ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Հոսեյն Անսարի

ԴԻՐԻԽԼԵԻ ԽՆԴԻՐԸ ՉՈՐՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՎԵՐԱՍԵՐՎՈՂ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ-ՕՊԵՐԱՏՈՐԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԱՆՎԵՐՋ ՄԻՋԱԿԱՅՔՈՒՄ

Ա.01.02 – “Դիֆերենցիալ հավասարումներ” մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական
աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ 2013

YEREVAN STATE UNIVERSITY

Hosein Ansari

Dirichlet problem for degenerate differential-operator equations of fourth order on infinite interval

SYNOPSIS

of dissertation for the degree of candidate of physical and
mathematical sciences specializing in
A.01.02 – “Differential equations”

Yerevan 2013

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի խորհրդի կողմից։

Գիտական ղեկավար՝	ֆիզ-մաթ. գիտ. թեկնածու Լ.Պ. Տեփոյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	ֆիզ-մաթ. գիտ. դոկտոր Մ.Ի. Կարախանյան
	ֆիզ-մաթ. գիտ. թեկնածու Ա.Ա. Պետրոսյան
Առաջատար կազմակերպություն՝	Հայաստանի պետական ճարտարագիտական համալսարան

Պաշտպանությունը կկայանա 2013թ. մայիսի 7-ին ժ. 15^{00}-ին Երևանի պետական համալսարանում գործող ԲՈՀ-ի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում (0025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1)։

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում։
Սեղմագիրն առաքվել է 2013թ. մարտի 21-ին։

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար Տ.Ն. Հարությունյան

Dissertation topic was approved at a meeting of academic council of the faculty of Mathematics and Mechanics of the Yerevan State University.

Supervisor:	candidate of physical and mathematical sciences L.P. Tepoyan
Official opponents:	doctor of physical and mathematical sciences M.I. Karakhanyan
	candidate of physical and mathematical sciences A.A. Petrosyan
Leading organization:	State engineering university of Armenia

Defense of the thesis will be held at the meeting of the a specialized council 050 of HAC of Armenia at Yerevan State University on May 7, 2013 at 15^{00} (0025, Yerevan, A.Manoogian str. 1).

The thesis can be found in the library of the YSU.
Synopsis was sent on March 21, 2013.

Scientific secretary of specialized council T.N. Harutyunyan

General characteristics of the work

Relevance of the theme.

Main subject of our investigation in this dissertation is to consider Dirichlet problem for a degenerate differential-operator equation of fourth order

$$Lu \equiv (t^\alpha u'')'' + Au''' + t^\beta Pu = f(t), \tag{1}$$

where $t \in (1, +\infty), \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 1, \alpha \neq 3$, $\mathcal{H}$ is a separable Hilbert space, $\|f\|^2_{L_{2,-\beta}((1,+\infty),\mathcal{H})} \equiv \int_1^{+\infty} t^{-\beta} \|f(t)\|^2_{\mathcal{H}}\, dt < \infty$. We suppose that the linear operators A and P, $A, P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ have common system of the eigenfunctions $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ which form complete system in $\mathcal{H}$ and compose a Riesz basis in $\mathcal{H}$.

Degenerate elliptic equations encountered in solving of many problems, which have an applied character. This included such important fields as the theory of small deformations surfaces of rotation, the membrane theory of shells, the bending of plates of variable thickness with a sharp edge (see, for instance the book [12] of G. Jaiani). These equations play significant role, in particular, in the gas dynamics. Crucial role for the theory of degenerate elliptic equations played the fundamental article of M.V. Keldysh [13]. In this short but conceptually rich article was first time studied the first boundary value problem for the second-order elliptic equation with characteristic degeneration. It turned out that in the case of the strong degeneracy the part of the boundary of the domain released from the boundary conditions. The next stage was the work of A.V. Bicadze [2], where was first given reformulation of the weight problem. S.G. Mikhlin [21], L.D. Kudryavtsev [18] and others explored degenerate elliptic equations of higher order by variational methods in weighted Sobolev spaces. Fourth order elliptic equations degenerating on the boundary of domain (in case when we are not able to apply variational methods) were first considered by V.K. Zakharov [30]. He extended the results of M.I. Vishik [28] on the fourth-order equation on the plane. It turned out that for the fourth-order degenerate equation also the “lower terms"have influence for the statement of the boundary value problem. Analogous circumstance have been studied by other methods by Narchaev [23] and by G. Jaiani [11]. E.V. Makhover in [20] received the conditions, when the spectrum for the degenerate elliptic operator of fourth order is discrete or non-discrete. It is also worth to note the article of S.G. Mikhlin [21] where was explored the spectral properties of the corresponding operator. Note also the book of K. Mynbayev and M. Otelbaev [22] devoted to the degenerate equations.

