

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Սյրեփան Արմենի Սարգսյան

ՀԱՍՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐՈՎ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՄՈՏԱՐԿՄԱՆ
ՈՐՈՇ ՀԱՐՅԵՐ

Ա.01.01 - "Մաթեմատիկական անալիզ" մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական
ասպիրանտի հայցման արեւնախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան 2016

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Степан Арменович Саргсян

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ НЕЛИНЕЙНОЙ
АППРОКСИМАЦИИ ПО КЛАССИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
А.01.01 – "Математический анализ"

Ереван 2016

Արենախոսության թեման հաստատված է Երևանի պետական համալսարանում:

Գիրական ղեկավար

- Ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր
Մ. Գ. Գրիգորյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ

- Ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր
Գ. Ա. Կարապոլյան
- Ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու
Ս. Լ. Գոգյան

Առաջարկար կազմակերպություն

- Ա.Մ. Ռազմաձեռի անվան Թբիլիսիի
մաթեմատիկայի ինստիտուտ, Վրաստան

Պաշտպանությունը կկայանա 2016թ. հունիսի 7-ին ժամը 15.00-ին, Երևանի
Պետական Համալսարանին կից 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ
հասցեով. 0025, Երևան, Ալ. Մանուկյան փ. 1:

Արենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵԴՀ գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2016թ. մայիսի 6-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտ. քարտուղար

Տ. Ն. Նարությունյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском Государственном Университете.

Научный руководитель

- доктор физ.-мат. наук
М. Г. Григорян

Официальные оппоненты

- доктор физ.-мат. наук
Г. А. Карагулян
- кандидат физ.-мат. наук
С. Л. Гогян

Ведущая организация

- Тбилисский математический институт им.
А. М. Размадзе, Грузия

Защита диссертации состоится 7-го июня 2016 года в 15.00 часов на
заседании специализированного совета 050 при Ереванском Государственном
Университете по адресу: 0025, г. Ереван, ул. Ал. Манукяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.

Автореферат разослан 6 мая 2016г.

Ученый секретарь специализированного совета

Т. Н. Арутюнян

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В последнее время активно ведутся исследования по вопросам сходимости жадного алгоритма функций из разных функциональных пространств по классическим системам. В этом направлении интересные результаты получены Р.Девором, В. Темляковым, С. Конягиным, П.Войтащчиком, Т. Кернером, Г. Геворкяном, А. Саакяном, М. Григоряном, А. Камонтом, С. Гогяном и другими авторами. Диссертационная работа посвящена исследованию сходимости жадного алгоритма и рядов Фурье по мультипликативным системам, а также, изучается поведение коэффициентов Фурье по мультипликативным системам, после исправления функций. Рассмотрены также вопросы расходимости простых и двойных рядов Фурье по системе Уолша.

Цель работы.

- 1) Исследование вопросов сходимости (почти всюду, равномерно, по L^1 норме) жадного алгоритма по мультипликативным системам.
- 2) Исследование поведения коэффициентов Фурье по мультипликативным системам как ограниченного так и неограниченного типа, после исправления функций.
- 3) Изучение вопросов расходимости рядов Фурье по двойной системе Уолша-Пэли.

Методы исследования. Применяются методы теории функций и функционального анализа.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Доказано возможность исправления любой интегрируемой функции на универсальном множестве таким образом, что ряд Фурье (по мультипликативной системе неограниченного типа) исправленной функции сходится по L^1 -норме, и абсолютные значения ненулевых коэффициентов полученной функции монотонно убывают. Для системы Уолша построена непрерывная функция, обладающая неустранимой расходимостью.

Практическая и теоретическая ценность. Работа представляет теоретический интерес. Результаты и методы работы могут найти применение при изучении аналогичных вопросов для других базисов.

Апробация полученных результатов. Основные результаты диссертации докладывались на международной конференции "Harmonic analysis and approximations, V" (Цахкадзор, Армения 2011), "Second International Conference Mathematics in Armenia Advances and Perspectives" (Цахкадзор, Армения 2013), "Harmonic Analysis and Approximations, VI" (Цахкадзор, Армения 2015), на семинаре кафедры высшей математики физического факультета ЕГУ (руководитель М. Г. Григорян), на семинаре кафедры математического анализа и теории функций факультета математики и механики ЕГУ (руководитель Г.А. Карагулян).

Основные результаты диссертации опубликованы в 7 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа изложена на 84 страницах, состоит из введения, 2 глав и списка цитированной литературы, включающего 60 наименований.

Содержание работы

Диссертация состоит из двух глав. В первой главе рассматриваются вопросы сходимости жадного алгоритма и рядов Фурье по мультипликативным системам, а также, изучается поведение коэффициентов Фурье по мультипликативным системам, после исправления функций (разлагаемых по этим системам) на множестве малой меры.

Напомним определение класса мультипликативных систем функций (см. [1], [2]).

Пусть $P = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ произвольная последовательность натуральных чисел, где $p_k \geq 2$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Положим

$$m_0 = 1 \text{ и } m_k = \prod_{j=1}^k p_j, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Легко заметить, что для каждой точки $x \in [0, 1)$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют числа $x_j, \alpha_j \in \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$ такие, что

$$n = \sum_{j=1}^k \alpha_j m_{j-1} \text{ и } x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{m_j}. \quad (2)$$

Формулы (2) называют P -ичными разложениями соответственно натурального n и $x \in [0, 1)$.

