

ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ  
ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Չախմախյան Լևոն Արմենի

**ԽՃՃՎԱԾ ՎԻՃԱԿՆԵՐԸ ԵՎ ԿՈՀԵՐԵՆՏ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ  
ՌԵԶՈՆԱՆՍԱՅԻՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ**

Ա.04.21–«Լազերային ֆիզիկա» մասնագիտությամբ  
Ֆիզիկա-մաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական  
աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան-2013

---

–

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РА  
ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Чахмахчян Левон Арменович

**ЗАПУТАННЫЕ СОСТОЯНИЯ И КОГЕРЕНТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В  
РЕЗОНАНСНОЙ СРЕДЕ**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание  
ученой степени кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.04.21 – «Лазерная физика»

Ереван – 2013

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Ֆիզիկական Հետազոտությունների  
Ինստիտուտում

Գիտական ղեկավար՝

Ֆիզմաթ. գիտ. դոկտոր,  
Գ.Հ. Գրիգորյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝

Ֆիզմաթ. գիտ. դոկտոր,  
պրոֆեսոր Ա.Ժ. Մուրադյան (ԵՊՀ)  
Ֆիզմաթ. գիտ. դոկտոր  
Հ.Մ. Բաբուջյան (ԱԱԳԼ)

Առաջատար կազմակերպություն՝

Իլյա Ճավճավաձեի անվան պետական  
համալսարան, Թբիլիսի, Վրաստան

Ատենախոսության պաշտպանությունը կայանալու է 2013 թ. դեկտեմբերի 10-ին, ժամը 15<sup>00</sup>-  
ին, ՀՀ ԳԱԱ Ֆիզիկական Հետազոտությունների Ինստիտուտում (0203 ք. Աշտարակ-2, ՀՀ  
ԳԱԱ ՖՀԻ) ԲՈՀ-ի Ֆիզիկայի-049 մասնագիտական խորհրդում:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ գրադարանում:

Ատենախոսության սեղմագիրը առաքված է 2013 թ. նոյեմբերի 8-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական  
քարտուղար, ֆիզմաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ,



Վ.Պ. Քալանթարյան

---

Тема диссертации утверждена в Институте Физических Исследований НАН РА

Научный руководитель:

доктор физ.-мат. наук,  
Г.Г. Григорян

Официальные оппоненты:

доктор физ.-мат. наук,  
профессор А.Ж. Мурадян (ЕГУ)  
доктор физ.-мат. наук  
Г.М. Бабуджян (ННЛ им. А.И. Алиханяна)

Ведущая организация:

Государственный университет им. Ильи  
Чавчавадзе, Тбилиси, Грузия

Защита диссертации состоится 10-го декабря 2013 г. в 15<sup>00</sup> часов, в Институте Физических  
Исследований НАН РА (0203, г. Аштарак-2 ИФИ НАН РА) на заседании Специализированного  
совета ВАК Физика-049.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.

Автореферат диссертации разослан 8-го ноября, 2013 г.

Ученый секретарь специализированного совета,  
Канд. физ.-мат. наук, доцент



В.П. Калантарян

## Общая характеристика работы.

### Актуальность темы.

Квантовая запутанность, как одна из наиболее привлекательных особенностей квантовой теории, по-прежнему остается предметом интенсивных исследований [1]. Запутанность является ценным ресурсом в обработке квантовой информации и создании квантовых коммуникаций, играет важнейшую роль в схемах квантовой телепортации, квантовых вычислениях и многих квантово-криптографических протоколах [2,3]. Помимо этого, выявление ее свойств открывает новые перспективы для понимания механизма квантовых фазовых переходов (КФП) в физике многочастичных и твердотельных систем. В частности, последние исследования указывают на связь между запутанностью многочастичных квантовых систем, КФП и скэйлингом [4].

Одна из важнейших задач квантовой информатики состоит в количественной оценке степени запутанности рассматриваемых подсистем. Ее решение дает возможность определения точности квантовой телепортации, количества шума в канале связи сверхплотного кодирования и в установлении эффективности квантового компьютера. Ввиду последнего, и того, что большинство проектируемых квантовых чипов являются твердотельными, вопрос исследования количественных и качественных свойств запутанности в твердотельных системах становится строго мотивированным.

В многообразии твердотельных систем можно выделить особый подкласс малоразмерных магнитных материалов, на данный момент являющихся объектом активных теоретических и экспериментальных исследований. В частности, эти материалы выказывают богатую разнообразность термодинамических свойств, фазовой структуры и структуры основного состояния. Однако, решение фрустрированных спиновых моделей Гейзенберга с конкурирующими взаимодействиями, описывающих свойства данных материалов, представляется трудной, а в некоторых случаях – не выполнимой задачей. Ввиду последнего, часто используются некоторые приближения, которые приводят к удовлетворительным качественным, а иногда и количественным результатам, обходя имеющиеся математические трудности. Один из подходов заключается во введении изинговых (классических) спинов в некоторых узловых вершинах решетки, что приводит к перемежающейся последовательности классических и квантовых переменных. Исследование свойств системы в термодинамическом пределе можно также производить методом среднего поля, основанном на неравенстве Гиббса-Боголюбова, которое трансформирует данную систему в набор невзаимодействующих кластеров во внешнем эффективном магнитном поле [5].

Другим методом изучения решеточных спиновых моделей является предел классического обменного взаимодействия, когда гейзенбергово спаривание частиц заменяется изинговым. Некоторые модели в данном приближении точно решаемы, в частности,  $Q$ -компонентная модель Поттса и модель Изинга с многочастичным взаимодействием на рекурсивных решетках. Эти модели широко используются для описания свойств твердого  $^3\text{He}$ , РНК-подобных молекул, спиновых стекол, самоорганизованных критических систем и т.д. Точное решение дается методом рекуррентных соотношений, в рамках которого свойства системы описываются одномерными или многомерными рациональными отображениями [6,7]. Когда узлы решетки связаны антиферромагнитным взаимодействием, модели проявляют сложное поведение, включая бифуркации удвоения, перемежаемость, суперстабильность, хаос и т.д. Подчеркнем, что в работах [8,9] была выявлена связь между КФП, хаосом и запутанностью: квантовые свойства системы различаются в зависимости от начального состояния, а именно – хаотично оно или нет.

Обработка квантовой информации может также осуществляться в системах, отличных от твердотельных, например, в таких как системы атомов взаимодействующих с полями. В частности, представляет интерес модель Дике (МД), которая описывает взаимодействие одномодового бозонного поля с ансамблем двухуровневых атомов [10]. Как известно, МД проявляет как равновесные, так и неравновесные КФП. Важный частный случай МД, соответствующий так называемому дисперсионному пределу, широко используется в задачах квантовой информатики. В этом случае эффективное взаимодействие между атомами (ионами)

опосредовано радиационным полем и имеет природу диполь-дипольного взаимодействия. Отметим, что член взаимодействия эффективной МД в дисперсионном пределе может быть также рассмотрен как гейзенберговоe обменное взаимодействие. Таким образом, существует сильная связь между данной моделью, фрустрированным магнетизмом и системой взаимодействующих магнитных спинов.

С другой стороны, полный или частичный перенос населенностей между основными состояниями системы также лежит в основе решений многих проблем квантовой информатики и употребляется в реализации квантовых вентилей, устойчивом квантовом контроле, в лазероконтролируемой химии, сверхточной магнитометрии и т.д. Адиабатическое прохождение, позволяющее следовать одному собственному состоянию системы, часто используется для реализации данного переноса населенностей, ввиду своей устойчивости по отношению к флуктуациям поля и неполного знания рассматриваемой системы. В частности, теоретически предсказанная эффективность методов стимулированного адиабатического рамановского прохождения, оперирующего на “темном” (STIRAP) и “светлом” (b-STIRAP) состояниях в  $\Lambda$ -системах была подтверждена экспериментально в работах [11,12]. Отметим, что эффекты распространения в среде могут сильно видоизменить результаты данных процессов. Важное значение имеет также рассмотрение эффекта различных сил осцилляторов на смежных переходах  $\Lambda$ -системы, который особенно выражен в твердотельных системах.

Наконец, практически во всех прикладных проблемах квантовой информатики и коммуникации, важнейшую роль играет предохранение когеренции (запутанности) квантовых состояний от декогеренции, индуцированной неконтролируемым влиянием среды. Один из наиболее мощных методов позволяющих распределить запутанные состояния на большие расстояния без потерь когеренции является *дистилляция запутанности* [13]. Последняя дает возможность извлечь малый ансамбль сильно запутанных состояний из большого ансамбля слабо запутанных состояний. Одним из методов дистилляции запутанности, использующих наименьшее количество временных и пространственных ресурсов, является компактный протокол дистилляции состояний непрерывной переменной в квантовых памятьх [14]. Важной задачей является проверка возможности реализации данного протокола в реальных экспериментальных условиях.

