ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ավագյան Գրիգոր Սլավիկի

ԲԱԶՄԱՉԱՓ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄԱՅԻՆ ՄԻՋԱՐԿՄԱՆ ԵՎ ԿՈՐԵՐԻ ՀԱՏՄԱՆ ԿԵՏԻ ՊԱՏԻԿՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇ ՀԱՐՑԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա.01.07 “Հաշվողական մաթեմատիկա”
մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան - 2011

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Авагян Григор Славикович

О МНОГОМЕРНОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И О КРАТНОСТИ ТОЧКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ КРИВЫХ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.07 “Вычислительная математика”

Ереван – 2011

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում:

Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Հ.Ա.Հակոբյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Ա.Ա.Սահակյան
ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Յու.Գ.Դադայան
Առաջատար կազմակերպություն՝ ՀԳԱԱ Մաթեմատիկայի ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կայանալու է 2011 թ. մայիսի 27-ին, ժ. 15^{00}-ին ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 044 “Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն” մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2011 թ. ապրիլի 26-ին:

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու՝ Վ.Ժ.Դումանյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском гасударственном университете

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук А.А. Акопян
Официальные опоненты: доктор физ.-мат. наук А.А. Саакян
кандидат физ.-мат. наук Ю.Г. Дадаян

Ведущая организация: Институт математики НАН Армении

Защита состоится 27 мая 2011 г. в 15.00 часов на заседании действующего в Ереванском государственном университете специализированного совета ВАК 044 “Математическая кибернетика и математическая логика”, по адресу: Ереван 0025, ул. А. Манукяна, 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 26 апреля 2011 г.

Ученый секретарь специализированного совета.
кандидат физ.-мат. наук В.Ж. Думанян

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲՆՈՒԹԱԳԻՐԸ

Թեմայի արդիականությունը. Հաշվողական մաթեմատիկայում միջարկումը (ինտերպոլացիա) միջանկյալ կետերում որևէ մեծության մոտավոր արժեքների հաշվումն է՝ օգտագործելով այդ մեծության դիսկրետ կետերում տրված արժեքները: Բազմանդամային միջարկման դեպքում որպես միջարկիչ ֆունկցիաներ օգտագործվում են բազմանդամներ, այսինքն, տրված են կետեր, պահանջվում է գտնել բազմանդամ, որը ճշգրիտ անցնում է այդ կետերով: Միջարկումը՝ բազմանդամներով կամ այլ ֆունկցիաներով, հաշվողական մաթեմատիկայի բավականին հին մեթոդներից է: Ինտերպոլացիա տերմինը ներմուծվել է Ջ. Ուոլիսի կողմից դեռևս 1655 թվականին: Միաչափ բազմանդամային միջարկման խնդրին սպառիչ պատասխան է տրվել դեռևս Լագրանժի և Նյուտոնի կողմից:

Բազմաչափ բազմանդամային միջարկումը համեմատաբար նոր թեմա է և հավանաբար սկսվել է միայն 19-րդ դարի երկրորդ կեսից Վ. Բորչարդի և Լ. Կրոնեկերի աշխատանքներով: Ներկայումս բազմաչափ բազմանդամային միջարկումը մոտարկումների տեսության և թվային անալիզի հիմնական բաժիններից է և ունի կիրառություններ բազմաթիվ մաթեմատիկական խնդիրներում: Նշենք, որ բազմաչափ բազմանդամային միջարկման խնդիրը սերտ կապ ունի հանրահաշվական երկրաչափության հետ, քանի որ խնդիրը հանգում է այն հարցին, թե արդյոք գոյություն ունի որոշակի տիպի հանրահաշվական կոր, որն անցնում է միջարկման բոլոր հանգույցներով: Միաչափ շատ կիրառական խնդիրների, ինչպես օրինակ թվային ինտեգրման, ոչ գծային հավասարումների համակարգերի և դիֆերենցիալ հավասարումների մոտավոր լուծման մեջ առանցքային դեր է կատարում բազմանդամային միջարկումը: Մի քանի փոփոխականի համապատասխան խնդիրներում սկզբնապես կիրառվել է միաչափ միջարկումների թենզորական արտադրյալով ընդհանրացումը, որը, չնայած պարզությանը, ունի էական թերություն: Այն է, թենզորական արտադրյալի բազմանդամային տարածությունը և ցանցը ինվարիանտ չեն գծային ձևափոխությունների նկատմամբ: Այս հանգամանքը անհրաժեշտ է դարձնում նշված խնդիրներում ըստ էության մի քանի փոփոխականի միջարկման կիրառությունը:

