ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Արտավազդ Բաբկենի Մինասյան

ՈՒՈԼՇԻ ԿՐԿՆԱԿԻ ՇԱՐՔԵՐԻ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇ ՀԱՐՑԵՐ

Ա.01.01 - ”Մաթեմատիկական անալիզ”մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի
հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան 2014

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Артавазд Бабкенович Минасян

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СХОДИМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ УОЛША

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико–математических наук по специальности
А.01.01 – "Математический анализ"

Ереван 2014

Ատենախոսության թեման հաստատված է Երևանի պետական համալսարանում:

<u>Գիտական ղեկավար</u> - ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Մ. Գ. Գրիգորյան

<u>Պաշտոնական ընդդիմախոսներ</u> - ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Գ. Ա. Կարագուլյան
- ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Լ. Ն. Գալոյան

<u>Առաջատար կազմակերպություն</u> - Սանկտ-Պետերբուրգի պետական համալսարան, Ռուսաստան

Պաշտպանությունը կկայանա 2014թ. հունիսի 24-ին ժամը 15.00-ին, Երևանի Պետական Համալսարանին կից 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ հասցեով. 0025, Երևան, Ալ. Մանուկյան փ. 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2014թ. մայիսի 23-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտ. քարտուղար,
ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Տ. Ն. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском Государственном Университете.

<u>Научный руководитель</u> - доктор физ.-мат. наук, профессор М. Г. Григорян

<u>Официальные оппоненты</u> - доктор физ.-мат. наук Г. А. Карагулян
- кандидат физ.-мат. наук Л. Н. Галоян

<u>Ведущая организация</u> - Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Защита диссертации состоится 24-го июня 2014 года в 15.00 часов на заседании специализированного совета 050 при Ереванском Государственном Университете по адресу: 0025, г. Ереван, ул. Ал. Манукяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.

Автореферат разослан 23 мая 2014г.

Ученый секретарь специализированного совета,
доктор физ.-мат. наук Т. Н. Арутюнян

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Проблемы, связанные со сходимостью двойных рядов Фурье по классическим системам всегда были в центре внимания известных математиков (А.Зигмунд, С.Фефферман, Л.Жижиашвили, С. Конягин, Д. Харрис, А. Талалян, Б. Голубов, М. Григорян, М. Дьяченко, Г. Карагулян, и другие). В диссертации изучаются вопросы сходимости двойных рядов Фурье-Уолша в $L^p[0,1]^2, p \in [1,\infty)$ по сферам и по методам жесткого отбора и поведение коэффициентов Фурье по двойной системе Уолша после исправления функции на множестве малой меры. Также изучаются вопросы представления функций из класса $L^p(0,1)^2, 0 < p < 1$, почти всюду и в метрике $L^p[0,1]^2$ сходящими двойными рядами Уолша по сферам и по прямоугольникам.

Цель работы.

1)Исследование сходимости в $L^p[0,1]^2, p \geq 1$ сферических частичных сумм двойного ряда Фурье-Уолша после исправления функций на множестве малой меры.

2)Исследование сходимости $T_\lambda(x,y,f)$ операторов в $L^p[0,1]^2, p \in [1,2)$ после исправления функций на множестве малой меры.

4)Исследование вопросов представимости измеримых функций асимптотически сходящими двойными рядами по нормированным базисам пространства $L^p(E), p \in [1,\infty)$.

5)Исследование вопросов представимости функций из класса $L^p(0,1)^2, 0 < p < 1$, по сферам и по прямоугольникам почти всюду и в метрике $L^p[0,1]^2$ сходящими двойными рядами Уолша.

Методы исследования. Применяются методы теории функций и функционального анализа.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Доказано, что для любых чисел $0 < \varepsilon < 1,\ p \geq 1$ и для каждой функции $f \in L^p(0,1)^2$ можно найти функцию $\widetilde{f} \in L^p(0,1)^2,\ mes(\widetilde{f} \neq f) < \varepsilon$, двойной ряд Фурье-Уолша которой по сферам сходится по $L^p[0,1]^2$ норме и все ненулевые члены в последовательности $\{|c_{k,s}(f)|\}$ расположены в убывающем порядке по всем направлениям.

Практическая и теоретическая ценность. Тема предлагаемой работы представляет теоретический интерес. Результаты и методы работы могут найти применение при изучении аналогичных вопросов для других базисов.

Апробация полученных результатов. Основные результаты диссертации докладывались на Международном Аспирантском Форуме “Современная Наука: Тенденции Развития, пр. и персп”, посвященный 10-Летию Асп. Рау (Ереван, Армения 2013) и на семинаре кафедры высшей математики физического факультета ЕГУ (руководитель М. Г. Григорян).

Основные результаты диссертации опубликованы в 5 статьях, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа изложена на 69 страницах, состоит из введения, 3 глав и списка цитированной литературы, включающего 60 наименований.

Содержание работы

В диссертации мы изучим некоторые вопросы о поведении двойных рядов Фурье -Уолша, а также коэффициентов Фурье по двойной системе Уолша после исправления функции. Отметим, что идея об исправлении функции с целью улучшения ее свойств принадлежит Н. Н. Лузину. Им в 1912 г. был получен следующий знаменитый результат (см. [1]).

Теорема (C-свойство Лузина). Для любой измеримой, почти всюду конечной на [0,1] функции $f(x)$ и для любого $\epsilon > 0$ существуют измеримое множество E с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ и непрерывная на [0,1] функция $g(x)$, совпадающая с $f(x)$ на E.

Далее в этом направлении получены интересные результаты (см. [2-

12]).

В 1939г. Д.Е.Меньшов [2] доказал следующую фундаментальную теорему.

Теорема (Усиленное C- свойство Меньшова). Пусть $f(x)$ измеримая функция, конечная почти всюду на $[0, 2\pi]$. Каково бы не было $\epsilon > 0$, можно определить непрерывную функцию $g(x)$, совпадающую с $f(x)$ на некотором множестве E, $|E| > 2\pi - \epsilon$ и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится равномерно на $[0, 2\pi]$.