**Целью диссертационной работы является** изучение свойств квантовой запутанности в ряде систем взаимодействующих атомов и полей и в некоторых твердотельных системах, а также исследование спиновой динамики последних. Для реализации этих целей были поставлены следующие задачи:

1. Исследование свойств запутанности квантовых димеров и тримеров в малоразмерных спиновых моделях, описывающих реальные твердотельные материалы, а именно естественный минерал азурит ( $\text{Cu}_3(\text{CO}_3)_2(\text{OH})_2$ ) и медь содержащие координационные материалы ( $\text{Cu}_9\text{X}_2(\text{сра})_6 \cdot n\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{X}=\text{F}, \text{Cl}, \text{Br}$ ; сра=карбокситеннокислота). Рассмотрение эффектов влияния температуры и внешнего магнитного поля и сопоставление термодинамических (магнитных) свойств со свойствами запутанности.
2. Анализ точно решаемых спиновых моделей на иерархических решетках, которые являются приближением квантовых моделей на реальных решетках. Исследование фазовой структуры данных систем методом рекуррентных отображений (методом динамических систем).
3. Рассмотрение задач квантовой информатики в системах взаимодействующих атомов и полей, а именно, выявление свойств запутанности эффективно взаимодействующих атомов в резонаторе, а также детальный анализ переноса населенностей в среде с различными силами осцилляторов на смежных переходах  $\Lambda$  атомов.
4. Исследование компактного протокола дистилляции запутанности состояний непрерывной переменной в реальных квантовых памятьх, в присутствии эффектов диссипации.

## **Научная новизна и практическая ценность работы:**

1. Впервые исследованы свойства запутанности малоразмерных квантовых спиновых моделей, описывающих свойства естественного минерала азурита ( $\text{Cu}_3(\text{CO}_3)_2(\text{OH})_2$ ) и медь содержащих координационных материалов  $(\text{Cu}_9\text{X}_2(\text{cra})_6 \cdot n\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{X}=\text{F}, \text{Cl}, \text{Br}$ ). Полученные результаты подтверждают гипотезу о том, что твердотельные системы являются естественным ресурсом запутанности. Кроме того, детальный анализ богатой фазовой структуры данных материалов выявил режимы с наиболее выраженными свойствами квантовой запутанности. Вместе с тем, строгая связь между термодинамическими (магнитными) свойствами и запутанностью, позволяет следить за поведением последней экспериментальным путем.
2. Используя метод рекуррентных отображений была исследована фазовая структура некоторых классических моделей на рекурсивных решетках ( $Q$ -компонентная модель Поттса на решетке Бете и модель Изинга с многочастичным взаимодействием на решетке Хусими). Отличительной чертой данного подхода является возможность точного решения и получения аналитических формул для термодинамических характеристик, что позволяет произвести детальный анализ фазовой структуры. Впервые был исследован фазовый переход между хаотической и трех-периодичной фазами, методом обнаружения касательной бифуркации соответствующих отображений.
3. Представлено детальное описание свойств квантовой запутанности трех эффективно взаимодействующих двухуровневых атомов в резонаторе. Показано, что сила взаимодействия частиц в дисперсионном приближении относительно легко манипулируема. Также выявлена строгая связь данной модели с системами взаимодействующих магнитных спинов. Рассмотрено влияние температуры и собственной частоты перехода атомов на поведение квантовой запутанности.
4. Произведено подробное исследование распространения двух сильных лазерных импульсов в среде состоящей из  $\Lambda$  атомов с различными силами осцилляторов на смежных переходах. Полученные результаты особо важны в некоторых задачах квантовой информатики, как, например, перенос населенностей в среде с вышеуказанными свойствами.
5. Проанализированы эффекты диссипаций в недавно предложенном протоколе компактной дистилляции запутанности состояний непрерывной переменной. Показано, что потери присутствующие в реальных квантовых памятьях, сильно изменяют свойства первоначального протокола, тем самым выдвигая дополнительные ограничения на экспериментальные параметры. Тем не менее, наши результаты показали, что данная схема дистилляции реализуема с помощью существующих технологий.

## **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Модели Изинга-Гейзенберга со спином  $1/2$ , описывающие свойства естественного минерала азурита ( $\text{Cu}_3(\text{CO}_3)_2(\text{OH})_2$ ) и медь содержащих координационных материалов  $(\text{Cu}_9\text{X}_2(\text{cra})_6 \cdot n\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{X}=\text{F}, \text{Cl}, \text{Br}$ ), обнаруживают богатую фазовую структуру и структуру основного состояния, с качественно различными термодинамическими свойствами и свойствами запутанности. Запутанность и магнитные характеристики данных моделей обнаруживают строгое подобие.
2. Трех-периодичные окна модели Изинга с трехчастичным взаимодействием на решетке Хусими и  $Q$ -компонентной модели Поттса на решетке Бете содержат хаотическую фазу, ограниченную в рамках вышеупомянутого окна. Точки фазовых переходов данных моделей тождественны с точками бифуркаций соответствующих одномерных рациональных отображений.
3. Свойства квантовой запутанности трех двухуровневых атомов, связанных эффективным взаимодействием через моду резонатора, особо ярко выражены в некоторой определенной области значений температуры, собственной частоты перехода атомов и эффективной силы взаимодействия.
4. Эффективность сверхсветового переноса населенностей в среде, состоящих из  $\Lambda$  атомов, может быть увеличена соответствующим подбором сил осцилляторов на смежных переходах.

5. Экспериментальная реализация эффективной дистилляции запутанности состояний непрерывной переменной возможна с помощью существующих технологий, несмотря на неминуемые эффекты диссипаций в используемых квантовых памятьях.

**Апробация работы.** Полученные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на международных конференциях: "Control of Quantum Dynamics of Atoms, Molecules and Ensembles by Light - CAMEL9" (Nessebar, Bulgaria, 2013), "IOTA Workshop on Cold Molecular Ions" (Arosa, Switzerland, 2013), "Les 14èmes Journées de l'Ecole Doctorale Carnot Pasteur" (Dijon, France, 2013), "38th Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics - MECO38" (ICTP, Trieste, Italy, 2013), "The 7th International Conference Quantum Theory and Symmetries" (Prague, Czech Republic, 2011), Laser Physics (Ashtarak, Armenia, 2011, 2012, 2013), "The 19th International Colloquium on Integrable Systems and Quantum Symmetries" (Prague, Czech Republic, 2010), "Workshop on Principles and Design of Strongly Correlated Electronic Systems" (ICTP, Miramare-Trieste, Italy, 2010), "Pseudochaos and Stable-Chaos in Statistical Mechanics and Quantum Physics" (ICTP, Miramare - Trieste, Italy, 2009), а также на семинарах ИФИ НАН Армении, Национальной Лаборатории им. А.И. Алиханяна, Университетов Оксфорда и Бургундии.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 22 работы (в том числе 11 статей в рецензируемых журналах).

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка цитируемой литературы. Содержание диссертации изложено на 150 страницах, включая 62 рисунка и 1 таблицу. Список литературы содержит 293 наименования.

### Краткое содержание работы

**Во введении** обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задача работы, ее научная новизна и практическая ценность, представлены основные положения, выносимые на защиту, а также кратко изложено содержание работы по главам.

**В первой главе** рассмотрены свойства запутанности модели Изинга-Гейзенберга со спином 1/2 на ромбовидной решетке и триангулированной решетке КагOME (Рис. 1). Недавние экспериментальные исследования показали, что первая из вышеупомянутых решеток, с ионами  $\text{Cu}^{2+}$  в соответствующих узлах, описывает свойства естественного минерала азурита ( $\text{Cu}_3(\text{CO}_3)_2(\text{OH})_2$ ) [15]. Отметим, что точное значение и характер взаимодействия ионов меди в данной системе пока не выявлены, следовательно, представляет интерес изучение свойств модели в широкой области значений сил связи  $J_i$  ( $i=1, 2, 3, m$ ).

Рассмотрим Гамильтониан модели Изинга-Гейзенберга со спином 1/2 на ромбовидной решетке:

$$\mathcal{H} = - \sum_{k=1}^N \left( J_2 \vec{S}_{k_1} \vec{S}_{k_2} + J(\mu_k^z + \mu_{k+1}^z) (S_{k_1}^z + S_{k_2}^z) + J_m \mu_k^z \mu_{k+1}^z - H \left( S_{k_1}^z + S_{k_2}^z + \frac{\mu_k^z + \mu_{k+1}^z}{2} \right) \right).$$

Здесь,  $\vec{S}_k = (S_k^x, S_k^y, S_k^z)$  обозначает гейзенберговский оператор спина 1/2, а  $\mu_k$  — есть изингов классический спин-1/2. Последний член уравнения соответствует эффекту внешнего магнитного поля. В данном Гамильтониане мы также ввели приближение симметричной ромбовидной решетки, т.е.,  $J_1 = J_3 \equiv J$ . Ввиду того, что каждый из квантовых димеров (состоящий из спинов  $\vec{S}_{k_1}$  и  $\vec{S}_{k_2}$ ) взаимодействует со своим одноименным соседом посредством классической (изинговой) связи, их состояния можно считать сепарабельными, т.е., не запутанными. Следовательно, расчет степени запутанности каждого из данных димеров может быть произведен по

отдельности. Поэтому, в рамках данной модели нас интересуют свойства только одного ромбовидного кластера.

