

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՆԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Կարագուլյան Դավիթ Ավետիսի

Օրթոգոնալ շարքերի և ինպեգրալ միջինների
սահմանափակման բազմությունների նկարագրության մասին

Ա.01.01 – “Մաթեմատիկական անալիզ” մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական ասպիրանտի
հայցման ավտոբիոգրաֆիայի

ՄԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան 2015

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Карагулян Давит Аветикович

О характеристике множеств расходимости
ортogonalных рядов и интегральных средних

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических
наук по специальности
01.01.01 – “Математический анализ”

Ереван 2015

Արենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի Պետական Համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝

Ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր
Գ.Ա. Կարագուլյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝

Ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր
Մ. Գ. Գրիգորյան
ՀՀ ԳԱԱ-ի թղթակից անդամ
Ա. Ա. Սահակյան

Առաջարար կազմակերպություն՝

Ակակի Ծերեթելիի անվ. Պետական
համալսարան, Քութաիսի, Վրաստան

Պաշտպանությունը կկայանա 2015թ. մայիսի 26-ին ժ. 15⁰⁰-ին Երևանի պետական համալսարանում գործող ԲՈՀ-ի "Մաթեմատիկայի" 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում (0025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1):

Արենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Մեղմագիրն առաքված է 2015թ. ապրիլի 25-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար,

Ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Տ. Ն. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском Государственном Университете

Научный руководитель:

доктор физ-мат. наук
Г. А. Карагулян

Официальные оппоненты:

доктор физ.-мат. наук, профессор
М. Г. Григорян
член-корр. НАН Армении
А. А. Саакян

Ведущая организация:

Государственный университет
им. Акакия Церетели, Кутаиси, Грузия

Защита диссертации состоится 26-ого мая 2015г. в 15⁰⁰ на заседании специализированного совета ВАК-а "Математика" 050 при ЕГУ (0025, г. Ереван, ул. Ал. Манукяна 1).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.

Автореферат разослан 25-ого апреля 2015г.

Ученый секретарь специализированного совета,

доктор физ-мат. наук, профессор Т. Н. Арутюнян

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Вопросы характеризации исключительных множеств актуальны во многих направлениях математического анализа. Исключительные множества—это множества, где проявляется некоторого рода расходимость. Они часто встречаются в теории ортогональных рядов и в исследованиях граничных поведений аналитических и гармонических функций. Этим вопросам посвящены много работ. Подробное изложение некоторых результатов и задач, касающихся ортогональных рядов, можно найти в обзорных статьях П. Л. Ульянова [46, 47] и У. Вейда [22]. Характеризациям предельных исключительных множеств аналитических и гармонических функций посвящены монографии Л. Карлесона [4], а также Э. Коллингвуда и А. Ловатера [40].

В 1966 году Л. Карлесон [3] дал положительный ответ на задачу Н.Н.Лузина, доказав, что ряды Фурье класса L^2 сходятся почти всюду. Ранее, еще 1923 году А. Н. Колмогоров построил пример всюду расходящегося ряда Фурье. В 1966 году Кахан и Кацнельсон [12] доказали, что ряд Фурье непрерывной функции может расходиться на любом заданном множестве меры нуль. Задачи характеризации множеств точек расходимости тригонометрических рядов рассматривались в работах [31, 32, 15, 12, 44, 45, 24], а в дальнейшем, аналогичные вопросы для рядов по другим классическим ортогональным системам были рассмотрены в [29, 30, 5, 13, 1, 2, 42, 43, 48, 49]. Одними из ярких примеров полной характеризации множеств расходимости являются теоремы Загорского [23] (о характеризации множеств точек недифференцируемости непрерывной функции), Целлера [24] (о характеризации множеств точек неограниченной расходимости рядов Фурье), а также теорема Колесникова [39] (о характеризации множеств точек граничной неопределенности аналитических функций на круге). В работах Г. А. Карагуляна [36, 35] установлены общие теоремы характеризации исключительных множеств последовательностей операторов со свойством локализации, с помощью которых получены полные характеризации множеств точек расходимости (C, α) средних рядов Фурье по классическим ортонормированным системам, а также обычных частичных сумм рядов Хаара и Франклина.

Цель работы. Изучение исключенных множеств недифференцируемости интегралов по базисам прямоугольников и квадратов, а также исследование множеств расходимости рядов по системам Франклина, Фабера-Шаудера и по некоторым базисам пространства $C[0, 1]$.

Методы исследования. В работе применяются методы теории функции, ортогональных рядов и теории дифференцирования интегралов.

Научная новизна.

Впервые изучается вопрос о характеризации исключительных множеств расходимости интегральных средних. Даны точные характеризации этих множеств по базисам прямоугольников и квадратов. Исследована также задача об эквивалентности разряженных базисов двоичных прямоугольников. Рассматривает-

ся вопрос характеристики множеств точек неограниченной расходимости рядов по системам Франклина, Фабера-Шаудера и по некоторым базисам пространства непрерывных функций.

1. Доказано, что множеством неограниченной расходимости интегральных средних функций из пространства $L^1(\mathbb{R}^2)$ может быть любое множество типа $G_{\delta\sigma}$.
2. Найдено необходимое и достаточное условие для равенства классов сходимости интегральных средних по всем двоичным и разряженным двоичным базисам.
3. Даны точные характеристики множеств ограниченной и неограниченной расходимости интегральных средних по квадратам во всех пространствах Лебега.
4. Найдена точная характеристика множеств неограниченной абсолютной расходимости рядов Франклина.
5. Установлена точная характеристика множеств неограниченной расходимости рядов по обобщенным системам Франклина.
6. Доказано, что для того, чтобы некоторое множество было множеством расходимости для некоторого ряда Фабера-Шаудера, необходимо и достаточно, чтобы оно было множеством типа $G_{\delta\sigma}$, не содержащее двоично-рациональных точек.

