ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ ՀԱՅԿԱՆՈՒՇ ՍԱՄՎԵԼԻ

ՀԱՄԵՐՇՏԵՅՆԻ ՏԻՊԻ ՈՉ ԿՈՄՊԱԿՏ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐՈՎ ՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ԵՎ ԻՆՏԵԳՐԱ-ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ ԿԻՍԱԱՌԱՆՑՔԻ ՎՐԱ

Ա.01.02 - «Դիֆերենցիալ հավասարումներ, Մաթեմատիկական ֆիզիկա» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

Ս Ե Ղ Մ Ա Գ Ի Ր

ԵՐԵՎԱՆ 2015

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПЕТРОСЯН АЙКАНУШ САМВЕЛОВНА

НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА ПОЛУОСИ С НЕКОМПАКТНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - "Дифференциальные уравнения и Математическая физика"

Ереван 2015

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Ե Պ Հ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի գիտական խորհրդի հ.20 նիստում (01.07.2014թ):

Գիտական ղեկավար՝ - ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր
Խ. Ա. Խաչատրյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ - ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր
Ա. Գ. Սերգեև

- ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր
Մ. Հ. Մուրադյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ - Հայ-Ռուսական (Սլավոնական) Համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2015թ. մայիսի 19-ին ժամը 15:00-ին, Երևանի Պետական Համալսարանի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում:
Հասցե՝ ք.Երևան, 3750025, փ. Ալեք Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ Ե Պ Հ գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2015թ. ապրիլի -ին:

050 մասնագիտական խորհրդի

գիտական քարտուղար,

ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր՝ Տ. Ն. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена на заседании ученого совета факультета математики и механики ЕрГУ (№ 20, 01.07.2014г).

Научный руководитель - доктор физ.-мат. наук
Х.А. Хачатрян

Официальные оппоненты - доктор физ.-мат. наук, профессор
А. Г. Сергеев

- доктор физ.-мат. наук, профессор
М. Г. Мурадян

Ведущая организация -Российско-Армянский (Славянский) Университет

Защита диссертации состоится 19-го мая 2015г. в 15:00 часов на заседании специализированного совета 050 при Ереванском государственном университете.

Адрес: г. Ереван, 3750025, ул. Алек Манкуяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕрГУ.

Автореферат разослан -го апреля 2015г.

Ученый секретарь

специализированного совета,

доктор физ.-мат. наук, профессор Т. Н. Арутюнян

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Как известно, теория нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений является одной из наиболее активно разрабатываемых областей теории дифференциальных уравнений.

К этой области относятся и нелинейные интегральные и интегро-дифференциальные уравнения с операторами Гаммерштейна. Ряд задач современного естествознания описываются нелинейными уравнениями с операторами Гаммерштейна. Необходимость исследования подобных уравнений особенно важна при изучении физических процессов, происходящих в активных средах.

Первые результаты касающейся вопросов разрешимости и изучения соответствующих свойств решений нелинейных интегральных уравнений получены в 20-ых годах прошлого столетия в пионерских работах П.С. Урысона и А. Гаммерштейна. В 1923 году, в работе Урысона упоминалась более ранняя работа Пикара, в которой исследована следующая граничная задача для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y), \\ y(a) = 0,\ y(b) = B \end{cases}$$

(в случае когда $f(x,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ и $\frac{\partial f}{\partial y} \downarrow$ по y), легко сводящаяся к специальному интегральному уравнению Гаммерштейна с ядром Бурхардта.

В дальнейшем, а точнее в 50-70-ых годах 20-ого века сотрудники научной школы М.А. Красносельского начали систематические исследования интегральных операторов Гаммерштейна и Урысона. В частности, в работах М.А. Красносельского, П.П. Забрейко, Л.А. Ладыженского, В.Я. Стеценко, Е.И. Пустыльника и Я.Б. Рутицкого получены различные необходимые и достаточные условия, обеспечивающие компактность (или полную непрерывность) операторов Гаммерштейна вида:

$$(\mathcal{K}f)(x) = \int_a^b K(x,t)H(t, f(t))dt,\ x \in (a,b),\ -\infty < a < b < +\infty.$$

С использованием условий полной непрерывности, при различных ограничениях на нелинейность, в указанных работах доказаны довольно "тонкие" теоремы существования и единственности решений уравнения Гаммерштейна: $f = g + \mathcal{K}f$. Аналогичные вопросы обсуждались на западе научной школой Феликса Браудера. Однако во всех этих работах существенную роль играла компактность соответствующих нелинейных отображений (в конкретных банаховых пространствах), а в некоторых случаях - также ограниченность области интегрирования.

В последнее время, в связи с развитием таких областей естествознания как теория переноса излучения, кинетическая теория газов, p-адическая математическая физика, эконометрика, возрос интерес к исследованию нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, в которых соответствующий оператор Гаммерштейна не обладает свойством полной непрерывности, удовлетворяет условию критичности, а интегрирование в соответствующих уравнениях совершается в неограниченных областях.

Впервые в работах Л.Г. Арабаджяна исследованы вопросы разрешимости и построения однопараметрического семейства положительных решений для одного класса нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна с некомпактным оператором на полуоси и с четным консервативным ядром $K(x,t) = K(x-t)$ и нелинейностью вида $H(t,u) \equiv u-\omega(u)$, где $\omega \in L_1(\mathbb{R}^+)\cap C_0(\mathbb{R}^+),\ \omega \downarrow$ на некотором полубесконечном интервале $[\delta,+\infty)$, $\delta > 0$.

В 2006г. Н.Б. Енгибаряном исследован специальный класс нелинейных интегральных уравнений Урысона с некомпактным оператором, где впервые был применен метод диссипативного функционала, введенный им.

В случае, когда

$$K(x,t) \equiv K_0(x-t),\ K_0(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\tau^2},\ a = -\infty,\ b = +\infty,$$

а $H(t,u) = u^q$, $q \in (0,1)$ уравнение $f = \mathcal{K}f$, в связи с его важностью в p-адической теории открытой струны для скалярного поля тахионов, исследовалось в работах академика В.С. Владимирова и его научной школы .

В работах Х.А. Хачатряна исследованы достаточно широкие классы нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с некомпактными операторами как на полуоси так и на всей оси, в которых получены принципиально новые теоремы существования однопараметрических семейств положительных решений, исследованы асимптотические свойства построенных решений. В этих работах также получены различные достаточные условия разрешимости для некоторых классов нелинейных интегральных уравнений Урысона и Гаммерштейна "с сильной нелинейностью". Х.А. Хачатряном систематически исследованы и нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с некомпактными операторами Гаммерштейна и Урысона, при этом для некоторых классов уравнений со степенной нелинейностью им получены теоремы единственности решений в определенных функциональных пространствах.

Настоящая диссертация посвящена исследованию вопросов построения положительных неподвижных точек для нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных операторов типа Гаммерштейна и их дискретных аналогов при весьма иных ограничениях на ядро K и на нелинейность H.

В диссертационной работе, с использованием специальных итерационных методов, некоторых априорных оценок, известных свойств операции свертки, классических методов теории интегральных уравнений Винера-Хопфа, а также методов теории построения инвариантных конусных отрезков для соответствующих нелинейных операторов, получены новые теоремы существования положительных решений в соответствующих функциональных пространствах.

Цель работы. Основной целью настоящей диссертации является

- Изучение вопросов разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений на полуоси с некомпактными операторами типа Гаммерштейна,

- Иследование асимптотических свойств решений нелинейных уравнений с операторами Гаммерштейна-Немыцкого,

- Построение однопараметрических семейств положительных решений для указанных классов уравнений.