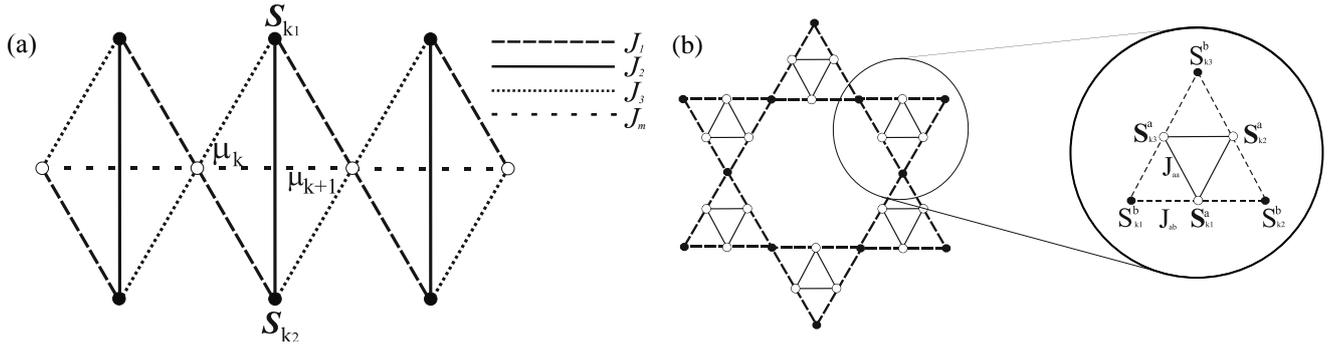


Рис.1. (a) Разрез обобщенной ромбовидной решетки ( $k$  нумерует кластеры). Белые и черные узлы отображают позиции изинговых (мономерных) и гейзенберговских (димерных) частиц, соответственно. Сплошные линии соответствуют квантовому, а пунктирные линии – классическому взаимодействию; (b) разрез триангулированной решетки Кагоме. Черные узлы конструируют решетку Кагоме, состоящую из изинговых частиц, а белые узлы образуют квантовые тримеры. Сплошные и пунктирные линии имеют аналогичный смысл.

Строя матрицу плотности одного ромбовидного кластера и производя операцию частичного следа по мономерным изинговым спинам, получаем матрицу плотности квантового димера. Степень запутанности последней измеряется согласованностью  $C(\rho)$  [16]. Исследование свойств  $C(\rho)$  выявило три качественно различных режима. Если квантовая связь доминирует в системе, т.е. если  $J_2 > J$ , то основное состояние является максимально запутанным ( $C(\rho)=1$ ). В противоположном случае ( $J_2 < J$ ), основное состояние не запутано, но ненулевая температура может привести к появлению отличной от нуля термальной запутанности. Наконец, при  $J_2=J$ , имеет место некий промежуточный режим, в котором основное состояние запутано частично; здесь  $C(\rho)=1/3$ .

Нами также были выявлены некоторые новые эффекты, не описанные прежде в литературе, а именно, был найден режим, в котором согласованность  $C(\rho)$  выказывает три критические температуры (соответствующие обнулению запутанности или ее появлению) с двумя локальными максимумами (Рис. 2а). Также был представлен анализ иного, ранее не описанного явления: при некоторых условиях ( $J=J_2, 0 < J_m < J$ ) в системе имеются точки сосуществования двух фаз с различными значениями магнитной запутанности (см. Рис. 2b в области низких температур), что является следствием богатой фазовой структуры данной модели.

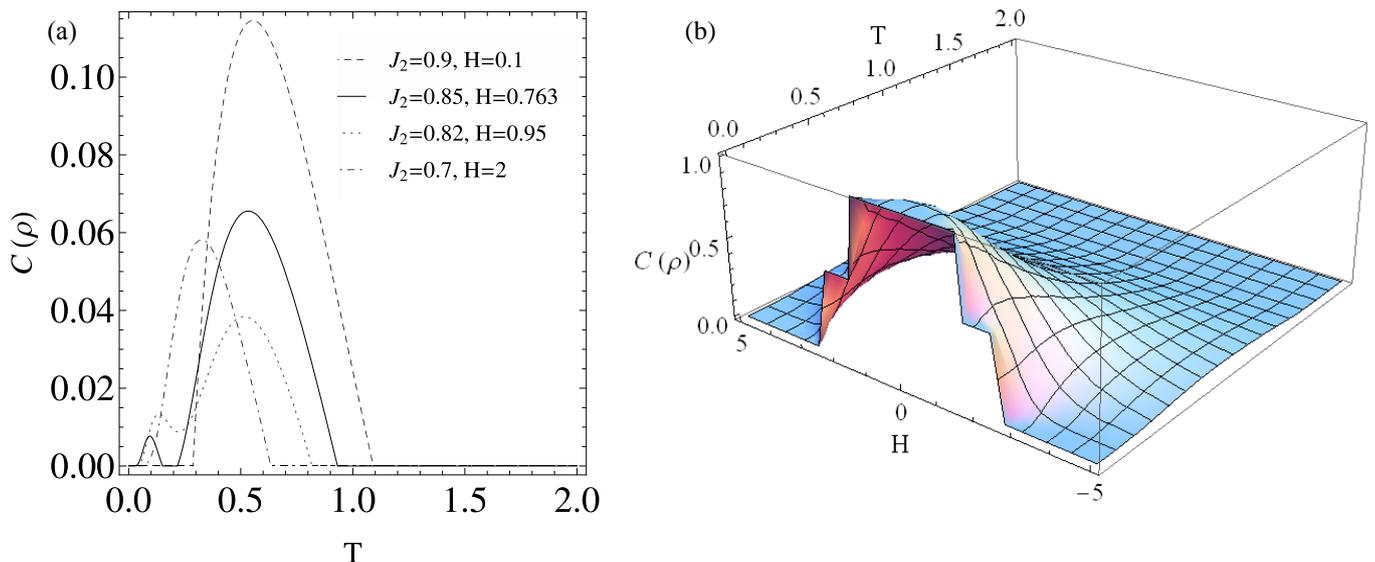


Рис. 2. (a) Согласованность  $C(\rho)$  в зависимости от температуры  $T$  при  $J=2$ , различных значений магнитного поля  $H$  и константы связи  $J_2$ . (b) Согласованность  $C(\rho)$  в зависимости от температуры  $T$  и магнитного поля  $H$  при  $J_2=J=2$  и  $J_m=1.5$ .

Что касается модели Изинга-Гейзенберга на триангулированной решетке КагOME, то она описывает свойства медь содержащих координационных материалов  $(Cu_9X_2(сра)_6 \cdot nH_2O, X=F, Cl, Br)$  [17]. Соответствующий Гамильтониан имеет следующий вид (с аналогичными обозначениями, введенными выше):

$$\mathcal{H} = J_{aa} \sum_{(i,j)} \bar{S}_i^a \bar{S}_j^a - J_{ab} \sum_{(k,l)} (S^z)_k^a \cdot (S^z)_l^b - H \sum_{i=1}^{\frac{2N}{3}} 3 \left( (S^z)_j^a + \frac{1}{2} (S^z)_j^b \right),$$

где первое суммирование ведется по всем ближайшим соседям типа  $a-a$ , а второе – по соседям типа  $a-b$  (в системе всего  $3N$  частиц). Данная модель была решена методом среднего поля, основанном на неравенстве Гиббса-Боголюбова [5].

Описанное решение показало, что магнитные свойства и свойства запутанности (замеренной согласованностью  $C(\rho)$ ) квантовых тримеров типа  $a$  в эффективном магнитном поле проявляют определенные схожие свойства. Во первых, критическая температура фазового перехода второго рода, соответствующая переходу из состояния со спонтанной намагниченностью в состояние без нее, тождественно совпадает с точкой обнуления запутанности тримерных спинов типа  $a$ . Кроме того, значения параметров (сила связи и сила внешнего магнитного поля), при которых магнитная восприимчивость максимальна, совпадают со значениями тех-же параметров, при которых меняет значения согласованность. Более того, при низких температурах плато намагниченности совпадают с плато согласованности.

**Во второй главе** представлены результаты изучения фазовой структуры некоторых классических спиновых моделей на рекурсивных решетках, а именно, модели Поттса на решетке Бете (Рис. 3а) и модели Изинга с трехчастичным взаимодействием на решетке Хусими (Рис. 3б). Данные модели широко используются для описания свойств различных органических полимеров и разнообразных магнитных систем

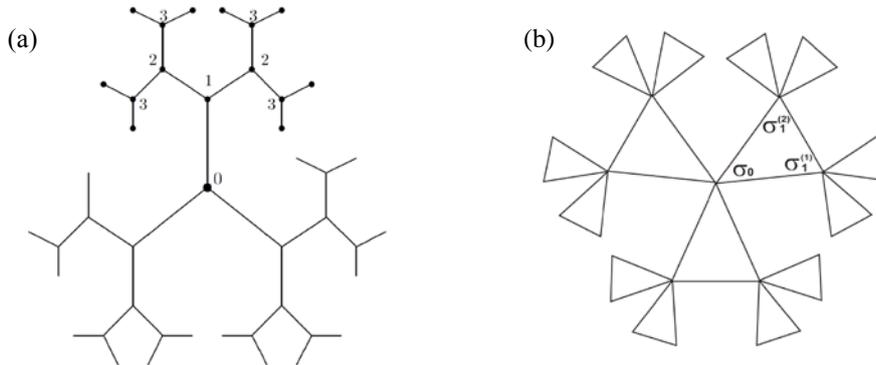


Рис. 3. (а) Решетка Бете; (б) решетка Хусими.