Практическая и теоретическая ценность. Полученные результаты и разработанные методы работы представляют теоретический интерес. Они могут найти применение в дальнейших исследованиях характеристик множеств расходимости ортогональных рядов и интегральных средних.

Апробация полученных результатов. Основные результаты работы докладывались на семинарах по действительному анализу факультета Математики и механики ЕГУ, а также на семинарах по действительному анализу в Институте математики НАН Армении.

Публикации По теме диссертации опубликованы 3 работы, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы из 54 наименований, содержит 75 страниц текста.

Содержание работы

В 1876 году французский математик Дю-Буа-Реймон [6] впервые построил пример непрерывной функции, ряд Фурье которой расходится в данной точке.

В начале 20-ого века вопрос о сходимости или расходимости рядов Фурье функций из различных пространств Лебега стала одной из главных проблем в теории тригонометрических рядов. В 1912 году А. Н. Лузин [17], решив задачу Фату, построил пример тригонометрического ряда, который расходится всюду на вещественной оси. В 1923 году А. Н. Колмогоров [14] построил пример суммируемой по Лебегу функции, ряд Фурье которой расходится всюду. Задача о сходимости почти всюду рядов Фурье функций из класса L^2 , поставленная Лузином, долгое время ждала своего решения. Л. Карлесон [3] в 1966 году дал положительный ответ на эту задачу, доказав следующую теорему:

Теорема А (Карлесон, 1966). *Ряд Фурье любой функции из класса L^2 сходится почти всюду.*

Эта знаменитая теорема Карлесона открыла новую эпоху в развитии теории рядов Фурье. Усовершенствовав метод Карлесона, Хант [10], Шелин [20], Антонов [1] установили, что свойство сходимости почти всюду рядов Фурье сохраняется в более широких классах функций. Эти исследования в частности показали, что ряды Фурье класса L^p , $p > 1$, могут расходиться лишь на множестве меры нуль.

Важным дополнением выше изложенных результатов стали исследования вопроса о расходимости рядов Фурье на данном множестве меры нуль. С. Б. Стечкин [44] доказал, что для любого множества меры нуль существует функция из $L^2[-\pi, \pi]$, ряд Фурье которой расходится в каждой точке этого множества. Л. В. Тайков [45] установил, что эту функцию можно брать из L^p при любом фиксированном $1 < p < \infty$. Кахан и Кацнельсон [12] доказали

Теорема В (Кахан-Кацнельсон, 1966). *Для любого множества меры нуль существует комплекснозначная непрерывная функция, ряд Фурье которой расходится в точках этого множества.*

Основываясь на ключевую лемму Кахана-Кацнельсона, В. В. Буздалин [31] построил пример вещественной функции, с аналогичным свойством расходимости. Задача о расходимости рядов Фурье на данном множестве меры нуль широко рассматривалась также для других ортонормированных систем. В работе [48] Ш. В. Хеладзе доказывалось существование функции $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, ряд Фурье-Уолша которой расходится в точках заданного множества меры нуль, а В. М. Бугадзе [29] доказал, что функцию f можно брать из класса L^∞ . У. Гогинава в [5] установил, что для любого множества меры нуль существует функция из L^∞ , у которой $(C, 1)$ средние ряда Фурье-Уолша расходится в точках этого множества. Аналогичные вопросы для рядов по системе Хаара рассмотрена в работах В. И. Прохоренко [43], В. М. Бугадзе [30], М. А. Луниной [41].

Оказывается, что явление расходимости на заданном нуль множестве характерно для общих операторов со свойством локализации и это впервые было обнаружено в работе Г. А. Карагуляна [36]. В ней рассматриваются последовательности ограниченных линейных операторов

$$U_n(x, f) : L^1[0, 1] \rightarrow M[0, 1], \quad (0.1)$$

где $M[0, 1]$ –пространство ограниченных функций с нормой

$$\|f\|_M = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

Предполагается, что имеет место свойство локализации. Точнее, имеем

P1) если $f \in M[0, 1]$ и $f(x) = c$, $x \in (\alpha, \beta)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x, f) = c, \quad x \in (\alpha, \beta),$$

причем сходимость равномерна в любом замкнутом подмножестве интервала (α, β) ,

Теорема С (Г. А. Карагулян, 2010). *Если последовательность операторов (0.1) обладает свойством локализации P1), то для любого множества $E \subset [0, 1]$ нулевой меры, существует функция $f(x)$, являющаяся характеристической функцией некоторого измеримого множества $G \subset [0, 1]$ и такая, что $U_n(x, f)$ расходится в каждой точке $x \in E$.*

Отметим, что выше изложенные теоремы не рассматривают задачу полной характеристики множеств точек расходимости рядов или последовательностей операторов, так как нигде не требуется сходимость вне множества расходимости.

Введем следующее определение:

Определение 1. *Для функционального ряда или функциональной последовательности с областью определения $U \subset \mathbb{R}$ множество $E \subset U$ называется множеством точек расходимости, если этот ряд (или последовательность) расходится при $x \in E$ и сходится когда $x \in U \setminus E$. Если же расходимость в точках E неограниченна, то скажем, что E является множеством точек неограниченной расходимости этого ряда(или последовательности).*

В задачах характеристики множеств расходимости важную роль играют множества, имеющие некоторые топологические структуры.

