթե ամփոփենք մեր արդյունքները, ստանում ենք հետևյալը. ունենք $\mathcal{X}$ բազմություն, որը բավարարում է GC_4 պայմանին, որում չկան 5 համագիծ հանգույցներ և բոլոր հանգույցների ֆունդամենտալ բազմանդամներն ունեն հետևյալ տեսքը.

$$p_A^* = \ell_{=4}\ell'_{=4}\ell''_{=4}\ell_{=2}\,,\ \ \forall A \in \mathcal{X}:$$

Այստեղից պարզ է դառնում, որ յուրաքանչյուր հանգույց օգտագործում է 4–հանգույցանի երեք ուղիղ, հետևաբար կարող ենք եզրակացնել, որ $\mathcal{X}$–ում 4–հանգույցանի ուղիղների օգտագործումների քանակը հավասար է $15 * 3 = 45$: Ըստ **Լեմմա 3.2.3**–ի՝ 4–հանգույցանի ուղիղը կարող է օգտագործվել ամենաշատը երեք անգամ, հետևաբար, կան առնվազն $45 / 3 = 15$ իրարից տարբեր 4–հանգույցանի ուղիղներ: Այս 4–հանգույցանի ուղիղներն անցնում են ընդհանուր հաշվով $4 * 15 = 60$ հանգույցներով: Ունենք, որ $|\mathcal{X}| = 15$, որից հետևում է, որ $\mathcal{X}$ բազմության յուրաքանչյուր հանգույցով անցնում են միջինում չորս 4–հանգույցանի ուղիղներ: Մյուս կողմից, հեշտությամբ ստանում ենք, որ $\mathcal{X}$–ի ոչ մի հանգույցով չեն կարող անցնել հինգ 4–հանգույցանի ուղիղներ: Եվ իրոք, այդ դեպքում հաշվելով նշված ուղիղների վրա հանգույցների քանակը՝ ստանում ենք՝ $\mathcal{X}$–ը պետք է պարունակի առնվազն $16 = 5 * 3 + 1$ հանգույցներ, որն անհնար է:

Հետևաբար, կարող ենք եզրակացնել, որ $\mathcal{X}$–ի յուրաքանչյուր հանգույցով անցնում են ճիշտ չորս 4–հանգույցանի ուղիղներ:

Դիտարկենք $A \in \mathcal{X}$ հանգույցը: Նշանակենք A–ով անցնող 4–հանգույցանի ուղիղները $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$: Նշանակենք B և C այն հանգույցները, որոնք դուրս են մնում այս ուղիղներից (տես *Գծագիր 3.2.1):*



Գծագիր 3.2.1: A–ով անցնող 4–հանգույցանի ուղիղները

Տեսնենք, որ B–ն $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ ուղիղներից ոչ մեկը չի օգտագործում: Ենթադրենք հակառակը՝ այդ ուղիղներից մեկը հանդիսանում է p_B^* բազմանդամի արտադրիչ, օրինակ՝ ℓ_4–ը: Հաշվի առնելով **Լեմմա 3.2.4**–ի 2–րդ պնդումը՝ B–ն չի կարող օգտագործել ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 ուղիղներից ոչ մեկը: Այնուհետև, C–ն և $[\ell_1 \cup \ell_2 \cup \ell_3] \setminus \{A\}$ բազմության ինը հանգույցները պետք է բաշխված լինեն B հանգույցի կողմից օգտագործվող մյուս երեք ուղիղների վրա: Ըստ (3.7)–ի նշված ուղիղներից երկուսը պետք է լինեն 4–հանգույցանի ուղիղներ և մեկը՝ 2–հանգույցանի: 4–հանգույցանի ուղիղներից յուրաքանչյուրը պետք է պարունակի A–ից տարբեր մեկական հանգույց ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 ուղիղներից, և մեկ հանգույց՝ այդ ուղիղներից դուրս: Ստանում ենք հակասություն, քանի որ դրսում կա միայն մեկ հանգույց՝ C: Հետևաբար B–ն $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ ուղիներից ոչ մեկը չի օգտագործում: Ուրեմն A–ով անցնող միայն մեկ ուղիղ է մնում, որը կարող է B–ն օգտագործել. դա A և C հանգույցներով անցնող 2–հանգույցանի ուղիղն է: Այնուհետև, B–ի օգտագործած մյուս

երեք ուղիղները անցնում են $[\ell_1 \cup \ell_2 \cup \ell_3 \cup \ell_4] \setminus \{A\}$ բազմության 12 հանգույցներով: Ուստի վերջին 12 հանգույցները դառնում են երկու խումբ ուղիղների հատման կետեր. մի խումբը երեք ուղիղներից բաղկացած, մյուս խումբը՝ չորս ուղիղներից (տես *Գծագիր 3.2.1*): Ըստ **Թեորեմ 2.1.7–**ի ստանում ենք, որ նշված 12 հանգույցները 4–կախյալ են: Այս հակասությունն ապացուցում է **Թեորեմ 3.2.1**–ը: □

Վերջում նշենք, որ $n = 5$ դեպքը ապացուցվել է վերջերս [27]–ում, իսկ Գասքա–Մաեզթուի վարկածի ընդհանրացումը մաքսիմալ կորերի համար կարելի է տեսնել [29]–ում:

ԳԼՈՒԽ 4.

$\boldsymbol{n}$–ՃՇԳՐԻՏ և $\boldsymbol{GC_n}$–ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՆՈՐ ՀԱՏԿՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Այս գլխում մենք կներկայացնենք n–ճշգրիտ և GC_n բազմությունների նոր հատկություն: Կձևակերպենք նոր վարկած, և կապացուցենք այն, որոշ կարևոր մասնավոր դեպքերում:

4.1 n–ճշգրիտ բազմության n–հանգույցանի ուղիղների վերաբերյալ

Ներկայացնենք ատենախոսության արդյունքներից մեկը՝ n–ճշգրիտ բազմության n–հանգույցանի ուղիղների վերաբերյալ.

Թեորեմ 4.1.1 ([4]): *Դիցուք ունենք n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմությունը և ℓ ուղիղը, որը պարունակում է ճիշտ n հանգույց $\mathcal{X}$–ից: Այդ դեպքում ունենք՝*

1. $|\mathcal{X}_\ell| \le \binom{n}{2}$*;*
2. *Եթե* $|\mathcal{X}_\ell| \ge \binom{n-1}{2} + 1$, *ապա* $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n}{2}$*: Ավելին,* $\mathcal{X}_\ell$*–ը* $(n-2)$*–ճշգրիտ բազմություն է և* $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X}\backslash(\ell \cup M)$, *որտեղ* M*–ը մաքսիմալ ուղիղ է, այնպիսին, որ* $M \cap \ell \cap \mathcal{X} = \emptyset$*;*
3. *Եթե* $\binom{n-1}{2} \ge |\mathcal{X}_\ell| \ge \binom{n-2}{2} + 2$, *ապա* $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n-1}{2}$*: Ավելին,* $\mathcal{X}_\ell$*–ը* $(n-3)$*–ճշգրիտ բազմություն է և* $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X}\backslash(\ell \cup \beta)$, *որտեղ* β*–ն կոնիկ է, այնպիսին, որ* $\mathcal{N}_\ell = (\beta\backslash\ell) \cap \mathcal{X}$ *և* $|\mathcal{N}_\ell| = 2n$*: Բացի այդ* $2n$ *հանգույցներից կոնիկը կարող է պարունակել ամենաշատը 1 հանգույց, որը անհրաժեշտորեն պատկանում է* ℓ*–ին: Բացի այդ, եթե* β*–ը կոնիկը վերլուծելի է.* $\beta = \ell_1\ell_2$, *ապա ունենք, որ* $|\ell_i \cap \mathcal{X}\backslash\ell| = n, i = 1,2$*:*

Ապացույց. Ըստ **Թեորեմ 2.2.2**–ի ունենք, որ՝

$$\mathcal{N}_\ell\text{–ը ոչ դատարկ և էապես } (n-1)\text{–կախյալ բազմություն է:} \tag{4.1.1}$$

1–ին կետը ապացուցելու համար, ենթադրենք հակառակը, որ $|\mathcal{X}_\ell| \geq \binom{n}{2} + 1$: Այդ դեպքում (2.2.1).հավասարությունից ստանում ենք

$$|\mathcal{N}_\ell| \leq \binom{n+2}{2} - \left[\binom{n}{2} + 1\right] - n = n:$$

Թեորեմ 1.2.18–ից հետևում է, որ $\mathcal{N}_\ell$–ը $n-1$–անկախ է, որ հակասում է (4.1.1)–ին:

2–րդի դեպքում ունենք, որ

$$|\mathcal{N}_\ell| \leq \binom{n+2}{2} - \left[\binom{n-1}{2} + 1\right] - n = 2n - 1 = 2(n-1) + 1:$$

(4.1.1)–ից և **Թեորեմ 1.2.19**–ից, հետևում է, որ գոյություն ունի M մաքսիմալ ուղիղ, անցնող $\mathcal{N}_\ell$–ի $n+1$ հանգույցներով: M մաքսիմալ ուղիղը չի կարող անցնել դրանից ավել կետերով, ուստի $M \cap \ell \cap \mathcal{X} = \emptyset$: Հաշվի առնելով **Լեմմա 2.2.3**–ը, ավարտում ենք 2–րդ կետի ապացույցը:

3–րդի դեպքում ունենք, որ

$$|\mathcal{N}_\ell| \leq \binom{n+2}{2} - \left[\binom{n-2}{2} + 2\right] - n = 3n - 4 = 3(n-1) - 1:$$

(4.1.1)–ից և **Թեորեմ 1.2.20**–ից, հետևում է, որ կամ

ա) գոյություն ունի M մաքսիմալ ուղիղ, անցնող $\mathcal{N}_\ell$–ի $n+1$ հանգույցներով, կամ

բ) գոյություն ունի $\beta \in \Pi_2$ կոնիկ, անցնող, որ $\mathcal{N}_\ell$–ի $2n = 2(n-1) + 2$ հանգույց–ներով:

Սկսենք ա) դեպքից: M մաքսիմալ ուղղի համար նույն ձևով ինչ–որ 2–րդ դեպքում ունենք, որ $M \cap \ell \cap \mathcal{X} = \emptyset$: Հետևաբար $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n}{2}$, ինչը հակասում է 3–րդ կետի ենթադրությանը:

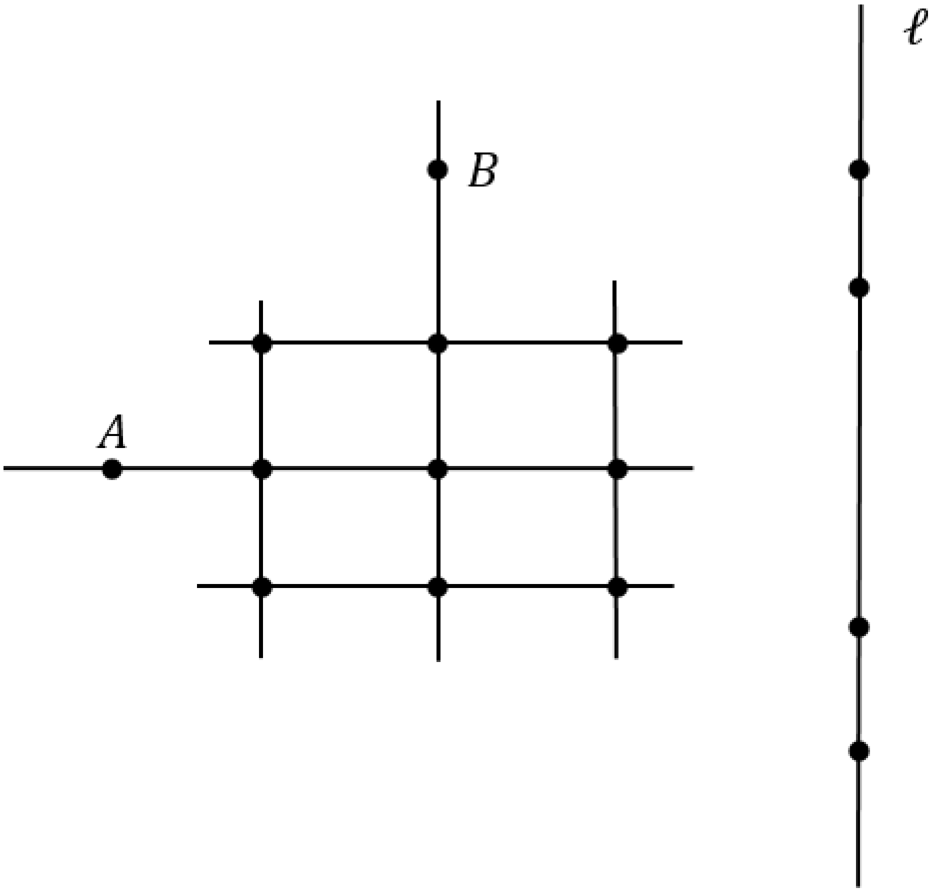
բ) դեպքում ունենք, որ $\ell\beta$–ն մաքսիմալ կուբիկ է, քանի որ այն անցնում է $3n(= n + 2n)$ հանգույցներով: **Հետևանք 2.1.2**–ը հաշվի առնելով, β կոնիկը կարող է պարունակել ամենաշատը 1 լրացուցիչ հանգույց, որը անհրաժեշտորեն պատկանում է ℓ–ին:

Այժմ ցույց տանք, որ $|\mathcal{N}_\ell| = 2n$: Ենթադրենք հակառակը՝ $\mathcal{N}_\ell$–ը բացի β–ի $2n$ կետերից պարունակում է, $t \leq n - 4(= 3n - 4 - 2n)$ հանգույցներ: (4.1.1)–ից և **Նկատառում 1.2.10**–ից հետևում է, որ այդ t կետերը պետք է լինեն էապես $n - 3$–կախյալ: **Թեորեմ 1.2.18**–ից հետևում է, որ $t = 0$:

Հետևաբար մենք ունենք, որ $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \backslash (\ell \cup \mathcal{N}_\ell) = \mathcal{X} \backslash (\ell \cup \beta)$: **Թեորեմ 2.1.4**–ի 3–րդ կետից բխում է, որ $\mathcal{X}_\ell$–ը $n - 3$–ճշգրիտ բազմություն է:

Եվ վերջում ենթադրենք, որ β–ը կոնիկը վերլուծելի է. $\beta = \ell_1\ell_2$: Այդ դեպքում (4.1.1)–ից և **Նկատառում 1.2.10**–ից հետևում է, որ այդ ուղիղներից յուրաքանչյուրը անցնում է $\mathcal{N}_\ell$–ի ճիշտ n հանգույցներով: □

Նշենք, որ կա n–ճշգրիտ բազմության օրինակ, որտեղ n–հանգույցանի ուղիղը օգտա–գործվում է $\binom{n-2}{2} + 1$ հանգույցի կողմից: *Գծագիր 4.1.1*–ում պատկերված է n–ճշգրիտ բազմություն, որտեղ ℓ ուղիղը օգտագործվում է միայն A և B հանգույցների կողմից:



Գծապատկեր 4.1.1: 4–հանգույցանի ուղղի օգտագործում

4.2 n–ճշգրիտ բազմության $(n-1)$–հանգույցանի ուղիղների վերաբերյալ

Ներկայացնենք ատենախոսության արդյունքներից մեկը՝ n–ճշգրիտ բազմության $(n-1)$–հանգույցանի ուղիղների վերաբերյալ

Թեորեմ 4.2.1 ([4]): *Դիցուք ունենք* n*–ճշգրիտ* $\mathcal{X}$ *բազմությունը և* ℓ *ուղիղը, որը պարունակում է ճիշտ* $n-1$ *հանգույց* $\mathcal{X}$*–ից: Այդ դեպքում ունենք՝*

1. $|\mathcal{X}_\ell| \leq \binom{n-1}{2}$*;*

2. *Եթե* $|\mathcal{X}_\ell| \geq \binom{n-2}{2} + 3$, *ապա* $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n-1}{2}$*: Ավելին,* $\mathcal{X}_\ell$*–ը* $(n-3)$*–ճշգրիտ բազմություն է և* $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \backslash (\ell \cup \beta)$*, որտեղ* β*–ն մաքսիմալ կոնիկ է, այնպիսին, որ* $\beta \cap \ell \cap \mathcal{X} = \emptyset$*, որտեղից հետևում է, որ* $\mathcal{N}_\ell = \beta \cap \mathcal{X}$ *և* $|\mathcal{N}_\ell| = 2n+1$*: Բացի այդ, եթե* β *կոնիկը վերլուծելի է.* $\beta = \ell_1 \ell_2$*, ապա* $\mathcal{N}_\ell$*–ի* $n+1$ *հանգույցները ընկած են 1 ուղղի, օրինակ* ℓ_1*–ի, վրա և մնացած* n *հանգույցները ընկած են* $\ell_2 \backslash \ell_1$ *վրա:*

Ապացույց: Սկզբից ապացուցենք 2–րդ կետը: (2.2.1) հավասարությունից ունենք, որ

$$|\mathcal{N}_\ell| \leq \binom{n+2}{2} - \left[\binom{n-2}{2} + 3\right] - (n-1) = 3n - 4 = 3(n-1) - 1:$$

Ըստ **Թեորեմ 2.2.2**–ի ունենք, որ $\mathcal{N}_\ell$–ը ոչ դատարկ և էապես $n-1$–կախյալ բազմություն է: Հետևաբար **Թեորեմ 1.2.20**–ից, ստանում ենք, որ կամ

ա) գոյություն ունի M մաքսիմալ ուղիղ, անցնող $\mathcal{N}_\ell$–ի $n+1$ հանգույցներով, կամ

բ) գոյություն ունի $\beta \in \Pi_2$ կոնիկ, անցնող, որ $\mathcal{N}_\ell$–ի $2n = 2(n-1)+2$ հանգույց–ներով:

Ենթադրենք տեղի ունի ա)–ն և կան $\mathcal{N}_\ell$–ում s հանգույցներ M մաքսիմալ ուղղից դուրս, որտեղ $s \leq 2(n-2) - 1 (= 2n - 5 = 3n - 4 - n - 1)$:

Ցույց տանք, որ $s \neq 0$: Ենթադրենք հակառակը, որ $s = 0$: Այդ դեպքում ունենք, որ ցանկացած $A \in \mathcal{X} \backslash (\ell \cup M)$ հանգույց օգտագործում է M մաքսիմալ ուղիղը և ℓ ուղիղը՝

$$p^*_{A,\mathcal{X}} = \ell M q, \qquad q \in \Pi_{n-2}:$$

Թեորեմ 2.1.4–ի 1–ին և 2–րդ կետերից հետևում է, որ ℓM–ը մաքսիմալ կոնիկ է, ինչը հնարավոր չէ, քանի որ այն պարունակում է ճիշտ $2n$ հանգույց, $2n+1$–ի փոխարեն: Հետևաբար $s \neq 0$:

Նկատառում 1.2.10–ից հետևում է, որ այդ s հանգույցները էապես $n-2$–կախյալ են: **Թեորեմ 1.2.19**–ից հետևում է, որ գոյություն ունի M' ուղիղ անցնող $\mathcal{N}_\ell \backslash M$–ի n հանգույց–ներով: Այժմ ենթադրենք, որ $\mathcal{N}_\ell$–ում կան t հանգույցներ M և M' ուղիղներից դուրս, որտեղ $t \leq n - 5 (= 2n - 5 - n)$: Նորից **Նկատառում 1.2.10**–ից հետևում է, որ այդ t հանգույցները էապես $n-3$–կախյալ են: **Թեորեմ 1.2.18**–ից հետևում է, որ $t = 0$ և հե–

տեսաբար $|\mathcal{N}_\ell| = 2n+1$: Ավելին մենք ունենք, որ այդ $2n+1$ հանգույցները ընկած են MM' վերլուծելի մաքսիմալ կոնիկի վրա: Վերջապես կիրառելով **Լեմմա 2.2.4**–ը երկու անգամ, ստանում ենք, որ $\mathcal{X}_\ell = (\mathcal{X}\backslash M)_\ell = \mathcal{X}\backslash(\ell \cup M' \cup M)$: **Թեորեմ 2.1.4**–ի 3–րդ կետից էլ հետևում է, որ $\mathcal{X}_\ell$–ը $n-3$–ճշգրիտ է:

Այժմ ենթադրենք տեղի ունի բ)–ն: Նշանակենք β կոնիկից դուրս $\mathcal{N}_\ell$–ի հանգույցների քանակը t–ով: Ունենք, որ $t \le n-4 (= 3n-4-2n)$: **Նկատառում 1.2.10**–ից հետևում է, որ այդ t հանգույցները էապես $n-3$–կախյալ են: **Թեորեմ 1.2.18**–ից ստանում ենք, որ $t=0$ և հետևաբար $\mathcal{N}_\ell \subset \beta$:

Յանկացած $A \in \mathcal{X}_\ell$ հանգույցի համար ունենք՝

$$p^*_{A,\mathcal{X}} = \ell q, \text{ որտեղ } q \in \Pi_{n-1}:$$

q կորը անցնում է $\beta \cap \mathcal{N}_\ell$–ի $2n$ հանգույցներով: Բեզուի թեորեմից հետևում է որ β–ն q–ի բաժանարար է: Իրոք, եթե β–ն վերլուծելի չէ, ապա ակնհայտ է:

Դիցուք այժմ β–ն 2 ուղիղների արտադրյալ է: Քանի որ $\mathcal{N}_\ell$–ը էապես $n-1$–կախյալ է, ապա**Նկատառում 1.2.10**–ից հետևում է, որ այդ ուղիղներից յուրաքանչյուրը անցնում է $\mathcal{N}_\ell$–ի առնվազն n հանգույցներով: Հետևաբար այդ ուղիղները և հենց β–ն q–ի բաժանարար են:

Յուրաքանչյու $A \in \mathcal{X}_\ell$ հանգույց օգտագործում է $\ell\beta$ վերլուծելի կուբիկը: Մյուս կողմից $\mathcal{N}_\ell \subset \beta$–ից հետևում է՝

$$\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X}\backslash(\ell \cup \mathcal{N}_\ell) \supset \mathcal{X}\backslash(\ell \cup \beta):$$

Թեորեմ 2.1.4–ի 1–ին և 2–րդ կետերից հետևում է, որ $\ell\beta$–ը մաքսիմալ կուբիկ է: Հետևաբար այն անցնում է $\mathcal{X}$–ի $3n$ հանգույցներով և որտեղից էլ հետևում է, որ β–ն անցնում է $\mathcal{X}\backslash\ell$–ի $2n+1 (= 3n-n+1)$ հանգույցներով: Պարզ է, որ $\ell \cup \beta$–ի ոչ մի հանգույց չի օգտագործում $\ell\beta$–ն: Հետևաբար ստանում ենք, որ

$$\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X}\backslash(\ell \cup \beta):$$

Հետևաբար β–ի $2n+1$ հանգույցները պատկանում են $\mathcal{N}_\ell$–ին: **Թեորեմ 2.1.4**–ի 3–րդ կետից հետևում է, որ $\mathcal{X}_\ell$–ը $n-3$–ճշգրիտ է:

Եվ վերջում ապացուցենք 1–ին կետը: Ենթադրենք հակառակը, որ $|\mathcal{X}_\ell| \geq \binom{n-1}{2}+1$:

Նկատենք որ՝

$$\binom{n-1}{2}+1 \geq \binom{n-2}{2}+3, \text{ եթե } n \geq 4:$$

Հետևաբար ապացուցված 2–րդ կետից ստանում ենք, որ $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n-1}{2}$, ինչը հակասում է մեր ենթադրությանը: □

4.3 GC_n բազմության k–հանգույցանի ուղիղների վերաբերյալ

Ներկայացնենք ատենախոսության արդյունքներից մեկը՝ GC_n բազմության k–հանգույցանի ուղիղների վերաբերյալ.

Թեորեմ 4.3.1 ([4]): *Ենթադրենք, որ GM–վարկածը ճիշտ է ν–ն չգերազանցող բոլոր աստիճանների համար: Դիցուք $\mathcal{X}$–ը GC_n բազմություն է, որտեղ $n \leq \nu$, և ունենք ℓ ուղիղը, որը օգտագործվում է առնվազն մեկ հանգույցի կողմից և որը պարունակում է ճիշտ k հանգույց $\mathcal{X}$–ից, որտեղ $1 \leq k \leq n+1$: Այդ դեպքում $\mathcal{X}_\ell$–ը $(k-2)$–անկախ բազմություն է: Ավելին յուրաքանչյուր $A \in \mathcal{X}_\ell$ հանգույց ունի $(k-2)$–ֆունդամենտալ բազմանդամ $\mathcal{X}_\ell$–ում, որը $\mathcal{X}$–ում A–ի n–ֆունդամենտալ բազմանդամի արտադրիչ է:*

Ապացույց: Ենթադրենք $k=n+1$, որը նշանակում է, որ ℓ–ը մաքսիմալ ուղիղ է: Այդ դեպքում ունենք, որ $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X}\setminus\ell$: $\mathcal{X}_\ell$–ը GC_{n-1} բազմություն է և ուստի $n-1$–ճշգրիտ է: Նաև ցանկացած $A \in \mathcal{X}_\ell$ հանգույցի համար ունենք, որ $p^*_{A,\mathcal{X}} = \ell p^*_{A,\mathcal{X}\setminus\ell}$:

Այն դեպքում, երբ ℓ–ը մաքսիմալ ուղիղ չէ, մենք կօգտագործենք ինդուկցիա ըստ n–ի: $n=1$ դեպքը ակնհայտ է: Ենթադրենք թեորեմը ճիշտ է ցանկացած n–ից փոքրի համար և ապացուցենք n–ի համար:

Ենթադրենք, որ գոյություն ունի M մաքսիմալ ուղիղ, այնպիսին որ $M \cap \ell \cap \mathcal{X} = \emptyset$: Այդ դեպքում **Լեմմա 2.2.4**–ից հետևում է, որ $\mathcal{X}_\ell = (\mathcal{X} \backslash M)_\ell$: Ունենք, որ $\mathcal{X} \backslash M$–ը GC_{n-1} բազմություն է և ℓ ուղիղը անցնում է $\mathcal{X} \backslash M$–ի ճիշտ k հանգույցով: Հետևաբար $n-1$–ի համար ինդուկցիոն ենթադրության համաձայն $\mathcal{X}_\ell$–ը $k-2$–անկախ բազմություն է: Նաև յուրաքանչյուր $A \in (\mathcal{X} \backslash M)_\ell$ հանգույցի համար $\mathcal{X}_\ell$–ում $k-2$–ֆունդամենտալ բազմանդամը $\mathcal{X} \backslash M$–ում n–ֆունդամենտալ բազմանդամի բաժանարար է: Նկատենք որ $p^*_{A,\mathcal{X}} = M p^*_{A,\mathcal{X} \backslash M}$, ուստի թեորեմը ապացուցված է:

Այժմ հաշվի առնելով **Թեորեմ 1.3.4**–ը, դիտարկենք $\mathcal{X}$–ի 3 մաքսիմալ ուղիղները և նշանակենք M_i–ով, $i = 1,2,3$: Ունենք, որ այդ մաքսիմալ ուղիղներից յուրաքանչյուրը հատում է ℓ–ը $\mathcal{X}$–ի հանգույցում:

$\mathcal{X}_\ell$–ի $k-2$–անկախությունը կապացուցենք, գտնելով յուրաքանչյուր $A \in \mathcal{X}_\ell$ հանգույցի համար $\mathcal{X}_\ell$–ում $k-2$–ֆունդամենտալ բազմանդամ: 3 մաքսիմալ ուղիղները հատում են միմյանց 3 տարբեր հանգույցներում: Ուստի գոյություն ունի $i_0 = \{1,2,3\}$ այնպիսին, որ $A \in M_{i_0}$: Ունենք որ $\mathcal{Y} := \mathcal{X} \backslash M_{i_0}$ բազմությունը GC_{n-1} բազմություն է և ℓ ուղիղը՝ անցնում է $\mathcal{Y}$–ի ճիշտ $k-1$ հանգույցներով: Հետևաբար $n-1$–ի համար ինդուկցիոն ենթա–դրության համաձայն $\mathcal{Y}_\ell$–ը $(k-3)$–անկախ բազմություն է: Ավելին յուրաքանչյուր $A \in \mathcal{Y}_\ell$ հանգույցի $\mathcal{Y}_\ell$–ում $(k-2)$–ֆունդամենտալ բազմանդամը՝ $p^*_{A,\mathcal{Y}_\ell}$–ը $\mathcal{Y}$–ում $(n-1)$–ֆունդամենտալ բազմանդամի՝ $p^*_{A,\mathcal{Y}}$–ի բաժանարար է:

Քանի որ $\mathcal{X}_\ell \subset \mathcal{Y}_\ell \cup M_{i_0}$, ստանում ենք որ $M_{i_0} p^*_{A,\mathcal{Y}_\ell} \in \Pi_{k-2}$ բազմանդամը A–ի ֆունդամենտալ բազմանդամն է $\mathcal{X}_\ell$–ում: Միանգամից ստանում ենք որ այն նաև $p^*_{A,\mathcal{X}} = M_{i_0} p^*_{A,\mathcal{Y}_\ell}$ բազմանդամի բաժանարար է: □

Հաջորդիվ կբերենք մի քանի հետևանքներ այն փաստից, որ $\mathcal{X}_\ell$–ը $(k-2)$–անկախ բազմություն է:

Հետևանք 4.3.2 ([4]): *Ենթադրենք, որ* ***Թեորեմ 4.3.1***–*ի պայմանները տեղի ունեն: Այդ դեպքում ունենք՝*

1. $|\mathcal{X}_\ell| \le \binom{k}{2}$*;*
2. $\mathcal{X}_\ell$*–ը պարունակում է ամենաշատը* $k-1$ *համագիծ հանգույցներ;*

3. *Ցանկացած* $m \leq k-2$ *կարգի* q *կորի համար ունենք, որ*

$$|\mathcal{X}_\ell \cap q| \leq d(k-2, m):$$

Նկատենք, որ 2–րդ կետը 3–րդ կետի մասնավոր դեպք է, երբ $m = 1$: Նշենք, որ 1–ին և 2–րդ կետերը ապացուցվել են Քարնիսերի և Գասքայի կողմից [12]–ում(Թեորեմ 4.5):

4.4 GC_n բազմության n–հանգույցանի ուղիղների վերաբերյալ

Այժմ ներկայացնենք ատենախոսության հիմնական արդյունքներից մեկը՝ GC_n բազմության n–հանգույցանի ուղիղների վերաբերյալ.

Թեորեմ 4.4.1 ([4]): *Ենթադրենք, որ GM–վարկածը ճիշտ է* υ*–ն չգերազանցող բոլոր աստիճանների համար: Դիցուք* $\mathcal{X}$*–ը* GC_n *բազմություն է, որտեղ* $n \leq \upsilon$*, և ունենք* ℓ *ուղիղը որը պարունակում է ճիշտ* n *հանգույց* $\mathcal{X}$*–ից: Այդ դեպքում ունենք, որ*

$$|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n}{2} \text{ կամ } \binom{n-1}{2}: \tag{4.4.1}$$

Ավելին տեղի ունեն՝

1. $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n}{2}$ *այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունի* M *մաքսիմալ ուղիղ՝ այնպիսին, որ* $M \cap \ell \cap \mathcal{X} = \emptyset$*: Այս դեպքում ունենք, որ* $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \setminus (\ell \cup M)$*: Ուստի* $\mathcal{X}_\ell$*–ը* GC_{n-2} *բազմություն է:*
2. $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n-1}{2}$ *այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունեն երկու* M', M'' *մաքսիմալ ուղիղներ՝ այնպիսին, որ* $M' \cap M'' \cap \ell \in \mathcal{X}$*: Այս դեպքում ունենք, որ* $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \setminus (\ell \cup M' \cup M'')$*: Ուստի* $\mathcal{X}_\ell$*–ը* GC_{n-3} *բազմություն է:*

Նկատենք, որ 2–րդ դեպքում $\ell \cap M''' \in \mathcal{X}$, որտեղ M'''–ը 3–րդ մաքսիմալ ուղիղն է, որը գոյություն ունի համաձայն **Թեորեմ 1.3.4**: Հակառակ դեպքում կունենայինք 1–ին դեպքը և կստանայինք որ $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n}{2} \neq \binom{n-1}{2}$:

Սկզբից ենթադրենք, որ **Թեորեմ 4.4.1**–ը ճիշտ է և ապացուցենք հետևյալը:

Հետևանք 4.4.2 ([4]): *Ենթադրենք տեղի ունի **Թեորեմ 4.4.1**–ի պայմանները: Այդ դեպքում ցանկացած $M \in \mathcal{X}$ մաքսիմալ ուղղի համար տեղի՝*

1. $M \cap \mathcal{X}_\ell = \emptyset$, *եթե M–ը բավարարում են հետևյալ պայմաններից մեկին*
   ա) $M \cap \ell \cap \mathcal{X} = \emptyset$;
   բ) գոյություն ունի մեկ այլ M' մաքսիմալ ուղիղ, այնպիսին որ $M \cap M' \cap \ell \in \mathcal{X}$:
2. *Եթե M–ը չի բավարարում ա) և բ) պայմաններին, ապա $|M \cap \mathcal{X}_\ell| = s - 1$, որտեղ s–ը որոշվում է $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{s}{2}$ պայմանից, $s = n, n-1$:*

Ապացույց: 1–ին կետի ա) և բ) ենթակետերը հետևում են անմիջապես **Լեմմա 2.2.3**–ից և **Լեմմա 2.2.4**–ից:

2–րդ կետի ապացույցի համար, ենթադրենք որ M մաքսիմալ ուղիղը հատում է ℓ ուղիղը $A \in \mathcal{X}$ հանգույցում և չկա այդ հանգույցով անցող այլ մաքսիմալ ուղիղ:

Ենթադրենք $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n}{2}$: **Թեորեմ 4.4.1**–ից հետևում է, որ գոյություն ունի M' մաքսիմալ ուղիղ, այնպիսին որ $M' \cap \ell \cap \mathcal{X} = \emptyset$: **Լեմմա 2.2.3**–ի համաձայն ունենք, որ $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \setminus (\ell \cup M')$: Քանի որ M մաքսիմալ ուղիղը հատում է ℓ ուղիղը և M' մաքսիմալ ուղիղը տարբեր կետերում, հետևաբար ստանում ենք, որ

$$|M \cap \mathcal{X}_\ell| = |M \cap [\mathcal{X} \setminus (\ell \cup M')]| = (n+1) - 2 = n - 1:$$

Այժմ ենթադրենք $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n-1}{2}$: **Թեորեմ 4.4.1**–ից հետևում է, որ գոյություն ունեն երկու M', M'' մաքսիմալ ուղիղներ՝ այնպիսին, որ $M' \cap M'' \cap \ell \in \mathcal{X}$: **Լեմմա 2.2.4**–ի համաձայն ունենք, որ $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \setminus (\ell \cup M' \cup M'')$: Քանի որ M մաքսիմալ ուղիղը հատում է ℓ ուղիղը, և M', M'' մաքսիմալ ուղիղները տարբեր կետերում, հետևաբար ստանում ենք, որ՝

$$|M \cap \mathcal{X}_\ell| = |M \cap [\mathcal{X} \setminus (\ell \cup M' \cup M'')]| = (n+1) - 3 = n - 2:$$

□

Նկատառում 4.4.3: *Ենթադրենք, որ տեղի ունեն **Թեորեմ 4.4.1**–ի պայմանները և $\mathcal{X}_\ell \neq \emptyset$: Ենթադրենք նաև, որ $\mathcal{X}$–ի M մաքսիմալ ուղիղը հատում է ℓ ուղիղը $\mathcal{X}$–ի հանգույցում և M–ի ոչ մի հանգույց չի օգտագործում ℓ ուղիղը, կամ որ նույն է՝ $M \cap \mathcal{X}_\ell = \emptyset$: Այդ*

դեպքում գոյություն ունի մեկ այլ M' *մաքսիմալ ուղիղ, այնպիսին որ* $M \cap M' \cap \ell \in \mathcal{X}$ *և հետևաբար* M' *–ի ոչ մի հանգույց նույնպես չի օգտագործում* ℓ *ուղիղը:*

4.5 Թեորեմ 4.4.1–ի ապացույցը

Թեորեմ 4.4.1–ի ավելի ընդհանրացված արդյունքը Չանգ–Յաոյի և Քարնիսեր–Գասքայի ցանցերի համար ապացուցված է պարագրաֆ 4.6–ում:

Նկատենք որ **Թեորեմ 4.4.1**–ի 1–ին և 2–րդ կետերի հակառակ կողմը հետևում է համապատասխանաբար **Լեմմա 2.2.3**–ից և **Լեմմա 2.2.4**–ից: Այժմ դիտարկենք հետևյալ դեպքերը.