Մի քանի փոփոխականի բազմանդամային միջարկումով հիմնավորապես սկսել են զբաղվել միայն վերջին չորս-հինգ տասնամյակների ընթացքում: Մի քանի փոփոխականի բազմանդամային միջարկման առաջին կարևոր արդյունքները ստացել են Բերզոլարին, Ռադոնը, ինչպես նաև Չանգը և Յաոն: Ներկայումս, ի տարբերություն միաչափ դեպքի, բազմաչափ բազմանդամային միջարկման ոլորտում կան բազմաթիվ չլուծված հիմնական խնդիրներ: Մասնավորապես լուծված չէ դեռևս 1982 թ.-ին Գասքայի և Մաեզթուի կողմից առաջադրված վարկածը, զրեթե ուսումնասիրված չէ Գասքա-Մաեզթուի ընդհանրացված վարկածը, ինչպես նաև բաց է երկրաչափական բնութագիրն ունեցող բազմությունների նկարագրման հարցը, որոնք քննարկվում են ատենախոսության մեջ: Բաց է նաև Հերմիթի բազմաչափ միջարկման ռեգուլյար սխեմաների նկարագրության հարցը, որի հետ կապված ատենախոսության մեջ դիտարկվում են կորերի հատման կետերի պատիկության որոշ հարցեր:

Ատենախոսական աշխատանքի նպատակը և խնդիրները. Ճիշտ երեք մաքսիմալ ուղիղներով երկչափ երկրաչափական բնութագիրը ունեցող բազմությունների նկարագրությունը: Եռաչափ բազմանդամային միջարկման համար Գասքա-Մաեզթուի վարկածի հետազոտությունը մաքսիմալ հարթության գոյության վերաբերյալ: Հարթ հանրահաշվական կորերի հատման կետի պատիկության թվի գնահատականը: Հարթ հանրահաշվական կորերի հատման կետի պատիկության տարածության նկարագրությունը այն դեպքում, երբ կորերը այդ կետով անցնող ուղիղների փնջեր են:

Հետազոտման օբյեկտը. Մի քանի փոփոխականի բազմանդամային տարածություններ, միջարկման ճշգրիտ ցանցեր, երկրաչափական բնութագրությամբ բազմություններ, մաքսիմալ ուղիղներ և մաքսիմալ հարթություններ, հարթ հանրահաշվական կորեր, հարթ հանրահաշվական կորերի հատման կետի պատիկության տարածություն և հատման կետի թվաբանական պատիկություն:

Հետազոտման մեթոդները. Օգտագործվել են բազմաչափ բազմանդամային միջարկման տեսության մեթոդները: Օգտագործվել են երկրաչափական բնութագիր ունեցող բազմությունների տեսության մեթոդները: Օգտագործվել են հանրահաշվական երկրաչափության որոշ մեթոդներ կետում կորի և կետում երկու կորերի հատման պատիկության վերաբերյալ:

Գիտական նորությունը. Ապացուցվել է, որ երկրաչափական բնութագիրն ունեցող և ճիշտ երեք մաքսիմալներով սահմանափակված բազմությունն իրենից ներկայացնում է Նյուտոնի ընդհանրացված ցանց: Ապացուցվել է Գասքա-Մաեզթուի ընդհանրացված վարկածը եռաչափ դեպքում երկրորդ աստիճանի բազմանդամների համար: Տրվել է գնահատական երկու հարթ հանրահաշվական կորերի հատման կետի թվաբանական պատիկության համար այն դեպքում, երբ պատիկությունը բնութագրվում է հաստատուն գործակիցներով դիֆերենցիալ օպերատորների միջոցով: Նկարագրվել է երկու հարթ հանրահաշվական կորերի հատման կետի պատիկության տարածությունը այն դեպքում, երբ կորերը այդ կետով անցնող ուղիղների փնջեր են:

Կիրառական նշանակությունը. Ատենախոսության մեջ ստացված արդյունքներն ունեն տեսական բնույթ և միևնույն ժամանակ ունեն հստակ արտահայտված կիրառական ուղղվածություն: Վերը նշված արդյունքները վերաբերում են միջարկումների տեսության պրակտիկայում առավել հաճախ կիրառվող սխեմաներից մեկին՝ երկրաչափական բնութագրով ցանցերին: Դրանք կարող են արդյունավետորեն կիրառվել բոլոր այն խնդիրներում, որոնց լուծման մեջ օգտագործվում է բազմաչափ բազմանդամային միջարկում: Կետում կորի և կետում երկու կորերի հատման պատիկության վերաբերյալ ստացված արդյունքները նույնպես կարող են կիրառվել բազմաչափ միջարկման խնդիրներում:

Պաշտպանությանը ներկայացվում են հետևյալ դրույթները.

- Երեք մաքսիմալ ուղիղներով սահմանափակված երկրաչափական բնութագիր ունեցող բազմությունների նկարագրությունը:
- Եռաչափ բազմանդամային միջարկման համար մաքսիմալ հարթության գոյության վերաբերյալ Գասքա-Մաեզթուի վարկածի ապացույցը:
- Երկու հարթ հանրահաշվական կորերի հատման կետի թվաբանական պատիկության ճշգրիտ գնահատականը այն դեպքում, երբ պատիկությունը բնութագրվում է հաստատուն գործակիցներով դիֆերենցիալ օպերատորների միջոցով:
- Երկու հարթ հանրահաշվական կորերի հատման կետի պատիկության տարածության նկարագրությունը այն դեպքում, երբ կորերը այդ կետով անցնող ուղիղների փնջեր են:

Ստացված արդյունքների ապրոբացիան. Ատենախոսության արդյունքները զեկուցվել են ԵՊՀ Մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի գիտական սեմինարներում, ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի թվային անալիզի և մաթեմատիկական մոդելավորման ամբիոնի սեմինարներում և ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի ընդհանուր սեմինարում:

Հրապարակությունները. Ատենախոսության հիմնական արդյունքները տպագրված են չորս գիտական հոդվածներում:

Ատենախոսության կառուցվածքը և ծավալը. Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից, չորս գլխից, ամփոփումից և գրականության ցանկից, որը ներառում է 26 աշխատանք: Ատենախոսության ծավալը 91 էջ է:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Աշխատանքի առաջին գլուխը նվիրված է բազմաչափ բազմանդամային միջարկման և նրա հիմնական խնդրի ներկայացմանը: Պարագրաֆ 1.1-ում դիտարկվում է Լագրանժի բազմաչափ միջարկման խնդիրը: Նշանակենք՝

$$\bar{x}^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d,$$

որտեղ

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d:$$

$\prod_n^d = \prod_n(\mathbb{R}^d)$ -ով նշանակենք d փոփոխականից n աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների տարածությունը՝

$$\prod_n^d = \left\{ p(\bar{x}) = \sum_{|\alpha| \le n} a_{\alpha} \cdot \bar{x}^{\alpha} : \quad a_{\alpha} \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^d \right\},$$

որի չափողականությունը՝

$$N := \dim \prod_n^d = \binom{n+d}{d}:$$

Լագրանժի բազմաչափ միջարկման խնդիրը հետևյալն է՝

տրված է $\mathbb{X} = \{\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(s)}\} \subset \mathbb{R}^d$ հանգույցների բազմությունը և կամայական $\{c_1, c_2, \ldots, c_s\}$ իրական թվերի բազմություն: Գտնել $p \in \prod_n^d$ բազմանդամ այնպիսին, որ

$$p(\bar{x}^{(k)}) = c_k, \quad k = 1,2,\ldots,s: \qquad (1)$$

Որոնելի $p \in \prod_n^d$ բազմանդամը կանվանենք միջարկիչ բազմանդամ, (1) պայմանները՝ միջարկման պայմաններ, իսկ X բազմությունը՝ միջարկման հանգույցների բազմություն:

Սահմանում 1.1.1. $\left(\prod_n^d, \mathbb{X}\right)$ *միջարկման խնդիրը կանվանենք ճշգրիտ, եթե ցանկացած* $\{c_1, c_2, \ldots, c_s\}$ *արժեքների բազմության համար գոյություն ունի միակ* $p \in \prod_n^d$ *բազմանդամ, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝*

$$p(\bar{x}^{(k)}) = c_k, \quad k = 1,2,\dots,s:$$

Այդ դեպքում $\mathbb{X}$ միջարկման հանգույցների բազմությունը կանվանենք $\prod_n^d -$ ճշգրիտ: Դժվար չէ նկատել, որ $\mathbb{X}$ բազմության ճշգրտության համար անհրաժեշտ է, որ $s = N$:

Սահմանում 1.1.2. *$p \in \prod_n^d$ բազմանդամը կանվանենք $A := \bar{x}^{(k)} \in \mathbb{X}$ հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամ կամ Լագրանժի բազմանդամ $\prod_n^d$ տարածության համապատասխան, եթե*

$$p \in \textstyle\prod_n^d, \quad p(\bar{x}^{(k)}) \neq 0 \quad \text{և} \quad p(\bar{x}^{(j)}) = 0, \quad 1 \le j \le N, \quad j \neq k:$$

Այսուհետ $A := \bar{x}^{(k)} \in \mathbb{X}$ հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամը կնշանակենք $p_A^* := p_k^*$:

Դժվար չէ ապացուցել բազմաչափ բազմանդամային միջարկման տեսության հետևյալ հիմնարար պնդումը `

Պնդում 1.1.4. *Որպեսզի $\left(\prod_n^d, \mathbb{X}\right)$ միջարկման խնդիրը լինի ճշգրիտ անհրաժեշտ է և բավարար, որ բոլոր ֆունդամենտալ բազմանդամները գոյություն ունենան:*

Այստեղից հետևում է`

Հետևանք 1.1.1. *Եթե բոլոր ֆունդամենտալ բազմանդամները գոյություն ունեն, ապա նրանք միակն են հաստատուն արտադրիչի ճշտությամբ:*

Այստեղից էլ մասնավորապես հետևում է, որ ճշգրիտ բազմության բոլոր ֆունդամենտալ բազմանդամները n աստիճանի են:

Հետագա շարադրանքում պայմանավորվենք նույն տառով, ասենք h -ով նշանակել և հիպերհարթությունը, և հիպերհարթության $h(\bar{x}) = 0$ հավասարման մեջ մասնակցող $h \in \prod_1^d$ բազմանդամը:

Պարագրաֆ 1.2 –ում նկարագրվում է Չանգ-Յաոի կողմից ներմուծված մի պայման, որին բավարարող բազմությունները կլինեն ճշգրիտ: Այդ պայմանը անվանում են GC (geometric characterization) պայման կամ GC_n պայման, երբ հարկ է նշել նաև միջարկման համար օգտագործվող բազմանդամային տարածության աստիճանը:

Սահմանում 1.2.1. [1] *Կասենք, որ $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^d, \quad \#\mathbb{X} = N = \begin{pmatrix} n+d \\ d \end{pmatrix}$ հանգույցների բազմությունը բավարարում է GC_n երկրաչափական բնութագրին, կամ կարճ ասած՝ GC_n -բազմություն է, եթե ցանկացած $A \in \mathbb{X}$ հանգույցի համար գոյություն ունեն ամենաշատը n հիպերհարթություններ՝ $h_1^A, h_2^A, \dots, h_k^A, k \le n$ այնպիսին, որ՝*

$$\mathbb{X} \setminus \{A\} \subset h_1^A \cup h_2^A \cup \dots \cup h_k^A, \quad \text{բայց} \quad A \notin h_1^A \cup h_2^A \cup \dots \cup h_k^A:$$

1 K. C. Chung, T. H. Yao, On lattices admitting unique Lagrange representations, - SIAM J. Numer. Anal., 14 (1977), pp. 735-753.