Методы исследования. В работе использовались методы теории интегральных уравнений типа свертки, специальные итерационные методы, методы построения инвариантных конусных отрезков для соответствующих нелинейных операторов, методы теории функции вещественной переменой, методы нелинейного анализа.

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми, обоснованны строгими математическими доказательствами.

Практическая значимость. Результаты, полученные в диссертационной работе, имеют теоретический и практический интерес. Они могут быть использованы при изучении ряда задач кинетической теории газов, теории переноса излучения в спектральных линиях, в эконометрике, в p-адической математической физике.

Основные положения, выносимые на защиту. На основе проведенных исследований автором выносятся на защиту следующие положения:

- Для одного класса нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна-Немыцкого доказано существование положительных решений и исследовано асимптотическое поведение полученных решений в зависимости от значения соответствующего параметра, входящего в ядро уравнения.

- Получены достаточные условия положительной разрешимости в пространстве суммируемых решений для некоторых классов нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна-Стильтеса на полуоси.

- Построено однопараметрическое семейство положительных и существенно ограниченных решений для интегральных уравнений Гаммерштейна-Стильтеса. С помощью этого результата доказано существование положительных суммируемых и существенно ограниченных решений для интегральных уравнений Гаммерштейна "с сильной нелинейностью".

- Рассмотрена задача о стационарном распределении электронов в полубесконечной плазме, которая описывается нелинейным интегро-дифференциальным уравнением первого порядка с суммарно-разностным ядром, где роль искомой функции играет напряженность электрического поля. Для этого уравнения доказано существование однопараметрического семейства положительных решений в пространстве Соболева $W_1^1(\mathbb{R}^+)$.

- Для одного класса дискретных нелинейных уравнений Гаммерштейна получены достаточные условия разрешимости в определенном весовом пространстве.

Апробация полученных результатов. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах отдела методов математической физики Института Математики НАН Армении, на семинаре кафедры дифференциальных уравнений Ереванского Государственного Университета, на семинарах кафедры Высшей математики и теоретической механики Армянского Национального Аграрного Университета, на международной конференции "V российско-армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам, г. Ереван, 2014г. " .

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 5 печатных работах в рецензируемых журналах, входящих в перечень ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, содержащих 14 параграфов, заключения и списка цитированной литературы, включающего 115 наименований. Общий объем диссертации составляет 110 страниц.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов и изложено краткое содержание диссертации.

Первая глава диссертации посвящена вопросам построения положительных решений и исследованию их асимптотического поведения для следующего класса нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна-Немыцкого:

$$f(x) = \int_0^\infty K(x,t)\mu_1(t, f(t))dt + \mu_2(x, f(x)), \quad x \geq 0 \tag{1}$$

относительно искомой вещественной и измеримой функции $f(x)$. Здесь $\{\mu_j(x,u)\}_{j=1;2}-$ определенные на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ вещественнозначные функции, удовлетворяющие следующему условию:

$$\mu_j(x, 0) \equiv 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \ j = 1; 2. \tag{2}$$

Это условие обусловлено тем, чтобы тождественно нулевая функция являлась решением уравнения (1).

Уравнение (1), помимо чисто теоретического интереса, имеет применение в кинетической теории газов (в нелинейной задаче температурного скачка), в теории переноса излучения в ядерных реакторах (в случае, когда $\mu_2(x,u) \equiv 0$, $K(x,t) \equiv K_0(x-t)$, а K_0–вполне монотонная функция). В случае, когда

$$K(x,t) \equiv K_0(x-t), \ K_0(\tau) \geq 0, \ \tau \in \mathbb{R}, \ K_0 \in L_1(-\infty, +\infty), \ \mu_1(t,u) \equiv u,$$

а функция $\mu_2(x,u)$ зависит только от переменной x, уравнение (1) преобразуется в известное в литературе уравнение Винера-Хопфа, изучению которого посвящены многочисленные работы местных и зарубежных математиков.

В случае, когда $\mu_2(x,u) \equiv 0$ в зависимости от свойств функции $\mu_1(t,u)$ в работах А.Х. Хачатряна и Х.А. Хачатряна (см. [1]-[3]) исследованы вопросы разрешимости уравнения (1) в пространстве существенно ограниченных функций на $\mathbb{R}^+$ или в пространстве измеримых функций, имеющих линейных рост в бесконечности.

В первой главе диссертации, при иных ограничениях на функции K, μ_1 и μ_2, доказано существование положительных решений уравнения (1) в определенных функциональных пространствах.

§1.1 посвящен изучению уравнения (1) в случае, когда ядро $K(x,t)$ измеримая функция, определенная на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, удовлетворяющая следующему условию: существуют вещественная и измеримая функция $K_0 \in L_1(\mathbb{R})$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_0(\tau)d\tau = 1,\ K_0(-x) = K_0(x) \geq 0,\ x \geq 0, \tag{3}$$

$$\int_0^{\infty} x^j K_0(x)dx < +\infty, \quad j = 1, 2, 3 \tag{4}$$

и неотрицательные числа $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, r, \alpha_2 \geq \alpha_1, \beta_2 \geq \beta_1 > 0$, такие что

$$0 \leq K(x,t) \leq K_0(x-t)\left(\frac{\alpha_1 t + \beta_1}{\alpha_2 x + \beta_2}\right)^r,\ (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \tag{5}$$

В §1.1 при некоторых условиях на функции μ_1 и μ_2 доказана разрешимость уравнения (1) при всех возможных значениях $r \in [0, +\infty)$.

Прежде чем сформулируем основной результат §1.1 введем некоторые обозначения и приведем вспомогательные факты из теории консервативных интегральных уравнений Винера-Хопфа.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим консервативное однородное уравнение Винера-Хопфа:

$$S(x) = \int_0^{\infty} K_0(x-t)S(t)dt,\ x \geq 0 \tag{6}$$

с начальным условием

$$S(0) = 1 \tag{7}$$

и с ядром K_0, удовлетворяющим условиям (3), (4).

Как известно (см. [4]), при условиях (3), (4) задача (6)-(7) имеет положительное, монотонно неубывающее неограниченное решение следующей структуры:

$$S(x) = \frac{1}{m_1}x + q(x), \quad x \geq 0, \tag{8}$$

где

$$m_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\nu_2}, \quad \nu_2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 K_0(x)dx, \tag{9}$$

а $q(x)$ - определенная на $\mathbb{R}^+$ неотрицательная и существенно ограниченная функция. В литературе $q(x)$ - хорошо известна под названием функции Хопфа. Обозначим через λ супремум функции $q(x)$:

$$\lambda \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^+} q(x). \tag{10}$$

В §1.1 с использованием вышеприведенных фактов и обозначений доказана следующая

Теорема 1.1. *Пусть существуют числа $\eta > 0$ и $\eta_0 \in (0,\eta)$, такие что выполняются следующие неравенства*

1. $0 \le \mu_1(t,u) \le u,\ t\in\mathbb{R}^+,\ 0\le u\le \dfrac{\eta}{(\alpha_1 t+\beta_1)^r},$
2. $\mu_2\left(t, \dfrac{\eta_0 q_0(t)}{\lambda(\alpha_1 t+\beta_1)^r}\right) \ge \dfrac{\eta_0 q_0(t)}{\lambda(\alpha_1 t+\beta_1)^r},$

   $\mu_2\left(t, \dfrac{\eta}{(\alpha_1 t+\beta_1)^r}\right) \le \dfrac{\eta q_0(t)}{\lambda(\alpha_1 t+\beta_1)^r},\ t\in\mathbb{R}^+,$

   где
   $$q_0(x) \equiv \frac{1}{m_1}\left(\int_x^\infty yK_0(y)dy - x\int_x^\infty K_0(y)dy\right), \quad x\in\mathbb{R}^+,$$
3. *при любом фиксированном $t\in\mathbb{R}^+$ функции $\mu_j(t,u)$ $(j=1;2)$ монотонно возрастают по u на отрезке* $\left[0, \dfrac{\eta}{(\alpha_1 t+\beta_1)^r}\right]$,
4. *функции $\{\mu_j(t,u)\}_{j=1;2}$ удовлетворяют условию Каратеодори по аргументу u на множестве $\mathbb{R}^+\times\left[0,\dfrac{\eta}{\beta_1^r}\right]$, т.е при каждом фиксированном $u \in \left[0,\dfrac{\eta}{\beta_1^r}\right]$, μ_1 и μ_2 измеримы по t и почти при всех $t\in\mathbb{R}^+$ эти функции непрерывны по u на отрезке* $\left[0,\dfrac{\eta}{\beta_1^r}\right]$.