Differential-operator equations have been studied by several authors. It is remarkable the book written by A.A. Dezin [5]. Next we observe the book of S.G. Krein [16] concerning general theory of abstract differential equations. Recent developments concerning such equations can be found for first order differential equations (degenerated or without degeneration) in the articles of V.V. Kornienko [14] and Gang Li, Qixiang Dong [8]. There are many articles about the second order abstract equations including, for instance, articles of A.A. Dezin [4], V.V. Kornienko [15] and other authors. For third order equations we can note, for example article of N.M. Yataev [29]. The articles of L. Tepoyan [27] and R.Z. Gumbataliev [10] were devoted to the investigation of fourth order equations (considerations in both cases were in weighted spaces). For higher order operator equations there are considerably more papers, for instance, V.P. Glushko, S.G. Krein in [9], A.A. Dezin [4] and E. Poulsen [24]. Note also some new published monographs such as the books written by E. DiBenedetto [6], S. Levendorskii [19], V. Kozlov, V. Maz'ya [17] and A. Favini, A. Yagi [7]. Note that this approach were applied in the book of A.A. Dezin [5] where have been considered the method of model operators in the theory of boundary value problems, by V.K. Romanko in the article [25], and by V.V. Kornienko in the paper [15]. This approach allows us to study a number of effects, which are very interesting. Moreover, we are able to trace the conjunction between ordinary differential equations and operator equations.

Observe that the operators $A.P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ in general are unbounded operators, therefore some methods which were usually used in many publications for the case with bounded operators, unfortunately we can not apply.

The aim of the thesis:

- To establish that for $\beta \le \alpha - 4, \alpha \ne 1, \alpha \ne 3$ there is a continuous embedding, $\dot{W}^2_\alpha(1, +\infty) \hookrightarrow L_{2,\beta}(1, +\infty)$, which is for $\beta < \alpha - 4$ compact,
- to show that $\mathbb{B}u = t^{-\beta}(t^\alpha u'')''$ is for $\beta \le \alpha - 4$ positive and self-adjoint in $L_{2,\beta}(1, +\infty)$ and the bounded inverse $\mathbb{B}^{-1}$ is for $\beta < \alpha - 4$ compact,
- to prove, that the spectrum of the operator $\mathbb{B}$ for $\beta = \alpha - 4$ is purely continuous and coincides with the ray $\sigma(\mathbb{B}) = \left[\frac{(\alpha-1)^2(\alpha-3)^2}{16}; +\infty\right)$,
- to describe domain of definition of the operator $Lu \equiv (t^\alpha u'')'' + pt^{-2}u$ when $\alpha \ge 2$,
- to show that the statement of Dirichlet problem for the equation $Lu \equiv -(t^\alpha u')' + au, \quad \alpha \ge 0, \quad a \ne 0$, depends on the sign of a,
- to prove that the statement of Dirichlet problem for the equation $Mu \equiv (t^\alpha u'')'' + au''', \quad \alpha \ge 2, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a \ne 0$ does not depend on the sign of the number a,
- to find sufficient conditions for the uniquely solvability of Dirichlet problem
$$Lu \equiv (t^\alpha u'')'' + Au''' + t^\beta Pu = f(t),$$
- to give the description of the spectrum of the operator
$$\mathbb{L}u \equiv \mathbb{B}u + Pu = g(t), \quad g \in L_{2,\beta}((1, +\infty), \mathcal{H}), \quad \beta \le \alpha - 4,$$
where $\mathbb{B} = t^{-\beta}B$ and the operator P is self-adjoint.

Scientific innovation. All results are new.

Practical and theoretical value. The results of the work have theoretical character. The results of the thesis can be used, for instance, in the study of Dirichlet problem for the degenerate elliptic equations.

Approbation of the results. The obtained results were presented

- at the research seminar of the chair of Differential equations of the Yerevan State University
- at the International Conference *Harmonic Analysis and Approximations, V*, 10-17 September, Armenia, 2011

The main results of the thesis

The thesis consists of an introduction, two sections and a bibliography.

Section 1 consists of the four subsections and is devoted to the one-dimensional case.

In Subsection 1.1 we first define the space $\dot{W}^2_\alpha(1,+\infty), \alpha \neq 1, \alpha \neq 3$ as the completion of $\dot{C}^2[1,+\infty]$ in the following norm $\|u\|^2_{\dot{W}^2_\alpha(1,+\infty)} = \int_1^\infty t^\alpha |u''(t)|^2\, dt$, where $\dot{C}^2[1,+\infty) := \{u \in C^2[1,+\infty), u(1) = u'(1) = u(\infty) = u'(\infty) = 0\}$.

Proposition 1.1. *For the functions $u \in \dot{W}^2_\alpha(1,+\infty)$ for large values of t we have the following estimates*

$$|u(t)|^2 \leq C_1 t^{3-\alpha} \|u\|^2_{\dot{W}^2_\alpha(1,+\infty)}, \text{ for } \alpha \neq 1,3, \tag{2}$$

$$|u'(t)|^2 \leq C_2 t^{1-\alpha} \|u\|^2_{\dot{W}^2_\alpha(1,+\infty)}, \text{ for } \alpha \neq 1. \tag{3}$$

For $\alpha = 3$ in (2) we replace $t^{3-\alpha}$ with $\ln t$, and for $\alpha = 1$ we replace $t^{3-\alpha}$ with $t^2 \ln t$ in (2) and $t^{1-\alpha}$ with $\ln t$ in (3).

Proposition 1.2. *For $\beta \leq \alpha - 4, \alpha \neq 1, \alpha \neq 3$ we have a continuous embedding*

$$\dot{W}^2_\alpha(1,+\infty) \hookrightarrow L_{2,\beta}(1,+\infty). \tag{4}$$

Proposition 1.4. *The continuous embedding (4) is for $\beta < \alpha - 4, \alpha \neq 1, \alpha \neq 3$ compact.*

Let $\psi_h(t) = 0, t \geq 2h$, $\psi_h(t) = 1, 1 \leq t \leq h$ and $\psi_h(t) = \frac{(2t-h)(2h-t)^2}{h^3}, h \leq t \leq 2h$, where $h > 1$. Denote $u_h(t) := u(t)\psi_h(t)$.