Отметим, что точки вида $\frac{l}{m_k}, l \in \mathbb{N}, 0 \leq l \leq m_k - 1$, имеют два различных разложения—конечные и бесконечные, и чтобы иметь дело только с однозначными разложениями, условятся для таких точек брать конечные разложения.

Для заданной последовательности P мультипликативная система $\mathbb{W} = \{W_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ определяется следующим образом:

$$W_0(x) \equiv 1; \quad W_n(x) = \exp \left(2\pi i \sum_{j=1}^k \alpha_j \frac{x_j}{p_j} \right), \quad (i\text{-мнимая единица}). \quad (3)$$

Выражение (3) можем записать в форме

$$W_n(x) = \exp \left(2\pi i \sum_{j=1}^k \alpha_j \frac{x_j}{p_j} \right) = \prod_{j=1}^k \left(\exp \left(2\pi i \frac{x_j}{p_j} \right) \right)^{\alpha_j}.$$

Из (3) следует

$$W_{m_{j-1}}(x) = \exp \left(2\pi i \frac{x_j}{p_j} \right),$$

и для n -ой функции получаем выражение

$$W_n(x) = \prod_{j=1}^k (W_{m_{j-1}}(x))^{\alpha_j}.$$

В случае, когда $P = \{2, 2, \dots, 2, \dots\}$, система $\mathbb{W} = \{W_n(x)\}_{n=1}^\infty$ совпадает с системой Уолша-Пэли, а в случае $P = \{a, a, \dots\}$, где $a > 2$ простое число, система $\mathbb{W}$ совпадает с системой Крестенсона-Леви [3].

Системы вида (3) были введены Н.Я. Виленкиным в 1946 году (см. [2]), и поэтому эти системы часто называются также системами Виленкина.

В случае $\sup\{p_k\} < \infty$ система $\mathbb{W} = \{W_n(x)\}$ называется мультипликативной системой ограниченного типа. В противном случае — системой неограниченного типа.

Пусть f — вещественная функция из $L[0, 1)$. Обозначим коэффициенты Фурье функции f по мультипликативной системе $\mathbb{W}$ через $c_n(f)$, а частичные суммы ряда Фурье по этой системе — через $S_n(x, f)$ т.е.

$$c_n(f) = \int_0^1 f(x) \overline{W}_n(x) dx, \quad S_n(x, f) = \sum_{k=0}^n c_k(f) W_k(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

$$\int_0^1 W_n(t) \overline{W}_k(t) dt = \begin{cases} 1, & k = n; \\ 0, & k \neq n. \end{cases} \quad (\bar{a} \text{ — комплексное сопряженное числа } a)$$

Большинство результатов по мультипликативным системам получены для систем ограниченного типа. Многие результаты пока не имеют своих аналогов для систем неограниченного типа, и изучение вопросов с точки зрения поведения последовательности $P = \{p_k\}_{k=1}^\infty$ имеет самостоятельный интерес. В частности, не известно верна ли Теорема Карлесона для мультипликативных систем неограниченного типа.

Отметим, что в 1957 году К. Ватари доказал, что система Виленкина с $\sup\{p_k\} < \infty$ является базисом в L^r при $r > 1$. Затем, в 1976 году, В. Янг для произвольной последовательности $\{p_k\}$ установил базисность системы Виленкина в L^r , при $r > 1$. Им также установлено неравенство

$$\text{mes}\{x : |S_n(x, f)| > y\} \leq \frac{C \|f\|_{L[0,1)}}{y},$$

для любых $f \in L[0, 1)$, $y \in (0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$ (C — абсолютная постоянная).

Известно, что в случае $\limsup p_n < \infty$ если f имеет конечную вариацию, то $c_n(f) = O(n^{-1})$, а в случае $f \in \text{Lip } \alpha$ справедливо соотноше-

ние $c_n(f) = O(n^{-\alpha})$. В сравнении с этими результатами отметим, что Прайс [4] показал, что если $\limsup p_n = \infty$, то $\limsup n|c_n(\psi)| = \infty$ для $\psi(x) = x - [x]$. Более того, существует $f_0 \in \text{Lip } \alpha$ такая, что $\limsup n|c_n(f_0)| = \infty$. Далее, при условии $\limsup p_n = \infty$ найдется $f_0 \in C(0,1)$ -ряд Фурье, которой по соответствующей мультипликативной системе не суммируем методом $(C, 1)$ в некоторой точке. Для мультипликативной системы с $p_n \uparrow$ и $m_{k-1}^{-1} \log p_k \rightarrow \infty$, $(C, 1)$ средние функции $x - [x]$ расходятся на счетном множестве. Отметим также, что в случае $\limsup p_n < \infty$, $(C, 1)$ средние любой непрерывной функции f по мультипликативной системе равномерно сходятся к f .