Определение 2. *Множество $E \subset \mathbb{R}^2$ называется множеством типа G_δ , если оно представимо в виде счетного пересечения открытых множеств, а счетные объединения множеств типа G_δ называются $G_{\delta\sigma}$ -множествами или множествами типа $G_{\delta\sigma}$.*

Аналогичным образом можно определить G_δ и $G_{\delta\sigma}$ множества на $\mathbb{R}$. Первым результатом о полной характеристике множеств точек расходимости является следующая

Теорема D (Хан-Серпинский, [7, 19]). *Для того, чтобы множество $E \subset \mathbb{R}$ было множеством расходимости (неограниченной расходимости) некоторой последовательности непрерывных функций на $\mathbb{R}$, необходимо и достаточно, чтобы оно было множеством типа $G_{\delta\sigma}(G_\delta)$.*

Одними из ярких примеров, дающие полные характеристики некоторых экстремальных множеств являются следующие три теоремы.

Теорема Е (Загорский [23], 1946). *Для того чтобы множество $E \subset \mathbb{R}$ было множеством недифференцируемости некоторой непрерывной на $\mathbb{R}$ функции, необходимо и достаточно, что E было объединением множества типа G_δ и множества типа $G_{\delta\sigma}$ меры нуль.*

Теорема F (Целлер [24], 1955). *Для того чтобы множество $E \subset \mathbb{R}$ было множеством неограниченной расходимости некоторого тригонометрического ряда Фурье необходимо и достаточно, чтобы E было множеством типа G_δ .*

Теорема G (Колесников [14], 1994). *Для того, чтобы множество $E \subset \mathbb{T}$ было множеством радиальной расходимости некоторой аналитической в единичном круге функции, необходимо и достаточно, чтобы E было объединением двух множеств, одно из которых G_δ , а другое – нуль множество типа $G_{\delta\sigma}$.*

В работе Г. А. Карагуляна [35] рассмотрен вопрос характеристики множеств точек расходимости последовательностей операторов типа (0.1) со следующими дополнительными свойствами

$$P2) \sup_n \|U_n\|_{L^\infty \rightarrow M} < \infty,$$

P3) для любой функции $f \in L^\infty[0, 1]$ имеем $U_n(x, f) \rightarrow f(x)$ при $n \rightarrow \infty$ почти всюду.

В частности доказана

Теорема Н (Г. А. Карагулян, 2011). *Пусть последовательность операторов (0.1) обладает свойствами P1)-P3). Тогда для того, чтобы множество $E \subset [0, 1]$ было множеством расходимости последовательности $U_n(x, f)$ для некоторой функции $f \in L^\infty[0, 1]$, необходимо и достаточно чтобы E было $G_{\delta\sigma}$ -множеством меры нуль.*

Хорошо известно, что свойствами P1)-P3) обладают например последовательности операторов частичных сумм рядов Фурье по ортогональным системам Хара и Франклина, а также последовательности (C, α) -средних рядов Фурье по тригонометрической системе и по системе Уолша при $\alpha > 0$ (см. [38], [50], [28], [33]). Поэтому теорема Н дает полную характеристику множеств расходимости этих четырех типов последовательностей операторов в теории рядов Фурье.

В первой главе диссертации изучается вопрос характеристики множеств недифференцируемости интегралов по базисам прямоугольников.

Пусть $\mathcal{R}$ есть множество всех полуоткрытых прямоугольников (декартовы произведения двух интервалов вида $[a, b)$) в $\mathbb{R}^2$, а через $\mathcal{Q}$ обозначим множество полуоткрытых квадратов на $\mathbb{R}^2$. Очевидно имеем $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$. Длины большей и меньшей сторон прямоугольника $R \in \mathcal{R}$ будем обозначать соответственно через $\text{length}(R)$ и $\text{width}(R)$.

Определение 3. Семейство прямоугольников $\mathcal{M} \subset \mathcal{R}$ называется дифференциальным базисом (или просто базисом), если для любой точки $x \in \mathbb{R}^2$ существует последовательность $R_k \in \mathcal{M}$, с $\text{length}(R_k) \rightarrow 0$, такая, что $x \in R_k$, $k = 1, 2, \dots$

Для данного базиса $\mathcal{M} \subset \mathcal{R}$ и для произвольной функции $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ определим

$$\delta_{\mathcal{M}}(x, f) = \limsup_{\text{length}(R) \rightarrow 0: x \in R \in \mathcal{M}} \left| \frac{1}{|R|} \int_R f(t) dt - f(x) \right|.$$

Говорят, что интеграл функции $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ в точке $x \in \mathbb{R}^2$ дифференцируем по базису $\mathcal{M}$, если $\delta_{\mathcal{M}}(x, f) = 0$.

Пусть $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ есть выпуклая возрастающая функция. Обозначим через $\Phi(L)(\mathbb{R}^2)$ класс функций f на $\mathbb{R}^2$ с $\Phi(|f|) \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Если Φ удовлетворяет Δ_2 -условию $\Phi(2x) \leq k\Phi(x)$, то $\Phi(L)$ становится пространством Орлича с нормой

$$\|f\|_{\Phi} = \inf \left\{ c > 0 : \int_{\mathbb{R}^2} \Phi \left(\frac{|f|}{c} \right) \leq 1 \right\}.$$

Следующие две классические теоремы выясняют, что точным классом Орлича, интегралы функции которой почти всюду дифференцируемы по прямоугольникам, является пространство

$$L(1 + \log L)(\mathbb{R}^2) \subset L^1(\mathbb{R}^2),$$

соответствующее функции $\Phi(t) = t(1 + \log^+ t)$ (см. [34]). Точнее, справедливы следующие теоремы:

Теорема I (Йессен-Марцинкевич-Зигмунд, [11]). Если $f \in L(1 + \log L)(\mathbb{R}^2)$, то $\delta_{\mathcal{R}}(x, f) = 0$ почти всюду на $\mathbb{R}^2$.

Теорема J (Сакс, [18]). Если

$$\Phi(t) = o(t \log t) \text{ при } t \rightarrow \infty,$$

то существует функция $f \in \Phi(L)(\mathbb{R}^2)$, для которой $\delta_{\mathcal{R}}(x, f) = \infty$ всюду на $\mathbb{R}^2$.