Proposition 1.6. *For every function $u \in \dot{W}^2_\alpha(1,+\infty)$, $\alpha \neq 1, \alpha \neq 3$ the norm $\|u_h - u\|_{\dot{W}^2_\alpha(1,+\infty)}$ tends to zero by $h \to +\infty$.*

In Subsection 1.2 we consider the self-adjoint equation

$$Lu \equiv (t^\alpha u'')'' + pt^\beta u = f, \tag{5}$$

where $t \in (1,+\infty), \alpha \neq 1, \alpha \neq 3, \beta \leq \alpha - 4$, $f \in L_{2,-\beta}(1,+\infty)$ and $p = const$.

Definition 1.9. *The function $u \in \dot{W}^2_\alpha(1,+\infty)$ is called a generalized solution of Dirichlet problem for the equation (5) if for every $v \in \dot{W}^2_\alpha(1,+\infty)$ holds the following equality*

$$(t^\alpha u'', v'') + p(t^\beta u, v) = (f, v). \tag{6}$$

At present we consider the following particular case of the equation (5) for $p = 0$

$$Bu \equiv (t^{\alpha} u'')'' = f, \quad f \in L_{2,-\beta}(1,+\infty), \quad \beta \le \alpha - 4. \tag{7}$$

Proposition 1.10. *The generalized solution of Dirichlet problem for the equation* (7) *exists and is unique for every* $f \in L_{2,-\beta}(1,+\infty)$.

Definition 1.11. *We say that the function* $u \in \dot{W}^2_{\alpha}(1,+\infty)$ *belongs to the domain of definition* $D(B)$ *of the operator* B, *if there exists a function* $f \in L_{2,-\beta}(1,+\infty)$, *such that holds the equality* (6) (*for* $p = 0$). *In this case we write* $Bu = f$.

Thus we get an operator $B : L_{2,\beta}(1,+\infty) \to L_{2,-\beta}(1,+\infty)$. Let $f(t) = t^{\beta} g(t)$. Then $g \in L_{2,\beta}(1,+\infty)$ and $\|g\|_{L_{2,\beta}(1,+\infty)} = \|f\|_{L_{2,-\beta}(1,+\infty)}$. Define $\mathbb{B}u := t^{-\beta} Bu$ with $D(\mathbb{B}) = D(B)$. Then the equation (7) can be written in the following form

$$\mathbb{B}u = g, \quad g \in L_{2,\beta}(1,+\infty), \quad \beta \le \alpha - 4. \tag{8}$$

Theorem 1.13. *The operator* $\mathbb{B} : L_{2,\beta}(1,+\infty) \to L_{2,\beta}(1,+\infty)$ *is for* $\beta \le \alpha - 4$ *positive and self-adjoint. The inverse operator* $\mathbb{B}^{-1}$ *is bounded for* $\beta \le \alpha - 4$, *which is for* $\beta < \alpha - 4$ *compact.*

Theorem 1.15. *The spectrum of the operator* $\mathbb{B}$ *for* $\beta = \alpha - 4$ *is purely continuous* $\sigma(\mathbb{B}) = C\sigma(\mathbb{B})$ *and coincides with the ray*

$$\sigma(\mathbb{B}) = \Big[\tfrac{(\alpha-1)^2(\alpha-3)^2}{16}; +\infty\Big).$$

Consider the special case $\beta = -2$, i.e., $\alpha \ge 2$. Then we describe $D(\mathbb{B}) = D(B)$ of the operator $\mathbb{B}$ for $2 < \alpha < 3$.

Proposition 1.16. *The domain of the definition of the operator* $D(B)$ *consists of the functions* $u \in \dot{W}^2_{\alpha}(1,+\infty)$, *for which* $u'(+\infty) = 0$ *and the value* $u(+\infty) = 0$ *is finite for* $\alpha > \frac{5}{2}$, *which can not be given arbitrarily, but are determined by the right-hand side* $f \in L_{2,2}(1,+\infty)$ *of the equation* (7).

In Subsection 1.3 we observe non-self-adjoint degenerate equation

$$Lu \equiv -(t^{\alpha} u')' + au' + pt^{-2} u = f, \tag{9}$$

where $t \in (1,+\infty), \alpha \ge 0, \alpha \ne 1$ $a, p = const, a \in \mathbb{R}$ and $f \in L_{2,2}(1,+\infty)$.

Let $\dot{W}_{\alpha}(1,+\infty)$ be the completion of the linear manifold $\dot{C}^1[1,+\infty) := \{u \in C^1[1,+\infty), u(1) = u(+\infty) = 0\}$ in the norm $\|u\|^2_{\dot{W}_{\alpha}(1,+\infty)} = \int_1^{+\infty} t^{\alpha} |u'(t)|^2 \, dt$. Then for $u \in \dot{W}_{\alpha}(1,+\infty)$ we have $u(1) = 0$ and fulfills the inequality $|u(t)|^2 \le ct^{1-\alpha} \|u\|^2_{\dot{W}_{\alpha}(1,+\infty)}$, i.e., for $\alpha \ge 0$ there is a continuous embedding

$$\dot{W}_{\alpha}(1,+\infty) \subset L_{2,-2}(1,+\infty), \tag{10}$$

which is for $\alpha > 0$ compact. Define $\varphi_h(t) = 0, t \ge 2h, \varphi_h(t) = 1, 1 \le t \le h$ and $\varphi_h(t) = \frac{2h-t}{h}, h \le t \le 2h$. Then $\|u_h - u\|_{\dot{W}_{\alpha}(1,+\infty)} \to 0$, $h \to \infty$, $u_h := u\varphi_h$.