Напомним определение жадного (greedy) алгоритма. Пусть $\Psi = \{\psi_k\}_{k=0}^\infty$ — базис в банаховом пространстве X . Для каждого $f \in X$ будем иметь разложение

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f, \Psi) \psi_k .$$

Перестановку неотрицательных целых чисел (необязательно всех) $\sigma = \{\sigma(k)\}_{k=1}^\infty$ назовем убывающей, если

$$|c_{\sigma(k)}(f)| \geq |c_{\sigma(k+1)}(f)|, \quad k = 1, 2, \dots$$

Множество таких перестановок обозначим через $D(f, \Psi)$. В случае строгих неравенств $D(f, \Psi)$ содержит только одну убывающую перестановку. Для каждой функции $f \in X$ и для любого элемента $\sigma \in D(f, \Psi)$ определим последовательность нелинейных операторов $\{G_m(f, \Psi, \sigma)\}_{m=1}^\infty$, которая известна как жадный алгоритм (см. [5]), следующим образом

$$G_m(f) = G_m(f, \Psi, \sigma) := \sum_{k=1}^m c_{\sigma(k)}(f) \psi_{\sigma(k)} .$$

Заметим, что оператор $G_m(f)$ зависит от σ . Говорят, что жадный алгоритм функции f по системе Ψ сходится в X , если при некотором $\sigma \in D(f, \Psi)$ имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|G_m(f, \Psi, \sigma) - f\|_X = 0 .$$

Жадные алгоритмы для банаховых пространств, относительно нормированных базисов изучены в [6]-[10].

Приведем результаты, имеющие непосредственное отношение к данной работе.

Т.В. Кернер ответив на вопрос поставленный Карлесоном и Койфманом, построил пример функции из L^2 , затем [8] пример непрерывной функции, жадный алгоритм которой по тригонометрической системе расходится почти всюду.

В работе [9] доказано, что для каждого $p \geq 1$, $p \neq 2$ существует функция $f \in L^p(0, 1)$ жадный алгоритм которой по системе Виленкина расходится в $L^p(0, 1)$.

Отметим также, что в работе [10] построены ортонормированная система $\psi = \{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ ограниченных функций и непрерывная функция g такие, что если для некоторой функции $f \in L^p$, $p > 2$; $\text{mes}\{x \in [0, 1]; f(x) = g(x)\} > 0$, то ее жадный алгоритм $\{G_m(x, \psi, f)\}$ по системе ψ расходится в $L^p(0, 1)$.

Вопросы исправления функции с целью улучшения ее свойств начали развиваться после знаменитого результата Н.Н. Лузина [11]:

Теорема А.(*C*-свойство Н.Н. Лузина) *Для любой измеримой, почти всюду конечной на $[0, 1]$ функции f и для любого $\varepsilon > 0$ существуют измеримое множество E с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ и непрерывная на $[0, 1]$ функция g , совпадающая с f на E .*

В 1939 г. Д. Е. Меньшов [12] доказал следующую фундаментальную теорему:

Теорема В.(усиленное *C*-свойство Д.Е. Меньшова) *Пусть f измеримая функция, конечная почти всюду на $[0, 2\pi)$. Для любого $\varepsilon > 0$ можно построить функцию g , совпадающую с f на некотором множестве E с $|E| > 2\pi - \varepsilon$ и такую, что ряд Фурье функции g сходится равномерно на $[0, 2\pi)$.*

Далее в этом направлении интересные результаты получены А.А. Талаляном, О.Д. Церетели, У. Прайсом, М.Г. Григоряном, Г.Г. Геворкяном и другими авторами (см.[13]-[17]).

М.Г. Григорян доказал, что как тригонометрическая система $\{e^{i2\pi kx}\}_{k=-\infty}^\infty$, так и система Уолша $\{\omega_k(x)\}$ обладают усиленным жад-

ным L^1 -свойством суммируемых функций. Оно состоит в следующем: для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ и такое, что для каждой функции $f \in L^1[0, 1]$ можно найти функцию $g \in L^1[0, 1]$, совпадающую с f на E , для которой как ряд Фурье так и жадный алгоритм по тригонометрической системе (соответственно по системе Уолша) сходятся к ней по $L^1[0, 1]$ -норме (см. [14], [15]).

Обозначим через $\text{spec}(f)$ спектр функции $f(x)$ (т.е. $\text{spec}(f)$ – множество номеров ненулевых коэффициентов $\{c_k(f)\}_{k=0}^\infty$ (см. (4))).

В параграфе 1.3 диссертации рассматривается сходимость почти всюду жадного алгоритма по мультипликативным системам, после исправления функции. Доказывается

Теорема 1. Пусть $\mathbb{W} = \{W_k(x)\}_{k=0}^\infty$ – мультипликативная система функций определяемая ограниченной последовательностью $P = \{p_k\}_{k=1}^\infty$. Тогда для любого $\epsilon > 0$, существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$, такое, что для любой функции $f \in L(E)$ можно построить функцию $\tilde{f} \in L[0, 1]$, которая совпадает с f на E и жадный алгоритм которой по системе $\mathbb{W}$ сходится к ней почти всюду на $[0, 1]$.

В параграфе 1.4 рассмотрен вопрос равномерной сходимости жадного алгоритма по мультипликативным системам, после исправления функции. Доказываются следующие теоремы.

Теорема 2. Пусть $\mathbb{W} = \{W_k(x)\}_{k=0}^\infty$ – мультипликативная система функций определяемая ограниченной последовательностью $P = \{p_k\}_{k=1}^\infty$. Для любого числа $\epsilon > 0$ и для любой измеримой и почти всюду конечной функции f существует функция $\tilde{f} \in L^\infty[0, 1]$ такая, что $\text{mes}\{x : \tilde{f}(x) \neq f(x)\} < \epsilon$, все коэффициенты Фурье этой функции по системе $\mathbb{W}$ отличны от нуля, множество $D(f, \mathbb{W})$ содержит только один элемент, и жадный алгоритм этой функции по системе $\mathbb{W}$ сходится к ней равномерно на $[0, 1]$.