Определение 4. Для данного базиса $\mathcal{M} \subset \mathcal{R}$ множества

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{M}}(f) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : \delta_{\mathcal{M}}(x, f) = 0\}, \\ B_{\mathcal{M}}(f) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < \delta_{\mathcal{M}}(x, f) < \infty\}, \\ U_{\mathcal{M}}(f) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : \delta_{\mathcal{M}}(x, f) = \infty\} \end{aligned}$$

назовем, соответственно, C , B и U множествами функции $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ относительно базиса $\mathcal{M}$.

Определение 5. Множество E назовем U^* -множеством для некоторой функции $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ если $E = U_{\mathcal{M}}(f)$ и $B_{\mathcal{M}}(f) = \emptyset$.

Определение 6. Множество E назовем B^* -множеством для некоторой функции $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ если $E = B_{\mathcal{M}}(f)$ и $U_{\mathcal{M}}(f) = \emptyset$.

Первое из них есть множество точек дифференцируемости интеграла функции f , второе — множество ограниченной недифференцируемости, а третье является множеством неограниченной недифференцируемости интеграла функции f . Следующая теорема устанавливает, что множество ограниченной недифференцируемости интеграла любой суммируемой функции имеет нулевую меру.

Теорема К (Безикович, [2]). Если $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ и $\delta_{\mathcal{R}}(x, f) < \infty$ на некотором измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^2$, то $\delta_{\mathcal{R}}(x, f) = 0$ почти всюду на E .

Следующая теорема, доказанная в первой главе, дает полную характеристику U множеств по базису всех прямоугольников $\mathcal{R}$ в классе функций $L^1(\mathbb{R}^2)$.

Теорема 1. Для того чтобы $E \subset \mathbb{R}^2$ было U -множеством (U^* -множеством) некоторой функции $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ относительно базиса $\mathcal{R}$, необходимо и достаточно, чтобы оно было множеством типа G_{δ} .

Следующая теорема дает одностороннюю характеристику B множеств:

Теорема 2. Для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ множество $B_{\mathcal{R}}(f)$ является множеством типа $G_{\delta\sigma}$.

Отметим, что обратное утверждение Теоремы 2 остается открытым. Точнее выдвигается

Задача. Пусть G есть любое $G_{\delta\sigma}$ -множество меры нуль на $\mathbb{R}^2$. Существует ли функция $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, для которой имело место соотношение $G = B_{\mathcal{R}}(f)$?

В первой главе рассматривается также одна задача об эквивалентности разряженных базисов двоичных прямоугольников.

Для данного базиса $\mathcal{M} \subset \mathcal{R}$ рассмотрим семейства функций

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathcal{M}) &= \{f \in L(\mathbb{R}^2) : \delta_{\mathcal{M}}(x, f) = 0 \text{ почти всюду} \}, \\ \mathcal{F}^+(\mathcal{M}) &= \{f \in L(\mathbb{R}^2) : f(x) \geq 0, \delta_{\mathcal{M}}(x, f) = 0 \text{ почти всюду} \}.\end{aligned}$$

Первый из них представляет класс функций, интегралы которых дифференцируемы почти всюду по базису $\mathcal{M}$, а второй есть положительные функции с таким же свойством. Из Теоремы I следует включение

$$L(1 + \log L)(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{F}(\mathcal{R}),$$

и хорошо известно, что в нем не имеет место равенство.

Через $\mathcal{R}^{\text{dyadic}}$ обозначим базис двоичных прямоугольников вида

$$\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n} \right) \times \left[\frac{j-1}{2^m}, \frac{j}{2^m} \right), \quad (0.2)$$

а через $\mathcal{Q}^{\text{dyadic}}$ —базис двоичных квадратов ($n = m$). Имеем $\mathcal{R}^{\text{dyadic}} \subset \mathcal{R}$ и $\mathcal{Q}^{\text{dyadic}} \subset \mathcal{Q}$. Отметим, что теоремы I и J справедливы также для базиса $\mathcal{R}^{\text{dyadic}}$. Первая из них следует из вложения $L(1 + \log L)(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{F}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{F}(\mathcal{R}^{\text{dyadic}})$, а вторая теорема получается из первой из следующих двух теорем, доказанный Т. Ш. Зерекидзе.

Теорема А (Зерекидзе, [25]). $\mathcal{F}^+(\mathcal{R}^{\text{dyadic}}) = \mathcal{F}^+(\mathcal{R})$.

Теорема В (Зерекидзе [26]). $\mathcal{F}(\mathcal{R}^{\text{dyadic}}) \neq \mathcal{F}(\mathcal{R})$.

Первая теорема доказывает эквивалентность базисов $\mathcal{R}^{\text{dyadic}}$ и $\mathcal{R}$ в классе положительных суммируемых функций, а вторая утверждает, что нет полной эквивалентности. Некоторые другие задачи об эквивалентности некоторых базисов из прямоугольников рассмотрены в работах [26], [27].

Пусть $P = \{\nu_k, k = 1, 2, \dots\} \subset \mathbb{N}$ есть некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел. Обозначим через $\mathcal{R}_P^{\text{dyadic}}$ базис двоичных прямоугольников вида (0.2), где $n, m \in P$. Было бы естественно ожидать, что дифференциальные свойства базиса $\mathcal{R}_P^{\text{dyadic}}$ при достаточно быстром росте $\nu_{k+1} - \nu_k$ будет лучше чем для базиса всех прямоугольников $\mathcal{R}$. Оказывается, что каков бы не была последовательность P , точным классом Орлича, обеспечивающий почти всюду дифференцируемость интегралов, вновь есть $L(1 + \log L)(\mathbb{R}^2)$ и это доказано Стоколосом в [21] (см. также [8], [9]). В работе Г.А. Карагуляна [37] установлены теоремы, показывающие эквивалентность свойств сходимости многомерных мартингалов, из которых в частности следуют некоторые результаты работ [21], [8], [9].