Consider the special case of the equation (9)

$$Mu \equiv -(t^{\alpha} u')' + au' = f, \quad a > 0. \tag{11}$$

Definition 1.18. *The function $u \in \dot{W}_\alpha(1,+\infty)$ is called a generalized solution of Dirichlet problem for the equation* (11) *if for every $v \in \dot{W}_\alpha(1,+\infty)$*

$$(t^\alpha u', v_h') + a(u', v_h) = (f, v_h).$$

Theorem 1.19. *The generalized solution of Dirichlet problem for the equation* (11) *exists and is unique for every $f \in L_{2,2}(1,+\infty)$.*

In Theorem 1.19 we practically prove that for $0 \le \alpha < 1$ the value $u(+\infty)$ for $u \in D(M)$ is finite, but can not be given arbitrarily and defined by the right-hand side $f \in L_{2,2}(1,+\infty)$.

Define a new operator $\mathbb{M}$ with $D(\mathbb{M}) = D(M)$ and $\mathbb{M}u = t^2 Mu$.

Proposition 1.21. *The inverse operator $\mathbb{M}^{-1} : L_{2,-2}(1,+\infty) \to L_{2,-2}(1,+\infty)$ for $\alpha \ge 0$ is continuous and for $\alpha > 0$ compact.*

Proposition 1.22. *The spectrum of the operator $\mathbb{M} : L_{2,-2}(1,+\infty) \to L_{2,-2}(1,+\infty)$ lies in the right half-plane. Moreover, for the resolvent operator $R_\lambda(\mathbb{M})$ for $\operatorname{Re}\lambda < 0$ we have the estimate*

$$\|R_\lambda(\mathbb{M})\| \le |\operatorname{Re}\lambda|^{-1}. \tag{12}$$

Next consider another important special case of the equation (9)

$$Kv \equiv -(t^\alpha v')' - av' = h, \quad a > 0, \quad h \in L_{2,2}(1,+\infty). \tag{13}$$

Define as above the operator $\mathbb{K}v = t^2 Kv, g = t^2 h$. Then we have

$$\mathbb{K}v \equiv t^2\big(-(t^\alpha v')' - av'\big) = g, \quad a > 0, \quad g \in L_{2,-2}(1,+\infty) \tag{14}$$

Definition 1.23. *An element $v \in L_{2,-2}(1,+\infty)$ is called a generalized solution of Dirichlet problem for the equation* (14) *if for each $u \in D(\mathbb{M})$ holds*

$$(\mathbb{M}u, v) = (u, g).$$

Proposition 1.24. *Generalized solution of Dirichlet problem for the equation* (14) *exists for every $g \in L_{2,-2}(1,+\infty)$ and is unique. Moreover, the generalized solution satisfies to the conditions $v(1) = v(+\infty) = 0$.*

In Subsection 1.4 we study the one-dimensional equation (1) for $\beta = -2$

$$Lu \equiv (t^\alpha u'')'' + au''' + pt^{-2}u = f, \tag{15}$$

where $t \in (1,+\infty), \alpha \ge 2,\ a, p = const,\ a \in \mathbb{R}, \alpha \ne 3$ and $f \in L_{2,2}(1,+\infty)$.

Definition 1.26. *The function $u \in \dot{W}^2_\alpha(1,+\infty)$ is called a generalized solution of Dirichlet problem for the equation* (15) *if for every $v \in \dot{W}^2_\alpha(1,+\infty)$ holds the equality $(t^\alpha u'', v'') - a(u'', v') + p(t^{-2}u, v) = (f, v)$.*

Consider a particular case of the equation (15) for $p = 0$

$$Su \equiv (t^\alpha u'')'' + au''' = f, f \in L_{2,2}(1,+\infty). \tag{16}$$

Proposition 1.27. *The generalized solution of Dirichlet problem for the equation* (16) *exists and is unique for every $f \in L_{2,2}(1,+\infty)$. Moreover, the value $u(+\infty)$ for $\alpha > \frac{5}{2}$ is finite, but can not be given arbitrarily and is defined by the right-hand side of* (16).

Introduce new operator $\mathbb{S} = t^2 S$. Then instead of the equation (16) for $g = t^2 f$ we have

$$\mathbb{S}u \equiv t^2\big((t^\alpha u'')'' + au'''\big) = g, \quad g \in L_{2,-2}(1,+\infty). \tag{17}$$

Proposition 1.29. *The inverse operator* $\mathbb{S}^{-1} : L_{2,-2}(1,+\infty) \to L_{2,-2}(1,+\infty)$ *is for* $\alpha \geq 2$ *continuous and for* $\alpha > 2$ *compact.*

In Section 2, which consists from two subsections, we investigate Dirichlet problem for degenerate differential-operator equations of the fourth order.

In Subsection 2.1 we investigate the model operators.

Let $\mathcal{H}$ be some separable Hilbert space. We call an operator $L : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ an M-operator (M for "model") if it has a complete system of eigenfunctions that form a Riesz basis in $\mathcal{H}$.