Теорема 3. Пусть $\mathbb{W} = \{W_k(x)\}_{k=0}^\infty$ – мультипликативная система функций определяемая ограниченной последовательностью $P = \{p_k\}_{k=1}^\infty$. Для любого числа $\epsilon > 0$ и для любой измеримой и почти всюду конечной функции f существует функция $\tilde{f} \in L^\infty[0, 1]$ такая, что

$\text{mes}\{x : \tilde{f}(x) \neq f(x)\} < \varepsilon$, последовательность $\{|c_k(\tilde{f})|, k \in \text{spec}(\tilde{f})\}$ монотонно убывающая и частичные суммы $S_n(x, \tilde{f})$ функции $\tilde{f}$ по системе $\mathbb{W}$ равномерно сходятся к $\tilde{f}$ при $n \rightarrow \infty$.

Далее, в параграфе 1.5 показано что путем исправления функции из класса $L^r[0, 1)$, $r > 1$ на множестве малой меры, можно достичь того, чтобы абсолютные значения ненулевых коэффициентов Фурье по мультипликативной системе ограниченного типа были расположены в порядке убывания, более того доказано:

Теорема 4. Пусть $\{W_k(x)\}_{k=0}^\infty$ — мультипликативная система функций определяемая ограниченной последовательностью $P = \{p_k\}_{k=1}^\infty$. Существует убывающая последовательность $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ с $\sum_{k=1}^\infty a_k^q < \infty$, $\forall q > 2$, такая, что для любых $0 < \epsilon < 1$, $r \geq 1$ и для каждой измеримой и почти всюду конечной функции f можно найти функцию $\tilde{f} \in L^r[0, 1)$ с $\text{mes}\{x \in [0, 1); \tilde{f} \neq f\} < \epsilon$, для которой

$$|c_k(\tilde{f})| = a_k \text{ для всех } k \in \text{spec}(\tilde{f}), \quad \|\tilde{f}\|_r \leq \frac{4}{\epsilon^{1-1/r}} \|f\|_r.$$

В параграфе 1.6 рассматриваются мультипликативные системы неограниченного типа для которых элементы множества $\{p_k\}_{k=1}^\infty$ могут стремиться к бесконечности со скоростью геометрической прогрессии. Доказывается следующая теорема.

Теорема 5. Пусть $a > 1$ и $P = \{p_k\}_{k=1}^\infty$ множество натуральных чисел с условием $2 \leq p_k \leq a^k$ ($k = 1, 2, \dots$) и пусть $\mathbb{W} = \{W_k(x)\}_{k=0}^\infty$ — мультипликативная система функций определяемая последовательностью P . Тогда для любого $\varepsilon > 0$, существует измеримое множество $E \subset [0, 1)$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$, такое, что для любой функции $f \in L(E)$ существует функция $\tilde{f} \in L[0, 1)$ совпадающая с f на E такая, что

1. последовательность $\{|c_k(\tilde{f})|, k \in \text{spec}(\tilde{f})\}$ монотонно убывающая,
2. $\left\| S_n(x, \tilde{f}) - \tilde{f}(x) \right\|_{L[0, 1)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Замечание. Если потребовать ограниченность последовательности $\{p_k\}_{k=1}^\infty$, то можно утверждать также почти всюду сходимость рядов Фурье функции $\tilde{f}$ по системе $\mathbb{W}$.

В параграфе 1.7 рассматриваются мультипликативные системы, определяемые произвольной последовательностью $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$. Доказана следующая

Теорема 6. Пусть $P = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ произвольная система натуральных чисел с условием $p_k \geq 2$ ($k = 1, 2, \dots$) и пусть $\mathbb{W} = \{W_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — мультипликативная система функций определяемая последовательностью P . Тогда для любого $\varepsilon > 0$, существует измеримое множество $E \subset [0, 1)$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ и убывающая последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ с $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^q < \infty$, $\forall q > 2$, такая, что для любой функции $f \in L(E)$ существует функция $\tilde{f} \in L[0, 1)$ совпадающая с f на E и такая, что $|c_k(\tilde{f})| = a_k$ для всех $k \in \text{spec}(\tilde{f})$.

Пусть $\Psi = \{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированная система функций определенных на $[a, b]$. Функции Лебега системы Ψ определяются следующим образом (см. [18]):

$$L_n(\Psi, x) := \int_a^b \left| \sum_{k=1}^n \psi_k(x) \overline{\psi_k(t)} \right| dt.$$

Если эти функции не зависят от x , то они называются константами Лебега $\{L_n(\Psi)\}_{n=1}^{\infty}$ системы Ψ .

Константы Лебега мультипликативной системы $\mathbb{W} = \{W_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ имеют следующий вид

$$L_n(\mathbb{W}) = \int_0^1 |D_n(t)| dt, \quad (5)$$

где $D_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} W_k(t)$ ядро Дирихле системы $\mathbb{W}$.