Более тонкое рассмотрение вопроса разъясняет, что разреженность последовательности P все таки дает лучшие свойства дифференцируемости базисов $\mathcal{R}_P^{\text{dyadic}}$, что и составляет вторую часть исследований первой главы.

Доказывается следующая теорема, устанавливающая необходимое и достаточное условие для полной эквивалентности разреженных базисов двоичных прямоугольников.

Теорема 3. Пусть $P = \{\nu_k\}$ есть некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда условие

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} (\nu_{k+1} - \nu_k) < \infty \quad (0.3)$$

необходимо и достаточно для выполнения равенства

$$\mathcal{F}(\mathcal{R}_P^{\text{dyadic}}) = \mathcal{F}_{\mathbb{N}}.$$

Отметим, что в работе Г. А. Карагуляна [37] установлена, что для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ существует последовательность P такая, что $f \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_P^{\text{dyadic}})$.

Продолжив исследования предыдущей главы, во второй главе рассматривается вопрос характеристики множеств точек недифференцируемости интегралов функций из $L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p \leq \infty$, по базисам квадратов. Следующая классическая теорема Лебега утверждает, что интеграл любой суммируемой функции на $\mathbb{R}^2$ почти всюду дифференцируем по базису квадратов (см. [34] или [16]).

Теорема L (Лебег, [16]). *Если $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, то $\delta_Q(x, f) = 0$ почти всюду на $\mathbb{R}^2$.*

Следующие теоремы дают полные характеристики U , B и C множеств в пространствах $L^p(\mathbb{R}^2)$ по базису квадратов Q .

Теорема 4. *Для того чтобы $E \subset \mathbb{R}^2$ было B^* -множеством некоторой функции $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p \leq \infty$, относительно базиса Q , необходимо и достаточно, чтобы оно было $G_{\delta\sigma}$ -множеством меры нуль.*

Теорема 5. *Для того чтобы $E \subset \mathbb{R}^2$ было U^* -множеством некоторой функции $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p < \infty$, относительно базиса Q , необходимо и достаточно, чтобы оно было G_δ -множеством меры нуль.*

В теореме 5 случай $p = \infty$ не рассматривается, так как из $f \in L^\infty$ следует $U_Q(f) = \emptyset$. Из теорем 4 и 5 получаем следующие результаты.

Теорема 6. *Для того, чтобы попарно непересекающиеся множества $E_1, E_2, E_3 \subset \mathbb{R}^2$ с $E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \mathbb{R}^2$ являлись бы соответственно U , B и C множествами некоторой функции $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p < \infty$, относительно базиса Q , необходимо и достаточно, чтобы $|E_1| = |E_2| = 0$, E_1 имело тип G_δ , а E_2 было множеством $G_{\delta\sigma}$.*

Теорема 7. *Для того, чтобы попарно непересекающиеся множества $E_1, E_2, E_3 \subset \mathbb{R}^2$ с $E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \mathbb{R}^2$ являлись бы соответственно U , B и C множествами некоторой функции $f \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ относительно базиса Q , необходимо и достаточно, чтобы $E_1 = \emptyset$, E_2 было $G_{\delta\sigma}$ множеством меры нуль.*

В третьей главе рассматривается вопрос характеристики множеств точек неограниченной расходимости рядов по системам Франклина, Фабера-Шаудера и по некоторым базисам пространства $C[0, 1]$.

Через $\tilde{G}$ обозначим класс множеств из $[0, 1]$, которые можно представить в виде

$$G = \left(\bigcup_k (a_k, b_k) \right) \cup A,$$

где $\{(a_k, b_k)\}$ —конечное или счетное семейство попарно не пересекающихся интервалов, а множество A составлено из некоторых двоично-рациональных точек, содержащиеся в множестве $\{a_k, b_k\}$. Множествами типа $\tilde{G}_\delta$ являются конечные или счетные пересечения множеств типа $\tilde{G}$. Этот класс чуть шире класса множеств типа G_δ и в первые рассмотрен М. А. Луниной в работе [41]. В этой работе

ею доказано, что во первых множество точек неограниченной расходимости любого ряда Фурье-Хаара является множеством типа $\tilde{G}_\delta$, и наоборот, любое множество типа $\tilde{G}_\delta$ может стать множеством точек неограниченной расходимости ряда Фурье-Хаара некоторой функции. Множества точек ограниченной расходимости рядов Фурье по системам Хаара и Франклина полностью охарактеризован Г. А. Карагуляном в работах [36] и [35].

Пусть

$$\{\psi_n(x)\}_{n=1}^\infty \quad (0.4)$$

есть ортонормальный базис в $C[0, 1]$. Через $S_n(x, f)$ обозначим частичные суммы ряда Фурье функции $f(x) \in L^1[0, 1]$ по системе (0.4). Рассматриваются ортонормированные системы (0.4), которые обладают некоторым свойством локализации:

P1') для любой функции $f \in M[0, 1]$ кусочно-линейной и непрерывной на (α, β) , имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x, f) = f(x), x \in (\alpha, \beta), \quad (0.5)$$

причем сходимость равномерна в любом замкнутом множестве интервала (α, β) .

Отметим, что это свойство чуть отличается от вышеупомянутого свойства локализации P1).

Доказывается следующая теорема.

Теорема 8. Пусть $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ есть ортонормированный базис непрерывных функций со свойством локализации P1'). Для того, чтобы множество $E \subset [0, 1]$ было множеством неограниченной расходимости некоторого ряда

$$\sum_{k=1}^\infty a_k \psi_k(x), \quad (0.6)$$

необходимо и достаточно, чтобы оно было множеством типа G_δ .