The simplest example (at the same time a rather wide class) of the M-operators are the operators on the $V := [0, 2\pi]^n \subset \mathbb{R}^n$, generated by differential expressions of the form

$$L(-iD)u \equiv \textstyle\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha u$$

with constant coefficients defined on the set $\mathcal{P}^\infty$ of smooth functions in $V = (0, 2\pi)^n$ that are periodic in each variable.

Let $s \in \mathbb{Z}^n$. To every differential operation $L(-iD)$ we can associate a polynomial $A(s)$ with constant coefficients such that

$$A(-iD)e^{is\cdot x} = A(s)e^{is\cdot x}, \quad s \cdot x = s_1x_1 + s_2x_2 + \ldots + s_nx_n.$$

We define the corresponding operator $A : L_2(V) \to L_2(V)$ to be the closure in $L_2(V)$ of $A(-iD)$ first defined on $\mathcal{P}^\infty$. Let $\mathcal{S} = \mathbb{Z}^n$ and $A(\mathcal{S}) := \{A(s), s \in \mathcal{S}\}$.

Proposition 2.1. *The spectrum of each* Π*-operator* $A : L_2(V) \to L_2(V)$ *is the closure* $\overline{A(\mathcal{S})}$ *in the complex plane* $\mathbb{C}$ *of the set* $A(\mathcal{S})$*, which forms the point spectrum* $P\sigma(A)$*. The set* $C\sigma(A) = \sigma(A) \setminus P\sigma(A)$ *is the continuous spectrum of the operator* A.

In Subsection 2.2 we regard the operator equation of fourth order (1)

$$Lu \equiv (t^\alpha u'')'' + Au''' + t^\beta Pu = f(t), \tag{18}$$

where $t \in (1, +\infty), \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \leq \alpha - 4, \alpha \neq 1, \alpha \neq 3$, $\mathcal{H}$ is a separable Hilbert space, the operators $A, P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ act in $\mathcal{H}$ the function $f \in L_{2,-\beta}((1, +\infty), \mathcal{H})$.

Since the system of the eigenfunctions $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ forms a Riesz basis in H we can write $u(t) = \sum_{k=1}^\infty u_k(t)\varphi_k, \quad f(t) = \sum_{k=1}^\infty f_k(t)\varphi_k$. As a result we obtain the infinite chain of degenerate ordinary differential equations

$$L_k u_k \equiv (t^\alpha u_k'')'' + a_k u_k''' + p_k t^\beta u_k = f_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{19}$$

where $f_k \in L_{2,-\beta}(1, +\infty), k \in \mathbb{N}$. Define the operator L on the finite sums

$$u^m = \sum_{k=1}^m u_k(t)\varphi_k, \quad u_k \in D(L_k), \quad L_k u_k = f_k, \tag{20}$$

$$Lu^m := \sum_{k=1}^m L_k u_k(t)\varphi_k = \sum_{k=1}^m f_k(t)\varphi_k =: f^m.$$

Definition 2.5. *The function* $u \in L_{2,\beta}((1,+\infty),\mathcal{H})$ *is called the generalized solution of the equation* (18)*, if there is some sequence of finite sums* (20)*, such that are valid the equalities*

$$\lim_{m\to\infty}\|u-u^m\|_{L_{2,\beta}((1,+\infty),\mathcal{H})}=0, \quad \lim_{m\to\infty}\|f-f^m\|_{L_{2,-\beta}((1,+\infty),\mathcal{H})}=0.$$

Theorem 2.6. *The operator equation* (18) *is uniquely solvable for every* $f \in L_{2,-\beta}((1,+\infty),\mathcal{H})$ *if and only if the equations* (19) *are uniquely solvable for every* $f_k \in L_{2,-\beta}(1,+\infty)$ *and uniformly with respect to* $k \in \mathbb{N}$ *we have*

$$\|u_k\|_{L_{2,\beta}(1,+\infty)} \le c\|f_k\|_{L_{2,-\beta}(1,+\infty)}. \tag{21}$$

Consider the special case of the equation (21) for $A=0$ written in the form

$$\mathbb{L}u \equiv \mathbb{B}u + Pu = g(t), \quad g \in L_{2,\beta}((1,+\infty),\mathcal{H}), \quad \beta \le \alpha-4, \tag{22}$$

where $\mathbb{B}=t^{-\beta}B$, $g(t)=t^{-\beta}f(t)$.

Theorem 2.8. *Let hold the conditions* $\rho(-p_k;\sigma(\mathbb{B})) > \varepsilon$, $k \in \mathbb{N}$, *where* ρ *is the distance in the complex plane* $\mathbb{C}$*. Then the generalized solution of the equation* (22) *exists and is unique.*

If the operator P is self-adjoint we can describe the spectrum of $\mathbb{L}$ (see [1])

Theorem 2.10. *The spectrum* $\sigma(\mathbb{L})$ *of the operator* $\mathbb{L}$ *coincides with the closure of the direct sum* $\sigma(\mathbb{B})$ *and* $\sigma(P)$*, i.e.,*

$$\sigma(\mathbb{L})=\overline{\sigma(\mathbb{B})+\sigma(P)}:=\overline{\{\lambda_1+\lambda_2:\lambda_1\in\sigma(\mathbb{B}),\ \lambda_2\in\sigma(P)\}}.$$

At last observe non-self-adjoint operator equation

$$Lu \equiv (t^\alpha u'')'' + Au''' + t^{-2}Pu = f(t), \quad \alpha \ge 2, \quad \operatorname{Re} a_k \ne 0. \tag{23}$$

Now we may rewrite the system of equations (19) in the form

$$\mathbb{L}_k u_k \equiv \mathbb{S}u_k + p_k u_k = g_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

where $g_k = t^2 f_k, g_k \in L_{2,-2}(1,+\infty)$.