Модель Поттса на решетке Бете во внешнем магнитном поле и модель Изинга с трехчастичным взаимодействием на решетке Хусими описываются, соответственно, следующими Гамильтонианами:

$$\mathcal{H}_{\text{Potts}} = -J \sum_{(i,j)} \delta(\sigma_i, \sigma_j) - H \sum_i \delta(\sigma_i, Q);$$

$$\mathcal{H}_{\text{Ising}} = -J_3 \sum_{\Delta} \sigma_i \sigma_j \sigma_k - H \sum_i \sigma_i,$$

где суммирование в первом члене Гамильтониана  $\mathcal{H}_{\text{Potts}}$  идет по всем ближайшим соседям, второе – по всем узлам решетки, а  $\delta(\sigma_i, \sigma_j)$  – есть дельта символ Кронекера; первое суммирование в Гамильтониане  $\mathcal{H}_{\text{Ising}}$  производится по всем треугольникам, а последнее по всем узлам решетки Хусими.

Отличительным свойством рассматриваемых моделей является их точная решаемость методом рекуррентных соотношений. Нами были рассмотрены точки переходов между модулированными фазами различного периода, которые тождественны точкам бифуркаций

удвоения соответствующих отображений. В частности, на фазовой диаграмме  $Q$ -компонентой модели Поттса были найдены точки фазовых переходов между фазой без подрешеточной структуры (фаза периода один) и фазой периода два, а также между последней и фазой периода четыре (в зависимости от силы внешнего магнитного поля и температуры).

Особое внимание было уделено циклическому окну периода три данных моделей. Как известно, в хаотической фазе вышеописанных моделей существуют переходы в периодичный режим, которые происходят посредством касательной бифуркации [18] и приводят к образованию  $p$ -периодичных циклических окон. Если свойства системы описываются отображением  $f(x)$ , то точка касательной бифуркации, образующая фазу периода  $n$  может быть найдена из условия:

$$\begin{cases} f^{(n)}(x) = x \\ (f^{(n)}(x))' = 1. \end{cases}$$

Для трех-периодичного окна – имеем  $n=3$ . Последующая бифуркация (происходящая внутри окна) соответствует бифуркации удвоения.

На фазовой диаграмме нами была получена область температуры и силы внешнего магнитного поля, при которых  $Q$ -компонентная модель Поттса на решетке Бете и модель Изинга с трехчастичным взаимодействием на решетке Хусими находятся в модулированной фазе периода три. Показано, что структура трех-периодичного окна такова, что при определенных значениях параметров касательная бифуркация (перемежаемость первого рода) имеет место на его обоих краях. Также, имеется режим, при котором окно представлено конечным числом циклических фаз (периода 3, 6, 12 и т.д.). Вместе с тем, возможно существование хаотической фазы, ограниченной в рамках вышеупомянутого окна (Рис. 4). Отметим, что явление перемежаемости может быть также использовано для построения сетей Улама, которые употребляются при исследовании моделей образования мнения (известные как Пэйджранковые модели образования мнения).

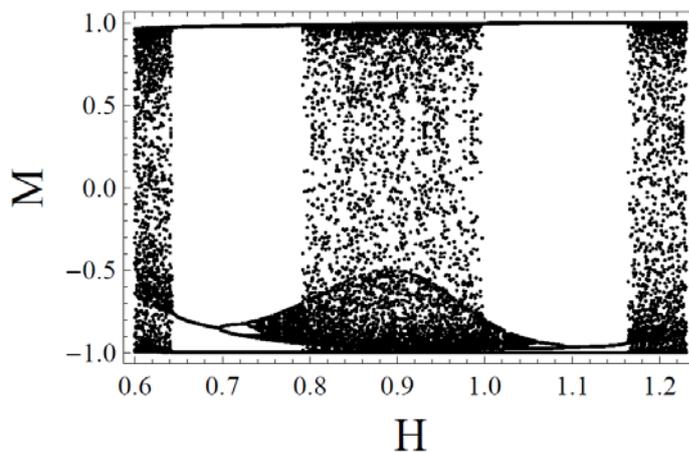


Рис. 4. Намагниченность  $M$  в циклическом окне периода три для модели Изинга с трехчастичным взаимодействием на решетке Хусими при  $J_3=-1, T=0.3$ , в зависимости от магнитного поля  $H$ .

**В третьей главе** обсуждаются некоторые проблемы квантовой информатики в системах взаимодействующих атомов и полей. В частности, рассмотрена модель Дике (МД), описывающая взаимодействие одномодового бозонного поля с ансамблем двухуровневых атомов.

Нас интересует дисперсионный предел [19], т.е., режим, в котором  $|\omega - \omega_0| \gg g\sqrt{\bar{n}+1}$ , где  $\bar{n}$  – среднее число фотонов в резонаторе,  $\omega$  – частота атомного перехода,  $\omega_0$  – частота моды резонатора,  $g$  – сила взаимодействия между атомами и модой резонатора. В данном пределе эффективный Гамильтониан системы может быть представлен в следующем виде (резонаторная мода находится в вакуумном состоянии):

$$H_{\text{eff}} = \lambda \left( \sum_{i=1}^N |1_i\rangle\langle 1_i| + \sum_{i \neq j} S_i^+ S_j^- \right) + \frac{1}{2} \omega \sum_{i=1}^N S_i^z,$$

где  $\lambda = g^2/\delta$  есть эффективная константа взаимодействия,  $\delta = \omega - \omega_0$  – отстройка,  $S_i^+ = |1_i\rangle\langle 0_i|$ ,  $S_i^- = |0_i\rangle\langle 1_i|$ ,  $S_i^z = |1_i\rangle\langle 1_i| - |0_i\rangle\langle 0_i|$  ( $|0_i\rangle$  и  $|1_i\rangle$  – соответственно, основные и возбужденные состояния  $i$ -ого атома),  $a^+$  и  $a$  – операторы рождения и уничтожения моды резонатора.

В этом пределе обмен фотонами между атомной системой и резонатором отсутствует. Разрешенные переходы происходят между состояниями с равными числами возбужденных атомов. Член  $\lambda \sum_{i=1}^N |1_i\rangle\langle 1_i|$  можно интерпретировать как смещение Штарка, индуцированное вакуумом. Эффективное взаимодействие  $\sum_{i \neq j} S_i^+ S_j^-$  между атомами опосредовано модой резонатора. Оно диполь-дипольного характера и может быть также рассмотрено как гейзенберговоe обменное взаимодействие. Отметим, что важным свойством модели является настраиваемость константы связи. Последняя может быть модифицирована, например, изменением отстройки  $\delta$  (в то время как в твердотельных системах константа связи фиксирована). Более того, знак константы связи может быть изменен сменой знака отстройки. В магнитных системах этому соответствует переход из ферромагнитного состояния ( $\lambda < 0$ ) в антиферромагнитное ( $\lambda > 0$ ).

Подчеркнем, что гамильтониан  $H_{\text{eff}}$  также эквивалентен коллективной спиновой модели [20]. Экспериментальная реализация систем этого класса довольно затруднительна, так как она обладает бесконечным (или дальним) порядком взаимодействия. Тем не менее, квантовоэлектродинамический резонатор позволяет коллективное спаривание между атомами и, следовательно, осуществляется бесконечный порядок взаимодействия, ввиду того, что фотоны распределены между всеми атомами.

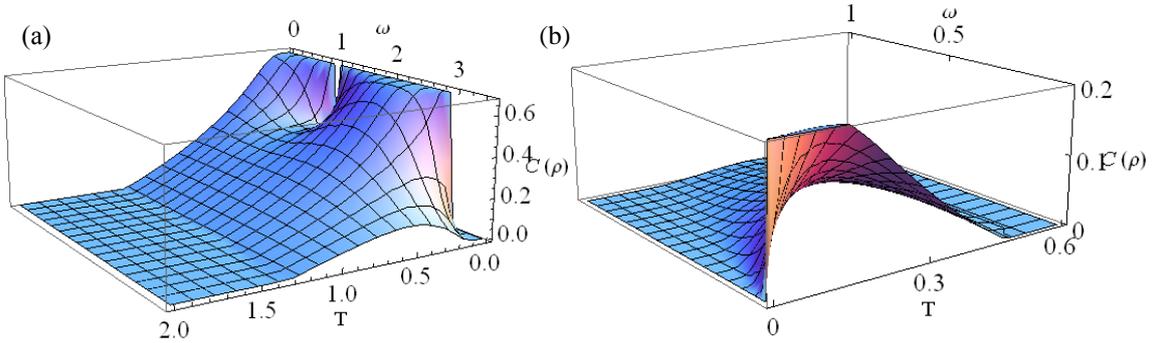


Рис. 5. Зависимость согласованности  $C(\rho)$  от температуры  $T$  (в единицах  $|\lambda|$ ) и частоты атомного перехода  $\omega$  (в единицах  $|\lambda|$ ), для (a)  $\lambda < 0$ ; (b)  $\lambda > 0$ .

Нами исследована структура основного состояния системы трех атомов, взаимодействующих посредством эффективного Гамильтониана  $H_{\text{eff}}$ , и выявлены две качественно различные области в зависимости от знака эффективной константы взаимодействия. Согласованность  $C(\rho)$  использована для количественной оценки запутанности смешанного состояния системы при термодинамическом равновесии. Нами рассмотрена критическая частота атомного перехода  $\omega_c^-$  и критическая температура  $T_c$ , соответствующие исчезновению запутанности. Показано, что в области с отрицательной силой связи  $\lambda$ , свойства запутанности проявлены ярче, т.е., квантовые корреляции присутствуют в системе в более широкой области температур и собственной атомной частоты. Этот режим достигается выбором отрицательной отстройки  $\delta$  (Рис. 5). С другой стороны, смещение Штарка, индуцированное вакуумом, приводит к нефрустрированному основному состоянию при  $\lambda > 0$ , в то время как при  $\lambda < 0$  имеет место переход между состояниями с различным числом возбужденных атомов (в точке  $\omega = \omega_d = -\lambda$ ).