Тогда при условии (5) уравнение (1) имеет положительное решение $f(x)$, причем

a) *если $r=0$, то f является существенно ограниченной функцией на $\mathbb{R}^+$,*

b) *если $r\in(0,1]$, то $f\in L_\infty^\circ(\mathbb{R}^+)$, где $L_\infty^\circ(\mathbb{R}^+)$–пространство существенно ограниченных функций с нулевым пределом на бесконечности,*

c) *если $r\in(1,+\infty)$,* то $f\in L_1(\mathbb{R}^+)\cap L_\infty^\circ(\mathbb{R}^+)$.

В качестве примеров $\mu_1(t,u)$ и $\mu_2(t,u)$ могут служить следующие функции:

$$\mu_1(t,u) = \frac{2\eta}{\pi(\alpha_1 t+\beta_1)^r}\sin\frac{\pi u(\alpha_1 t+\beta_1)^r}{2\eta}, \quad t\in\mathbb{R}^+, \quad 0\le u\le \frac{\eta}{(\alpha_1 t+\beta_1)^r},$$

$$\mu_2(t,u) = \rho_{\eta_0+\eta_1}(t)\frac{u}{u+\rho_{\eta_1}(t)}, \quad \eta_0,\eta_1>0,\, \eta\ge\eta_0+\eta_1,$$

где

$$\rho_\delta(t) = \frac{\delta q_0(t)}{\lambda(\alpha_1 t+\beta_1)^r},\, \delta>0, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+.$$

§1.2 и 1.3 посвящены построению неотрицательного нетривиального решения уравнения (1) в определенном весовом пространстве, в случае когда

$$K(x,t)\equiv K^*(x-t), \quad (x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+,$$

где K^* четная, неотрицательная измеримая функция, удовлетворяющая условию консервативности или суперкритичности:

$$K^*(\tau)\ge 0,\ \tau\in\mathbb{R},\ \alpha\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}K^*(\tau)d\tau\ge 1,\ \alpha<+\infty. \tag{11}$$

(случай $\alpha = 1$ соответствует условию консервативности, а случай $\alpha > 1$– условию суперкритичности).

В §1.2 доказан следующий результат:

Теорема 1.2. *Пусть существует суммируемая на $\mathbb{R}^+$ функция $\lambda(x)$:*

$$0\le\lambda(x)\le 1, \quad x\in\mathbb{R}^+, \quad \lambda(x)\not\equiv 0, \tag{12}$$

такая что

$i_1)$ $0\le\mu_1(x,u)\le u,\ \mu_2(x,\lambda(x))\ge\lambda(x),$ *при* $x\in\mathbb{R}^+$, $u\ge\lambda(x)$,

$i_2)$ *при каждом фиксированном* $x\in\mathbb{R}^+$ *функции* $\{\mu_j(x,u)\}_{j=1;2}$ *монотонно возрастают по* u *на* $[\lambda(x),+\infty)$,

$i_3)$ *функции* $\{\mu_j(x,u)\}_{j=1;2}$ *удовлетворяют условию Каратеодори по аргументу* u *на множестве* $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$,

$i_4)$ *выполняется следующее условие:*

$$c\equiv\int_0^\infty \operatorname*{esssup}_{u\ge 0}\mu_2(x,u)dx<+\infty.$$

Тогда, если $\alpha = 1$, *то уравнение* (1) *с ядром* $K(x,t) \equiv K^*(x-t)$, *имеет неотрицательное нетривиальное решение* $f(x)$ *в следующем весовом пространстве:*

$$\mathfrak{M}_\gamma \equiv \{\varphi(x),\, x \in \mathbb{R}^+ : \varphi(x) - \text{измерима на } \mathbb{R}^+ \text{ и } \int\limits_0^\infty \gamma(x)|\varphi(x)|dx < +\infty\},$$

где

$$\gamma(x) \equiv \int\limits_x^\infty K^*(u)du, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{13}$$

Приведем примеры функций $\{\mu_j(x,u)\}_{j=1;2}$, для которых выполнимы условия $i_1) - i_4)$ теоремы 1.2:

I) $\mu_1(t,u) = (\lambda(t))^p u^{1-p}$, $p \in (0,1)$, $u \geq \lambda(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$,

II) $\mu_2(t,u) = \dfrac{\delta\lambda(t)u}{u+\lambda(t)}$, $\quad \delta \geq 2$, $0 \leq \lambda(t) \leq 1$, $\lambda \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $u \geq \lambda(t)$ и $t \in \mathbb{R}^+$.

В §1.3 рассмотрен вопрос построения положительного решения уравнения (1) в случае, когда ядро $K^*(x)$ является вполне монотонной функцией и допускает следующее представление:

$$K^*(x) = \int\limits_a^b e^{-|x|s} d\sigma(s), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{14}$$

при этом

$$\alpha = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K^*(\tau)d\tau = 2\int\limits_a^b \frac{1}{s} d\sigma(s) > 1,\ \alpha < +\infty, \tag{15}$$

где $\sigma(s)$ - монотонно неубывающая и непрерывная функция на $[a,b)$, причем $0 < a < b \leq +\infty$.

Уравнение (1), при $\mu_2(t,u) \equiv 0$, а $K(x,t) = K^*(x-t)$, где K^* допускает представление (14), возникает в нелинейной теории переноса ядерных реакторов .

Введем функцию:

$$K_\varepsilon^*(x) = K^*(x)e^{\varepsilon x}, \quad \varepsilon \in [0,a), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Из представления (14) ядра K^* сразу следует, что

$$K_\varepsilon^*(x) = \begin{cases} \int\limits_a^b e^{-x(s-\varepsilon)} d\sigma(s), & \text{если } x \geq 0 \\ \int\limits_a^b e^{x(s+\varepsilon)} d\sigma(s), & \text{если } x < 0 \end{cases} \in L_1(-\infty, +\infty)$$

так как $\varepsilon \in [0, a)$, а $s \geq a$.

Рассмотрим функцию

$$\rho(\varepsilon) = \int\limits_{-\infty}^{0} K_\varepsilon^*(x)dx = \int\limits_{a}^{b} \frac{1}{s+\varepsilon} d\sigma(s), \quad \varepsilon \in [0, a).$$

Так как

- $\rho \in C[0, a), \quad \rho(0) = \dfrac{\alpha}{2} > \dfrac{1}{2}$
- $\rho \downarrow$ по ε на $[0, a)$,

то очевидно существует число $\varepsilon_0 \in (0, a)$, для которого

$$\rho(\varepsilon_0) \geq \frac{1}{2}.$$

Зафиксируем число ε_0.