Proposition 2.12. *When hold the conditions* $\operatorname{Im} a_k = 0, \operatorname{Im} p_k \le 0, k \in \mathbb{N}$, *then the generalized solution of Dirichlet problem for the equation* (23) *exists and is unique for every* $f \in L_{2,2}((1,+\infty),\mathcal{H})$.

References

1. J.M. Berezanski, *Expansion in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators*, Transl. Math. Monographs 17, American Mathematical Soc., Providence, 1968.

2. A.V. Bicadze, *Equations of mixed type.* M.: Izd. AN SSSR, 1959.

3. V.I. Burenkov, *Sobolev Spaces on Domains*, Teubner, 1999.

4. A.A. Dezin, *Degenerate operator equations*, Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR, 1982, vol. 43, no. 3, pp. 287-298.

5. A.A. Dezin, *Partial Differential Equations* (An Introduction to a General Theory of Linear Boundary Value Problems), Springer, 1987.

6. E. DiBenedetto, *Degenerate parabolic equations*, 1993, Springer.

7. A. Favini, A. Yagi, *Degenerate Differential Equations in Abstract Spaces*, Pure and Applied Mathematics, series of monographs and textbooks, 1999.

8. Gang Li, Qixiang Dong, *Existence of solutions for semi-linear differential equations with nonlocal conditions in Banach spaces*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2009, no. 47, pp. 1-13.

9. V.P. Glushko, S.G. Krein, *On degenerate linear differential equations in Banach space*, DAN SSSR, 1968, vol. 181, no. 4, pp. 784-787.

10. R.Z. Gumbataliev, *Normal solvability of boundary value problems for a class of fourth-order operator-differential equations in a weighted space*, Differ. Uravn., 2010, vol. 46, no. 5, pp. 678-686 (Russian).

11. G. Jaiani, *On a generalization of the Keldysh theorem*, Georgian Mathematical Journal, 1995, vol. 2, no. 3, pp. 291-297.

12. G. Jaiani, *Cusped Shell-Like Structures*, SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology, 2011.

13. M.V. Keldysh, *On certain cases of degeneration of equations of elliptic type on the boundary of a domain*, Doklady Akademii Nauk. SSSR, 77, 1951, pp. 181-183 (Russian).

14. V.V. Kornienko, *On weak and strong irregularity*, Siberian Mathematical Journal, 1996, vol. 37, no. 3, pp. 519-528.

15. V.V. Kornienko, *On the spectrum of degenerate operator equations*, Mathematical Notes, 2000, vol. 68, no. 5, pp. 576-587.

16. S.G. Krein, *Linear Differential Equations in Banach Spaces*, Moscow, 1967 (Russian).

17. V. Kozlov, V. Maz'ya, *Differential Equations with operator coefficients*, Springer Monographs in Mathematics, 1999.

18. L.D. Kudryavtzev, *On equivalent norms in the weight spaces*, Trudy Mat. Inst. AN SSSR, vol. 170, 1984, pp. 161-190 (Russian).

19. S. Levendorskii, *Degenerate Elliptic Equations*, Mathematics and its Applications, vol. 258, Kluwer Academic Publisher, 1993.

20. E.V. Makhover, *On the spectrum of the fundamental frequency*, Scientific Notes of Leningrad A.I. Hertzen State Pedagogical Institute, vol. 197, 1958, pp. 113-118 (Russian).

21. S.G. Mikhlin, *Degenerate elliptic equations*, Vestnik LGU, 1954, vol. 3, no. 8, pp. 19-48 (Russian).

22. K. Mynbayev, M. Otelbaev, *Weighted Functional Spaces and Spectrum of Differential Operator*, Nauka, 1988 (Russian).

23. A. Narchaev, *First boundary value problem for the elliptic equations degenerating on the boundary of the domain*, Dokl. AN SSSR, 1964, vol. 156, no. 1, pp. 28-31 (Russian).

24. E. Poulsen, *Boundary values in function spaces*, Mathematica Scandinavica, vol. 10, 1962, pp. 45-52.

25. V.K. Romanko, *On the theory of the operators of the form* $\frac{d^m}{dt^m} - A$, Differential Equations, 1967, vol. 3, no. 11, pp. 1957-1970 (Russian).

26. R.E. Showalter, *Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations*, Electronic Journal of Differential Equations, Monograph 01, 1994.

27. L. Tepoyan, *Degenerate fourth-order diffeential-operator equations*, Differ. Uravn., 1987, vol. 23, no. 8, pp. 1366-1376, (Russian); English Transl. in Amer. Math. Soc., no. 8, 1988.

28. M.I. Višik, *Boundary problems for elliptic equations degenerating on the boundary of a region*, Matematicheskij Sbornik, 35(77), 1954, pp. 513-568 (Russian).

29. N.M. Yataev, *A correct boundary-value problem for a third-order degenerate operator equation*, Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR, 1989, vol. 46, no. 6, pp. 956-961.