4.5.1 $n = 1$ դեպքը

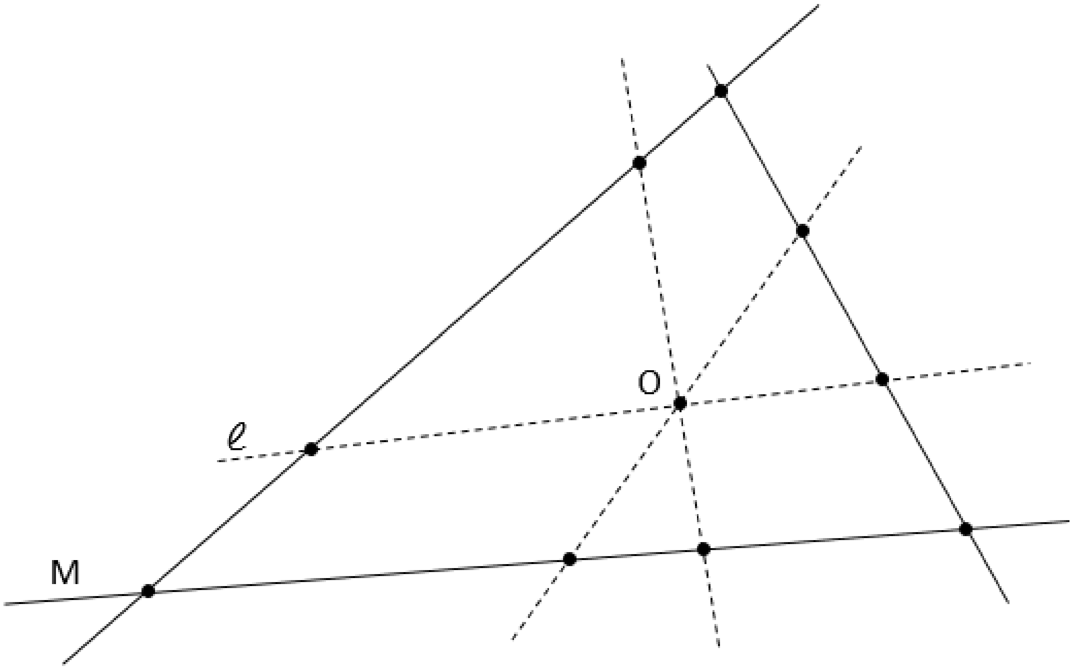
GC_1 բազմությունը բաղկացած է 3 ոչ համագիծ հանգույցներից: Դիտարկենք այդպիսի $\mathcal{X} = \{A, B, C\}$ բազմությունը և 1–հանգույցանի ℓ ուղիղը, որը որոշակիության համար ենթադրենք անցնում է A հանգույցով: Ունենք որ $\mathcal{X}_\ell = \emptyset$: Հետևաբար (4.4.1) հավասարության երկու կողմն էլ տեղի ունի: Նկատենք, որ **Թեորեմ 4.4.1**–ի թե 1–ին և թե 2–րդ կետերի ուղիղ կողմը տեղի ունի: Իրոք. B և C կետերով անցնող մաքսիմալ ուղիղը չի հատում A հանգույցը, իսկ մյուս կողմի A հանգույցով անցնում են 2 մաքսիմալ AB և AC ուղիղները հատում են ℓ ուղիղը A հանգույցում:

4.5.2 $n = 2$ դեպքը

Այստեղ ունենք 2 դեպք. GC_2 բազմություն բաղկացած 3 մաքսիմալ ուղիղներից և GC_2 բազմություն 4 մաքսիմալ ուղիղներից, որոնք Քարնիսեր–Գասքայի և Չամգ–Յաոյի ցանցեր են համապատասխանաբար:

4.5.3 $n = 3$ դեպքը

Նկատենք, որ 4 և 5 մաքսիմալ ուղիղներից բաղկացած GC_3 բազմությունը համապա–տասխանաբար Քարնիսեր–Գասքայի և Չամգ–Յաոյի ցանցեր են: Ուստի մնաց դիտար–կելու GC_3 բազմությունը բաղկացած 3 մաքսիմալ ուղիղներից: **Հետևանք 1.2.16** –ից ստանում ենք, որ այդ ուղիղները կազմում են եռանկյուն և գագաթները $\mathcal{X}$–ի հանգույց–ներ են: Յուրաքանչյուր մաքսիմալ ուղղի վրա երկուական հանգույցներ, որոնք կոչվում են «ազատ» հանգույցներ: Կա նաև 1 հանգույց այդ 3 մաքսիմալ ուղիղներից դուրս, որը կնշանակենք O–ով: Այդ 6 ազատ հանգույցները գտնվում են O–ով անցնող 3 ուղիղների վրա, յուրաքանչյուրի վրա 2–ական(*Գծագիր 4.5.1*):



Գծագիր 4.5.1: GC_3 բազմություն բաղկացած 3 մաքսիմալ ուղիղներից

Այս դեպքում O–ով անցնող 3 ուղիղները միակ 3–հանգույցանի ուղիղներն են: Այդպիսի ℓ ուղղի համար գոյություն ունի M մաքսիմալ ուղիղ, որը չի հատում ℓ ուղիղը հան–գույցում: Սա նշանակում է, որ տեղի ունի **Թեորեմ 4.4.1**–ի 1–ին կետի ուղիղ կողմը: Նաև ունենք, որ ℓ ուղիղը օգտագործվում է ճիշտ 3 հանգույցի կողմից: Դրանք են $\ell \cup M$–ից դուրս գտնվող հանգույցները:

4.5.4 Թեորեմ 4.4.1–ի ապացույցը $n \geq 4$ դեպքում

Ապացուցենք թեորեմը կիրառելով ինդուկցիա ըստ n–ի: Ենթադրենք թեորեմը ճիշտ է n–ից փոքրերի համար և ապացուցենք n–ի համար, որտեղ $n \geq 4$:

Ենթադրենք $|\mathcal{X}_\ell| \geq \binom{n-1}{2} + 1$: Այս դեպքում **Թեորեմ 4.1.1**–ի 2–րդ կետից ստանում ենք, որ $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n}{2}$ և 1–ին կետի ուղիղ կողմը տեղի ունի: Ուստի **Թեորեմ 4.4.1**–ը ապացուցելու համար բավական է ենթադրել, որ

$$|\mathcal{X}_\ell| \leq \binom{n-1}{2}: \tag{4.5.1}$$

և ապացուցել, որ $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n-1}{2}$ և գոյություն ունեն երկու M', M'' մաքսիմալ ուղիղներ՝ այնպիսին, որ $M' \cap M'' \cap \ell \in \mathcal{X}$: Հաշվի առնելով **Լեմմա 2.2.5**–ը սրանով կվերջացնենք թեորեմի ապացույցը:

Այժմ ենթադրենք, որ ինչ–որ M մաքսիմալ ուղղի 2 հանգույց օգտագործում են ℓ ուղիղը:

$$|M \cap \mathcal{X}_\ell| \geq 2: \tag{4.5.2}$$

(2.2.2) հավասարությունից հետևում է, որ՝

$$|\mathcal{X}_\ell| = |(\mathcal{X} \backslash M)_\ell| + |M \cap \mathcal{X}_\ell|:$$

Օգտվելով (4.5.2) անհավասարությունից և $\mathcal{X} \backslash M$ GC_{n-1} բազմության համար ինդուկցիոն ենթադրությունից, ստանում ենք՝

$$|\mathcal{X}_\ell| \geq |(\mathcal{X} \backslash M)_\ell| + 2 \geq \binom{n-2}{2} + 2: \tag{4.5.3}$$

Հետևաբար (4.5.1) պայմանից և **Թեորեմ 4.1.1**–ի 3–րդ կետից ստանում ենք, որ

$$|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n-1}{2} \text{ և } \mathcal{N}_\ell \subset \beta \in \Pi_2,\ |\mathcal{N}_\ell| = 2n:$$

Օգտվենք ինդուկցիոն ենթադրությունից: Հաշվի առնելով վերևի առաջին հավասա– րությունը և (4.5.2)–ի առաջին անհավասարությունը, եզրակացնում ենք, որ

$$|(\mathcal{X}\backslash M)_\ell| = \binom{n-2}{2}:$$

Հետևաբար ըստ ինդուկցիոն ենթադրության ստանում ենք, որ $\mathcal{X}\backslash M$ բազմության մեջ $\mathcal{N}_\ell$–ի $2n-2(=2(n-1))$ հանգույցները ընկած են 2 մաքսիմալ ուղիղների վրա, որոնք հատում են ℓ ուղիղը A հանգույցում: Նշանակենք այդ ուղիղները M', M''–ով: Քանի որ $n \geq 4$, ուստի այդ մաքսիմալ ուղիղները անցնում են առնվազն $\mathcal{N}_\ell \subset \beta$–ի 3 հանգույցով և ստանում ենք, որ $\beta = M'M''$: Վերջապես համաձայն **Թեորեմ 4.1.1**–ի 3–րդ կետի, այդ ուղիղներից յուրաքանչյուրը անցնում է $\mathcal{X}\backslash M$ բազմության n հանգույցներով, և քանի որ $A \in M' \cap M''$ հետևաբար ստանում ենք, որ այդ ուղիղները մաքսիմալ են նաև $\mathcal{X}$–ի համար: Այսինքն տեղի ունի 2–րդ կետի ուղիղ կողմը:

Հիմա կարող ենք ենթադրել, որ

$$|M \cap \mathcal{X}_\ell| \leq 1 \ \mathcal{X} \text{ բազմության յուրաքանչյուր } M \text{ մաքսիմալ ուղղի համար:} \quad (4.5.4)$$

Այժմ ցույց տանք, որ կարող ենք ենթադրել՝

$$|M \cap \mathcal{X}_\ell| = 1 \ \mathcal{X} \text{ բազմության յուրաքանչյուր } M \text{ մաքսիմալ ուղղի համար:} \quad (4.5.5)$$

Ենթադրենք հակառակը, որ որոշակիության համար M_1 մաքսիմալ ուղղի ոչ մի հանգույց չի օգտագործում ℓ ուղիղը: Հաշվի առնելով **Թեորեմ 1.3.4**–ը, դիտարկենք $\mathcal{X}$ բազմության մյուս 2 մաքսիմալ ուղիղները և նշանակենք համապատասխանաբար M_2 և M_3–ով:

(4.5.1) պայմանից և **Լեմմա 2.2.3**–ից ունենք, որ $\mathcal{X}$ բազմության յուրաքանչյուր մաք– սիմալ ուղիղ հատում է ℓ ուղիղը $\mathcal{X}$–ի հանգույցում: Եթե 2 մաքսիմալ ուղիղները հա– տում են ℓ ուղիղը նույն հանգույցում, ապա **Թեորեմ 4.4.1**–ը ապացուցվում է **Լեմմա 2.2.4**–ից:

Ուստի մենք կարող ենք, ենթադրել, որ $M_i, i = 1,2,3$ մաքսիմալ ուղիները հատում են ℓ ուղիղը 3 տարբեր հանգույցներում: Նշանակենք այդ հանգույցները՝ $C_i, i = 1,2,3$ համա–պատասխանաբար:

Դիտարկենք $\mathcal{X}_2 = \mathcal{X} \backslash M_2$ բազմությունը, որը GC_{n-1} բազմություն է: Մենք կարող ենք ենթադրել, որ $(\mathcal{X}_2)_\ell \neq \emptyset$: Հակառակ դեպքում ինդուկցիոն ենթադրության համաձայն կստանայինք, որ $n-2 \leq 1$, կամ $n \leq 3$, ինչը հնարավոր չէ: $\mathcal{X}_2$–ում M_1 մաքսիմալ ուղղի ոչ մի հանգույց չի օգտագործում ℓ ուղիղը: Ինդուկցիոն ենթադրությունից համաձայն ըստ **Նկատառում 4.4.3**–ի գոյություն ունի M_1' մաքսիմալ ուղիղ, որը հատում է ℓ ուղիղը C_1 հանգույցում: Նույն ձևով ստանում ենք, որ գոյություն ունի մեկ այլ M_1''մաքսիմալ ուղիղ $\mathcal{X} \backslash M_3$ բազմության մեջ հատող ℓ ուղիղը C_1 հանգույցում: Եթե M_1'–ը համընկնում է M_1''–ի հետ, ապա այն մաքսիմալ է $\mathcal{X}$–ի համար, ուստի **Լեմմա 2.2.4**–ից հետևում է թեորեմի ապացույցը: Այժմ ենթադրենք, որ տարբեր են: Դիտարկենք $\mathcal{X} \backslash (M_2 \cup M_3)$ բազմությունը, որը GC_{n-2} բազմություն է: Ունենք 3 մաքսիմալ ուղիղներ՝ M_1, M_1', M_1''–ը, որոնք հատում են ℓ ուղիղը C_1 հանգույցում, ինչը հակասություն է:

Հետևաբար կարող ենք ասել, որ տեղի ունի (4.5.5)–ը՝ յուրաքանչյուր $M_i, i = 1,2,3$ մաք–սիմալ ուղղի վրա գոյություն ունի ℓ ուղիղը օգտագործող միակ A_i հանգույց: Նկատենք, որ ամենաշատը մեկ $A_i, i = 1,2,3$ հանգույց կարող է ընկած լինել 2 մաքսիմալ ուղղի վրա, հակառակ դեպքում կունենանք ℓ ուղիղը օգտագործող մաքսիմալ ուղղի 2 հան–գույց: Ուստի կարող ենք ասել, որ գոյություն ունի $A = A_3$ հանգույց M_3 ուղղի վրա ℓ ուղիղը օգտագործող, որը ընկած չէ M_1, M_2 ուղիղների վրա (*Գծագիր 4.5.1*):

Դիտարկենք $\mathcal{X}_i = \mathcal{X} \backslash M_i$ բազմությունները $i = 1,2$–ի համար, որոնք GC_{n-1} բազմու–թյուններ են: M_3 մաքսիմալ ուղղի վրա կա ℓ ուղիղը օգտագործող միայն մեկ հանգույց, $|M_3 \cap (\mathcal{X}_i)_\ell| = 1$, $i = 1,2$: Հետևաբար ինդուկցիոն ենթադրությունից և **Հետևանք 4.4.2** –ի երկրորդ կետից, ստանում ենք որ

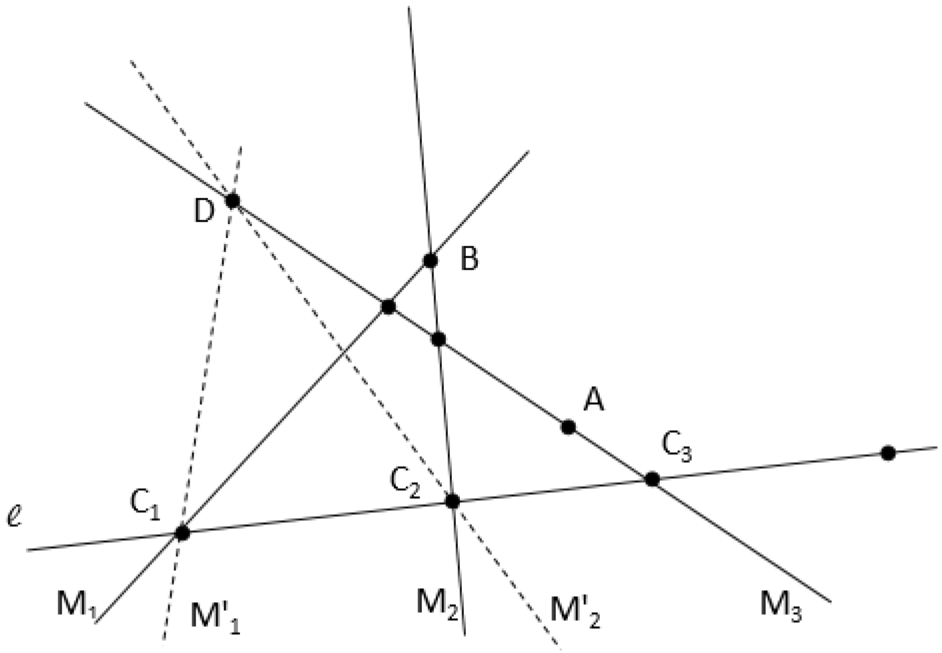
$$|(\mathcal{X}_i)_\ell| = 1, \text{ հետևաբար } (\mathcal{X}_i)_\ell = A,\ i = 1,2: \qquad (4.5.6)$$

Այստեղից եզրակացնում ենք, որ գոյություն ունի ℓ ուղիղը օգտագործող միայն մեկ հանգույց $M_1 \cup M_2$–ի վրա, որը նրանց հատման հանգույցն է՝ $B = M_1 \cap M_2$:

Միևնույն ժամանակ (4.5.6)–ից ստանում ենք որ $n-1=2$ կամ $(n-1)-1=2$: Հետևա– բար $n\leq 4$, և մենք կարող ենք ենթադրել որ $n=4$ (քանի որ, մինչև 3–ը ապացուցված է):

4.5.5 Հատուկ դեպքը

Մնաց դիտարկել $n=4$ և $|\mathcal{X}_\ell|=2$ դեպքը: Դիցուք $\mathcal{X}_\ell$–ի հանգույցներն են $A\in M_3$ և $B\in M_1\cap M_2$ հանգույցները (*Գծագիր 4.5.1*):



Գծագիր 4.5.1: Հատուկ դեպքը:

Մենք ցույց կտանք, որ այս դեպքը հնարավոր չէ:

Դիտարկենք $\mathcal{X}_1 \coloneqq \mathcal{X}\setminus M_1$ բազմությունը, որը GC_3 բազմություն է: Այս բազմության մեջ A հանգույցը օգտագործում է ℓ ուղիղը: Մյուս կողմից M_2–ի ոչ մի այլ հանգույց չի օգտագործում ℓ ուղիղը: Քանի որ $n=3$–ի համար **Թեորեմ 4.4.1**–ը տեղի ունի, ուստի կարող ենք ասել, որ գոյություն ունի M_2' մաքսիմալ ուղիղ, որը անցնում է C_2 հանգույցով: M_3–ի վրա կան 5 հանգույցներ. C_3, A, M_1 և M_2–ի հետ հատման 2 հանգույցները և 5–րդ