Известно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n(\mathbb{T})}{\ln n} = \frac{4}{\pi},$$

где $\mathbb{T}$ — тригонометрическая система. В сравнении с этим, отметим, что для системы Виленкина доказано [2], что

$$0 = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n(\mathbb{W})}{\log_2 n} < \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n(\mathbb{W})}{\log_2 n} < \infty \quad (6)$$

Далее, напомним, что ограниченная последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется почти сходящейся, если для некоторого $a \in \mathbb{R}$ имеет место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k = a \text{ равномерно по } m.$$

Обозначим

$$q(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k \text{ и } p(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k.$$

Эти пределы существуют для любой ограниченной последовательности и очевидно, что почти сходимость последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ эквивалентно условию $q(x_n) = p(x_n)$.

В параграфе 1.8 диссертации рассмотрено поведение констант Лебега мультипликативных систем, доказана следующая теорема:

Теорема 7. *Для любой мультипликативной системы $\mathbb{W} = \{W_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ справедливы соотношения:*

$$\begin{aligned} 1) \quad & q\left(\frac{L_n(\mathbb{W})}{\log_2 n}\right) = 0; \\ 2) \quad & p\left(\frac{L_n(\mathbb{W})}{\log_2 n}\right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n(\mathbb{W})}{\log_2 n}. \end{aligned}$$

Из этой теоремы непосредственно следует, что последовательность $\left\{\frac{L_n(\mathbb{W})}{\log_2 n}\right\}_{n=2}^{\infty}$ не является почти сходящейся. Отметим, что аналогичный результат для системы Уолша сформулирован в [19].

Во второй главе диссертации рассматриваются вопросы сходимости рядов Фурье по системе Уолша-Пэли, как в одномерном так и в двумерном случаях.

Сфера вопрос касающихся почти всюду сходимости рядов Фурье по различным классическим ортонормированным системам функций, является одним из основных направлений в гармоническом анализе.

В 1951 году Д.Е. Меньшов [20] доказал следующую теорему:

Теорема С. (Меньшов) Для любого совершенного множества P положительной меры, $P \subset [0, 2\pi]$, и для любой его точки плотности x_0 можно определить функцию f , непрерывную на $[0, 2\pi]$ и обладающую следующим свойством: Какова бы ни была измеримая функция g , ограниченная на $[0, 2\pi]$ и совпадающая с f на множестве P , ряд Фурье от функции g расходится в точке x_0 .

В параграфе 2.2 доказан аналог Теоремы С для системы Уолша-Пэли:

Теорема 8. Для любого совершенного множества P положительной меры, $P \subset [0, 1)$, и для любой его точки плотности x_0 можно определить функцию f непрерывную на $[0, 1)$ и обладающую следующим свойством: Какова бы ни была измеримая функция g , ограниченная на $[0, 1)$ и совпадающая с f на множестве P , ряд Фурье-Уолша функции g расходится в точке x_0 .

Хорошо известен фундаментальный результат А. Н. Колмогорова: существует функция $f \in L[0, 2\pi]$ такая, что ее тригонометрический ряд Фурье почти всюду расходится. Стейн доказал, что аналог теоремы Колмогорова имеет место и для рядов Фурье по системе Уолша-Пэли.

Карлесон в работе [21] получил решение проблемы Н.Н. Лузина. Он установил, что если $f \in L^2[0, 2\pi]$, то ее тригонометрический ряд Фурье почти всюду сходится.

Биллард [22] доказал аналог теоремы Карлесона для рядов Фурье по системе Уолша-Пэли.

Фефферман [23] установил, что существует функция $F \in C([0, 2\pi]^2)$, двойной тригонометрический ряд Фурье которой расходится всюду на $[0, 2\pi]^2$ (в смысле плоской меры Лебега μ_2) при суммировании по прямоугольникам (или, что то же самое, по Прингсхейму), т. е. не существует предела:

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} S_{m, n}(x, y, F),$$

где m и n независимо стремятся к бесконечности.

В работе [24] с помощью теоремы Карлесона установлено, что если

$$\sum_{m, n = -\infty}^{+\infty} a_{m, n} \log^2[\min(|m|, |n|) + 2] < \infty, \quad (7)$$

то предел

$$\lim_{k,p,s,l \rightarrow \infty} \sum_{m=-k}^l \sum_{n=-s}^p a_{m,n} e^{i(mx+ny)}$$

существует почти всюду на $[0, 2\pi]^2$. Затем Е.М. Никишин установил, что если модуль непрерывности непрерывной функции $f(x, y)$ удовлетворяет условию

$$\omega(f, \delta) = O(\log^{-1-\varepsilon} 1/\delta) \quad (8)$$

при некотором $\varepsilon > 0$, то для коэффициентов Фурье функции выполняется неравенство (7), где под модулем непрерывности функции $f(x, y)$ понимается величина

$$\omega(f, \delta) = \sup_{(x-s)^2 + (y-t)^2 \leq \delta} |f(x, y) - f(s, t)|.$$

Затем М. Бахбух и Е.М. Никишин [25] построили контрпример, показывающее, что в (8) нельзя положить $\varepsilon = 0$ и утверждать сходимость прямоугольных частичных сумм почти всюду на $[0, 2\pi]^2$.

Имеется ряд интересных результатов, посвященных вопросам сходимости кратных рядов Фурье по классическим системам (см. [26]-[28]).