Основным результатом §1.3 является следующая

Теорема 1.3. *Пусть функции $\{\mu_j(x, u)\}_{j=1;2}$ удовлетворяют следующим условиям:*

$j_1)$ *при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$ функции $\{\mu_j(t, u)\}_{j=1;2}$ монотонно неубывают по u на $[e^{-\varepsilon_0 t}, +\infty)$,*

$j_2)$ *выполняются следующие неравенства:*

$$\mu_1(t, e^{-\varepsilon_0 t}) \geq 2e^{-\varepsilon_0 t},\ \mu_1(t, u) \leq \frac{u}{\alpha} + \beta_{\varepsilon_0}(t),\ t \in \mathbb{R}^+,\ u \geq e^{-\varepsilon_0 t},$$

$$\mu_2(t, u) \geq 0,\ t \in \mathbb{R}^+,\ u \geq e^{-\varepsilon_0 t},\ c \equiv \int\limits_0^\infty \underset{u \geq 0}{esssup}\, \mu_2(t, u)dt < +\infty$$

для некоторой суммируемой на $\mathbb{R}^+$ функции $\beta_{\varepsilon_0}(t)$:

$$\beta_{\varepsilon_0}(t) \geq 2e^{-\varepsilon_0 t},\ t \in \mathbb{R}^+,$$

$j_3)$ *функции $\{\mu_j(t, u)\}_{j=1;2}$ удовлетворяют условию Каратеодори по аргументу u на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.*

Тогда, если $\alpha > 1$, то уравнение (1)*, с ядром $K(x, t) \equiv K^*(x-t)$ (K^* допускает представление* (14)*), имеет положительное решение в пространстве $\mathfrak{M}_\gamma$.*

Приведены также примеры $\{\mu_j(t, u)\}_{j=1;2}$ для теоремы 1.3.

$A)$ $\mu_1(t,u)=\xi\sqrt{e^{-\varepsilon_0 t}u},\ u\geq e^{-\varepsilon_0 t},$

где $\xi \geq \max\{2,\sqrt{\frac{8}{\alpha}}\}$–некоторое число, а $\beta_{\varepsilon_0}(t) \geq \dfrac{\xi^2\alpha}{4}e^{-\varepsilon_0 t}$, $t\in\mathbb{R}^+$ и $\beta_{\varepsilon_0}\in L_1(\mathbb{R}^+)$,

$B)$ $\mu_2(t,u)=(1-e^{-u})e^{-t^2}$, $u\geq 0,\ t\in\mathbb{R}^+$.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию следующего класса нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна-Стильтеса:

$$\varphi(x)=-\int\limits_0^\infty \mathcal{F}_0(t,\varphi(t))d_tF(x-t)+\mathcal{F}_1(x,\varphi(x)),\quad x\geq 0 \tag{17}$$

относительно искомой измеримой и вещественной функции $\varphi(x)$. Нелинейными уравнениями вида (17) описываются ряд задач современного естествознания. В частности, такие уравнения встречаются в теории марковских процессов, в эконометрике, в финансовой математике и т.д. Существенной особенностью таких уравнений является некомпактность соответствующего нелинейного оператора Гаммерштейна-Стильтеса в естественных банаховых пространствах, и следовательно классические методы нелинейного анализа о нахождении неподвижных точек для операторов либо непригодны, либо их можно применить при весьма жестких условиях на функции $\mathcal{F}_0,\mathcal{F}_1$ и F. Другим немаловажным затруднением исследования вышеуказанных уравнений является тот факт, что искомое решение $\varphi(x)$ определено на неограниченном множестве $[0,+\infty)$.

В уравнении (17) функция F, заданная на множестве $(-\infty,+\infty)$, удовлетворяет следующим условиям:
$a)$ F непрерывна слева на $(-\infty,+\infty)$
$b)$ $F(-\infty)=0,\ F(+\infty)=1$,
$c)$ F монотонно возрастает на множестве $(-\infty,+\infty)$,
т.е функцию F можно рассматривать как функцию распределения некоторой случайной величины ξ.

Согласно теореме Лебега функция F допускает следующее представление:

$$F=F_A+F_D+F_S, \tag{18}$$

где F_A - абсолютно непрерывная компонента функции F, F_D - ее дискретная компонента, являющаяся функцией скачков с конечной суммой абсолютных величин скачков, а F_S - непрерывная функция ограниченной вариации, имеющая почти всюду равную нулю производную. Так как F - монотонно неубывающая (возрастающая) функция, то из теоремы Лебега следует, что ее компоненты F_A, F_D и F_S также неубывающие (возрастающие) функции.

Интеграл в правой части (17) понимается в смысле Лебега-Стильтеса.

$\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ - определенные на множестве $(0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$ измеримые функции, удовлетворяющие условию

$$\mathcal{F}_0(t,0)\equiv 0,\ \mathcal{F}_1(x,0)\equiv 0,\ t,x\in(0,+\infty), \tag{19}$$

(т.е тождественно нулевая функция удовлетворяет уравнению (17)).

В случае, когда $F=F_A$, $\mathcal{F}_0(t,z)=z$, $\mathcal{F}_1(x,z)=g(x)\in L_1(0,+\infty)$, уравнение (17) превращается в интегральное уравнение Винера-Хопфа второго рода:

$$\varphi(x)=g(x)+\int\limits_0^\infty K(x-t)\varphi(t)dt, \quad x\geq 0, \tag{20}$$

(где $K(x)=F'_A(x)$), изучению которого посвящены многочисленные работы местных и зарубежных авторов. Благодаря своей специфике, для уравнений вида (20) разработаны элегантные математические теории, сочетающие тонкие аналитические построения и эффективные методы приближенния. Отметим также, что уравнение (20) имеет многогранное применение в самых различных областях математической физики.

В частном случае, когда $\mathcal{F}_1\equiv 0$, $\mathcal{F}_0(t,z)=z$, уравнение (17) достаточно подробно было исследовано в работе Н.Б. Енгибаряна (см.[5]).

В случае, когда $\mathcal{F}_1\equiv 0, \mathcal{F}_0(t,z)=G(z)$, G - непрерывная функция на некотором отрезке $[0,\eta]$, причем $G(z)\geq z,\ z\in[0,\eta], G(\eta)=\eta, G\uparrow$ на $[0,\eta]$, уравнение (17) исследовано в работе А.Х. Хачатряном и Х.А. Хачатряном (см. [6]). Там доказано существование положительного монотонно неубывающего и ограниченного решения $\varphi(x)$, для которого $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\eta$.

Во второй главе исследованы уравнение (17) и его некоторые частные случаи, когда F непрерывна и обладает сингулярной компонентой: $F\equiv F_C=F_A+F_S$. В последнем случае при $\mathcal{F}_1\equiv 0$ и некоторых условиях на функцию $\mathcal{F}_0(t,z)$ построено однопараметрическое семейство положительных и ограниченных решений для уравнения (17). Что касается общего случая уравнения (18), то здесь при существенно иных условиях относительно $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ доказано существование положительных и интегрируемых решений. В конце приведены несколько примеров функций $\mathcal{F}_j(t,z),\ j=0,1$.

В §2.1 приведены необходимые обозначения и некоторые вспомогательные факты линейных интегральных уравнений типа свертки.

§2.2 посвящен вопросу разрешимости уравнения (17) с функцией распределения F, имеющей сингулярную и дискретную компоненты.