В 1988г. М.Г.Григорян доказал, что тригонометрическая система обладает усиленным L^1- свойством суммируемых функций. Оно состоит в следующем: для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для каждой функции $f(x) \in L^1[0, 1]$ можно найти функцию $g(x) \in L^1[0, 1]$, совпадающую с $f(x)$ на E, ряд Фурье которой по тригонометрической системе сходится к ней по $L^1[0, 1]$ норме (см. [6]).

Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ полная в $L^2[0, 1]$ ортонормированная система и $f(x, y) \in L_{[0,1]^2}$. Положим

$$c_{k,s}(f) = \int_0^1 \int_0^1 f(t, \tau)\varphi_k(t)\varphi_s(\tau)dtd\tau, \quad k, s = 0, 1, 2, ... \ .$$

Прямоугольные, квадратные и сферические частичные суммы двойного ряда Фурье по двойной системе $\{\varphi_k(x)\varphi_s(y)\}_{k,s=0}^{\infty}$ определяются соответственно следующим образом:

$$S_{N,M}(x, y, f) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{s=0}^{M} c_{k,s}(f)\varphi_k(x)\varphi_s(y),$$

$$S_{N,N}(x, y, f) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{s=0}^{N} c_{k,s}(f)\varphi_k(x)\varphi_s(y),$$

$$S_R(x, y, f) = \sum_{k^2+s^2 \le R^2} c_{k,s}(f)\varphi_k(x)\varphi_s(y).$$

Отметим, что ряд классических результатов (скажем, такие теоремы, как теорема Л.Карлесона [14]: ряд Фурье любой функции $f(x) \in L^2[0, 2\pi]$ сходится к ней почти всюду на $[0, 2\pi]$, теорема М. Рисса [15]:

ряд Фурье любой функции $f(x) \in L^p[0,2\pi]$; $p>1$ сходится по норме $L^p[0,2\pi]$, теорема А.М.Колмогорова [16]: ряд Фурье каждой функции $f(x) \in L[0,2\pi]$ сходится в метрике $L^p[0,2\pi], 0<p<1$) невозможно перенести с одномерного случая на двумерный случай.

В этом случае даже разные (сферические, прямоугольные, квадратные) частичные суммы резко отличаются друг от друга по своим свойствам в таких вопросах, как сходимости в $L^p[0,1)$, $p \geq 1$ и сходимости почти всюду (см. [17-26])).

Подтверждением сказанного выше служат следующие теоремы.

Теорема (Фефферман[17]). Для любого $p \neq 2$ существует функция $f_p(x,y)$ из класса $L^p(0,1)^2$ сферические частичные суммы ряда Фурье которой не сходятся по норме $L^p(0,1)^2$.

Теорема (Фефферман[18]) Существует непрерывная функция $f(x,y)$ прямоугольные частичные суммы двойного ряда Фурье которой расходятся в каждой точке $(0,1)^2$.

Теорема (Р. Д. Гецадзе[19]) Пусть $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно ограниченная полная в $L^2[0,1]$ ортонормированная система. Тогда существует функция $f(x,y)$ из класса $L^1(0,1)^2$ двойной ряд Фурье которой по системе $\{\psi_k(x)\psi_n(y)\}_{k,n=1}^{\infty}$ по квадратам расходится по мере.

Теорема (М. Г. Григорян [20]) Существует функция $f_0(x,y) \in L^1(0,2\pi)^2$ двойной ряд Фурье которой по тригонометрической системе по сферам расходится в метриках $L^p(0,2\pi)^2$ для любого $p \in (0,1)$.

В случае системы Уолша, известны следующие результаты.

Теорема (Р. Д. Гецадзе[21]) Существует непрерывная функция $f(x,y)$ прямоугольные частичные суммы двойного ряда Фурье-Уолша которой расходятся почти всюду.

Теорема (Д. Г. Харрис [22]) Для любого $p \in [1,2)$ существует функция из $L^p(0,1)^2$ сферические частичные суммы двойного ряда Фурье-Уолша которой расходятся почти всюду и по $L^p(0,1)^2$ норме.

Необходимо также отметить, что ряд теорем, о представлении функций ортогональными рядами, можно перенести с одномерного случая на двумерный. В частности, следующая

Теорема (Талалян [23]) Пусть $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ полная в $L^2[0,1]$ ортонормированная система. Тогда для любого $0<p<1$ и для каждой функции $f(x) \in L^p(0,1)$ можно найти ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \psi_k(x),$$

который сходится к $f(x)$ в метрике $L^p[0,1]$.

Теорема справедлива и в двумерном случае: М.Г.Григорян [24] доказал, что

Теорема 1. Если $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ полная в $L^2[0,1]$ ортонормированная система, то для любого $0 < p < 1$ и для каждой функции $f(x,y) \in L^p(0,1)^2$ можно найти ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} b_{k,s} \psi_k(x) \psi_s(y),$$

который сходится к $f(x,y)$ в метрике $L^p[0,1]^2$ как по сферам, так и по прямоугольникам и

$$\sum_{k,s=1}^{\infty} |b_{k,s}|^r < \infty, \forall r > 2.$$

Будем говорить, что все ненулевые члены в последовательности $\{a_{k,s}\}$ расположены в убывающем порядке по всем направлениям, если из

$$k_2 \geq k_1, s_2 \geq s_1, k_2 + s_2 > k_1 + s_1, \; a_{k_2,s_2} \neq 0, a_{k_1,s_1} \neq 0,$$

следует, что

$$a_{k_2,s_2} < a_{k_1,s_1}.$$

Естественен следующий вопрос.

Сушествует ли измеримое множество E сколь угодно малой меры такое, что после изменения значений любой функции класса $L^p[0,1)$, $p \geq 1$ на e, двойной ряд Фурье по (сферам по прямоугольникам, по квадратам) по системе Уолша и по тригонометрической системе измененной функции сходился бы к ней (почти всюду, по норме $L^p[0,1)$, равномерно)? В работе [24] М.Г.Григоряном получены следующие результаты: Для любой ортонормированной системы $\{f_k(x)\}$ и любых чисел

$p \in [1,2)$ и $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]^2$ с мерой $| E |> 1-\epsilon$ такое, что для каждой функции $f(x,y) \in L^p[0,1]^2$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0,1]^2$, совпадающую с f на E, такую, что

1) двойной ряд Фурье функции$\tilde{f}$ как по прямоугольникам так и по сферам сходится по $L^1[0,1]^2$ норме,

2) двойной ряд Фурье функции $\tilde{f}$ как по прямоугольникам так и по сферам сходится по $L^p(E)$ норме.