Р.Д. Гецадзе [26] доказал следующие теоремы

Теорема Д.(Гецадзе) *Для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существует функция $g = g_\varepsilon \in C([0, 1]^2)$, число $\lambda = \lambda(\varepsilon) \in (1, \infty)$ и плоское измеримое множество $E_\varepsilon \subset [0, 1]^2$ такие, что*

- а) $\mu_2 E_\varepsilon \geq 1 - \varepsilon$,*
- б) двойной ряд Фурье функции g по системе Уолша-Пэли λ -расходится неограниченно всюду на множестве E_ε .*

Теорема Е.(Гецадзе) *Существует непрерывная функция, определенная на $[0, 1]^2$, такая, что ее двойной ряд Фурье по системе Уолша-Пэли неограниченно расходится почти всюду на $[0, 1]^2$ по Прингсхейму.*

В параграфе 2.3 доказывается следующая

Теорема 9. *Для любого счетного множества $A = \{(x_n, y_n)\}_{n=1}^\infty \subset [0, 1]^2$ существуют непрерывная функция $F \in C([0, 1]^2)$ и плоское измеримое множество $E \subset [0, 1]^2$ такие, что*

1. $A \subset E$,

2. $\mu_2 E = 1$, где μ_2 плоская мера Лебега,

3. $\limsup_{m,n \rightarrow \infty} |S_{m,n}(x, y, F)| = \infty$ для всех $(x, y) \in E$,

где $S_{m,n}(x, y, F)$, $m, n = 1, 2, \dots$ прямоугольные частичные суммы функции F по двойной системе Уолша-Пэли.

Справедлива также следующая

Теорема 10. *Существует функция $g \in (C[0, 1]^2)$, двойной ряд которой по системе Уолша-Пэли расходится почти всюду на $[0, 1]^2$, при суммировании по прямоугольникам, и модуль непрерывности функции g удовлетворяет соотношению*

$$\omega(g, \delta) = O\left(\frac{1}{\log_2 \log_2 1/\delta}\right) \text{ при } \delta \rightarrow 0.$$

В заключение выражаю благодарность профессору М.Г. Григоряну, под руководством которого выполнена данная работа.

Литература

- [1] Б.И. Голубов, А.В. Ефимов, В.А. Скворцов, Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения.-М.: Наука 1987.
- [2] Н.Я. Виленкин, Об одном классе полных ортогональных систем, Изв. АН СССР. Сер. мат., 11 (1947), 363-400.
- [3] H.E. Chrestenson, A class of generalized Walsh functions, Pacif. J. Math., 5:1 (1955), 17-31.
- [4] J.J. Price, Certain groups of orthonormal step functions, Canad. J. Math., 9:3 (1957), 413-425.
- [5] P. Wojtaszczyk, Greedy Algorithm for General Biorthogonal Systems, Journal of Approximation Theory, 107 (2000), 293-314.
- [6] R.A. DeVore, V. N. Temlyakov, Some remarks on greedy algorithms, Advances in Computational Math., 5 (1996), 173-187.
- [7] S.V. Konyagin, V.N. Temlyakov, A remark on Greedy approximation in Banach spaces, East Journal on Approximations, 5:1 (1999), 1-15.
- [8] T.W. Körner, Decreasing rearranged Fourier series, J. Fourier Anal. Appl., 5 (1999), 1-19.
- [9] R. Gribonval, M. Nielsen, On the quasi-greedy property and uniformly bounded orthonormal systems, Technical Report Aalborg University, (2003), 1-6.
- [10] M.G. Grigorian, K.S. Kazarian, F. Soria, Mean convergence of orthonormal Fourier series of modified functions, Trans. Amer. Math. Soc. (TAMS), 352:8 (2000), 3777-3799.
- [11] Н.Н. Лузин, К основной теореме интегрального исчисления, Матем. сб., 28:2 (1912), 266-294.
- [12] D. E. Men'shov, Sur la representation des fonctions mesurables des series trigonometriques, Mat. Sbornik, 9 (1941), 667-692.
- [13] А.А. Талалян, О зависимости сходимости ортогональных рядов от изменения значений разлагаемой функции, Мат. заметки, 33:5 (1983), 715-722.

- [14] M.G. Grigorian, R.E. Zink, Greedy approximation with respect to certain subsystems of the Walsh orthonormal system, Proc. of the Amer. Mat. Soc., 134:12(2006), 3495-3505.
- [15] М.Г. Григорян, О сходимости в метрике L^p гриди алгоритма по тригонометрической системе, Изв. НАН Армении. Матем., 39:5 (2004), 37-52.
- [16] М.Г. Григорян, Модификации функций, коэффициенты Фурье и нелинейная аппроксимация, Матем. сб., 203:3 (2012), 49-78.
- [17] Г.Г. Геворкян, О представлении измеримых функций абсолютно сходящимися рядами по системе Франклина, Докл. НАН Армении, сер. мат., (1986), 15-18.
- [18] Б.С. Кашин, А.А. Саакян, Ортогональные ряды, Изд-во АФЦ, 1999.
- [19] S.V. Astashkin, E.M. Semenov, Lebesgue constants of the Walsh system, Doklady Mathematics, 91:3 (2015), 344-346.
- [20] Д. Е. Меньшов, О рядов Фурье непрерывных функций, Математика. Том IV, Уч. записки Моск. гос. ун-та, 148 (1951), 108-132.
- [21] L. Carleson, On convergence and growth of partial sums of Fourier series.-Acta Math., 116 (1966), 135-157.
- [22] P. Billard, Sur la convergence presque partout des series de Fourier-Walsh des fonctions de l'espace $L^2[0, 1]$, Studia Math., 28:3 (1967), 363-388.
- [23] C. Fefferman, On the divergence of multiple Fourier series, Bull. Amer. Math. Soc., 77:2 (1971), 191-195.
- [24] P. Sjölin, Convergence almost every where of certain singular integrals and multiple Fourier Series, Ark. math., 9:1 (1971), 65-90.
- [25] М. Бахбух, Е.М. Никишин, О сходимости двойных рядов Фурье от непрерывных функций, сибирский мат., 14:6 (1973), 1189-1199.
- [26] Р.Д. Гецадзе, Непрерывная функция с расходящимся почти всюду кратным рядом Фурье по системе Уолша-Пэли, Матем. сб., 128:2 (1985), 269-286.
- [27] D.C. Harris, Almost everywhere divergence of multiple Walsh-Fourier series, Proc. of AMS, 101:4 (1987), 637-643.
- [28] Г.А. Карагулян, О расходимости треугольных и эксцентрических сферических сумм двойных рядов Фурье, Матем. сб., 207:1 (2016), 73-92.