Пусть определенная на множестве $\mathbb{R}$ измеримая функция $G(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. существует положительное число $\eta > 0$, такое что $G \in C[0,\eta]$, $G \uparrow$ на $[0,\eta]$,

2. $G(0) = 0,\ G(\eta) = \eta$ и $G(x) \neq x$, при $x \in (0,\eta)$,

3. функция $G(x)$ удовлетворяет условию Липщица на отрезке $[0,\eta]$ с некоторым постоянным $L > 0$: т.е существует число $L > 0$, такое что

$$|G(x_1) - G(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad x_1, x_2 \in [0,\eta].$$

В §2.2 доказана следующая

Теорема 2.1 *Пусть функция распределения F удовлетворяет условиям $a) - c)$ и $1 - F \in L_1(\mathbb{R}^+)$. Пусть, далее, существуют числа $\eta_0 \in (0,\eta)$ и $\alpha \in \left(0, \min\left(1, \frac{1}{L}\right)\right)$, такие что*

$$1) \quad \mathcal{F}_1(x, \mu_{\eta_0}(x)) \geq \mu_{\eta_0}(x), \quad \mathcal{F}_1(x,\eta) \leq \mu_\eta(x), \tag{21}$$

где

$$\mu_\delta(x) \equiv \delta(1 - F(x)), \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{22}$$

2) *функции $\mathcal{F}_0(x,z)$ и $\mathcal{F}_1(x,z)$ при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^+$ монотонно возрастают по аргументу z на отрезке $[0,\eta]$,*

3) *выполняется двойная оценка*

$$0 \leq \mathcal{F}_0(x,z) \leq \alpha G(z), \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad z \in [0,\eta], \tag{23}$$

4) *$\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ на множестве $\mathbb{R}^+ \times [0,\eta]$ удовлетворяют условию Каратеодори по аргументу z, т.е при каждом фиксированном $z \in [0,\eta]$ функции $\{\mathcal{F}_j(x,z)\}_{j=0,1}$ измеримы по $x \in \mathbb{R}^+$ и почти при всех $x \in \mathbb{R}^+$ непрерывны по z на отрезке $[0,\eta]$.*

Тогда уравнение (17) имеет ненулевое неотрицательное решение в пространстве $L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty^0(\mathbb{R}^+)$, где $L_\infty^0(\mathbb{R}^+) = \{f \in L_\infty(\mathbb{R}^+) : \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0\}$.

В конце этого параграфа приведены соответствующие примеры $\{\mathcal{F}_j(x,z)\}_{j=0,1}$, удовлетворяющие условиям теоремы 2.1.

В §2.3 построено однопараметрическое семейство положительных и ограниченных решений уравнения (17) в случае, когда $\mathcal{F}_1(x,z) \equiv 0$, а функция распределения F удовлетворяет условиям $a) - c)$ и имеет только абсолютно непрерывные и сингулярные компоненты.

В §2.3 установлен следующий результат:

Теорема 2.2 *Пусть $\mathcal{F}_1(x,z) \equiv 0$, а функция F удовлетворяет условиям a) – c), причем $F \equiv F_C = F_A + F_S$ и*

$$m(F) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x) < 0, \tag{24}$$

(интеграл (24) абсолютно сходится в смысле Лебега-Стильтеса).

Предположим, далее, что $\mathcal{F}_0(t,z)$ имеет следующую структуру:

$$\mathcal{F}_0(t,z) = z - \omega(t,z), \tag{25}$$

где $\omega(t,z)$ - измеримая вещественная функция, определенная на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ и удовлетворяющая следующим условиям:

γ_1) *существует число $A > 0$ такое, что при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$ функция $\omega(t,z) \downarrow$ по z на множестве $[A, +\infty)$,*

γ_2) *существует определенная на $\mathbb{R}$ измеримая функция $\overset{\circ}{\omega}(z)$ со свойствами:*

$$0 \leq \overset{\circ}{\omega}(z) \downarrow \text{ на } [A, +\infty),\ \overset{\circ}{\omega} \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap C_0(\mathbb{R}^+), m_1(\overset{\circ}{\omega}) \equiv \int_0^{\infty} x\, \overset{\circ}{\omega}(x) dx < +\infty,$$

такая что

$$0 \leq \omega(t,z) \leq \overset{\circ}{\omega}(t+z), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad z \in [A, +\infty), \tag{26}$$

γ_3) *ω удовлетворяет условию Каратеодори по аргументу z на множестве $\mathbb{R}^+ \times [A, +\infty)$.*

Тогда уравнение (17) обладает однопараметрическим семейством положительных и ограниченных решений $\{\varphi_\beta(x)\}_{\beta \in \Delta}$, причем каждая функция этого семейства обладает следующими свойствами:

- $$\lim_{x \to \infty} \varphi_\beta(x) = 2\beta(1 - w_+(0))^{-1}, \quad \beta \in \Delta, \tag{27}$$

где $w_+(0) < 1$, $w_+(x) \downarrow$ по x на $\mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{x \to +\infty} w_+(x) = 0$ и определяется из уравнения факторизации Н.Б. Енгибаряна (см. §2.1, гл.2),

- если $\beta_1, \beta_2 \in \Delta,\ \beta_1 > \beta_2,$ то

$$\varphi_{\beta_1}(x) - \varphi_{\beta_2}(x) \geq 2(\beta_1 - \beta_2), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{28}$$

Здесь $\Delta = [\max(\varkappa, \beta_0), +\infty)$, *где* β_0 ($\beta_0 \geq A$) *- некоторое фиксированное число, для которого* $\overset{\circ}{\omega}(\beta_0) < \beta_0$, *а* $\varkappa = \sup\limits_{x \geq 0} Q(x)$, $Q(x)$ *- ограниченное и положительное решение следующего неоднородного интегрального уравнения:*

$$Q(x) = 2\overset{\circ}{\omega}(x+A) - \int\limits_0^\infty Q(t) d_t F(x-t), \quad x \geq 0. \tag{29}$$

Замечание. *Отметим, что существование положительного и ограниченного решения уравнения* (29) *следует из основной леммы 2.1, доказанной в* §2.1, *а существование числа* $\beta_0 \geq A$ *- непосредственно следует из свойств функции* $\overset{\circ}{\omega}$.

§2.4 главы 2 посвящен построению суммируемого решения уравнения (17) с функцией $\mathcal{F}_0(t,z)$, для которой мажорантой служит функция вида $z+\omega(t,\xi)$.

В §2.4 доказывается следующая:

Теорема 2.3 *Пусть функция распределения* F *удовлетворяет условиям теоремы 2.2, причем* $1 - F \in L_1(\mathbb{R}^+)$, *а* $\mathcal{F}_0(x,z)$ *и* $\mathcal{F}_1(x,z)$ *- заданные измеримые и вещественные функции, определенные на* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. *Предположим, что существуют числа*

$$\xi \geq \frac{2\max(\varkappa, \beta_0)}{1 - w_+(0)} \text{ и } \xi_0 \in (0, \xi) \tag{30}$$

такие, что $\mathcal{F}_0(x,z)$ *и* $\mathcal{F}_1(x,z)$ *удовлетворяют следующим условиям:*

$$A) \quad \mathcal{F}_1(x, \mu_{\xi_0}(x)) \geq \mu_{\xi_0}(x), \quad \mathcal{F}_1(x,\xi) \leq \mu_\xi(x),\ x \in \mathbb{R}^+, \tag{31}$$

$$B) \quad 0 \leq \mathcal{F}_0(t,z) \leq z + \omega(t,\xi), \quad t \in \mathbb{R}^+,\ z \in [0,\xi], \tag{32}$$

где ω *удовлетворяет условиям теоремы 2.2*

$C)$ *функции* $\{\mathcal{F}_j(x,z)\}_{j=0,1}$ *при каждом фиксированном* $x \in \mathbb{R}^+$ *монотонно возрастают по* z *на отрезке* $[0,\xi]$,

$D)$ *функции* $\{\mathcal{F}_j(x,z)\}_{j=0,1}$ *удовлетворяют условию Каратеодори по аргументу* z *на множестве* $\mathbb{R}^+ \times [0,\xi]$.