Այս դեպքում կասենք, որ $A \in \mathbb{X}$ հանգույցը օգտագործում է $h_1^A, h_2^A, \ldots, h_k^A$ հիպերհարթությունները կամ $h_1^A, h_2^A, \ldots, h_k^A$ հիպերհարթությունները օգտագործվում են $A \in \mathbb{X}$ հանգույցի կողմից:

Այնուհետև ցույց է տրվում, որ այդ հիպերհարթությունների քանակը ճիշտ n է, այսինքն $k = n$:

Նկատենք, որ վերը նշված սահմանումը համարժեք է այն պայմանին, որ ցանկացած $A \in \mathbb{X}$ հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամը գոյություն ունի և ներկայացվում է գծային արտադրիչների արտադրյալի տեսքով՝

$p_A^* = h_1^A \cdot h_2^A \cdots h_n^A$, որտեղ $h_1^A, h_2^A, \ldots, h_n^A$ -երը $A \in \mathbb{X}$ հանգույցի կողմից օգտագործվող հիպերհարթություններն են:

Պնդում 1.1.4-ից հետևում է, որ ցանկացած GC_n -բազմություն հանդիսանում է $\prod_n^d -$ ճշգրիտ:

Սահմանում 1.2.2. *Կասենք, որ իրարից տարբեր $h_1, h_2, \ldots, h_q, \quad q > d$ հիպերհարթությունները $\mathbb{R}^d$ -ում գտնվում են ընդհանուր դրության մեջ, եթե նրանցից ցանկացած d հատը հատվում են, և ոչ մի $d+1$ հատը մի կետով չեն անցնում:*

Պարագրաֆ 1.3 –ում դիտարկվում են ճշգրիտ բազմությունների կառուցման մինչ այժմ ամենահայտնի մեթոդները (կոնստրուկցիաներ):

Սկզբում բերվում է պատմականորեն ավելի շուտ հայտնաբերված Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիան:

Սահմանում 1.3.2. *Կասենք, որ $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^d, \quad \#\mathbb{X} = N = \binom{n+d}{d}$ հանգույցների բազմությունը բավարարում է Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիային, եթե գոյություն ունեն $n+1$ հիպերհարթություններ $h_1, h_2, \ldots, h_{n+1}$ այնպես, որ՝*

h_1 *-ին պատկանում են* $\binom{n+d-1}{d-1}$ *անկախ հանգույցներ* $\mathbb{X}$ *-ից,*

$h_2 \setminus h_1$ *-ին պատկանում են* $\binom{n+d-2}{d-1}$ *անկախ հանգույցներ* $\mathbb{X}$ *-ից,*

$\vdots$

$h_{n+1} \setminus \{h_1 \cup \cdots \cup h_n\}$ *-ին պատկանում է* $\binom{d-1}{d-1} = 1$ *հանգույց* $\mathbb{X}$ *-ից:*

Պնդում 1.3.1. [2] *Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիային բավարարող $\mathbb{X}$ հանգույցների բազմությունը $\prod_n^d -$ ճշգրիտ է:*

---

[2] H. Hakopian, K. Jetter and G. Zimmermann, A new proof of the Gasca-Maeztu conjecture for - J. Approx. Theory (2009), v. 159, № 2, doi: 10. 1016. /j. jat. 2009.04.006, pp. 224-242.

Այնուհետև բերվում է GC_n երկրաչափական բնութագրին բավարարող հանգույցների ճշգրիտ կոնստրուկցիաների օրինակներ: Մասնավորապես դիտարկվում է այդպիսի հիմնական ցանցերից մեկը՝ Չանգ-Յաոյի բնական ցանցը:

Սահմանում 1.3.3. [3] *Կասենք, որ* $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^d$, $\#\mathbb{X} = N = \binom{n+d}{d}$ *հանգույցների բազմությունը հանդիսանում է բնական ցանց (Չանգ-Յաոյի ցանց), եթե գոյություն ունեն ընդհանուր դրության մեջ գտնվող* $n+d$ *հիպերհարթություններ՝* $h_1, h_2, \ldots, h_{n+d}$ *այնպիսին, որ նրանց բոլոր հնարավոր* d *հատ հիպերհարթությունների հատման կետերը կազմում են* $\mathbb{X}$ *բազմության հանգույցները:*