Замечание 1. Примером системы, удовлетворяющей вышеупомянутым свойствам локализации P1') является обобщенная система Франклина (см. [38]). Таким образом, Теорема 8 в частности дает полную характеристику множеств неограниченной расходимости рядов по таким системам.

Доказывается также теорема, которая показывает, что условие локализации, налагаемое на систему (0.4), в некотором смысле необходимо в теореме 8.

Теорема 9. Существует ортонормированная и замкнутая в $C[0, 1]$ система непрерывных функций $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ и непустое множество $E \subset [0, 1]$ типа G_δ , которое не является множеством неограниченной расходимости для любого ряда

$$\sum_{k=1}^\infty a_k \psi_{\sigma(k)}(x),$$

где $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ биективное отображение.

Некоторые отдельные вопросы рассматривается также для классической системы Франклина и Фабера-Шаудера. Доказывается

Теорема 10. *Если множество $E \subset [0, 1]$ имеет тип G_δ , то существует ряд по системе Франклина*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k F_k(x), \quad (0.7)$$

который неограниченно расходится в любой точке $x \in E$ и абсолютно сходится при $x \in [0, 1] \setminus E$.

Из этой теоремы немедленно получаем

Следствие. *Для того чтобы множество $E \subset [0, 1]$ было множеством неограниченной расходимости для некоторого ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k F_k(x)|,$$

необходимо и достаточно, чтобы оно было множеством типа G_δ .

В третьей главе дается также полная характеристика множеств точек неограниченной и ограниченной расходимости рядов по системе Фабера-Шаудера.

Теорема 11. *Для того чтобы множество $G \subset [0, 1]$ было множеством ограниченной расходимости для некоторого ряда по системе Фабера-Шаудера, необходимо и достаточно, чтобы оно было множеством типа $G_{\delta\sigma}$, которое не содержит двоичные рациональные точки.*

Теорема 12. *Для того чтобы множество $G \subset [0, 1]$ было множеством неограниченной расходимости для некоторого ряда по системе Фабера-Шаудера, необходимо и достаточно, чтобы оно было множеством типа G_δ , которое не содержит двоично-рациональные точки.*

Заключение

В диссертации исследованы задачи характеристики исключительных множеств расходимости интегральных средних, а также некоторых рядов по базисам в пространстве непрерывных функций. Вопросы, исследованные для интегральных средних, рассматриваются впервые. Даны точные характеристики множеств ограниченной и неограниченной расходимости интегральных средних по базисам прямоугольников (первая глава) и квадратов (вторая глава). Исследована также задача об эквивалентности разряженных базисов двоичных прямоугольников (первая глава). Рассматривается вопрос характеристики множеств точек неограниченной расходимости рядов по системам Франклина, Фабера-Шаудера и по некоторым базисам пространства $C[0, 1]$ (третья глава).

1. Доказано, что множеством неограниченной расходимости интегральных средних функций из пространства $L^1(\mathbb{R}^2)$ может быть любое множество типа $G_{\delta\sigma}$.
2. Найдено необходимое и достаточное условие для равенства классов сходимости интегральных средних по всем двоичным и разряженным двоичным базисам.
3. Даны точные характеристики множеств ограниченной и неограниченной расходимости интегральных средних по квадратам во всех пространствах Лебега.
4. Найдена точная характеристика множеств неограниченной абсолютной расходимости рядов Франклина.
5. Установлена точная характеристика множеств неограниченной расходимости рядов по обобщенным системам Франклина.
6. Доказано, что для того, чтобы некоторое множество было множеством расходимости для некоторого ряда Фабера-Шаудера, необходимо и достаточно, чтобы оно было множеством типа $G_{\delta\sigma}$, не содержащее двоично-рациональных точек.

Summary

Main results of the thesis are the following:

- For a set E to be the U -set (U^* set) of a function $f \in L^1(R^2)$ it is necessary and sufficient to be a G_δ -set.
- For any function $f \in L^1(R^2)$ the set $B_{\mathcal{R}}(f)$ is a $G_{\delta\sigma}$ -set.
- Let $P = \{\nu_k\}_{k=1}^\infty$ be a subsequence of natural numbers. Then the condition

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} (\nu_{k+1} - \nu_k) < \infty$$

is necessary and sufficient for the following equality to hold

$$\mathcal{F}(\mathcal{R}_P^{\text{dyadic}}) = \mathcal{F}_{\mathbb{N}}.$$

- For a set $E \subset R^2$ to be the B^* set of a function $f \in L^p(R^2)$, $1 \leq p \leq \infty$, with respect to the basis $\mathcal{Q}$ it is necessary and sufficient to be a $G_{\delta\sigma}$ -set of measure zero.
- For a set $E \subset R^2$ to be the U^* set of a function $f \in L^p(R^2)$, $1 \leq p < \infty$ with respect to the basis $\mathcal{Q}$ it is necessary and sufficient to be a G_δ -set of measure zero.
- Let $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ be an orthonormal basis in $C[0, 1]$ with the localization property P1'). For the set E to be the unbounded divergence set for the series

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(x),$$

it is necessary and sufficient to be a G_δ set.

- There exist an orthonormal and complete system of continuous functions $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ and a non-empty set $E \subset [0, 1]$ of type G_δ , which is not an unbounded divergence set for any series

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_{\sigma(k)}(x),$$

where $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ is a bijective map.

- For a set E to be the unbounded absolutely divergence set for some series in Franklin system it is necessary and sufficient to be a G_δ -set.

- For a set E to be the bounded divergence set for some series in Faber-Schauder system it is necessary and sufficient to be a $G_{\delta\sigma}$ -set, which does not contain dyadic rational numbers.
- For a set E to be the unbounded divergence set for some series in Faber-Schauder system it is necessary and sufficient to be a G_δ -set, which does not contain dyadic rational numbers.