Тогда уравнение (17) *имеет ненулевое неотрицательное решение в пространстве* $L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty^0(\mathbb{R}^+)$.

Третья глава диссертации посвящена исследованию одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с некомпактным оператором Гаммерштейна на положительной полупрямой.

Рассмотрена следующая граничная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с суммарно-разностным ядром:

$$
\begin{cases}
-\dfrac{df}{dx} = \mu \int\limits_0^\infty \{K(x-t) - \varepsilon K(x+t)\} h(t, f(t)) dt, \quad x \geq 0, & (33) \\
f(+\infty) \equiv \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0, & (34)
\end{cases}
$$

относительно искомой измеримой и вещественной функции $f(x)$. В уравнении (33) μ -положительный числовой параметр, ядро $K(x)$ допускает следующее представление:

$$K(x) = \int\limits_a^b e^{-|x|s} G(s) ds, \quad x \in (-\infty, +\infty), \tag{35}$$

где $G(s)$ -положительная непрерывная и монотонно убывающая на $[a, b)$ функция ($a > 0, b > a\sqrt{3}, b \leq +\infty$), причем

$$2 \int\limits_a^b \frac{G(s)}{s} ds = 1, \tag{36}$$

а

$$\varepsilon \in [0, 1), \tag{37}$$

$h(t, u)$ - веществозначная на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ функция, такая что

$$h(t, 0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{38}$$

Задача (33)-(34) имеет непосредственное применение в кинетической теории плазмы. В частности, уравнением (33) описывается модельная задача о стационарном распределении электронов в полубесконечной плазме, где роль функции $f(x)$ играет первая координата электрического поля: $\vec{E}(x) = (f(x), 0, 0)$. Задача (33)-(34) выводится из стационарного модельного уравнения Больцмана с учетом интеграла столкновения, учитывающего энергетические взаимодействия. Параметр ε называется коэффициентом аккомодации.

Отметим, что при

$$\varepsilon = 0,\ G(s) = \frac{1}{s^2},\ a = 1,\ b = +\infty, \tag{39}$$

задача (33)-(34) исследована Х.А. Хачатряном (см. [7]).

В первой части третьей главы при определенных условиях на функцию $h(t, u)$ построено положительное решение задачи (33)-(34) в пространстве Соболева $W_1^1(\mathbb{R}^+)$ и описана структура построенного решения.

Во второй части главы 3 построено однопараметрическое семейство положительных решений в $W_1^1(\mathbb{R}^+)$ для уравнения (33).

§3.1 посвящена сведению задачи (33)-(34) к следующему нелинейному интегральному уравнению:

$$\psi(\tau) = e^{\alpha_1(\mu)\tau} \int_0^\infty \{T(\tau - t) - T_0(\tau + t)\} h(t, e^{-\alpha_1(\mu)t}\psi(t))dt. \tag{40}$$

относительно функции

$$\psi(x) = e^{\alpha_1(\mu)x} f(x), \quad x \geq 0, \tag{41}$$

где

$$T(\tau) = \mu \int_\tau^\infty K(x)dx, \quad -\infty < \tau < +\infty, \tag{42}$$

$$T_0(t) = \varepsilon\mu \int_t^\infty K(x)dx, \quad 0 < t < +\infty. \tag{43}$$

Здесь $\alpha_1(\mu)$ - функция обратная к функции

$$\mu = \mu(\alpha) \equiv \frac{\alpha}{\int\limits_a^b \frac{2s}{s^2-\alpha^2} G(s)ds}, \quad \alpha \in (0, a) \tag{44}$$

на интервале $(0, \alpha_0]$, где число α_0 единственным образом определяется из характеристического уравнения:

$$\int_a^b \frac{s(s^2 - 3\alpha^2)}{(s^2 - \alpha^2)^2} G(s)ds = 0. \tag{45}$$

В §3.2 сначала изучено следующее вспомогательное интегральное уравнение сверточного типа на полуоси:

$$S(x) = \int_0^\infty \{T_{\alpha_1}(x - t) - e^{-2\alpha_1 t} T_0^{\alpha_1}(x + t)\} S(t)dt, \quad x \geq 0 \tag{46}$$

относительно искомой измеримой функции $S(x)$, где $\alpha_1 = \alpha_1(\mu)$,

$$T_{\alpha_1}(x) = e^{\alpha_1 x} T(x),\ T_0^{\alpha_1}(\tau) = e^{\alpha_1 \tau} T_0(\tau), \quad x \in \mathbb{R}, \tau > 0. \tag{47}$$

и доказана:

Теорема 3.1 *При условиях* (35)-(38) *если* $\alpha_1 = \alpha_1(\mu)$, *то уравнение* (46) *обладает неотрицательным ненулевым монотонно возрастающим и ограниченным решением* $S^*(x)$.

В §3.3 с использованием теоремы 3.1 доказана следующая теорема о разрешимости задачи (33)-(34) в пространстве Соболева $W_1^1(\mathbb{R}^+)$:

Теорема 3.2 *Пусть выполняются условия* (35)-(38). *Предположим далее, что существует число* $\eta > 0$, *такое что*

I) $h(t,z) \uparrow$ *по* z *при каждом фиксированном* $t \in \mathbb{R}^+$ *на отрезке* $[0, \eta e^{-\alpha_1(\mu)t}]$,

II) $h(t,z)$ *-удовлетворяет условию Каратеодори по аргументу* z *на множестве* $\mathbb{R}^+ \times [0,\eta]$,

III) *выполняются следующие соотношения:*
$h(t,z) \geq z,\ t \in \mathbb{R}^+,\ z \in [0, \eta e^{-\alpha_1(\mu)t}]$,
$h(t, \eta e^{-\alpha_1(\mu)t}) = \eta e^{-\alpha_1(\mu)t}, \quad t \in \mathbb{R}^+$.

Тогда задача (33)-(34) в пространстве $W_1^1(\mathbb{R}^+)$ *имеет неотрицательное (нетривиальное) решение следующей структуры:*

$$f(x) = e^{-\alpha_1(\mu)x}\psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

где $\psi \in W_\infty^1(\mathbb{R}^+)$ *и* $0 \leq \psi(x) \leq \eta,\ x \in \mathbb{R}^+$.

§3.4 главы 3 посвящен вопросу построения однопараметрического семейства положительных решений в пространстве $W_1^1(\mathbb{R}^+)$ в случае, когда функция $h(t,u)$ допускает следующее представление:

$$h(t,u) = u - \omega(t,u), \tag{48}$$

где $\omega(t,u)$ - определенная на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ вещественная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

1. существует число $A > 0$, такое что при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$ функция $\omega(t,u) \downarrow$ по u на $[Ae^{-\alpha_1 t}, +\infty)$, $(\alpha_1 \equiv \alpha_1(\mu))$,

2. ω удовлетворяет условию Каратеодори по аргументу u на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$,

3. существует функция $\overset{\circ}{\omega}$, определенная на $\mathbb{R}^+$ со свойствами:

$$\overset{\circ}{\omega}(z) \geq 0,\ z \in [A, +\infty),\ \overset{\circ}{\omega} \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap C_0(\mathbb{R}^+),$$

$$m_1(\overset{\circ}{\omega}) \equiv \int_0^\infty z\,\overset{\circ}{\omega}(z)dz < +\infty,\ \overset{\circ}{\omega} \downarrow \text{ по } z \text{ на } [A, +\infty)$$

такая, что

$$0 \le \omega(t,u) \le e^{-\alpha_1 t}\,\overset{\circ}{\omega}(t+e^{\alpha_1 t}u),\ t\in\mathbb{R}^+,\ u\ge Ae^{-\alpha_1 t}.$$