Важно отметить, что в работе [24] показано существование полной в L^2 ортонормированной системы, для которой поставленный вопрос при $p > 2$ в смысле сходимости по норме L^p имеет отрицательный ответ, точнее построена ортонормированная система $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ограниченных функций и непрерывная функция $g(x)$ такие, что если при некоторой функции $f \in L^p,\ p > 2;\ | \{x \in [0,1]:\ f(x) = g(x)\} |> 0$, то ее ряд Фурье по системе ψ расходится в $L^p(0,1)$.

Заметим, что ответ на выше поставленный вопрос зависит как от системы и вида сходимости (в частности от p), так и от того, зависит ли исключительное множество E, на котором происходит изменение значений функции f(x), от этой функции, или оно универсально, т.е. обслуживает целый функциональный класс.

Мы рассмотрим сформулированный вопрос в двух постановках:

1. Когда значения функции $f(x)$ изменяются на зависящем от функции множестве сколь угодно малой меры.

2. Когда исключительное множество e, на котором происходит изменение, не зависит от исправляемой функции $f(x)$, т.е. оно, универсально, обслуживает целый функциональный класс.

В соответствии с этими постановками, в настоящей работе доказываются следующие теоремы.

В первой главе диссертации доказывается:

Теорема 1.1. Для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]^2$ с мерой $| E |> 1-\epsilon$ такое, что для каждой функции $f(x,y) \in L^1[0,1]^2$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0,1]^2$, совпадающую с f на E, такую, что все ненулевые члены в последовательности $\{|c_{k,s}(\tilde{f})|\}$ расположены в убывающем порядке по всем направлениям (здесь $c_{k,s}(\tilde{f})$−коэффициенты Фурье исправленной функции $\tilde{f}(x,y)$ по двойной системе Уолша - $\{\varphi_k(x)\varphi_s(y)\}$) и

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int\int_{[0,1]^2}|S_R(x,y,\tilde{f})-\ \tilde{f}(x,y))|dxdy\right)=0.$$

Теорема 1.2. Для любого $0<\epsilon<1$ существует измеримое множество $E\subset[0,1]^2$ с мерой $|\ E\ |>1-\epsilon$ такое, что для любого $p\in[1,\infty)$ и для каждой функции $f(x,y)\in L^p[0,1]^2$можно найти функцию $\tilde{f}\in L^1[0,1]^2$, совпадающую с f на E, такую, что все ненулевые члены в последовательности $\{|c_{k,s}(\tilde{f})|\}$ расположены в убывающем порядке по всем направлениям и

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int\int_E|S_R(x,y,(\tilde{f})-\ \tilde{f}(x,y))|^pdxdy\right)^{1/p}=0.$$

Теорема 1.3. Для любых $0<\epsilon<1, p\geq 1$ и для каждой функции $f\in L^p(0,1)^2$ можно найти функцию $\tilde{f}\in L^p(0,1)\ ^2$, $mes\{f\neq\tilde{f}\}<\epsilon$, двойной ряд Фурье-Уолша которой по сферам сходится по $L^p[0,1]^2$ но*р*ме и все ненулевые члены в последовательности $\{|c_{k,s}(\tilde{f})|\}$ расположены в убывающем порядке по всем направлениям.

Теорема 1.4. Для любого $0<\epsilon<1$ и для каждой функции $f\in\bigcap_{p\geq 1}L^p[0,1]^2$ можно найти функцию $\tilde{f}\in L^p(0,1)\ ^2$, $mes\{f\neq\tilde{f}\}<\epsilon$, двойной ряд Фурье-Уолша которой сходится к $\tilde{f}$ во всех нормах $L^p[0,1]^2$ по сферам и все ненулевые члены в последовательности $\{|c_{k,s}(\tilde{f})|\}$ расположены в убывающем порядке по всем направлениям.

Во второй главе диссертации рассматривается вопрос сходимости по норме $L^p[0,1)$, $p\in[1,2)$ операторов

$$T_\lambda(x,y,f)=\sum_{|c_{k,s}(f)|\geq\lambda}c_{k,s}(f)\varphi_k(x)\varphi_s(y),$$

при $\lambda\to 0$, после исправления функции класса $L^p(0,1)^2$.

Отметим, что такие методы суммирования (методы жесткого отбора) в одномерном случае были рассмотрены в работах [35]-[41].

В работе [27] Т.Тао установил, что существует интегрируемая функция для которой операторы $T_\lambda(x,f)$ по системе Хаара п.в. расходятся, а в работе [28] Г.Геворкяном и А.Степаняном этот результат был обобщен для любой 0-регулярного вейвлет разложения. В работе [29] М. Григоряном и А. Кобеляном установлена возможность исправления функции с целью получения сходимости почти всюду операторов жесткого отбора двойного ряда Фурье-Хаара исправленной функции.

Во второй главе доказывается

Теорема 2.1.Для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]^2$ с мерой $\mid E \mid > 1-\epsilon$ такое, что для каждой функции $f(x,y) \in L^1[0,1]^2$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0,1]^2$, совпадающую с f на E, такую, что

$$\lim_{\lambda\to 0}\left(\int\int_{[0,1]^2} |T_\lambda((x,y),\ \tilde{f}) -\ \tilde{f}(x,y))|dxdy\right) = 0$$

и все ненулевые члены в последовательности $\{|c_{k,s}(\tilde{f})|\}$ расположены в убывающем порядке по всем направлениям (здесь $c_{k,s}(\tilde{f})$–коэффициенты Фурье исправленной функции $\tilde{f}(x,y)$ по двойной системе Уолша - $\{\varphi_k(x)\varphi_s(y)\}$).