Работы автора по теме диссертации

- [I] М.Г. Григорян, С.А. Саргсян, Нелинейная аппроксимация функций класса L^r по системе Виленкина, Изв. вуз. Матем., 2 (2013), 30-39.
- [II] S. Sargsyan, On divergence of Fourier-Walsh series of continuous function, Proc. of the YSU, 2 (2015), 26-29.
- [III] S. Sargsyan, On Lebesgue constants of Vilenkin systems, Proc. of the YSU, 2 (2016), 63-66.
- [IV] С.А. Саргсян, Представление функций по системе Виленкина, Математика в Высшей Школе, 9:1 (2013), 32-35.
- [V] M. Grigoryan, S. Sargsyan, Some properties of Vilenkin system, Int. Conf. "Harmonic Analysis and Approximations, V"10-17 September, 2011, Tsaghkadzor, Armenia, 98-99.
- [VI] S. Sargsyan, On the divergence of Fourier-Walsh series, Second Int. Conf. "Mathematics in Armenia Advances and Perspectives"24-31 August, 2013, Tsaghkadzor, Armenia, 55.
- [VII] S. Sargsyan, On the divergence of Fourier-Walsh series of continuous function, Int. Conf. "Harmonic Analysis and Approximations, VI"12-18, September 2015, Tsaghkadzor, Armenia, 81-82.

SUMMARY

The main results obtained in this thesis are:

1. Let $\mathbb{W} = \{W_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ be a multiplicative system of functions defined by a bounded sequence. Then for each $\varepsilon > 0$, there exists a measurable set $E \subset [0, 1)$ with measure $|E| > 1 - \varepsilon$, such that for any function $f \in L(E)$ one can construct a function $\tilde{f} \in L[0, 1)$ which coincides with f on E and the greedy algorithm of $\tilde{f}$ with respect to the system $\mathbb{W}$ converges to $\tilde{f}$ almost everywhere on $[0, 1)$.

2. Let $\mathbb{W} = \{W_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ be a multiplicative system of functions defined by a bounded sequence. For each $\varepsilon > 0$ and for any measurable and almost everywhere finite function f there exists a function $\tilde{f} \in L^{\infty}[0, 1)$ such that $\text{mes}\{x : \tilde{f}(x) \neq f(x)\} < \varepsilon$, all Fourier coefficients of $\tilde{f}$ with respect to the system $\mathbb{W}$ are non-zero, the set $D(\tilde{f}, \mathbb{W})$ contains only single element, and the greedy algorithm of $\tilde{f}$ with respect to the system $\mathbb{W}$ converges to $\tilde{f}$ uniformly on $[0, 1)$.

3. For any multiplicative system $\mathbb{W} = \{W_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, defined by a bounded sequence, there exists a decreasing sequence $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ with $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^q < \infty$, $\forall q > 2$, such that for any $0 < \varepsilon < 1$, $r \geq 1$ and for each measurable and almost everywhere finite function f there exists a function $\tilde{f} \in L^r[0, 1)$ such that $\text{mes}\{x \in [0, 1); \tilde{f}(x) \neq f(x)\} < \varepsilon$ and

$$|c_k(\tilde{f})| = a_k \text{ for all } k \in \text{spec}(\tilde{f}), \quad \|\tilde{f}\|_r \leq \frac{4}{\varepsilon^{1-1/r}} \|f\|_r.$$

4. Let $P = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ be a sequence of natural numbers with $2 \leq p_k \leq a^k$ ($k = 1, 2, \dots$) for some $a > 1$ and let $\mathbb{W} = \{W_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ be the multiplicative system defined by the sequence P . Then for each $\varepsilon > 0$ there exists a measurable set $E \subset [0, 1)$ with measure $|E| > 1 - \varepsilon$, such that for each function $f \in L(E)$ there exists a function $\tilde{f} \in L[0, 1)$ coinciding with f on E and having the following properties

1. the sequence of absolute values of non-zero coefficients of $\tilde{f}$ with respect to the system $\mathbb{W}$ is monotonically decreasing,

2. $\left\|S_n(x, \tilde{f}) - \tilde{f}(x)\right\|_{L[0,1]} \rightarrow 0$ when $n \rightarrow \infty$.

5. For any perfect set $P \subset [0, 1)$ of positive measure, and for any density point x_0 of P one can define a continuous function f , having the following property: any bounded measurable function g , defined on $[0, 1)$ and coinciding with f on P , has Fourier series diverging at x_0 with respect to the Walsh system.