В данной главе также исследована динамика распространения лазерных импульсов в среде, состоящей из  $\Lambda$  атомов, с различными силами осцилляторов смежных переходов. Полученные результаты использованы для анализа эффективности переноса населенностей методом b-STIRAP, т.е., методом стимулированного рамановского адиабатического прохождения, оперирующего на “светлом” состоянии. В сравнении с методом STIRAP, который производится через “темное” состояние, рассмотренный нами процесс позволяет произвести перенос населенностей со сверхсветовой скоростью. Однако, ввиду того, что “светлое” состояние чувствительно к радиационным потерям с возбужденного состояния, для получения высокой эффективности переноса населенностей методом b-STIRAP, необходимо обеспечение большой однофотонной отстройки.

Теоретическое исследование динамики системы произведено посредством решения уравнения Шредингера (описывающего динамику атомной среды) и укороченных уравнений Максвелла (описывающих распространение полей). Численное решение согласованной системы уравнений показало, что определенным подбором сил осцилляторов  $q_p$  и  $q_s$  соответствующих переходов, можно увеличить эффективность переноса населенностей в среде. В частности, было показано, что при соотношении  $q_p/q_s < 1$  перенос населенностей остается эффективным даже при сравнительно больших расстояниях распространения лазерных импульсов.

Комбинируя уравнения Шредингера и Максвелла, было получено уравнение, описывающее динамику угла смещения  $\theta$  и определяющее основные свойства и ограничения, накладываемые на перенос населенностей при распространении импульса в среде. В пределе большой однофотонной отстройки от резонанса полученное уравнение может быть решено методом характеристик:

$$\theta(z, \tau) = \theta_0(\xi),$$

где  $\theta_0(\xi) = \theta_0(z=0, \tau=\xi)$ ,  $z=x/c$ ,  $\tau=t-x/c$  ( $x$  – направление распространения импульса), а  $\xi(z, \tau)$  – неявная функция, определяющая нелинейное распространение импульсов:

$$\int_{-\infty}^{\xi} n_0(\tau') d\tau' = \int_{-\infty}^{\tau} n_0(\tau') d\tau' + \frac{q_p q_s}{Q^2 \theta(z, \tau)} Nz.$$

Здесь,  $Q$  – эффективная сила осциллятора двухфотонного перехода,  $n(\tau)$  – суммарная плотность потока числа фотонов импульсов, а  $N$  – плотность числа атомов. Данное выражение показывает, что при входе в среду (т.е.,  $z=0$ ) имеем  $\xi=\tau$ , в то время как в среде ( $z \neq 0$ ) получаем  $\xi > \tau = t-x/c$ , что указывает на сверхсветовую скорость распространения угла смещения  $\theta(z, \tau)$  в среде. Отметим также, что из последнего уравнения можно получить условие максимальной длины распространения импульсов  $z_{\max}$  (при длинах  $z > z_{\max}$  перенос населенностей невозможен):

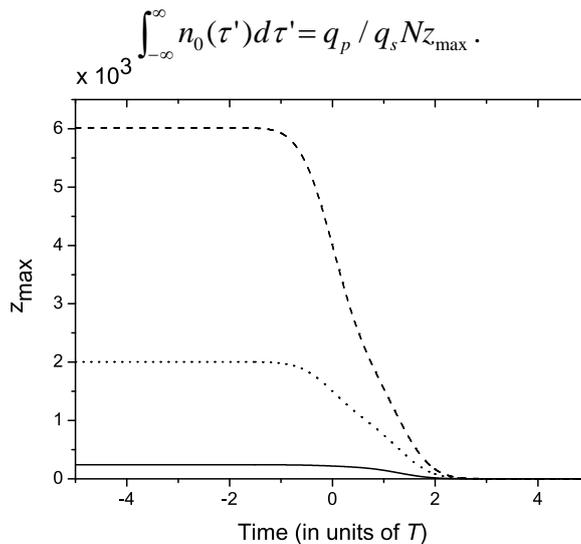


Рис. 6. Максимальная (нормированная) длина распространения  $z_{\max} (\equiv q_s z_{\max} NT)$  для различных значений соотношения  $q = q_p/q_s$ :  $q = 0.5$  (пунктирная линия); 1 (пунктирная линия); 5 (сплошная линия).

**В четвертой главе** рассмотрен компактный протокол дистилляции запутанности состояний непрерывной переменной в реальных квантовых памяти, при наличии диссипаций. Данная задача играет важную роль в развитии квантовых коммуникаций, так как при реализации большинства практических приложений квантовой информатики возникает проблема защиты запутанности от декогеренции, индуцированной неконтролируемым воздействием среды. Важным шагом в развитии теории квантовой дистилляции является изобретение протоколов дистилляции состояний непрерывной переменной [21]. В рассмотренном нами случае, начальным ресурсом запутанности является двухмодовое сжатое состояние:

$$|\psi_{\text{TMSS}}\rangle = \sqrt{1-\lambda^2} \sum_{i=1}^n \lambda^i |i\rangle_A |i\rangle_B.$$

Отличительной чертой рассмотренного протокола является то, что состояние  $|\psi_{\text{TMSS}}\rangle$  распределено между двумя квантовыми памятьми  $A$  и  $B$ . Следовательно,  $n_A$  и  $n_B$  обозначает число фононов (возбуждений) квантовых памяти (в отличие от традиционных методов дистилляции, где  $n_A$  и  $n_B$  соответствуют числу фотонов в отдельных модах рассматриваемого состояния). Такая реализация двухмодового сжатого состояния приводит к экспоненциальному снижению временных и пространственных ресурсов необходимых для экспериментального осуществления схемы, которая, в свою очередь, состоит из двух этапов. В первом производится “дегауссификация” изначального гауссового состояния  $|\psi_{\text{TMSS}}\rangle$  (“соложение” – malting), методом вычитания фононов из квантовых памяти, что может быть достигнуто отправкой слабых импульсов в памяти и регистрацией фотонов на выходе из них (дегауссификация необходима, так как дистилляция гауссовых состояний невозможна [22]). Второй этап, называемый “сминанием” (mashing), соответствует итеративной дистилляции негауссовых состояний, полученных на предыдущем этапе (Рис. 7).

В изначальной работе [14] был рассмотрен случай идеальных квантовых памяти, но, как известно, состояния, помещенные в реальные квантовые памяти, подвержены декогеренции, которая приводит к неминуемому снижению степени запутанности между двумя модами. Следовательно, ключевым вопросом является моделирование данного протокола с учетом реальных потерь и оценка эффективности схемы. Нами была использована модель расщепителя пучка потерь (beam-splitter model for losses) – МРПП, которая применима в Марковском приближении.

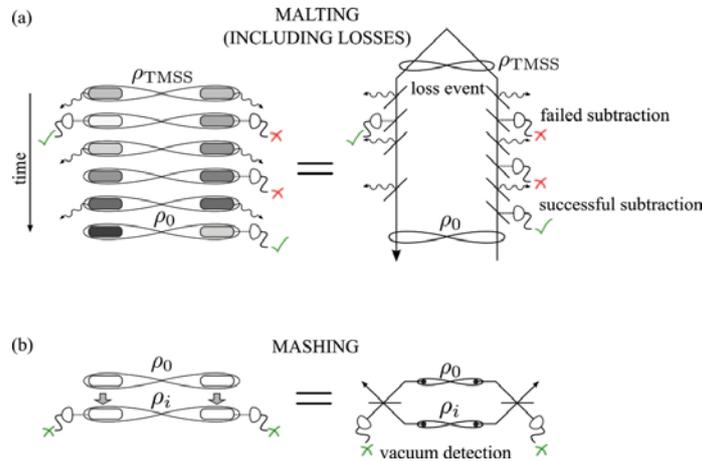


Рис.7. (а) Этап дегауссификации состояния (“соложение”), с учетом потерь. Начальное двухмодовое состояние  $|\psi_{\text{TMSS}}\rangle$  подвергается попытке вычитания фононов (достигаемое отправкой слабых импульсов в памяти и регистрацией фотонов на выходе из них), с промежуточными событиями потерь (моделируемых вышеупомянутой МРПП). Состояние считается готовым, когда фононы были вычтены из обеих квантовых памяти (обоих мод). Слева показана схема с памятьми, справа – оптический аналог. (б) Этап “сминания”. На  $i$ -ой итерации состояние  $\rho_0$  отображается на состояние  $\rho_i$  при регистрации вакуума на прошедшей моде. Процесс эквивалентен оптической схеме, показанной справа.

Были получены аналитические формулы описывающие эволюцию произвольного двухмодового состояния (и двухмодового сжатого состояния в частности) записанного в

квантовых памятьях, и была исследована эффективность протокола дистилляции при наличии эффектов диссипации. Показано, что потери сильно модифицируют свойства протокола: в зависимости от параметров системы, схема может быть не результативной, т.е., не обнаруживающей роста степени запутанности в сравнении с начальным состоянием.