Теорема 2.2. Для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]^2$ с мерой $\mid E \mid > 1-\epsilon$ такое, что для любого $p \in [1,2)$ и для каждой функции $f(x,y) \in L^p[0,1]^2$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0,1]^2$, совпадающую с f на E, такую, что

$$\lim_{\lambda\to 0}\left(\int\int_{E} |T_\lambda((x,y),\ \tilde{f}) -\ \tilde{f}(x,y))|^p dxdy\right)^{1/p} = 0.$$

Теорема 2.3. Для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]^2$ с мерой $\mid E \mid > 1-\epsilon$ такое, что для любого $p \in [1,2)$ и для каждой функции $f(x,y) \in \bigcap_{2>p\geq 1} L^p[0,1]^2$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0,1]^2$, совпадающую с f на E, такую, что

$$\lim_{\lambda\to 0}\left(\int\int_{E} |T_\lambda((x,y),\ \tilde{f}) -\ \tilde{f}(x,y))|^p dxdy\right)^{1/p} = 0.$$

В третьей главе изучаются вопросы представления функций класса $L^p\,[0,1]\,, p \in (0,1)$ двойными рядами Уолша.

Напомним, что система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $(\varphi_n \in S, n = 1,2,...)$ называется системой представления в классе $S \subset L^0$ (L^0 -класс измеримых функций

) в смысле сходимости по мере, почти всюду, в метрике S (если, конечно, в S установлена метрика), если для каждой функции $f \in S$ существует ряд вида $\sum\limits_{n} a_n\varphi_n$, который сходится к f соответственно по мере, почти всюду, в метрике S.

Вопросам представления функций класса S рядами по классическим системам в разных смыслах посвящено большое количество работ (см. [30]-[38], а также ссылки в этих работах).

Д.Е.Меньшов [30] доказал, что тригонометрическая система является системой представления в классе почти везде конечных на $[0,2\pi]$ измеримых функций в смысле сходимости п.в. на $[0,2\pi]$.

А.А.Талалян в работе [35] доказал, что каждая полная ортонормированная система является системой представления как в классах $L^p\,[0,1]\,; p\in\ (0,1)$ в смысле сходимости в метрике $L^p\,[0,1]$, так и в классе почти везде конечных на $[0,1]$ измеримых функций в смысле сходимости по мере.

Теорема (А.А. Талалян). Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$-система функций определенных на измеримом множестве $E\subset[0,1]$, $|E|>0$ и образующих нормированный базис в пространстве $L^p(E)$, $p>1$. Тогда для любой измеримой функции $f(x)$, определенной на множестве E, существует ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$, обладающий следующими свойствами:
1) на множесетве A, где $f(x)$ конечена, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$ асимптотически сходится к $f(x)$ в метрике L^p, $p>1$, т.е. для любого $\varepsilon>0$ существует множество $A_\varepsilon\subset A$ такое, что

$$|A_\varepsilon|>|A|-\varepsilon,\ \lim_{n\to\infty}\int_{A_\varepsilon}|\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)-f(x)|^p dx=0,$$

а на множестве $E\setminus A$ этот ряд сходится к $f(x)$ по мере
2) $lim_{k\to\infty}c_k=0$

В 1977 году К. Гофман и Р. Зинк доказали следующую теорему.

Теорема (Гофман, Зинк [52]). Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ -базис во всех пространствах $L^p[0,1], p>1$, где $\inf_k||\varphi_k||_{L^p}>0$ и $f(x,y)$ - измеримая функция. Тогда существует двойной ряд

$$\sum_{k,s=1}^{\infty} a_{k,s}\varphi_k(x)\varphi_s(y)$$

обладающий следуюшими свойствами:
1) на множестве $A \subset [0,1]\times[0,1]$, где $f(x,y)$ конечна, ряд (1) по Прингсхейму асимптотически сходится к $f(x,y)$ в метрике L^1, а на множестве $[0,1]\times[0,1]\setminus A$ этот ряд сходится к $f(x,y)$ по мере.
2) $\lim_{k,s\to\infty} a_{k,s} = 0$

Оказывается, что в этой теореме излишне требование, чтобы система $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ была базисом во всех пространствах $L^p[0,1],\ p>1$ и, кроме того, в формулировке этой теоремы асимптотическую сходимость в L^1 можно заменить асимптотической сходимостью в $L^p,\ p>1$. Вопрос о возможности такого усиления последней теоремы был поставлен К.Гофманом и Р.Зинком в их вышеупомянутой работе.
Ответив на поставленный вопрос, М.Г.Григорян [38] доказал следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$-нормированный базис пространства $L^p(E),\ |E|>0,\ p>1$. Тогда для любой измеримой функции $F(x,y)$, определенной на множестве $T=E\times E$, существует двойной ряд

$$\sum_{k,s=1}^{\infty} c_{k,s}\varphi_k(x)\varphi_s(y) \tag{1}$$

обладающий следующими свойствами:
1) на множестве A, где $F(x,y)$ конечна, ряд (2) по Прингсхемйу асимптотически сходится к $F(x,y)$ в метрике $L^p(T),\ p>1$, т.е. для любого $\varepsilon>0$ существует множество $A_\varepsilon \subset A$ такое, что

$$|A_\varepsilon| > |A| - \varepsilon,\ \lim_{n,m\to\infty}\int\int_{A_\varepsilon} |\sum_{k,s=1}^{n,m} c_{k,s}\varphi_k(x)\varphi_s(y) - F(x,y)|^p dxdy = 0,$$

а на множестве $T\setminus A$ ряд (2) сходится к $F(x,y)$ по мере.
2) $\lim_{k,s\to\infty} c_{k,s} = 0$

В третьей главе доказывается следующая

Теорема 3.1 Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$-нормированный базис пространства $L^p(E)$, $|E|>0$, $p>1$. Тогда для любой измеримой функции $F(x,y)$, определенной на множестве $T=E\times E$, существует двойной ряд

$$\sum_{k,s=1}^{\infty} c_{k,s}\varphi_k(x)\varphi_s(y)$$

обладающий следующими свойствами:
1) на множестве A, где $F(x,y)$ конечна, ряд по Прингсхемйу и по сферам асимптотически сходится к $F(x,y)$ в метрике $L^p(T)$, $p>1$, т.е. для любого $\varepsilon>0$ существует множество $A_\varepsilon\subset A$ такое, что

$$|A_\varepsilon|>|A|-\varepsilon,\ \lim_{R\to\infty}\int\int_{A_\varepsilon}|\sum_{k^2+s^2<R^2} c_{k,s}\varphi_k(x)\varphi_s(y)-F(x,y)|^p dxdy=0,$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\int\int_{A_\varepsilon}|\sum_{k,s=1}^{n,m} c_{k,s}\varphi_k(x)\varphi_s(y)-F(x,y)|^p dxdy=0,$$

а на множестве $T\setminus A$ ряд сходится к $F(x,y)$ по мере.
2) $\lim_{k,s\to\infty} c_{k,s}=0$

Теорема 3.1 является усиленеием теоремы 2 Григоряна.