հանգույցը, որ կնշանակենք D–ով: Ապացուցենք, որ M_2'–ի և M_3–ի հատման կետը համընկնում է D–ի հետ: Պարզ է, որ M_2'–ի և M_3–ի հատման կետը C_3–ից տարբեր է: Այն տարբեր է նաև $M_2 \cap M_3$–ից: Այն չի համընկնում նաև A հանգույցի հետ, քանի որ A–ն օգտագործում է ℓ ուղիղը իսկ M_2'–ի ոչ մի հանգույց չի օգտագործումը այն:

Այժմ դիտարկենք $\mathcal{X}_2 \coloneqq \mathcal{X} \backslash M_2$ բազմությունը, որը GC_3 բազմություն է: Այս բազմության մեջ նորից A հանգույցը օգտագործում է ℓ ուղիղը և մյուս կողմից M_1–ի ոչ մի այլ հան–գույց չի օգտագործում այն: Քանի որ $n = 3$–ի համար **Թեորեմ 4.4.1**–ը տեղի ունի, ուստի կարող ենք ասել, որ գոյություն ունի M_1' մաքսիմալ ուղիղ, որը անցնում է C_1 հանգույցով: Նույն ձևով ստանում ենք, որ M_1'–ի և M_3–ի հատման կետը համընկնում է D–ի հետ:

Եվ վերջապես դիտարկենք $\mathcal{X} \backslash (M_1 \cup M_2)$ բազմությունը, որը GC_2 բազմություն է: Նկա–տենք, որ M_1'–ը, M_2'–ը և M_3–ը մաքսիմալ ուղիղներ են որոնք հատվում են D հանգույցում, որը հակասություն է:

Նկատառում 4.5.1: *Ինչպես նշվել է, GM–վարկածը ապացուցված է $n \leq 5$ դեպքերի համար: Ուստի այս դեպքերում **Թեորեմ 4.4.1**–ից մենք կարող ենք հանել ենթա–դրությունը կապված GM–վարկածի ճիշտ լինելու վերաբերյալ:*

4.6 Վարկած GC$_n$ բազմությունների վերաբերյալ

Եվ վերջին պարագրաֆում ձևակերպենք վարկած GC$_n$ բազմությունների k–հանգույցա–նի ուղիղների վերաբերյալ և այն ապացուցենք որոշ կարևոր մասնավոր դեպքերում:

Վարկած 4.6.1 ([4]): *Ենթադրենք, որ GM–վարկածը ճիշտ է υ չգերազանցող բոլոր աս–տիճանների համար: Դիցուք $\mathcal{X}$–ը GC_n բազմություն է, որտեղ $n \leq \upsilon$, և ունենք k–հան–գույցանի ℓ ուղիղը,* $1 \leq k \leq n+1$*: Այդ դեպքում ունենք, որ*

$$|\mathcal{X}_\ell| = \binom{s}{2}, \text{ որտեղ } 2k - n - 1 \leq s \leq k: \qquad (4.6.1)$$

Ավելին, $\mathcal{X}_\ell$–ը GC_{s-2} բազմություն է և $\mathcal{X}$–ի ցանկացած M մաքսիմալ ուղղի համար տեղի ունեն՝

1. *$M \cap \mathcal{X}_\ell = \emptyset$ եթե M–ը բավարարում է այս պայմաններից մեկին*
   (i) *$M \cap \ell \cap \mathcal{X} = \emptyset$;*
   (ii) *գոյություն մեկ այլ M' մաքսիմալ ուղղի, այնպիսին որ $M \cap M' \cap \ell \in \mathcal{X}$:*
2. *Եթե M–ը չի բավարարում (i) և (ii) պայմաններին, ապա $|M \cap \mathcal{X}_\ell| = s - 1$, որտեղ s–ը որոշվում է (4.6.1) հավասարությունից:*

Նկատենք, որ հաշվի առնելով **Հետևանք 1.2.14**–ը և **1.2.15**–ը, **Վարկած 4.6.1**–ը ճիշտ է, երբ ℓ–ը մաքսիմալ ուղիղ է: Համաձայն **Թեորեմ 4.4.1**–ի այն ճիշտ է նաև n–հանգույցանի ուղիղների համար: Նաև հեշտ է տեսնել, որ **Վարկած 4.6.1**–ը ճիշտ է Չանգ–Յաոյի ցանցի համար: Իսկապես այստեղ միակ օգտագործվող ուղիղները մաքսիմալ ուղիղներն են: Մնացած k–հանգույցանի ուղիղների համար ունենք, որ $2k - n - 1 \leq 0$, քանի որ յուրաքանչյուր հանգույցով անցնում է 2 մաքսիմալ ուղիղ: Ուստի այս ուղիղների համար տեղի ունի հավասարում (4.6.1)–ը և **Վարկած 4.6.1**–ի (ii) պնդումը $s = 1$ պայմանով: Հաշվի առնելով **Լեմմա 2.2.3**–ը և **2.2.3**–ը, ստանում ենք, որ տեղի ունի նաև **Վարկած 4.6.1**–ի (i) պնդումը:

Թեորեմ 4.6.2 ([4],[5]): ***Վարկած 4.6.1****–ը ճիշտ է Քարնիսեր–Գասքայի ցանցի համար: Ավելին ցանկացած n, k և s բնական թվերի համար, որոնք բավարարում են $2k - n - 1 \leq s \leq k$, պայմանին, գոյություն ունի այնպիսի $\mathcal{X}$ Քարնիսերի–Գասքայի ցանց և k–հանգույցանի ℓ ուղիղ, որ $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{s}{2}$:*

Ապացույց: Դիցուք $\mathcal{X}$–ը Քարնիսեր–Գասքայի ցանց է, որը ներկայացված է պարագրաֆ 1.4.4–ում: $n + 1$ մաքսիմալ ուղիղների բազմությունը նշանակենք $\mathcal{L}$–ով: Դիցուք ℓ–ը ճիշտ k հանգույցներով ուղիղ է, $k \leq n$: Ենթադրենք, որ $s(s \leq k)$ հանգույցներ ազատ հանգույցներն են, իսկ մնացած $k - s$–ը հիմնական հանգույցներն են: $\mathcal{L}$–ը տրոհենք երկու մասի, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$, որտեղ $\mathcal{L}_1$–ը այն մաքսիմալ ուղիները բազմությունն է, որոնք հատում են ℓ–ը ազատ կետերում, իսկ $\mathcal{L}_2$–ը այն զույգ մաքսիմալ ուղիները բազմությունն է որոնք զույգերով հատում են ℓ–ը հիմնական կետերում կամ չեն հատում ℓ–ը $\mathcal{X}$–ի հանգույցում: Ունենք, որ $|\mathcal{L}_1| = s$: Պարզ է նաև, որ $\mathcal{L}_2$–ի ուղիղները

բավարարում են **Վարկած 4.6.1**–ի (i) պնդմանը: Հետևաբար հաշվի առնելով **Լեմմա 2.2.4**–ը և **Լեմմա 2.2.5**–ը ստանում ենք, որ՝

$$\mathcal{X}_\ell = (\mathcal{X}_0)_\ell, \text{ որտեղ } \mathcal{X}_0 = \mathcal{X} \setminus \cup_{L \in \mathcal{L}_2} L:$$

Դիտարկենք $\mathcal{X}_0$ բազմությունը: Այն $s-1$ մաքսիմալ ուղիղներով Չանգ–Յաոյի ցանց է: Այդ ցանցի մաքսիմալ ուղիղներն են $\mathcal{L}_1 \cup \{\ell\}$–ը: Ուստի ստանում ենք, որ՝

$$|\mathcal{X}_\ell| = |(\mathcal{X}_0)_\ell| = \binom{s}{2}:$$

Քանի որ k հանգույցները ասոցացվում են մաքսիմալ ուղիղների հետ, իսկ $k-s$ հանգույցները մեկ այլ լրացուցիչ մաքսիմալ ուղղի հետ, ուստի ունենք, որ $k+(k-s) \le n+1$, որտեղից՝ $s \ge 2k-n-1$:

Այժմ կառուցենք մեր ցանկալի k–հանգույցանի ուղիղ պարունակող $\mathcal{X}$ բազմությունը: Ֆիքսենք ℓ ուղղի s հանգույցներ, որոնք լինելու են ազատ հանգույցները: Հետո ավելաց–նենք $m=k-s$ նոր կետեր, որոնք լինելու են հիմնական հանգույցները: Հաջորդիվ դիտարկենք այն ուղիղները, որոնք անցնում են յուրաքանչյուր ազատ հանգույցով և ուղիղների զույգը, որոնք անցնում են հիմնական հանգույցներով: Ունենք $2k-s(=2(k-s)+s)$ ուղիղներ: Եվ վերջում դիտարկենք $n+1-(2k-s)$ ուղիղներ, այնպիսին, որ ոչ մեկը չի անցնում ℓ ուղղի ազատ հանգույցներով: Պահանջենք, որ $n+1$ ուղիղները լինեն ընդհանուր դրության մեջ: Պարզ է, որ $\mathcal{X}$ բազմությունը, որ պարունակում է $n+1$ ուղիղների հատման հանգույցները, ℓ–ի ազատ հանգույցները և մնացած ազատ հանգույցները Քարնիսեր–Գասքայի ցանց է և ℓ ուղիղն էլ մեր ցանկալի ուղիղն է: □