6. For any countable set $A = \{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, 1)^2$ there exist a continuous function $F \in C([0, 1]^2)$ and a Lebesgue measurable set $E \subset [0, 1)^2$, such that

1. $A \subset E$,

2. $\mu_2 E = 1$, where μ_2 is Lebesgue measure on $\mathbb{R}^2$,

3. $\limsup_{m, n \rightarrow \infty} |S_{m, n}(x, y, F)| = \infty$ for each $(x, y) \in E$.

Արենախոսությունում սրացված են հետևյալ հիմնական արդյունքները՝

1. Դիցուք $\mathbb{W} = \{W_k(x)\}_{k=0}^\infty$ -ը սահմանափակ հաջորդականությամբ սահմանված մուլտիպլիկատիվ համակարգ է: Կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $E \subset [0, 1)$, $|E| > 1 - \varepsilon$ բազմություն այնպիսին, որ ցանկացած $f \in L(E)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի f -ի հետ E բազմության վրա համընկնող $\tilde{f} \in L[0, 1)$ ֆունկցիա, որի ազահ ալգորիթմը ըստ $\mathbb{W}$ համակարգի $[0, 1)$ -ում համարյա ամենուրեք զուգամիպում է f -ին:

2. Դիցուք $\mathbb{W} = \{W_k(x)\}_{k=0}^\infty$ -ը սահմանափակ հաջորդականությամբ սահմանված մուլտիպլիկատիվ համակարգ է: Ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի և համարյա ամենուրեք վերջավոր չափելի կամայական f ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $\tilde{f} \in L^\infty[0, 1)$, $\text{mes}\{x : f(x) \neq \tilde{f}(x)\} < \varepsilon$ ֆունկցիա, որի բոլոր Ֆուրիեի գործակիցները ըստ $\mathbb{W}$ համակարգի գրոյից փաբեր են, $D(f, \mathbb{W})$ բազմությունը պարունակում է միայն մեկ էլեմենտ, և ազահ ալգորիթմը, ըստ $\mathbb{W}$ համակարգի, հավասարաչափ զուգամիպում է իրեն $[0, 1)$ -ում:

3. Սահմանափակ հաջորդականությամբ սահմանված կամայական $\mathbb{W} = \{W_k(x)\}_{k=0}^\infty$ մուլտիպլիկատիվ համակարգի համար գոյություն ունի $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ նվազող հաջորդականություն $\sum_{k=1}^\infty a_k^q < \infty$, $\forall q > 2$ այնպիսին, որ ցանկացած $\varepsilon > 0$, $r \geq 1$ թվերի և համարյա ամենուրեք վերջավոր չափելի կամայական f ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $\tilde{f} \in L^r[0, 1)$ ֆունկցիա այնպիսին, որ $\text{mes}\{x \in [0, 1); \tilde{f}(x) \neq f(x)\} < \varepsilon$ և

$$|c_k(\tilde{f})| = a_k \text{ երբ } k \in \text{spec}(\tilde{f}), \quad \|\tilde{f}\|_r \leq \frac{4}{\varepsilon^{1-1/r}} \|f\|_r.$$

4. Դիցուք $P = \{p_k\}_{k=1}^\infty$ -ը $2 \leq p_k \leq a^k$ ($k = 1, 2, \dots$) պայմանին բավարարող բնական թվերի հաջորդականություն է ինչ-որ $a > 1$ թվի համար, և դիցուք $\mathbb{W} = \{W_k(x)\}_{k=0}^\infty$ -ը P հաջորդականությամբ սահմանված մուլտիպլիկատիվ համակարգ է: Կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $E \subset [0, 1)$, $|E| > 1 - \varepsilon$ բազմություն այնպիսին, որ ցանկացած $f \in L(E)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի f -ի հետ E -ի վրա համընկնող $\tilde{f} \in L[0, 1)$ ֆունկցիա, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին

1. $\tilde{f}$ ֆունկցիայի՝ ըստ $\mathbb{W}$ համակարգի Ֆուրիեի ոչ գրոյական գործակիցները բացարձակ արժեքով մոնոտոն նվազող են ,
2. $\left\| S_n(x, \tilde{f}) - \tilde{f}(x) \right\|_{L[0,1)} \rightarrow 0$ երբ $n \rightarrow \infty$.

5. Ցանկացած $P \subset [0, 1)$ կարարյալ բազմության և նրա կամայական x_0 խտացման կետի համար կարելի է գտնել f անընդհատ ֆունկցիա այնպիսին, որ P բազմության վրա f -ի հետ համընկնող, սահմանափակ և չափելի կամայական g ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը ըստ Ուոլշի համակարգի տարամիտի x_0 կետում:

6. Ցանկացած $A = \{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, 1)^2$ հաշվելի բազմության համար գոյություն ունի $F \in C([0, 1]^2)$ անընդհատ ֆունկցիա և $E \subset [0, 1)^2$ չափելի բազմություն այնպիսին, որ.

1. $A \subset E$,
2. $\mu_2 E = 1$, որտեղ μ_2 -ը Լեբեգի չափն է $\mathbb{R}^2$ -ի համար,
3. $\limsup_{m, n \rightarrow \infty} |S_{m, n}(x, y, F)| = \infty$ երբ $(x, y) \in E$.