Ամփոփում

Արենախոսությունում սրացվել են հետևյալ արդյունքները՝

- Որպեսզի E բազմությունը հանդիսանա որևէ $f \in L^1(R^2)$ ֆունկցիայի $U(U^*)$ բազմություն անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի G_δ տիպի:
- Ցանկացած $f \in L^1(R^2)$ ֆունկցիայի համար $B_{\mathcal{R}}(f)$ բազմությունը $G_{\delta\sigma}$ տիպի է:
- Ենթադրենք $P = \{\nu_k\}_{k=1}^\infty$ -ն բնական թվերի ենթահաջորդականություն է: Այդ դեպքում

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} (\nu_{k+1} - \nu_k) < \infty$$

պայմանը անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա

$$\mathcal{F}(\mathcal{R}_P^{\text{dyadic}}) = \mathcal{F}_{\mathbb{N}}.$$

- Որպեսզի E բազմությունը հանդիսանա որևէ $f \in L^1(R^2)$, $1 \leq p \leq \infty$ ֆունկցիայի B^* բազմություն $\mathcal{Q}$ բազիսի նկատմամբ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի $G_{\delta\sigma}$ տիպի և ունենա զրո չափ:
- Որպեսզի E բազմությունը հանդիսանա որևէ $f \in L^1(R^2)$, $1 \leq p < \infty$ ֆունկցիայի U^* բազմություն $\mathcal{Q}$ բազիսի նկատմամբ անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի G_δ տիպի և ունենա զրո չափ:
- Ենթադրենք $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ -ը օրթոնորմալ բազիս է $C[0, 1]$ -ում, որը բավարարում է լոկալիզացիայի $P1'$ հատկությանը: Այդ դեպքում E բազմությունը կհանդիսանա որևէ

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(x)$$

շարքի անսահմանափակ տարամիտության բազմություն այն և միայն այն դեպքում, եթե E -ն G_δ տիպի է:

- Գոյություն ունեն անընդհատ ֆունկցիաների օրթոնորմալ ու փակ համակարգ $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ և G_δ տիպի ոչ դատարկ $E \subset [0, 1]$ բազմություն այնպես, որ E -ն չի հանդիսանում ցանկացած

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_{\sigma(k)}(x)$$

շարքի անսահմանափակ տարամիտության բազմություն ցանկացած $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ բիյեկտիվ արտապարկերման համար:

- Որպեսզի E բազմությունը հանդիսանա որևէ Ֆրանկլինի շարքի բացարձակ անսահմանափակ փարամիտության բազմություն անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի G_δ փիպի:
- Որպեսզի E բազմությունը հանդիսանա որևէ Ֆաբեր-Շաուդերի շարքի սահմանափակ փարամիտության բազմություն անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի $G_{\delta\sigma}$ փիպի, որը չի պարունակում երկուական ռացիոնալ կետեր:
- Որպեսզի E բազմությունը հանդիսանա որևէ Ֆաբեր-Շաուդերի շարքի անսահմանափակ փարամիտության բազմություն անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի G_δ փիպի, որը չի պարունակում երկուական ռացիոնալ կետեր:

Литература

- [1] Antonov N. Yu., Convergence of Fourier series, East Journal on Approximation, **2**, no 2, 187–196.(1996)
- [2] Besicovitch A. S., On differentiation of Lebesgue double integrals, Fund. Math., **25**, 209–216. (1935)
- [3] Carleson L., On the convergence and growth of partial sums of Fourier series, Acta Math., **116**, 135–137.(1966)
- [4] Carleson L., Selected problems on exceptional sets, 1967.
- [5] Goginava U., On devergence of Walsh-Fejer means of bounded functions on sets of measure zero, Acta Math. Hungarica, **121**, no. 3, 359–369 (2008).
- [6] Du Bois-Reymond T., Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformen, Abh. Akad. Wiss. München, X, 1–103. (1876)
- [7] Hahn H., “Über die Menge der Konvergenzpunkte einer Funktionenfolge”, Arch. d. Math. u. Phys., **28**, 34 – 45 (1919).
- [8] Hagelstein P. A., A note on rare maximal functions. Colloq. Math. 95, no. 1, 49-51. (2003)
- [9] Hare K. and Stokolos A., On weak type inequalities for rare maximal functions. Colloq. Math., 83 , no. 2, 173-182.(2000)
- [10] Hunt A., On the convergence of Fourier series, Orthogonal expansions and continuous analogous, Proc. Conf. Southern Inninois Univ. Edvardsville, 235–255.(1968)