Как уже отметили выше (см. теорема Гецадзе) двойные ряды Фурье-Уолша по двойной системе Уолша для представления функции $f(x,y)$ класса $L^1[0,1]^2$ не годятся даже в смысле сходимости по мере, но тем не менее двойная система $\{\varphi_k(x)\varphi_s(y)\}$ Уолша является системой представления в классе $L^1[0,1]^2$в смысле сходимости в метрике $L^p[0,1)^2, p\in(0,1)$.

Более того в третьей главе доказывается следующая

Теорема 3.2. Для любого $0<p<1$ и для каждой функции $f(x,y)\in L^p(0,1)^2$ можно найти ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} b_{k,s}\varphi_k(x)\varphi_s(y),$$

по двойной системе $\{\varphi_k(x)\varphi_s(y)\}$ Уолша , который сходится к $f(x,y)$ почти всюду в метрике $L^p[0,1]^2$ как по сферам так и по прямоугольникам, все ненулевые члены в последовательности $\{|b_{k,s}|\}$ расположены в убывающем порядке по всем направлениям и

$$\sum_{k,s=1}^{\infty} |b_{k,s}|^r < \infty, \forall r > 2.$$

В заключение выражаю благодарность профессору М.Г. Григоряну, под руководством которого выполнена данная работа.

Список литературы

[1] Н.Н. Лузин, “К основной теореме интегрального исчисления”, Матем. Сб., 28:2(1912), 266-294.

[2] Д.Е. Меньшов, “О равномерной сходимости рядов Фурье”, Матем. Сб., 53:2(1942), 67-96.

[3] Д.Е. Меньшов, “О рядах Фурье от суммируемых функций”, Тр.Моск. матем. общества, 1(1952), 5-38.

[4] Д.Е. Меньшов, “О рядах Фурье непрерывных функций”, Уч.Записки,

“Математика”, 148:4(1951), 108-132.

[5] Ш.В. Хеладзе, “Сходимость рядов Фурье почти всюду и в смысле метрике L^1”, Мат. сб., 107:2(1978), 245-258.

[6] M.G. Grigorian, “On the convergence of Fourier series in the metric of L^1”, Analysis Math., 17(1991), 211-237.

[7] М.Г.Григорян “Модификации функций, коэффициенты Фурье и нелинейная аппроксимация”, Матем.сборник. 2012г, т.203, N 3, стр.49-78.

[8] S. A.Episkoposian, M.G. Grigorian, “On the convergence of greedy algorithm by

generalized Walsh system”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 389 (2012), p. 1374-1379.

[9] Гоголадзе Л.Д., Зерекидзе Т. Ш., “О сопряженных функциях нескольких переменных”, Сообщ. АН Груз. ССР, 94, 1979, N 3, с.541-544.

[10] М.Г. Григорян, С. Л. Гогян, “Нелинейная аппроксимация по системе Хаара и модификации функций”, Analysis Mathematica, 32(2006), 49-80.

[11] М.Г. Григорян, “О некоторых свойствах ортогональных систем”, Изв. РАН. (сер. мат.), 57:5(1993), 75-105.

[12] M.G. Grigorian and R.E. Zink, “Greedy approx. with respect to certain subsystems of the Walsh orthonormal system”, Proc. of the Amer. Mat. Soc., 134:12(2006), 3495-3505.

[13] Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. “Ряды и преобразования Уолша”, М.: Наука, 1987.

[14] Carleson L. “On convergence and growth of partial sums of Fourier series”, Acta Math., 1966, V.116, P.135-157.

[15] Riss M. “Sur les fonctionsconjugees”, // Math. Zeit. 1927. Bd. 27. S. 214-244.

[16] Kolmogorov A.H., “Sur les fonctionsharmoniquesconjugeeset les series de Fourier”, FM, 7.1925, P. 23-28.

[17] Fefferman C. “On the divergence of multiple Fourier series”, Bull Amer. Math. Soc. 1971, V.77, N 2, P. 191-195.

[18] Fefferman C. “The multiple problem for the ball”, Ann. Math. 1971, V. 94, N2, P. 330-336.

[19] Гецадзе Р.Д. “О расходимости по мере общих кратных ортогоналных рядов Фурье”, ДАН СССР, 1989, Т.306, N1.

[20] М.Г.Григорян “О сходимости в метрике сферических частичных сумм двойных рядов Фурье”, Матем.заметки, 1983г, т.33, N 4, стр.517-528.

[21] Гецадзе Р.Д., “Непрерывная функция с расходящимся почти всюду кратным рядом Фурье по системе Уолша-Пелли”, Матем. сб., 1985, 128(170):2(10), 269-286.

[22] D.C Harris, “Almost everywhere divergence of multiple Walsh-Fourier series”, American math. soc., volume 101, N. 4, 1987.

[23] Талалян А.А., “Представление Функций классов L^p, $1 \leq p < 2$ ортогональными рядами”, Acta Math.Hung. 21, 1-2 ,1970, 31-39.

[24] Григорян М.Г., “Об ортогональных рядах универсальных в $L^p[0,1]$”, Изв. НАН. (сер. мат.), 37,N2,(2002), 3-18.

[25] Скопина М.А., “О порядке роста квадратных частичных сумм двойного ряда Фурье”, Мат. заметки, 1983, Т. 33, N 4. С.517-522.

[26] С. Ш. Галстян, Г. А. Карагулян, “О расходимости почти всюду прямоугольных частичных сумм кратных рядов Фурье ограниченных функций”, Матем. заметки, 1998, том 64, выпуск 1, страницы 24-36.