Եվ վերջում ապացուցենք հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 4.6.2 ([5]): ***Վարկած 4.6.1***–*ը ճիշտ է առնվազն n մաքսիմալ ուղիղ ունեցող GC_n բազմությունների համար:*

Ապացույց: Ապացույցը կկատարենք ինդուկցիայով ըստ n–ի: Դիցուք $\mathcal{X}$–ը GC_n բազմու–թյուն է և ունենք k–հանգույցանի ℓ ուղիղը: **Վարկած 4.6.1**–ը ապացուցվել է $k \ge n$ դեպ–քում, ուստի կարող ենք ենթադրել, որ $2 \le k \le n-1$: Քանի որ $\mathcal{X}$–ը ունի առնվազն n մաքսիմալ ուղիղ, ուստի ունենք

1. գոյություն ունի այնպիսի M մաքսիմալ ուղիղ, որ $M \cap \ell \cap \mathcal{X} = \emptyset$,
2. գոյություն ունեն այնպիսի երկու M_1, M_2 մաքսիմալ ուղիղներ, որ $M_1 \cap M_2 \cap \ell \in \mathcal{X}$:

$n = 1$ համար թեորեմը ակնհայտորեն ճիշտ է: Ենթադրենք, որ այն ճիշտ է ցանկացած n–ից փոքրի համար և ապացուցենք n–ի համար:

Նշենք, որ **Վարկած 4.6.1**–ի (i) և (ii) պայմանները հետևում են **Լեմմա 2.2.3** և **2.2.4**–ից:

Ենթադրենք, որ տեղի ունի 1. պայմանը: Դիտարկենք $\mathcal{X}\setminus M$ բազմությունը, որը GC_{n-1} բազմություն է առնվազն $n-1$ մաքսիմալ ուղիղներով: Ինդուկցիոն ենթադրությունից ունենք, որ $|(\mathcal{X}\setminus M)_\ell| = \binom{s}{2}$, ինչ որ s–ի համար՝ $2k-(n-1)-1 = 2k-n \le s \le k$: Ինդուկցիոն ենթադրությունից և այն փաստից, որ M–ի ոչ մի հանգույց չի օգտագործում ℓ ուղիղը (**Լեմմա 2.2.3**) ստանում ենք, որ **Վարկած 4.6.1**–ի բոլոր կետերը բավարարված են:

Այժմ ենթադրենք, որ տեղի ունի 2 պայմանը: Դիտարկենք $\mathcal{X}\setminus(M_1 \cup M_2)$ բազմությունը, որը GC_{n-2} բազմություն է առնվազն $n-2$ մաքսիմալ ուղիղներով: Ինդուկցիոն ենթա–դրությունից ունենք, որ $|(\mathcal{X}\setminus M)_\ell| = \binom{s}{2}$, ինչ որ s–ի համար՝ $2k-(n-2)-1 = 2k-n-1 \le s \le k-1$: Ինդուկցիոն ենթադրությունից և այն փաստից, որ M_1 և M_2–ի ոչ մի հանգույց չի օգտագործում ℓ ուղիղը (**Լեմմա 2.2.4**) ստանում ենք, որ **Վարկած 4.6.1**–ի բոլոր կետերը բավարարված են: □

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

ԲԱՅՐԱՄՅԱՆ ՎԱՀԱԳՆ ՀԱՅԿԻ

n–ՃՇԳՐԻՏ ԵՎ GC_n ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՆՈՐ ՀԱՏԿՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ատենախոսությունում ստացված են հետևյալ հիմնական արդյունքները.

- 2–հանգույցանի ուղղի օգտագործման բնութագրումը n–ճշգրիտ բազմություններում:
- n–ճշգրիտ և GC_n բազմությունների նոր հատկության ապացուցում:
- GC_n բազմությունների նոր հատկության վերաբերյալ վարկածի ձևակերպում:
- Վարկածի ապացուցում որոշ կարևոր մասնավոր դեպքերում:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] **V. Bayramyan,** On the usage of 2–node lines in n–poised sets, International Conference. Harmonic Analysis and Approximations, VI, (Tsaghkadzor, Armenia, 2015), Abstracts, p.18.

[2] **V. Bayramyan, H. Hakopian, S. Toroyan**, A simple proof of the Gasca,–Maeztu conjecture for $n = 4$, Jaen J. Approx. 7(1) (2015), 137–147.

[3] **V. H. Bayramyan, H. A. Hakopian, S. Z. Toroyan**, On the uniqueness of algebraic curves, Proceedings of YSU, Physical and Mathematical Sciences, N1 (2015), 3–7.

[4] **V. Bayramyan and H. Hakopian**, On a new property of n–poised and GC_nsets, Adv Comput Math (2016). doi:10.1007/s10444–016– 9499–3.

[5] **V. Bayramyan**, On a conjecture concerning GC_n sets, Mathematics in Higher School 12(1)(2016), p 5–10.

[6] **L. Berzolari,** Sulla determinazione di una curva o di una superficie algebrica e su alcune questioni di postulazione, Rendiconti del R. Inst. Lombardo, Series (2), 47 (1914), 24.

[7] **J. Radon**, Zur mechanischen Kubatur, Monatsh. Math. 52 (1948), 286–300.

[8] **C. de Boor,** Multivariate polynomial interpolation: conjectures concerning GC–sets, Nimer. Algorithms 45 (2007), 113–125.

[9] **J. R. Busch,** A note on Lagrange Interpolation in $\mathbb{R}^2$, Un. Mat. Argentina, v. 36, (1990), 33–38.

[10] **J. M. Carnicer and M. Gasca**, A conjecture on multivariate polynomial interpolation, Rev. R. Acad. Cience. Exactas Fis. Nat. (Esp.) Ser. A Mat, 95 (2001), 145–153.

[11] **J. M. Carnicer and M. Gasca**, Classification of bivariate configurations with simple Lagrange interpolation formulae, Advances in computational Mathematics, 20 (2004), 5–16.

[12] **J. Carnicer and M. Gasca,** On Chung and Yao's geometric characterization for bivariate polynomial interpolation. Curve and surface design (Saint–Malo, 2002), 21–30, Mod. Methods Math., Nashboro Press, Brentwood, TN, 2003.

[13] **J. M. Carnicer and M. Gasca**, Planar configurations with simple Lagrange interpolation formulae, in: T. Lyche and L. L. Schumaker (eds.), Mathematical Methods in Curves and Surfaces: Oslo 2000, Vanderbilt University Press, Nashville, (2001), 55–62.

[14] **K. C. Chung, T. H. Yao,** On lattices admitting unique Lagrange representations, SIAM J. Numer. Anal., 14, (1977), 735–743.

[15] **F. Severi**, Vorlesungen über Algebraische Geometrie, Teubner, Berlin,1921 (Translation into German – E. Löffler).

[16] **D. Eisenbud, M. Green, J. Harris,** Cayley–Bacharach Theorems and Conjectures, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) 33(3), (1996), 295–324.

[17] **A. Malinyan**, Characterization of n–independent sets of $\leq 3n$ points in $\mathbb{R}^d$, Вестник РАУ. Серия физико–математические и естественные науки , №1(2013), 3–15.

[18] **H. Hakopian, A. Malinyan**, Characterization of n–independent sets with no more than 3n points, Jean J. Approx. 4(2), (2012), 121–136.

[19] **H. Hakopian, A. Malinyan**, On n–independent sets located on quartics, Proceedings of the YSU, Physical and Mathematical Sciences, N1 (2013), 6–12.

[20] **M. Gasca and J. I. Maeztu,** On Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^k$, Numer. Math. 39 (1982) 1–14.

[21] **L. Rafayelyan**, Poised nodes set constructions on algebraic curves, East J. on Approx., vol. 17, N3 (2011), 285–298.

[22] **H. Hakopian**, On a Class of Hermite Interpolation Problem, Adv. Comput. Math., 12 (2000), 303–309.

[23] **H. Hakopian**. On the regularity of multivariate Hermite interpolation, J. Approx. Theory 105 (2000), no.1, 1–18.

[24] **H. A. Hakopian, S. Z. Toroyan**, On the minimal number of nodes uniquely determining algebraic curves, Proceedings of YSU, Physical and Mathematical Sciences, N3 (2015), 17–22.

[25] **H. Hakopian, S. Toroyan**, On the uniqueness of algebraic curves passing through n–independent nodes, New York J. Math. 22 (2016), 441–452.

[26] **H. Hakopian, K. Jetter and G. Zimmermann,** A new proof of the Gasca–Maeztu conjecture for n = 4, J. Approx. Theory 159 (2009), 224–242.

[27] **H. Hakopian, K. Jetter and G. Zimmermann,** The Gasca–Maeztu conjecture for $n = 5$, Numer. Math. 127 (2014), 685–713.

[28] **H. Hakopian, K. Jetter and G. Zimmermann,** Vandermonde matrices for intersection points of curves, Jaen J. Approx. 1 (2009), 67–81.

[29] **H. Hakopian and L. Rafayelyan**, On a generalization of Gasca–Maeztu conjecture, New York J. Math. 21 (2015) 351{367.