В §3.4 доказан следующий результат:

Теорема 3.3 *Пусть выполнены условия* (35)-(38), *функция* $h(t,u)$ *допускает представление* (48), *где* $\omega(t,u)$ *удовлетворяет условиям* 1)−3). *Тогда задача (33)-(34) в пространстве Соболева* $W_1^1(\mathbb{R}^+)$ *обладает однопараметрическим семейством положительных решений* $\{f_\gamma(x)\}_{\gamma\in\Pi}$, *причем*

a) $f_\gamma(x)=e^{-\alpha_1 x}\psi_\gamma(x)$, где $\psi_\gamma(x)>0$, $x\in\mathbb{R}^+$, $\psi_\gamma(\cdot)\in L_\infty(\mathbb{R}^+)$, $\gamma\in\Pi$,

b) *если* $\gamma_1,\gamma_2\in\Pi$, $\gamma_1>\gamma_2$, *то*

$$f_{\gamma_1}(x)-f_{\gamma_2}(x)\ge e^{-\alpha_1 x}(\gamma_1-\gamma_2)\tilde{S}(x),$$

где $\tilde{S}(x)$*–специальное решение соответствующего линейного однородного уравнения* (46), *удовлетворяющее неравенству* $\tilde{S}(x)\ge 1$ *(см. доказательство теоремы 3.3, гл.3* §3.4*).*

Здесь множество параметров Π *задается согласно следующей формуле:*

$$\Pi\equiv[\max(\varkappa,\gamma_0),+\infty), \tag{49}$$

где $\gamma_0>A$ *- некоторое фиксированное число, для которого* $\overset{\circ}{\omega}(\gamma_0)<\gamma_0$ *(существование такого числа сразу следует из свойств функции* $\overset{\circ}{\omega}$*), а* $\varkappa\equiv\sup\limits_{x\ge 0}Q(x)$, *где* $Q(x)$ *- положительное суммируемое и существенно ограниченное на* $\mathbb{R}^+$ *решение следующего неоднородного интегрального уравнения сверточного типа*

$$Q(x)=2\,\overset{\circ}{\omega}(x+A)+\int\limits_0^\infty\{T_{\alpha_1}(x-t)-e^{-2\alpha_1 t}T_0^{\alpha_1}(x+t)\}Q(t)dt,\quad x\ge 0. \tag{50}$$

Заметим, что существование такого решения $Q(x)$ устанавливается в ходе доказательства теоремы 3.3 (см. гл.3 §3.3).

Четвертая глава диссертации посвящена изучению одного класса нелинейных бесконечных систем алгебраических уравнений с матрицами типа Теплица, допускающих специальное представление.

Рассмотрена следующая бесконечная система нелинейных алгебраических уравнений:

$$x_n=\sum_{k=0}^{\infty}a_{n-k}h_k(x_k),\quad n\in\mathbb{N}_0\equiv\{0,1,2,\dots\} \tag{51}$$

относительно искомого бесконечного вектора

$$x = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)^T, \tag{52}$$

где T - знак транспонирования.

Здесь $A = (a_{n-k})_{n,k=0}^{\infty}$ - бесконечная теплицева матрица следующего вида:

$$a_k = \int\limits_0^{\lambda} s^{|k|} G(s) ds, \quad k \in \mathbb{Z} \equiv \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}, \tag{53}$$

где

$$\lambda \in (0,1),\ G \in C[0,\lambda],\ G(s) > 0,\ s \in [0,\lambda], \tag{54}$$

причем

$$\gamma \equiv \int\limits_0^{\lambda} \frac{1+s}{1-s} G(s) ds \geq 1, \quad \gamma < +\infty. \tag{55}$$

Последовательность функций $\{h_j(u)\}_{j=0}^{\infty}$ удовлетворяет следующему условию:

$$h_j(0) \equiv 0, \quad j \in \mathbb{N}_0. \tag{56}$$

и некоторым другим дополнительным условиям (см. формулировку теоремы 4.1). Системы типа (51) возникают в дискретных задачах нелинейной теории переноса излучения.

В том случае, когда

$$a_n \geq 0,\ n \in \mathbb{Z},\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = 1, \tag{57}$$

$$\nu(A) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n < 0 \tag{58}$$

(предпологается, что (58) абсолютно сходится), а

$$h_j(u) = G^*(u) - \omega_j(u),\ j \in \mathbb{N}_0, \tag{59}$$

где

I) $\omega_j(z) \downarrow$ по z на $[\delta, +\infty)$, $\delta > 0$, $\omega_j \in C[\delta, +\infty)$,

II) существует функция $\omega \in L_1(0,+\infty) \cap C_0(0,+\infty)$, $\omega \downarrow$ на $[\delta, +\infty)$ такая, что

$$0 \leq \omega_j(z) \leq \omega(z + j + 1), \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

а

$$G^* \in C[0,\eta],\ G^* \uparrow \text{ на } [0,\eta],\ G^*(z) \geq z,\ z \in [0,\eta],\ G^*(\eta) = \eta,$$

при некотором $\eta = \eta(\delta) > 0$, система (51) исследовалась в совместной работе Х.А. Хачатряна и М.Ф. Броян (см. [8]).

В диссертации, при других предположениях относительно $\{h_j(u)\}_{j=0}^{\infty}$ с применением специальных итерационных методов и построения инвариантных "обобщенных" конусных отрезков для соответствующего нелинейного дискретного оператора Гаммерштейна, удалось построить положительное решение системы (51) и исследовать некоторые свойства полученного решения.

В §4.1 установлено существование числа $q_0 \in (\lambda, 1)$, для которого

$$\int_0^{\lambda} \frac{G(s)}{1 - sq_0} ds \geq \frac{1}{3} \tag{60}$$

и доказана следующая:

Теорема 4.1 *Пусть последовательность функций $\{h_j(u)\}_{j=0}^{\infty}$ удовлетворяет следующим условиям:*

$i_1)$ *при каждом фиксированном $j \in \mathbb{N}_0$ функции $h_j(u) \uparrow$ по u на $[q_0^j, +\infty)$,*

$i_2)$ *существует бесконечный вектор*

$$\beta(q_0) \equiv (\beta_0(q_0), \beta_1(q_0), \ldots, \beta_n(q_0), \ldots)^T \in l_1$$

такой что, $\beta_n(q_0) \geq 3q_0^n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$, и

$$h_j(u) \leq \frac{u}{\gamma} + \beta_j(q_0), \quad u \geq q_0^j,$$

$$h_j(q_0^j) \geq 3q_0^j, \quad j \in \mathbb{N}_0$$

$i_3)$ *при каждом фиксированном $j \in \mathbb{N}_0$ функции $h_j(u)$ непрерывны на множестве $[q_0^j, +\infty)$.*

Тогда при условиях (53)-(56) *система* (51) *имеет покомпонентно положительное решение в весовом пространстве:*

$$\mathfrak{M} \equiv \{\tau \equiv (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots)^T : \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(\lambda)|\tau_j| < +\infty\},$$

где

$$\varphi_j(\lambda) \equiv \int_0^{\lambda} \frac{s^{j+1}}{1 - s} G(s) ds, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]-[5].

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д.ф.м. наук Х.А. Хачатряну за постановку задач и постоянную помощь при выполнении работы.

Литература

[1] A.Kh.Khachatryan and Kh.A.Khachatryan. On an integral equation with monotonic nonlinearity. Memoirs on Differential equations and Mathematical Physics. 2010, vol. 51, № 3, pp. 59-72.

[2] Х.А. Хачатрян. Достаточные условия разрешимости интегрального уравнения Урысона на полуоси. Доклады Российской Академии Наук, Математика, 2009 г, том 425, № 2, стр. 462-465.