[27] T.Tao, “On the Almost Everywhere Convergence of Wavelet Summation Methods”, Applied and Computational Harmonic Analysis 3, 384-387(1996).

[28] Г.Г. Геворкян, А.А. Степанян, “О почти всюду расходимости одного метода суммирования для вейвелет разложения”, Изв. НАН Армении, сер. Математика, 39, но. 2, 27-32 (2004).

[29] M.G. Grigoryan, A.Kh. Kobelyan, “On the convergence of hard sampling operators”, Second International Conference Mathematics in Armenia Advances and Perspectives, pp. 45-46, 2013.

[30] Меньшов Д.Е., “Sur la representation des fonctions mesurables par des series trigonmetrices
Матем. сб., 1941, т.9 n.51, с.667-692.

[31] Кротов В.Г., “Представление измеримых функций рядами по системе Фабера-Шаудера и универсальные ряды”, Изв. АН СССР сер. матем.,1977, т.41, n.1., с.215-236.

[32] Иванов В.И. “Представление функций рядами по тригонометрической системе с весом”, Тр. межд. конф. по теории прибл. функций. (Киев, 1983)- М.: Наука, 1987, с.186-187.

[33] M.G. Grigorian, “On the representation of functions byorthogonal series in weighted L^p spaces”, Studia. Math.,134:3(1999), 207-216.

[34] Grigorian M.G., “On the convergence of Fourier series in the metric of L^1”, Analysis Math., 1991, v.17, p.211-237.

[35] Талалян А.А., “О рядах универсальных от перестановок”, Изв. АН СССР, Сер. мат., 1960, т.24, с.567-604.

[36] Талалян А.А., “Представление измеримых функций рядами”, УМН, 1960, т.15, n.5., с.77-141.

[37] C. Coffman, R. Zink, “On the Representation of Measurable Functions by Multiple Series Associated With a Certain Class of Schauder Bases”, Proc. London Math. Soc., 35, No. 3, 527-540, 1977.

[38] М.Г. Григорян, “Представление измеримых функций двойными рядами”, Изв. НАН. (сер. мат.), 16,N12,(1981), 111-130.

Работы автора по теме диссертации

[1] A.B.Minasyan, “Universal Series by Walsh’s System with Monotone Coefficients”, Advances in Theoretical and Applied Mathematics, Volume 8, Number 1, pp. 45-52, 2013.

[2] M.G.Grigoryan, A.B.Minasyan, “Series in the Walsh generalized System with Monotone Coefficients”, Advances in Theoretical and Applied Math, Volume 9, Number 1, pp. 43-48, 2014.

[3] M.G.Grigoryan, A.B.Minasyan, “Representation of Functions in L^1_μ Weighted Spaces by Series with Monotone Coefficients in the Walsh Genralized System”, Applied Math, 4, 6-12, 2013.

[4] А. Минасян, “Представление функций по обобщенным сериям Уолша с монотонными коэффициентами $L^p, p \in (0,1)$”, Международный Аспирантский Форум “Современная Наука: Тенденции Развития, пр. и персп.”, Посвященный 10-Летию Асп. Рау, Ереван 23-25 Сентября 2013, ст. 17.

[5] А.Минасян, “Представление функций рядами по мультипликативной системе”, Математика в Высшей Школе, 2013, 3, 36-43.

[6] A.B.Minasyan, “On Fourier Coefficients with Respect to the Walsh Double System”, Proceedings of the YSU, v.1, pp 45-49, 2014.

SUMMARY

The main results obtained in this thesis are:

1. For any $0 < \epsilon < 1$ there exists a measurable set $E \subset [0,1]^2$ with measure $\mid E \mid > 1-\epsilon$ such that for any function $f(x,y) \in L^1[0,1]^2$ one can find a function $\tilde{f} \in L^1[0,1]^2$ coinciding with f on E, such that all non zero coefficients in the sequence $\{|c_{k,s}(\tilde{f})|\}$ are monotonically decreasing by all directions (here $c_{k,s}(\tilde{f})-$are the Fourier coefficients of modified function $\tilde{f}(x,y)$ with respect to the double Walsh system $\{\varphi_k(x)\varphi_s(y)\}$) and

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int\int_{[0,1]^2}|S_R(x,y,\tilde{f})-\ \tilde{f}(x,y))|dxdy\right)=0.$$

2. For any $0 < \epsilon < 1$ there exists a measurable set $E \subset [0,1]^2$ with measure $\mid E \mid > 1-\epsilon$ such that for any $p \in [1,\infty)$ and for each function $f(x,y) \in L^p[0,1]^2$ one can find a function $\tilde{f} \in L^1[0,1]^2$ coinciding with f on E such that all non zero coefficients in the sequence $\{|c_{k,s}(\tilde{f})|\}$ are monotonically decreasing by all directions and

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int\int_{E}|S_R(x,y,(\tilde{f})-\ \tilde{f}(x,y))|^p dxdy\right)^{1/p}=0.$$

3. For any $0<\epsilon<1,\ p\geq 1$ and for each function $f \in L^p(0,1)^2$ one can find a function $\tilde{f} \in L^p(0,1)\ ^2,\ mes\{f \neq \tilde{f}\} < \epsilon$ such that double Fourier-Walsh series by spheres of modified function converges with $L^p[0,1]^2$ norm and all non zero coefficients in the sequence $\{|c_{k,s}(\tilde{f})|\}$ are monotonically decreasing by all directions.

4. For any $0 < \epsilon < 1$ and for each function $f \in \bigcap_{p\geq 1} L^p[0,1]^2$ one can find a function $\tilde{f} \in L^p(0,1)\ ^2,\ mes\{f \neq \tilde{f}\} < \epsilon$ such that double Fourier-Walsh series by spheres of modified funtcion converges to $\tilde{f}$ by all norms $L^p[0,1]^2$ and all non zero coefficients in the sequence $\{|c_{k,s}(\tilde{f})|\}$ are monotonically decreasing by all directions.