30. V.K. Zakharov, *The first boundary value problem for elliptic equations fourth order degenerate on the boundary*, Doklady AN SSSR, 1957, vol. 114, no. 4, pp. 694-697 (Russian).

List of publications of the author

1. Hosein Ansari, L. Tepoyan, *Degenerate ordinary differential equations of fourth order in infinite interval*, Vestnik RAU, Physical-Mathematical and Natural Sciences, no. 1, 2010, pp. 5-12 (Russian).

2. Hosein Ansari, *Degenerate differential-operator equations of fourth order on infinite interval*, Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences, no. 2, 2011, pp. 27-32.

3. Hosein Ansari, *Dirichlet problem for non-self-adjoint degenerate differential equations of fourth order on infinite intervals*, International Conference Harmonic Analysis and approximations, V, Armenia, 2011, pp. 13-14.

4. Hosein Ansari, L. Tepoyan, *Dirichlet Problem for degenerate differential equations of fourth order on infinite interval*, World Applied Sciences Journal (WASJ), vol. 17, no. 7, 2012, pp. 852-855.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

ХОСЕЙН АНСАРИ

Задача Дирихле для вырождающихся дифференциально-операторных уравнений четвертого порядка в бесконечном промежутке

Вырождающиеся дифференциальные уравнения в абстрактных пространствах (т.е. дифференциально-операторные или операторно-дифференциальные уравнения) были исследованы в работах В.П. Глушко, С.Г. Крейна, А.А. Дезина, В.В. Корниенко и других авторов. В представленной диссертации рассматривается задача Дирихле для вырождающихся дифференциально-операторных уравнений четвертого порядка следующего вида

$$Lu \equiv (t^{\alpha}u'')'' + Au''' + t^{\beta}Pu = f(t), \qquad (1)$$

где $t \in (1, +\infty), \beta \leq \alpha - 4,\ \alpha \neq 1,\ \alpha \neq 3$, а A и P являются линейными операторами в некотором сепарабельном пространстве H, $f \in L_{2,-\beta}((1, +\infty), H)$.

Предполагается, что в H существует базис Рисса $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, такой что функции $\varphi_k, k \in \mathbb{N}$ являются одновременно собственными функциями для операторов A и P

$$A\varphi_k = a_k\varphi_k,\ \ P\varphi_k = p_k\varphi_k,\ \ k \in \mathbb{N}.$$

В диссертационной работе сперва исследуется случай когда операторы A и P являются операторами умножения $Au = au,\ Pu = pu,\ \ a, p \in \mathbb{C}$. Затем используя представления

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k, \qquad f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\varphi_k$$

дифференциально-операторное уравнение (1) приводится к бесконечной цепочке обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L_k u_k \equiv (t^{\alpha}u_k'')'' + a_k u_k''' + t^{\beta}p_k u = f_k(t),\ f_k \in L_{2,-\beta}((1, +\infty), k \in \mathbb{N}: \quad (2)$$

Сперва для обыкновенного дифференциального уравнения вида (2) определяется обобщенное решение задачи Дирихле в весовом пространстве Соболева $\dot{W}_{\alpha}^{2}(1, +\infty)$. Затем осуществляется переход к исследованию операторного уравнения (1).

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

- Доказано, что при $\beta \leq \alpha - 4$, $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq 3$ имеет место непрерывное вложение $\dot{W}_{\alpha}^{2}(1,+\infty) \subset L_{2,\beta}(1,+\infty)$, которое является компактным при $\beta < \alpha - 4$.

- Доказано, что при $\beta \leq \alpha - 4$ одномерный оператор $\mathrm{B}u = t^{-\beta}Bu \equiv t^{-\beta}(t^{\alpha}u'')''$ является положительным и самосопряженным в пространстве $L_{\beta}^{2}(1,+\infty)$, а обратный оператор B^{-1} существует и непрерывен. При $\beta < \alpha - 4$ оператор B^{-1} является компактным. Одновременно дается описание области определения оператора В .

- Доказывается, что при $\beta = \alpha - 4$ спектр оператора $\mathrm{B}\colon L_{2,\beta}(1,+\infty) \to L_{2,\beta}(1,+\infty)$ является чисто непрерывным и $C\sigma(\mathrm{B}) = [\frac{(\alpha-1)^2(\alpha-3)^2}{16}, +\infty)$.

- Устанавливается, что постановка задачи Дирихле для уравнения $Lu \equiv -(t^{\alpha}u')' + au = f$ при $\alpha \geq 0, a \in R, a \neq 0$ зависит от знака числа a в отличие от уравнения $Lu \equiv (t^{\alpha}u'')'' + au''' = f$, для которой при $\alpha \geq 2$, $a \in R, a \neq 0$ постановка задачи Дирихле не зависит от знака a .

- Получены достаточные условия, при выполнении которых задача Дирихле для дифференциально-операторного уравнения $Lu \equiv (t^{\alpha}u'')'' + Au''' + t^{\beta}Pu = f$ однозначно разрешима.