В частности, имея ввиду, что процесс вычитания фононов из квантовых памяти является вероятностным, было рассмотрено критическое число попыток  $m_c$  такого вычитания. Было показано, что условие  $m_c > 1$  (т.е., условие возможности произведения хотя-бы одной попытки вычитания) приводит к дополнительным ограничениям на экспериментальные параметры, такие как, например, сила взаимодействия между импульсом, используемым для вычитания, и квантовой памятью. Также, было показано, что для увеличения  $m_c$  необходимо увеличить вышеупомянутую силу взаимодействия (отметим, что данный параметр является сравнительно легко настраиваемым в экспериментальной установке). Заключение состоит в том, что существующие технологии (квантовые памяти с высоким значением произведения времени и полосы пропускания, высокоэффективные фотодетекторы и т.д.) разрешают реализацию изученного протокола дистилляции запутанности.

В **Заключении** сформулированы основные научные результаты работы:

- Впервые исследованы свойства запутанности некоторых твердотельных материалов (естественного минерала азурита –  $\text{Cu}_3(\text{CO}_3)_2(\text{OH})_2$  и медь содержащих координационных материалов –  $\text{Cu}_9\text{X}_2(\text{сра})_6 \cdot n\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{X}=\text{F}, \text{Cl}, \text{Br}$ ) в рамках модели Изинга-Гейзенберга со спином  $1/2$ . Изучена фазовая структура систем и выявлены режимы с наиболее выраженными свойствами квантовой запутанности. Также показана определенная связь термодинамических (магнитных) и чисто квантовых характеристик (запутанности).
- Рассмотрены термодинамические свойства классических моделей на рекурсивных решетках ( $Q$ -компонентная модель Поттса на решетке Бете и модель Изинга с многочастичным взаимодействием на решетке Хусими). Дано точное решение моделей методом рекуррентных соотношений и изучена фазовая структура данных систем посредством нахождения точек бифуркаций соответствующих отображений. Особое внимание уделено трех-периодичному окну, образуемому в хаотической фазе, посредством касательной бифуркации. Впервые показано, что при определенных значениях параметров (сила магнитного поля, температура), трех-периодичное окно содержит в себе хаотическое поведение (ограниченное в рамках окна).
- Изучены свойства квантовой запутанности трех эффективно взаимодействующих двухуровневых атомов в резонаторе (диполь-дипольное взаимодействие индуцировано модой резонатора). Показана связь данной модели с системами взаимодействующих магнитных спинов и отмечена относительно легкая настраиваемость силы связи между кубитами. Найдены критические температуры и критические значения собственной частоты перехода атомов, соответствующие исчезновению квантовых корреляций в системе. Также выявлены два качественно различных режима модели, в зависимости от знака эффективной силы взаимодействия.
- Представлена динамика распространения двух лазерных импульсов в среде состоящей из  $\Lambda$  атомов, с различными силами осцилляторов смежных переходов. Показано, что соответствующей подборкой соотношения между силами осцилляторов возможно получить наиболее эффективный сверхсветовой перенос населенностей в среде методом  $\nu$ -STIRAP. Также получены некоторые аналитические результаты, позволяющие объяснить главных свойств процесса.
- Исследованы эффекты диссипаций в квантовых памятьях, употребляемых в недавно предложенном протоколе компактной дистилляции запутанности состояний непрерывной переменной. Изучена эффективность данного протокола при наличии потерь и показано,

что последние сильно модифицируют результаты изначальной схемы. Указана возможность реализации данного протокола с помощью существующих технологий. Также получены некоторые дополнительные условия накладываемые на экспериментальные параметры.

### Цитируемая литература

- [1] L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh, and V. Vedral, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 517 (2008).
- [2] P. Kok, W. J. Munro, K. Nemoto, T. C. Ralph, J. P. Dowling, and G. J. Milburn, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 135 (2007).
- [3] R. Ursin, F. Tiefenbacher, T. Schmitt-Manderbach, *et al.*, *Nat. Phys.* **3**, 481 (2007).
- [4] V. Alba, L. Tagliacozzo, P. Calabrese. *Phys. Rev. B* **81**, 060411(R) (2010).
- [5] N. N. Bogoliubov, *J. Phys. (USSR)* **11** (1947).
- [6] V. V. Hovhannisyan and N. S. Ananikian, *Phys. Lett. A* **372**, 3363 (2008).
- [7] J. Gujrati, *J. Chem. Phys.* **98**, 1613 (1993).
- [8] X.-W. Hou and B. Hu, *Phys. Rev. A* **69**, 042110 (2004).
- [9] R. M. Angelo, K. Furuya, M. C. Nemes, and G. Q. Pellegrino, *Phys. Rev. A* **64**, 043801 (2001).
- [10] K. Hepp, E. H. Lieb. *Phys. Rev. A* **8**, 2517 (1973).
- [11] H. Goto, K. Ichimura, *Phys. Rev. A* **74**, 053410 (2006).
- [12] J. Klein, F. Beil, and T. Halfmann, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 113003 (2007).
- [13] C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popescu, and B. Schumacher, *Phys. Rev. A* **53**, 2046 (1996).
- [14] A. Datta, L. Zhang, J. Nunn, N. K. Langford, A. Feito, M. B. Plenio, and I. A. Walmsley, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 060502 (2012).
- [15] H. Kikuchi, Y. Fujii, M. Chiba, S. Mitsudo, T. Idehara, T. Tonegawa, K. Okamoto, T. Sakai, T. Kuwai, and H. Ohta, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 227201 (2005).
- [16] S. Hill and W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 5022 (1997).
- [17] M. Gonzalez, F. Cervantes-Lee, L. W. Haar, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* **233**, 317 (1993).
- [18] P. Manneville, Y. Pomeau, *Phys. Lett. A* **75**, 1 (1979).
- [19] S.-B. Zheng. *Phys. Rev. Lett.* **87**, 230404 (2001).
- [20] S. Morrison, A. S. Parkins. *J. Phys. B* **41**, 195502 (2008).
- [21] J. Eisert, D. E. Browne, S. Scheel, and M. B. Plenio, *Ann. Phys. (NY)* **311**, 431 (2004).
- [22] J. Eisert, S. Scheel, and M. B. Plenio, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 137903(2002).

### Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. L. Chakhmakhchyan, S. Guerin, J. Nunn, A. Datta, "*A Compact Entanglement Distillery Using Realistic Quantum Memories*", *Phys. Rev. A* **88**, 042312 (2013).
2. L. Chakhmakhchyan, D. Shepelyansky, "*Pagerank Model of Opinion Formation on Ulam Networks*", *Phys. Lett. A* **377**, 3119 (2013).
3. L. A. Chakhmakhchyan, "*Entanglement of Effectively Coupled Three Atoms*", *Journal of Contemporary Physics (NAS of Armenia)* **48**, 193 (2013).
4. G. Grigoryan, C. Leroy, L. Chakhmakhchyan, Y. Pashayan-Leroy, S. Guerin, and H. R. Jauslin, "*Stimulated Raman Adiabatic Passage via Bright State in A medium of Unequal Oscillator Strengths*", *Eur. Journ. Phys. D* **66**, 256 (2012).
5. L. Chakhmakhchyan, G. Grigoryan, C. Leroy, Y. Pashayan-Leroy, S. Guerin, and H. R. Jauslin, "*Influence of Unequal Oscillator Strengths on Stimulated Raman Adiabatic Passage via Bright State*", *Int. J. Mod. Phys.: Conf. Series* **15**, 147 (2012).