5. For any $0 < \epsilon < 1$ there exists a measurable set $E \subset [0,1]^2$ with measure $| E |> 1-\epsilon$ such that for each function $f(x,y) \in L^1[0,1]^2$ one can find a function $\tilde{f} \in L^1[0,1]^2$ coinciding with f on E, such that

$$\lim_{\lambda\to 0}\left(\int\int_{[0,1]^2} |T_\lambda((x,y),\ \tilde{f}) - \ \tilde{f}(x,y))|dxdy\right) = 0$$

and all non zero coefficients in the sequence $\{|c_{k,s}(\tilde{f})|\}$ are monotonically decreasing by all directions (here $c_{k,s}(\tilde{f})-$are the Fourier coefficients of modified function $\tilde{f}(x,y)$ with respect to the double Walsh system $\{\varphi_k(x)\varphi_s(y)\}$).

6. For any $0 < \epsilon < 1$ there exists a measurable set $E \subset [0,1]^2$ with measure $| E |> 1-\epsilon$ such that for any $p \in [1,2)$ and for each function $f(x,y) \in L^p[0,1]^2$ one can find a function $\tilde{f} \in L^1[0,1]^2$ coinciding with f on E, such that

$$\lim_{\lambda\to 0}\left(\int\int_{E} |T_\lambda((x,y),\ \tilde{f}) - \ \tilde{f}(x,y))|^p dxdy\right)^{1/p} = 0.$$

7. For any $0 < \epsilon < 1$ there exists a measurable set $E \subset [0,1]^2$ with measure $| E |> 1-\epsilon$ such that for any $p \in [1,2)$ and for each function $f(x,y) \in \bigcap_{2>p\geq 1} L^p[0,1]^2$ one can find a function $\tilde{f} \in L^1[0,1]^2$ coinciding with f on E, such that

$$\lim_{\lambda\to 0}\left(\int\int_{E} |T_\lambda((x,y),\ \tilde{f}) - \ \tilde{f}(x,y))|^p dxdy\right)^{1/p} = 0.$$

8. Let $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ is a normalized basis of space $L^p(E),\ |E| > 0,\ p > 1.$ Than for each measurable function $F(x,y)$, defined on a set $T = E\times E$, there exists double series

$$\sum_{k,s=1}^{\infty} c_{k,s}\varphi_k(x)\varphi_s(y)$$

having the following properties :

1) On set A, where $F(x,y)$ is finite, series by Pringsheim and by spheres

asymptotically converges to the $F(x,y)$ in $L^p(T),\ p>1$ norm, i.e. for any $\varepsilon>0$ there exists a set $A_\varepsilon \subset A$ such that

$$|A_\varepsilon| > |A| - \varepsilon,\ \lim_{R\to\infty} \int\int_{A_\varepsilon} |\sum_{k^2+s^2<R^2} c_{k,s}\varphi_k(x)\varphi_s(y) - F(x,y)|^p dxdy = 0,$$

$$\lim_{n,m\to\infty} \int\int_{A_\varepsilon} |\sum_{k,s=1}^{n,m} c_{k,s}\varphi_k(x)\varphi_s(y) - F(x,y)|^p dxdy = 0,$$

and on the set $T \setminus A$ series converges to the $F(x,y)$ by norm.

2) $\lim_{k,s\to\infty} c_{k,s} = 0$.

9. For any $0<p<1$ and for each function $f(x,y) \in L^p(0,1)^2$ one can find a series

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} b_{k,s}\varphi_k(x)\varphi_s(y),$$

by double system of Walsh $\{\varphi_k(x)\varphi_s(y)\}$ which converges to the $f(x,y)$ almost everywhere and by norm $L^p[0,1]^2$ both by spheres and by rectangles, all non zero coefficients in the sequence $\{|b_{k,s}|\}$ are monotonically decreasing by all directions and

$$\sum_{k,s=1}^{\infty} |b_{k,s}|^r < \infty, \forall r > 2.$$

ԱՄՓՈՓԱԳԻՐ

Ատենախոսությունում ստացված են հետևյալ արդյունքները՝

1. Կամայական $0 < \epsilon < 1$ թվի համար գոյություն ունի $E \subset [0,1]^2$ չափելի բազմություն՝ $\mid E \mid > 1-\epsilon$ չափով, այնպիսին, որ ցանկացած $f(x,y) \in L^1[0,1]^2$ ֆունկցիայի համար կարելի է գտնել $\tilde{f} \in L^1[0,1]^2$ ֆունկցիա, որը համընկնում է f-ի հետ E-ի վրա, $\{|c_{k,s}(\tilde{f})|\}$ հաջորդականության բոլոր ոչ զրոյական գործակիցները բոլոր ուղղություններով մոնոտոն նվազող են (այստեղ $c_{k,s}(\tilde{f})$−ը $\tilde{f}(x,y)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցներն են ըստ $\{\varphi_k(x)\varphi_s(y)\}$ Ուոլշի կրկնակի համակարգի) և

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int\int_{[0,1]^2}|S_R(x,y,\tilde{f})- \ \tilde{f}(x,y))|dxdy\right)=0:$$

2. Կամայական $0 < \epsilon < 1$ թվի համար գոյություն ունի $E \subset [0,1]^2$ չափելի բազմություն՝ $\mid E \mid > 1-\epsilon$ չափով, այնպիսին, որ ցանկացած $p \in [1,\infty)$ թվի և $f(x,y) \in L^p[0,1]^2$ ֆունկցիայի համար կարելի է գտնել $\tilde{f} \in L^1[0,1]^2$ ֆունկցիա, որը համընկնում է f-ի հետ E-ի վրա, $\{|c_{k,s}(\tilde{f})|\}$ հաջորդականության բոլոր ոչ զրոյական գործակիցները բոլոր ուղղություններով մոնոտոն նվազող են և

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int\int_{E}|S_R(x,y,(\tilde{f})- \ \tilde{f}(x,y))|^p dxdy\right)^{1/p}=0:$$

3. Կամայական $0 < \epsilon < 1$, $p \geq 1$ թվերի և յուրաքանչյուր $f \in L^p(0,1)^2$ ֆունկցիայի համար կարելի է գտնել $\tilde{f} \in L^p(0,1)\ ^2$, $mes\{f \neq \tilde{f}\} < \epsilon$ ֆունկցիա, որի կրկնակի Ֆուրիե-Ուոլշ շարքի սփերիկ մասնակի գումարները զուգամիտում են $L^p[0,1]^2$ նորմով և $\{|c_{k,s}(\tilde{f})|\}$ հաջորդականության բոլոր ոչ զրոյական գործակիցները բոլոր ուղղություններով մոնոտոն նվազող են:

4. Կամայական $0 < \epsilon < 1$ թվի և յուրաքանչյուր $f \in \bigcap_{p\geq 1} L^p[0,1]^2$ ֆունկցիայի համար կարելի է գտնել $\tilde{f} \in L^p(0,1)\ ^2$, $mes\{f \neq \tilde{f}\} < \epsilon$ ֆունկցիա, որի կրկնակի Ֆուրիե-Ուոլշ շարքի սփերիկ մասնակի գումարները զուգամիտում են $\tilde{f}$-ին բոլոր $L^p[0,1]^2$ նորմերով և $\{|c_{k,s}(\tilde{f})|\}$ հաջորդականության բոլոր ոչ զրոյական գործակիցները բոլոր ուղղություններով մոնոտոն նվազող են:

5. Կամայական $0 < \epsilon < 1$ թվի համար գոյություն ունի $E \subset [0,1]^2$ չափելի բազմություն՝ $\mid E \mid > 1-\epsilon$ չափով, այնպիսին, որ յուրաքանչյուր $f(x,y) \in L^1[0,1]^2$ ֆունկցիայի համար կարելի է գտնել f-ի հետ E բազմության վրա համընկնող $\tilde{f} \in L^1[0,1]^2$ ֆունկցիա, այնպիսին, որ

$$\lim_{\lambda\to 0}\left(\int\int_{[0,1]^2} |T_\lambda((x,y),\ \tilde{f}) -\ \tilde{f}(x,y))| dxdy\right) = 0$$

և $\{|c_{k,s}(\tilde{f})|\}$ հաջորդականության բոլոր ոչ զրոյական գործակիցները բոլոր ուղղություններով մոնոն նվազող են (այսպեղ $c_{k,s}(\tilde{f})$–ը $\tilde{f}(x,y)$ ֆունկցիայի Փուրիեի գործակիցներն են ըստ $\{\varphi_k(x)\varphi_s(y)\}$ Ոէոլշի կրկնակի համակարգի):

6. Կամայական $0<\epsilon<1$ թվի համար գոյություն ունի $E\subset[0,1]^2$ չափելի բազմություն՝ $|\ E\ |> 1-\epsilon$ չափով, այնպիսին, որ ցանկացած $p\in[1,2)$ թվի և ցանկացած $f(x,y)\in L^p[0,1]^2$ ֆունկցիայի համար կարելի է գտնել f-ի հետ E բազմության վրա համընկնող $\tilde{f}\in L^1[0,1]^2$ ֆունկցիա, այնպիսին, որ

$$\lim_{\lambda\to 0}\left(\int\int_{E} |T_\lambda((x,y),\ \tilde{f}) -\ \tilde{f}(x,y))|^p dxdy\right)^{1/p} = 0 :$$

7. Կամայական $0<\epsilon<1$ թվի համար գոյություն ունի $E\subset[0,1]^2$ չափելի բազմություն՝ $|\ E\ |> 1-\epsilon$ չափով, այնպիսին, որ ցանկացած $p\in[1,2)$ թվի և ցանկացած $f(x,y)\in\bigcap_{2>p\geq 1} L^p[0,1]^2$ ֆունկցիայի համար կարելի է գտնել f-ի հետ E բազմության վրա համընկնող $\tilde{f}\in L^1[0,1]^2$ ֆունկցիա, այնպիսին, որ

$$\lim_{\lambda\to 0}\left(\int\int_{E} |T_\lambda((x,y),\ \tilde{f}) -\ \tilde{f}(x,y))|^p dxdy\right)^{1/p} = 0. \forall p\in[1,2) :$$

8. Դիցուք $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$-ին $L^p(E)$, $|E|>0$, $p>1$ պարածության նորմավորված բազիս է: Այդ դեպքում $T=E\times E$ բազմության վրա որոշված ցանկացած $F(x,y)$ չափելի ֆունկցիայի համար գոյություն ունի կրկնակի շարք

$$\sum_{k,s=1}^{\infty} c_{k,s}\varphi_k(x)\varphi_s(y)$$

որն ունի հետևյալ հատկությունները.

1) A բազմության վրա, որտեղ $F(x,y)$-ը վերջավոր է, շարքը ըստ Պրինգսխեյմի և ըստ սֆերաների ասիմպտոտիկորեն զուգամիտում է $F(x,y)$-ին՝ $L^p(T)$, $p>1$ նորմով, այսինքն ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $A_\varepsilon\subset A$ բազմություն, այնպիսին, որ

$$|A_\varepsilon|>|A|-\varepsilon,\ \lim_{R\to\infty}\int\int_{A_\varepsilon}|\sum_{k^2+s^2<R^2} c_{k,s}\varphi_k(x)\varphi_s(y)-F(x,y)|^p dxdy = 0,$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\int\int_{A_\varepsilon}|\sum_{k,s=1}^{n,m}c_{k,s}\varphi_k(x)\varphi_s(y)-F(x,y)|^p dxdy=0,$$

և $T\setminus A$ բազմության վրա շարքը զուգամիտում է $F(x,y)$-ին ըստ նորմի
2) $\lim_{k,s\to\infty}c_{k,s}=0$:

9. Կամայական $0<p<1$ թվի և կամայական $f(x,y)\in L^p(0,1)^2$ ֆունկցիայի համար կարելի է գտնել $\{\varphi_k(x)\varphi_s(y)\}$ ՈՒոլշի կրկնակի համակարգով շարք.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}b_{k,s}\varphi_k(x)\varphi_s(y),$$

որը զուգամիտում է $f(x,y)$-ին համարյա ամենուրեք և $L^p[0,1]^2$ նորմով ըստ սֆերաների և ըստ ուղղանկյունների, $\{|b_{k,s}|\}$ հաջորդականության բոլոր ոչ զրոյական գործակիցները բոլոր ուղղություններով մոնոտոն նվազող են և

$$\sum_{k,s=1}^{\infty}|b_{k,s}|^r<\infty,\forall r>2:$$