- Доказывается, что когда оператор P является самосопряженным, тогда спектр оператора $t^{-\beta}L$ совпадает с замыканием прямой суммы спектров операторов P и В

$$\sigma\left(t^{-\beta}\right) = \overline{\sigma(\mathrm{B}) + \sigma(P)} \ .$$

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

ՀՈՍԵՅՆ ԱՆՍԱՐԻ

Դիրիխլեի խնդիրը չորրորդ կարգի վերասերվող դիֆերենցիալ-օպերատորային հավասարումների համար անվերջ միջակայքում

Վերասերվող դիֆերենցիալ հավասարումները աբստրակտ տարածություններում (այսինքն դիֆերենցիալ-օպերատորային կամ օպերատորային-դիֆերենցիալ հավասարումները) ուսումնասիրվել են Վ.Պ. Գլուշկոյի, Ս.Գ. Կրեյնի, Ա.Ա. Դեզինի, Վ,Վ, Կորնիենկոյի և այլոց աշխատանքներում: Ներկա ատենախոսության մեջ դիտարկվել է Դիրիխլեի խնդիրը հետևյալ չորրորդ կարգի վերասերվող դիֆերենցիալ-օպերատորային հավասարման համար

$$Lu \equiv (t^{\alpha}u'')'' + Au''' + t^{\beta}Pu = f(t), \qquad (1)$$

որտեղ $t \in (1, +\infty), \beta \le \alpha - 4,\ \alpha \ne 1,\ \alpha \ne 3,$ իսկ A և P գծային օպերատորները գործում են որևէ սեպարաբել H սեպարաբել հիլբերտյան տարածության մեջ, $f \in L_{2,-\beta}((1,+\infty),H)$:

Ենթադրվում է, որ H -ում գոյություն ունի Րիսի բազիս՝ $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, այնպիսին որ $\varphi_k, k \in \mathbb{N}$ ֆունկցիաները հանդիսանում են միաժամանակ A և P օպերատորների համար սեփական ֆունկցիաներ

$$A\varphi_k = a_k\varphi_k,\ \ P\varphi_k = p_k\varphi_k,\ \ k \in \mathbb{N}:$$

Ատենախոսության մեջ նախ դիտարկվում է այն դեպքը, երբ A և P օպերատորները համապատասխանաբար a և p թվերով բազմապատկման օպերատորներ են՝ $Au = au,\ Pu = pu,\ a, p \in \mathbb{C}$: Այնուհետև օգտվելով

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k, \qquad f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\varphi_k$$

ներկայացումներից (1) դիֆերենցիալ-օպերատորային հավասարումը բերվում է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների հետևյալ անվերջ շղթային

$$L_k u_k \equiv (t^{\alpha}u_k'')'' + a_k u_k''' + t^{\beta}p_k u = f_k(t),\ f_k \in L_{2,-\beta}((1,+\infty), k \in \mathbb{N}: \quad (2)$$

Նախ սահմանվում է (2) տեսքի սովորական դիֆերենցիալ հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի խնդրի ընդհանրացված լուծումները Սոբոլևի $\dot{W}_{\alpha}^{2}(1,+\infty)$ կշռային տարածությունում: Այնուհետև կատարվում է անցում է (1) տեսքի դիֆերենցիալ-օպերատորային հավասարումների ուսումնասիրությանը:

Ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները.

- Ցույց է տրվել, որ $\beta \le \alpha - 4$, $\alpha \ne 1$, $\alpha \ne 3$ դեպքում տեղի ունի անընդհատ ներդրում $\dot{W}_{\alpha}^{2}(1,+\infty) \subset L_{2,\beta}(1,+\infty)$, որը կոմպակտ է, երբ $\beta < \alpha - 4$:

- Ցույց է տրվել, որ $\beta \le \alpha - 4$ դեպքում միաչափ $\mathrm{B}u = t^{-\beta}Bu \equiv t^{-\beta}(t^{\alpha}u'')''$ օպերատորը դրական է, ինքնահամալուծ $L_{\beta}^{2}(1,+\infty)$ տարածության մեջ և հակադարձ B^{-1} օպերատորը անընդհատ է: $\beta < \alpha - 4$ դեպքում B^{-1} օպերատորը կոմպակտ է: Միաժամանակ նկարագրվել է B օպերատորի որոշման տիրույթը:

- Ապացուցվել է, որ $\beta = \alpha - 4$ դեպքում $\mathrm{B}\colon L_{2,\beta}(1,+\infty) \to L_{2,\beta}(1,+\infty)$ օպերատորի սպեկտրը անընդհատ է և $C\sigma(\mathrm{B}) = [\frac{(\alpha-1)^2(\alpha-3)^2}{16},+\infty)$:

- Ցույց է տրվել, որ Դիրիխլեի խնդրի դրվածքը $Lu \equiv -(t^{\alpha}u')' + au = f$ հավասարման համար $\alpha \ge 0, a \in R, a \ne 0$ դեպքում կախված է a թվի նշանից, իսկ $Lu \equiv (t^{\alpha}u'')'' + au''' = f$ հավասարման համար $\alpha \ge 2$, $a \in R, a \ne 0$ դեպքում կախված չէ:

- Ստացվել են բավարար պայմաններ, որոնց տեղի ունենալու դեպքում Դիրիխլեի խնդիրը $Lu \equiv (t^{\alpha}u'')'' + Au''' + t^{\beta}Pu = f$ դիֆերենցիալ-օպերատորային հավասարման համար միարժեք լուծելի է:

- Ցույց է տրվել, որ երբ P օպերատորը ինքնահամալուծ է, ապա $t^{-\beta}L$ օպերատորի սպեկտրը համընկնում է P և B օպերատորների սպեկտրների ուղիղ գումարի փակման հետ

$$\sigma\left(t^{-\beta}\right) = \overline{\sigma(\mathrm{B}) + \sigma(P)} \ :$$