[3] A.Kh.Khachatryan and Kh.A.Khachatryan. Existence and uniquenaee theorem for a Hammerstein nonlinear integral equation. Opuscula, Mathematica, Poland. 2011, vol. 31, № 3, pp. 393-398.

[4] Л.Г. Арабаджян, Н.Б. Енгибарян. Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения. Итоги науки и техники, Математический анализ, 1984 г., том 22, стр. 175-242.

[5] Н.Б. Енгибарян. Уравнения в свертках, содержащие сингулярные вероятностные распределения. Известия РАН, сер. Математика, 1996 г., том 60, № 2, стр. 21-48.

[6] A.Kh. Khachatryan and Kh.A. Khachatryan.On convolution type nonlinear integral equations, containing singular and discrete probability distributions. Advances and Applications in Mathematical Sciences. India. 2010, vol 5, № 1, pp. 1-16.

[7] Х.А. Хачатрян. О разрешимости в $W_1^1(\mathbb{R}^+)$ одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения с некомпактным оператором Гаммерштейна-Немыцкого. Алгебра и анализ, 2012 г., том 24, № 1, стр. 223-247.

[8] Х.А. Хачатрян, М.Ф. Броян. Однопараметрическое семейство положительных решений для одного класса нелинейных бесконечных алгебраических систем с матрицами типа Теплица-Ганкеля. Известия НАН Армении, Математика, 2013 г., том 48, №5, стр. 63-78.

Список опубликованных работ по теме диссертации

[1] Х.А. Хачатрян, А.С. Петросян. О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений на полуоси с некомпактным оператором типа Гаммерштейна-Стильтеса. Украинский Математический Журнал, 2015г., том 67 , № 1, стр. 106-127

[2] H.S. Petrosyan. On solution of a class of Hammerstein type nonlinear integral equations on the positive half-line in the critical case. Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences, 2014, № 3, pp. 31-39.

[3] А.С. Петросян, М.Г. Костанян. О разрешимости одного класса нелинейных бесконечных систем алгебраических уравнений с матрицами типа Теплица. Математика в высшей школе, 2014г., том 10, №1, стр. 35-40.

[4] Khachatur A. Khachatryan, Tsolak E. Terdjyan, Haykanush S. Petrosyan. On the solvability of one class of boundary-value problems for non-linear integro-differential equation in kinetic theory of plazma, Journal of Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 2013, vol. 6, issue 4, pp. 451-461.

[5] А.С. Петросян. О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений с некомпактным оператором Гаммерштейна-Немыцкого на положительной полупрямой. Математика в высшей школе. 2013г, том 9, № 2, стр. 27-33.

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հ.Ս. Պետրոսյան

ՀԱՄԵՐՇՏԵՅՆԻ ՏԻՊԻ ՈՉ ԿՈՄՊԱԿՏ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐՈՎ ՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ԵՎ ԻՆՏԵԳՐԱ-ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ ԿԻՍԱԱՌԱՆՑՔԻ ՎՐԱ

Ատենախոսական աշխատանքը նվիրված է Համերշտեյնի տիպի ոչ կոմպակտ օպերատորներով ծնվող կիսաառանցքի վրա ոչ գծային ինտեգրալ և ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումների որոշ դասերի դրական լուծումների կառուցման հարցերին: Այդպիսի հավասարումներով նկարագրվում են գազերի կինետիկ տեսության, ճառագայթման տեղափոխման տեսության և էկոնոմետրիկայի մի շարք խնդիրներ:

Հատուկ իտերացիոն մեթոդների զուգակցումը համապատասխան ոչ գծային օպերատորների ինվարիանտ կոնային հատվածների կառուցման մեթոդների և փաթեթի տիպի ինտեգրալ հավասարումների տեսության մեթոդների հետ թույլ են տալիս ապացուցել վերը նշված հավասարումների համար դրական լուծումների գոյության թեորեմներ և հետազոտել ստացված լուծումների ասիմպտոտիկ հատկությունները:

Ատենախոսությունում ստացվել են և պաշտպանության են ներկայացվում հետևյալ հիմնական արդյունքները:

- Համերշտեյն-Նեմիցկու տիպի մի դասի ոչ գծային հավասարումների համար ապացուցվել է դրական լուծումների գոյությունը և հետազոտվել ստացված լուծումների ասիմպտոտիկ վարքը՝ կախված հավասարման կորիզի մեջ մտնող պարամետրի արժեքներից:

- Կիսաառանցքի վրա Համերշտեյն-Ստիլտեսի տիպի ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումների որոշ դասերի համար ստացվել են ինտեգրելի ֆունկցիաների տարածությունում դրական լուծումների գոյության բավարար պայմաններ:

- Համերշտեյն-Ստիլտեսի ինտեգրալ հավասարումների համար կառուցվել է դրական և սահմանափակ լուծումների մեկ պարամետրանոց ընտանիք: Այդ արդյունքի շնորհիվ ապացուցվել է «ուժեղ ոչ գծայնությամբ» Համերշտեյնի տիպի ինտեգրալ հավասարումների համար դրական, ինտեգրելի և սահմանափակ լուծումների գոյության թեորեմներ:

- Դիտարկվել է կիսաանվերջ պլազմայում էլեկտրոնների ստացիոնար բաշխման խնդիրը, որը նկարագրվում է գումարատարբերակային կորիզով առաջին կարգի ոչ գծային ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումով, որտեղ անհայտ ֆունկցիայի դերը կատարում է էլեկտրական դաշտի լարվածությունը: Այդ հավասարման համար ապացուցվել է Սոբոլևի $W_1^1(\mathbb{R}^+)$ տարածությունում դրական լուծումների մեկ պարամետրանոց ընտանիքի գոյությունը.
- Համերշտեյնի տիպի ոչ գծային դիսկրետ հավասարումների մի դասի համար ստացվել են որոշակի կշռային տարածություններում լուծելիության բավարար պայմաններ:

R E S U M E

Haykanush Petrosyan

SOME INTEGRAL AND INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH HAMMERSTEIN TYPE NONCOMPACT OPERATORS ON SEMI-AXIS

The thesis work is devoted the construction of positive solutions in certain functional spaces for some classes of nonlinear integral and integro-differential equations with Hammerstein noncompact operators in semi-axis.

By means of such equations a fairly wide problems of kinetic theory of gases, radiative transfer theory and econometrics are described.

Combining special iteration methods with the methods of the theory of construction invariant cone segments for corresponding nonlinear operators and the theory of convolution type integral equations allow to prove existence theorems of positive solutions for above mentioned equations, as well as to investigate asymptotic properties obtained solutions.

The basic results obtained in thesis are the following:

- For one class of Hammerstein-Nemitskii type nonlinear integral equations the existence of positive solutions in proved, as well as the asymptotic behavior depending on the value of the corresponding parameter included in the kernel of equation is investigated.

- For some classes of Hammerstein-Stiltjes type nonlinear integral equations on semi-axis the sufficient conditions for positive solvability in space of integrable solutions are obtained.

- One parametric family of positive and essentially bounded solutions for Hammerstein-Stiltjes integral equations is constructed. By means of above result the existence of positive integrable and essentially bounded solutions for Hammerstein integral equations with " strong nonlinearity " is proved.

- By means of nonlinear first order integro-differential equation is described the problem of stationary distribution of electrons in semi-infinite plazma, where role of unknown function plays electric field intensity. For above equation the existence of one parametric family of positive solutions in Sobolev's space $W_1^1(\mathbb{R}^+)$ is proved.

- The sufficient conditions of solvability for one class of Hammerstein type discrete nonlinear equations in certain weight space are obtained.