6. N. S. Ananikyan, L. N. Ananikian, L. A. Chakhmakhchyan and O. Rojas, “*Thermal Entanglement of Spin-1/2 Ising-Heisenberg Model on a Symmetrical Diamond Chain*”, J. Phys. Condens. Matter **24**, 256001 (2012).
7. L. Chakhmakhchyan, N. Ananikian, L. Ananikyan, and C. Burdik, “*Thermal Entanglement of the Spin-1/2 Diamond Chain*”, J. Phys: Conf. Series **343**, 012022 (2012).
8. N. S. Ananikyan, L. N. Ananikian, L. A. Chakhmakhchyan and A. N. Kocharyan, “*Magnetic Properties and Thermal Entanglement on a Triangulated Kagome Lattice*”, J. Phys. A: Math. Theor. **44**, 025001 (2011).
9. N. S. Ananikyan, L. N. Ananikian, L. A. Chakhmakhchyan and A. N. Kocharyan, “*Thermal Entanglement and Critical Behavior of Magnetic Properties on Triangulated Kagome Lattice*”, Acta Polytechnica **51**, 7 (2011).
10. N. S. Ananikian, L. N. Ananikyan, and L. A. Chakhmakhchyan, “*Cyclic Period-3 Window in Antiferromagnetic Potts and Ising Models on Recursive Lattices*”, JETP Lett. **94**, 39 (2011).
11. L. N. Ananikyan, N. S. Ananikian, L. A. Chakhmakhchyan, “*Arnold Tongues and Feigenbaum Exponents of the Rational Mapping for Q-State Potts Model on Recursive Lattice:  $Q < 2$* ”, Fractals **18**, 371 (2010).
12. L. Chakhmakhchyan, A. Datta, G. Grigoryan, J. Nunn, “*A Realistic Quantum Entanglement Distillery*”, Laser Physics 2013, Ashtarak, Armenia, book of abstracts, p.2.
13. L. Chakhmakhchyan, S. Guerin, C. Leroy, “*Solvable Model for Ultrastrong QED Regime*”, IOTA Workshop on Cold Molecular Ions, Arosa, Switzerland 2013, book of abstracts, p. 19.
14. L. Chakhmakhchyan, “*Entanglement Properties of a Spin-1/2 Diamond Chain*”, Control of Quantum Dynamics of Atoms, Molecules and Ensembles by Light Workshop - CAMEL9, Nessebar, Bulgaria 2013, book of abstracts, p. 2.
15. L. Chakhmakhchyan, “*Entanglement Properties of a Spin-1/2 Ising-Heisenberg Diamond Chain*”, Les 14èmes Journées de l'Ecole Doctorale Carnot Pasteur, Dijon, France 2013, book of abstracts, p. 21.
16. L. Chakhmakhchyan, N. Ananikian, S. Guerin, C. Leroy, “*Superstable Cycles of Antiferromagnetic Potts and Ising Models on Recursive Lattices*”, 38th Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics - MECO38, ICTP, Trieste, Italy 2013, book of abstracts, p. 1.
17. L. Chakhmakhchyan, S. Guerin, C. Leroy, N. Ananikian, “*Entanglement and Thermodynamic Properties of Thee Coupled Atoms*”, Laser Physics 2012, Ashtarak, Armenia, book of abstracts, p. 12.
18. L. Chakhmakhchyan, G. Grigoryan, C. Leroy, Y. Pashayan-Leroy, S. Guerin, and H. R. Jauslin, “*Influence of unequal oscillator strengths on stimulated Raman adiabatic passage through bright state*”, Laser Physics 2011, Ashtarak, Armenia, book of abstracts, p. 63.
19. L. Chakhmakhchyan, “*Thermal Entanglement of the Spin-1/2 Diamond Chain*”, The VIIth International Conference Quantum Theory and Symmetries, Prague, Czech Republic 2011, book of abstracts, p. 9.
20. L. A. Chakhmakhchyan, N. S. Ananikian, L. N. Ananikyan and A. N. Kocharyan, “*Common Features of Magnetic Properties and Thermal Entanglement on a Triangulated Kagome Lattice*”, Workshop on Principles and Design of Strongly Correlated Electronic Systems, Miramare-Trieste, Italy 2010, book of abstracts, p. 71.
21. L. N. Ananikyan, N. S. Ananikian, L. A. Chakhmakhchyan, A. N. Kocharian, “*Thermal Entanglement and Critical Behavior of Magnetic Properties on a Triangulated Kagome Lattice*”, The XIXth International Colloquium on Integrable Systems and Quantum symmetries, Prague, Czechia 2010, book of abstracts, p. 3.
22. L. A. Chakhmakhchyan, N. S. Ananikian, L. N. Ananikyan, “*Chaotic Behavior of the Q-state Potts Model on Recursive Lattice:  $Q < 2$* ”, Pseudochaos And Stable-Chaos in Statistical Mechanics and Quantum Physics, Miramare - Trieste, Italy 2009, book of abstracts, p. 29.

Ատենախոսությունը նվիրված է քվանտային ինֆորմատիկայի մի շարք խնդիրների ուսումնասիրությանը փոխազդող ատոմների ու դաշտերի համակարգերում և որոշ պինդ-մարմնային նյութերում, ինչպես նաև վերջիններիս սպինային դինամիկայի հետազոտմանը:

Դիտարկված է Իզինգ-Հայզենբերգի մոդելը՝ բնական միներալ ազուրիտի ( $\text{Cu}_3(\text{CO}_3)_2(\text{OH})_2$ ) և երկչափանի իզոկառուցվածքային կոորդինացիոն միացությունների ( $\text{Cu}_9\text{X}_2(\text{cra})_6 \cdot n\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{X}=\text{F}, \text{Cl}, \text{Br}$  և  $\text{cra}=\text{կարբոքսիլատաթթու}$ ) խճճվածության հատկությունների ուսումնասիրման համար: Առաջին միացության մագնիսական ցանցը սպին-1/2 շեղանկյունաձև շղթան է, մինչդեռ երկրորդինը՝ եռանկյունացված Կազոմեի ցանցը: Չնայած նրան, որ Իզինգ-Հայզենբերգի մոդելը հանդիսանում է քվանտային (հայզենբերգյան) փոխանակային փոխազդեցության մոտարկում, այն տրամադրում է բավարար որակական և որոշ պայմաններում նաև բավարար քանակական ճշգրտությամբ արդյունքներ: Հաշվի առնելով իզինգյան փոխազդեցության դասական բնույթը՝ քվանտային խճճվածությունը (չափված *համաձայնեցվածությամբ՝ concurrence*) հաշվարկվել է տվյալ նյութերի քվանտային կլաստերներից յուրաքանչյուրի համար առանձին-առանձին: Կազոմեի եռանկյունացված ցանցի նկատմամբ կիրառվել է նաև Գիբս-Բոգոլյուբովի անհավասարության վրա հիմնված միջին դաշտի մոտավորությունը, որն անբացահայտ կերպով ներառում է քվանտային տրիմերների միջև առկա (թույլ) փոխազդեցությունը:

Դիտարկվել է հայզենբերգյան փոխազդեցության դասական սահմանը, որը թույլ է տալիս որոշ մոդելների ճշգրիտ լուծումը: Մասնավորապես, ուսումնասիրվել են ռեկուրսիվ ցանցերի վրա *Q*-վիճականի Պոտսի և եռամասնիկային փոխազդեցությամբ Իզինգի մոդելները: Կատարվել է դրանց ճշգրիտ լուծումը՝ ռեկուրենտ առնչությունների մեթոդով, որը բերում է համակարգի թերմոդինամիկական հատկությունների ուսումնասիրումը ռացիոնալ արտապատկերումների հետազոտմանը: Հատուկ ուշադրություն է տրամադրվել մոդելների քառասյին փուլում եռապարբերական պատուհանի առաջացման մեխանիզմին և դրա առանձնահատուկ վարքի ուսումնասիրությանը:

Հետազոտվել են նաև փոխազդող ատոմների և դաշտերի որոշ համակարգեր, որոնք հանդիսանում են քվանտային ինֆորմատիկայի խնդիրների լուծման այլընտրանքային հիմք: Դիտարկվել է դիսպերսիոն սահմանում Դիկեի մոդելը՝ ռեզոնատորում թակարդված և ռեզոնատորային մոդայի միջոցով կապված երեք երկմակարդականի ատոմների խճճվածության հատկությունների ուսումնասիրության համար: Ցույց է տրվել մոդելի և փոխազդող մագնիսական սպինների համակարգի միջև սերտ կապը: Նշենք, որ ուսումնասիրված մոդելի կարևոր հատկությունն է հանդիսանում փոխազդեցության ուժի համեմատաբար հեշտ փոփոխման հնարավորությունը (ինչը բարդեցված է պինդ-մարմնային նյութերում): Հայտնաբերվել է համակարգի երկու խճճվածության որակապես տարբեր հատկություններով ռեժիմ:

Ներկայացվել է b-STIRAP մեթոդով բնակեցվածության փոխադրման մանրամասն ուսումնասիրությունը՝ հարևան անցումների անհավասար օսցիլյատորային ուժերով  $\Lambda$  ատոմներից բաղկացած միջավայրում: Դուրս են բերվել պրոցեսի դինամիկական բնութագրող տարածման հավասարումները և ստացվել են դրանց մոտավոր լուծումները: Ցույց է տրվել, որ բնակեցվածության փոխադրման արդյունավետությունը կախված է վերը նշված օսցիլյատորային ուժերի հարաբերակցությունից:

Հետազոտվել է նաև քվանտային հիշողություններում խճճվածության «թորման» խնդիրը, որը սերտ կապված է քվանտային ինֆորմացիայի մշակման և քվանտային հեռահաղորդակցության իրականացման հետ: Մոդելավորվել են դիսիպացիաները, որոնց

ենթակա է խճճվածության սկզբնական ռեսուրս հանդիսացող երկմոդանի սեղմված վիճակը և ցույց է տրվել, որ կորուստները էապես փոխում են սկզբնական (իդեալական) պրոտոկոլի հատկությունները: Այնուամենայնիվ, ապացուցվել է, որ սխեման իրագործելի է գոյություն ունեցող տեխնոլոգիաների միջոցով:

Թեզի նպատակներն են.

1. Բնական միներալ ազուրիտը ( $\text{Cu}_3(\text{CO}_3)_2(\text{OH})_2$ ) և երկչափանի իզոկառուցվածքային կոորդինացիոն միացությունները ( $\text{Cu}_9\text{X}_2(\text{cpa})_6 \cdot n\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{X}=\text{F}, \text{Cl}, \text{Br}$ ) բնութագրող ցածր չափողականության սպինային մոդելների քվանտային դիմերների և տրիմերների խճճվածության հատկությունների ուսումնասիրումը: Ջերմաստիճանի և արտաքին մագնիսական դաշտի էֆեկտների հետազոտումը և թերմոդինամիկական (մագնիսական) ու խճճվածության հատկությունների համադրումը:
2. Իրական ցանցերի վրա քվանտային մոդելների մոտարկում հանդիսացող ռեկուրսիվ ցանցերի վրա ճշգրիտ լուծվող սպինային մոդելների ուսումնասիրությունը: Փուլային կառուցվածքի հետազոտումը ռեկուրենտ առնչությունների մեթոդով:
3. Քվանտային ինֆորմատիկայի խնդիրների դիտարկումը փոխազդող ատոմների և դաշտերի համակարգերում. ռեզոնատորում թակարդված և էֆեկտիվ փոխազդեցությամբ կապված ատոմների քվանտային խճճվածության ուսումնասիրումը, ինչպես նաև հարևան անցումների անհավասար օսցիլյատորային ուժերով  $\Lambda$  ատոմներից բաղկացած միջավայրում բնակեցվածության փոխադրման մանրամասն հետազոտումը:
4. Անընդհատ փոփոխականի վիճակների խճճվածության թորման պրոտոկոլի ուսումնասիրությունը՝ դիսպայացիաների առկայության պայմաններում:

Պաշտպանության հիմնական դրույթներն են.