- [11] Jessen B., Marcinkiewicz J., Zygmund A., Note of differentiability of multiple integrals, *Fund. Math.*, **25**, 217–237 (1935).
- [12] Kahane J-P., Katznelson Y., Sur les ensembles de divergence des series trigonometriques, *Studia math.*, **XXVI** , 305–306. (1966)
- [13] Karagulyan G. A., “Divergence of general localized operators on the sets of measure zero”, *Colloq. Math.*, **121**, no. 1, 113–119. (2010)
- [14] Kolmogoroff A. N.. Une serie de Fourier-Lebesgue divergente presque partout, *Fund. Math.*, no. 4, 324–328. (1923)
- [15] Körner T. W., Sets of divergence for Fourier series, *Bull. Lond. Math. Soc.*, no. 3, 152–154. (1971)
- [16] Lebesgue H., Sur l’intégration des fonctions discontinues, *Ann. Ecole Norm.*, **27**, 361–450. (1910)
- [17] Luzin N. N., On a case of Taylor series, *Mat. Sbornik*, 23, 295–302.(1912)
- [18] Saks S., Remark on the differentiability of the Lebesgue indefinite integral, *Fund. Math.*, **22**, 257–261. (1934)
- [19] Sierpinski W., “Sur Tensemble des points de convergence d’une suite de fonctions continues”, *Fund. Math.*, no. 2, 41 – 49. (1921)
- [20] Sjölin P., Convergence almost everywhere certain singular integrals and multiple Fourier series, *Arkiv för Mat.*, **9**, 65–90.(1971)
- [21] Stokolos A., On weak type inequalities for rare maximal function in $\mathbb{R}^n$, *Colloq. Math.*, 104, no. 2, 311–315.(2006)
- [22] Wade W. R., Resent development in the theory of Walsh series, *Internat. Journ. of Math. and Math, Sci.*, **5**, no. 4, 625–673. (1982)
- [23] Zahorski Z., Sur l’ensemble des points des non-derivative d’une fonction continue, *Bulletin de la S. M. F.*, **74**, 147–178. (1946)
- [24] Zeller K., Ueber Konvergenzmengen von Fourierreihen, *Arch. Math.*, **6**, 335–340. (1955)
- [25] Zerekidze T. Sh., Convergence of multiple Fourier-Haar series and strong differentiability of integrals. (Russian) *Trudy Tbiliss. Mat. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruzin. SSR*, **76** , 80–99(1985).
- [26] Zerekidze T. Sh., On some subbases of a strong differential basis. *Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math. Rep.* 35 , 31–33.(2009)

- [27] Zerekidze T. Sh., On the equivalence and nonequivalence of some differential bases. Proc. A. Razmadze Math. Inst. 133, 166–169. (2003)
- [28] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, Физматгиз.(1961).
- [29] Бугадзе В. М., О расходимости рядов Фурье-Уолша ограниченных функций на множествах меры нуль, Мат. сборник, **185**, по. 7, 119–127 (1994).
- [30] Бугадзе В. М., О расходимости рядов Фурье-Хаара ограниченных функций на множествах меры нуль, Мат. заметки, **51** , по. 5, 20–26.(1992)
- [31] Буздалин В. В., О неограниченно расходящихся тригонометрических рядах Фурье от непрерывных функций, Мат. заметки, **7**, по. 1, 7–18. (1970)
- [32] Буздалин В. В., Тригонометрические ряды Фурье непрерывных функций, расходящиеся на заданном множестве, Математический сборник, **95(137)**, по. 1(9), 84–107. (1974)
- [33] Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А., Ряды и преобразования Уолша, Теория и применения, Наука, Москва(1987)
- [34] Гусман М., Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$, Мир, Москва. (1978)
- [35] Карагулян Г. А., “О характеристизации множеств точек расходимости последовательностей операторов со свойством локализации, Мат. Сборник, **202**, по. 1, 11 – 36. (2011)
- [36] Карагулян Г. А., “Полная характеристика множеств точек расходимости рядов Фурье-Хаара”, Известия НАН Армении, серия Математика, **45**. по. 6, 33 – 50. (2010)
- [37] Карагулян Г. А., Об эквивалентности мартингадов и смежные вопросы, Изв. НАН Армении, **48**(2013), по 2, 51–69.
- [38] Кашин Б. С., Саакян А. А., Ортогональные ряды, Москва, “Наука”. (1984)
- [39] Колесников С. М., О множествах несуществования радиальных пределов ограниченных аналитических функций, Мат. Сборник, **185**, по. 4, 91–100. (1994)
- [40] Коллингвуд Э. , Ловатер А. , Теория предельных множеств, М., Мир. (1971)
- [41] Лунина М. А., “О множестве точек неограниченной расходимости рядов по системе Хаара”, Вестник Моск. ун-та, Серия 1, Мат. мех., по 4, 13 – 20. (1976)
- [42] Лукашенко С. Ю., О структуре множеств расходимости тригонометрических рядов и рядов по системе Уолша, Докл. АН СССР, **253**, по. 3, 528–529. (1980)

- [43] Прохоренко В. И., О расходящихся рядах по системе Хаара, Изв. вузов. Мат., по. 1, 62–68. (1971)
- [44] Стечкин Б. С., О сходимости и расходимости тригонометрических рядов, Успехи матем. наук, VI, **42**, по. 2, 148–149. (1951)
- [45] Тайков Л. В., О расходимости рядов Фурье по переставленной тригонометрической системе, Успехи матем. наук, XVIII, **113**, по. 5, 191–198. (1963)
- [46] Ульянов П. Л., О расходимости рядов Фурье, Успехи Мат. Наук, **12**, по. 3, 75–132. (1957)
- [47] Ульянов П. Л., А. А. Колмогоров и расходящиеся ряды Фурье, Успехи мат. наук, **38**, по. 4, 57–100. (1983)
- [48] Хеладзе Ш. В., О расходимости всюду рядов Фурье по ограниченным системам Виленкина, Труды Тбилисского матем. института АН Груз. ССР, **58**, 225–242. (1978)
- [49] Хеладзе Ш. В., О расходимости всюду рядов Фурье-Уолша, Сообщ. АН Груз. ССР, **77**, по. 2, 305–307. (1975)
- [50] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т.1, Мир, Москва. (1965)

Работы автора по теме диссертации

- [1] Карагулян Д. А., О характеристике множеств точек неограниченной расходимости рядов по системе Франклина, Изв. НАН Армении, сер. Математика, **47**, по. 1, 23–30. (2012)
- [2] Карагулян Д. А., О множествах точек неограниченной расходимости рядов по ортонормированным базисам, Изв. НАН Армении, сер. Математика, **47**, по. 5, 39–48. (2012)
- [3] Карагулян Г. А., Карагулян Д. А., О характеристике экстремальных множеств дифференцирования интегралов в $\mathbb{R}^2$, Изв. НАН Армении, сер. Математика, **49**, по. 6, 83–108. (2014)