1. Իզինգ Հայզենբերգի սպին-1/2 մոդելները, որոնք բնութագրում են ազուրիտը ( $\text{Cu}_3(\text{CO}_3)_2(\text{OH})_2$ ) և երկչափանի իզոկառուցվածքային կոորդինացիոն միացությունները ( $\text{Cu}_9\text{X}_2(\text{cpa})_6 \cdot n\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{X}=\text{F}, \text{Cl}, \text{Br}$ ) ցուցաբերում են հարուստ փուլային և հիմնական վիճակի կառուցվածք՝ որակապես տարբեր քվանտային և թերմոդինամիկական հատկություններով:
2. Բետեի ցանցի վրա  $Q$ -վիճականի Պոտսի և Հուզիմիի ցանցի վրա եռամասնիկային փոխազդեցությամբ Իզինգի մոդելները ցուցաբերում են քառասյին վարք, որը սահմանափակված է եռապարբերական պատուհանի ներսում: Մոդելների փուլային անցման կետերը համընկնում են համապատասխան ռացիոնալ արտապատկերումների բիֆուրկացիոն կետերի հետ:
3. Ռեզոնատորում թակարդված էֆեկտիվ փոխազդեցությամբ կապված երեք ատոմների խճճվածության հատկությունները առավել վառ են արտահայտված ջերմաստիճանի և ատոմների անցման սեփական հաճախականության հատուկ տիրույթում:
4.  $\Lambda$  ատոմներից բաղկացած միջավայրում բնակեցվածության գերլուսային փոխադրման արդյունավետությունը կարելի է բարձրացնել՝ հարևան անցումների օսցիլյատորային ուժերի համապատասխան ընտրությամբ:
5. Քվանտային հիշողություններում անընդհատ փոփոխականի վիճակների խճճվածության թորման պրոտոկոլը իրագործելի է գոյություն ունեցող տեխնոլոգիաների միջոցով՝ չնայած իրական քվանտային հիշողություններում առկա անխուսափելի կորուստներին:

## SUMMARY

The thesis is devoted to the analysis of problems of quantum information theory and their strong relation to frustrated spin systems and propagation of light in media. Our conclusions can be summarized as follows.

We considered the recently proposed Ising-Heisenberg model, for investigating entanglement features of some particular compounds, such as the natural mineral azurite ( $\text{Cu}_3(\text{CO}_3)_2(\text{OH})_2$ ) and a series of two-dimensional isostructural polymeric coordination compounds  $\text{Cu}_9\text{X}_2(\text{cpa})_6 \cdot n\text{H}_2\text{O}$  ( $\text{X}=\text{F}, \text{Cl}, \text{Br}$  and  $\text{cpa}=\text{carboxypentonic acid}$ ). The magnetic lattice of the first material is presented by a spin-1/2 diamond chain, while the second one is described by a triangulated Kagome lattice. Although being an approximation of a pure Heisenberg exchange interaction, the Ising-Heisenberg model provides a satisfactory insight into the main features of these materials. Owing to the separable character of Ising-type interaction, we calculated entanglement (quantified by concurrence) for each of quantum clusters of the materials. The mean-field-like treatment based on the Gibbs-Bogoliubov inequality, which implicitly takes into account the interaction between quantum triangular clusters, was additionally applied to the triangulated Kagome lattice. Here we revealed a strong relation between the thermodynamic and entanglement properties of the model. Particularly, we pointed out that the peaks of the magnetic susceptibility correspond to the values of parameters at which entanglement vanishes. Additionally the entanglement sudden-death temperature coincides with the second order phase transition point of the system. We studied the ground-state structure of the systems in a wide range of interaction strengths, revealing distinct regimes with qualitatively different quantum features.

We have also considered another, classical limit of the Heisenberg-type interaction, which results in classical spin models. The main motivation of exploring these models is their exact solvability in some particular cases. This leads to a possibility of deriving analytical expressions for thermodynamic quantities of interest. In particular, we looked into the phase structure of the  $Q$ -state Potts and the three-site interaction Ising models on recursive lattices, which are efficient in analysis of a number of magnetic systems. Note that the Bethe-Peierls approach, which approximates real lattices with hierarchical (recursive) ones, is more reliable in some cases than the above discussed mean-field treatment. The models were solved exactly by means of the recursion relation technique, reducing the thermodynamic properties of a model to the features of rational mappings. The phase structure of the above models was investigated by detecting bifurcation points of corresponding mappings. A particular attention was devoted to the appearance of three-periodic window in chaotic region of both Potts and Ising models (with antiferromagnetic coupling between lattice nodes). We pointed out some intrinsic properties here, such as intermittency, occurring at both edges of the window and a finite number of periodic cycles (modulated phases), as well as chaos, confined inside the window.

Finally, we addressed to systems of interacting atoms and fields, which are also at the heart of quantum information processing. Particularly, we considered the Dicke model, for modeling the interaction of three trapped atoms in a cavity, interacting by means of effective coupling, mediated by the radiation field (the dispersive limit). We pointed out the strong relation of the model to the problems of frustrated magnetism, and applied similar tools for investigation of entanglement and thermodynamic properties of the system. Meanwhile, a crucial difference of the present system is the tunability of the coupling strength, which is rather complicated in the case of solids. Another important remark here concerns the effect of the vacuum induced Stark shift, which naturally arises in the problem: it turns out that this term changes the physical picture drastically.

We also presented a detailed study of population transfer process via b-STIRAP in a medium of three-level  $\Lambda$ -atoms with unequal oscillator strengths of corresponding atomic transitions. The propagation equations describing the dynamics of the process were derived and approximate analytical solutions were obtained. We showed that the population transfer efficiency is sensitive to the ratio of the oscillator strengths,  $q=q_p/q_s$ , and can be increased by a proper choice of this parameter. In particular, we find that the transfer efficiency is severely affected in case of  $q>1$  and rapidly decreases with propagation length, while in case of  $q\leq 1$  propagating pulses maintain their capacity to produce a complete population transfer over larger propagation lengths. Additionally, we pointed out that the

transfer can occur superluminally. The conditions restricting the propagation length at which a complete population transfer via b-STIRAP in a medium occurs were also derived.

In addition, we considered another problem, closely related to the issues of quantum information processing and communication: the problem of entanglement distillation in quantum memories. We modeled the dissipations that a two-mode squeezed state (the initial entanglement resource) undergoes while stored in a memory, and showed that losses affect much the original protocol. Particularly, the preparatory step, aimed towards the de-Gaussification of the initial two-mode squeezed state, may not result in entanglement increase, although being a well-known method for locally increasing entanglement in a perfect memory. Thus we analyzed the constraints on the parameters of the protocol, within which one still gets an entanglement gain, and showed that the additional restrictions still allow experimental realization of the discussed scheme.

Objectives of the thesis:

1. The investigation of entanglement properties of quantum dimeric and trimeric units in low dimensional spin models, describing real existing materials, such as the natural mineral azurite ( $\text{Cu}_3(\text{CO}_3)_2(\text{OH})_2$ ) and copper based coordination compounds ( $\text{Cu}_9\text{X}_2(\text{cpa})_6 \cdot n\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{X}=\text{F}, \text{Cl}, \text{Br}$ ). Studies of the effects of the temperature and the external magnetic field and comparison of thermodynamic and entanglement features.
2. The analysis of exactly solvable classical spin models on hierarchical lattices, which are considered as approximations for quantum models on real lattices. The investigation of the phase structure of the systems within the dynamical system approach.
3. The study of quantum information issues in systems of interacting atoms and fields: quantifying entanglement between effectively coupled atoms in a cavity and the detailed analysis of population transfer in media of unequal oscillator strengths.
4. The investigation of compact continuous-variable entanglement distillation protocol in realistic quantum memories in presence of dissipation effects.

The statements of the thesis:

1. The spin-1/2 Ising-Heisenberg models, describing the natural mineral azurite ( $\text{Cu}_3(\text{CO}_3)_2(\text{OH})_2$ ) and copper based coordination compounds  $\text{Cu}_9\text{X}_2(\text{cpa})_6 \cdot n\text{H}_2\text{O}$  ( $\text{X}=\text{F}, \text{Cl}, \text{Br}$ ) possess a rich phase and ground state structures with qualitatively different thermodynamic and entanglement features. Entanglement and magnetic properties of the above models share strong common behavior.
2. The three-site interaction Ising and the  $Q$ -state Potts models on the Bethe and Husimi (recursive) lattices exhibit chaos, which is confined inside a three-periodic window. Phase transition points of the models coincide with bifurcation points of corresponding one-dimensional rational mappings.
3. The entanglement properties of three atoms trapped in a cavity and effectively coupled by means of a radiation mode are highly pronounced in a specific range of the temperature, atomic transition eigenfrequency and the effective coupling strength.
4. The efficiency of a superluminal population transfer in a medium of  $\Lambda$ -type atoms can be increased by an appropriate choice of the oscillator strengths of adjacent transitions.
5. The experimental realization of an effective compact continuous-variable entanglement distillation protocol is possible within existing technologies, notwithstanding the inevitable dissipation effects, present in a realistic quantum memory.