Աշխատանքում բերված են նաև GC_n պայմանին բավարարող այլ ցանցերի օրինակներ: Այդ թվում՝ Նյուտոնի ցանցը կամ այսպես կոչված հիմնական ցանցը, որտեղ որպես միջարկման հանգույցերի բազմություն վերցվում է՝

$$\mathbb{X} = \left\{ \alpha \in \mathbb{Z}_+^d : \quad |\alpha| \le n \right\}$$

մուլտիինդեքսների բազմությունը:

Ապացուցված է, որ հարթության վրա GC_n պայմանին բավարարող մինչ այժմ հայտնի կոնստրուկցիաները՝ Չանգ-Յաոյի բնական ցանցը, Նյուտոնի ցանցը հանդիսանում են Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիայի մասնավոր դեպքեր: Դրա հիման վրա Գասքան և Մաեզթուն 1982 թ. առաջադրել են վարկած, ըստ որի ցանկացած GC_n -բազմություն միևնույն ժամանակ հանդիսանում է Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիա:

Աշխատանքի երկրորդ գլուխը նվիրված է եռաչափ տարածության մեջ Գասքա-Մաեզթուի այս վարկածի ուսումնասիրմանը:

Պարագրաֆ 2.1 –ում բերվում է Գասքա-Մաեզթուի վարկածը հարթության համար:

GM ***-վարկած.*** [4] *Եթե* $\mathbb{X}$ *հանգույցների բազմությունը* $\mathbb{R}^2$ *-ում բավարարում է* GC_n *երկրաչափական բնութագրին, ապա գոյություն ունի ուղիղ, որն անցնում է* $\mathbb{X}$ *բազմության* $n+1$ *հանգույցով, կամ այլ կերպ ասած գոյություն ունի մաքսիմալ ուղիղ:*

Նշենք, որ մինչ այժմ GM *-վարկածը* ապացուցված է միայն $n \le 4$ աստիճանի բազմանդամների համար [5] : Ավելի բարձր աստիճանների համար վարկածը ո'չ ապացուցված է, ո'չ հերքված:

Դժվար չէ համոզվել, որ GM *-վարկածը* համարժեք է, որ ցանկացած Չանգ-Յաոյի GC_n -բազմություն հանդիսանում է $\mathbb{R}^2$ -ում Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիայի մասնավոր դեպք:

Այնուհետև պարագրաֆ 2.2-ում բերված է դե Բորի կողմից Գասքա-Մաեզթուի վարկածի ընդհանրացումը $\mathbb{R}^d$ -ի համար:

---

3 K. C. Chung, T. H. Yao, On lattices admitting unique Lagrange representations, - SIAM J. Numer. Anal., 14 (1977), pp. 735-753.

4 M. Gasca, J. I. Maeztu, On Lagrange and Hermite interpolation in R^n, - Numer. Math., 39 (1982), pp. 1-14.

5 J. R. Busch, A note on Lagrange interpolation in , - Un. Mat. Argentina, 36 (1990), pp. 33-38.

GM_d -վարկած.[6] *Եթե $\mathbb{X}$ հանգույցների բազմությունը $\mathbb{R}^d$ -ում բավարարում է GC_n երկրաչափական բնութագրին, ապա գոյություն ունի հիպերհարթություն, որն անցնում է $\mathbb{X}$ բազմության $\dim \prod_n^{d-1}$ հանգույցով:*

$\mathbb{X}$ բազմության $\dim \prod_n^{d-1}$ հանգույցով անցնող հիպերհարթությունը կանվանենք մաքսիմալ հիպերհարթություն:

Պարագրաֆ 2.3 –ում դիտարկվում է Գասքա-Մաեզթուի վարկածը տարածության մեջ և ապացուցվում է, հետևյալ հիմնական թեորեմը՝

Թեորեմ 2.3.1. *GM_d -վարկածը ճիշտ է $\prod_2^3$ -ի համար:*

Երրորդ գլխում ներմուծվում է երեք մաքսիմալներով սահմանափակված GC բազմության հասկացությունը և ապացուցվում է, որ այն իրենից ներկայացնում է ընդհանրացված Նյուտոնի ցանց:

Բերենք Նյուտոնի ընդհանրացված ցանցի սահմանումը: Այստեղ պարզության համար կսահմանափակվենք հարթության դեպքով:

Նշանակենք՝

$$\mathbb{S}_n = \{(i, j, k) \in \mathbb{Z}_+^3 : \quad i + j + k = n\}:$$

Սահմանում 3.1.1. *Դիցուք ունենք ուղիղների երեք խումբ, յուրաքանչյուրում $n+1$ ուղիղ՝*

$$\ell_k^{(r)}; \quad k = 0,1,\dots,n, \quad r = 1,2,3,$$

այնպես, որ բոլոր $3n+3$ ուղիղները իրարից տարբեր են: Բացի այդ ցանկացած $(i, j, k) \in \mathbb{S}_n$ -ի համար $\ell_i^{(1)}, \ell_j^{(2)}, \ell_k^{(3)}$ ուղիղները հատվում են ճիշտ մեկ կետում: Այդ դեպքում հատման կետերի բազմությունը՝

$$\mathbb{X} = \{\bar{x}_{ijk} : \quad \bar{x}_{ijk} = \ell_i^{(1)} \cap \ell_j^{(2)} \cap \ell_k^{(3)}, \quad (i, j, k) \in \mathbb{S}_n\}$$

կհանդիսանա Նյուտոնի ընդանրացված ցանց, եթե

$$\ell_i^{(1)} \cap \ell_j^{(2)} \cap \ell_k^{(3)} \cap \mathbb{X} \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad (i, j, k) \in \mathbb{S}_n :$$

Նյուտոնի ընդհանրացված ցանցը նույնպես բավարարում է GC_n պայմանին[7]:

Այնուհետև պարագրաֆ 3.3 –ում սահմանում ենք GC բազմությունների որոշակի դաս, որը կանվանենք երեք մաքսիմալներով սահմանափակված GC բազմություններ:

Դիցուք X-ը GC_n բազմություն է և l_1, l_2, l_3 ուղիղները մաքսիմալ ուղիղներ են: v_{12}, v_{23} , v_{31} –ով նշանակենք համապատասխան ուղիղների հատման կետերին համապատասխանող հանգույցները (հայտնի է, որ GC բազմության երկու մաքսիմալ ուղիղները հատվում են հանգույցում): (v_{12}, v_{23}, v_{31}) –ը իրենից կներկայացնի եռանկյուն, քանի որ GC բազմության երեք մաքսիմալ ուղիղները չեն հատվում հանգույցում: X կետերի բազմությունը կանվանենք երեք մաքսիմալներով սահմանափակված GC բազմություն, եթե l_1, l_2, l_3 ուղիղներին պատկանող բոլոր հանգույցները ընկած են v_{12}, v_{23}, v_{31} գագաթներով եռանկյան կողերի վրա:

6 C. de Boor, Multivariate polynomial interpolation: Conjectures concerning GC-sets, - Numer. Alg., 45 (2007), pp. 113-125.

7 J. Carnicer and C. Godes. Geometric characterization and generalized principal lattices. J. Approx. Theory, 143:2-14, 2006.

Այնուհետև ապացուցում ենք, որ երեք մաքսիմալներով սահմանափակված GC բազմությունն ունի ճիշտ երեք մաքսիմալ ուղիղ:

Պնդում 3.3.1. *Եթե X-ը երեք մաքսիմալներով սահմանափակված GC բազմություն է, ապա այն ունի ճիշտ երեք մաքսիմալ ուղիղ:*

Այնուհետև ապացուցվում են որոշ օժանդակ արդյունքներ երեք մաքսիմալներով սահմանափակված GC բազմությունների համար:

Դիցուք X-ը երեք մաքսիմալներով սահմանափակված GC_n բազմություն է:
Դիցուք l_1, l_2, l_3 –ը նրա մաքսիմալ ուղիղներն են, իսկ v_{12}, v_{23}, v_{31} –ը համապատասխան մաքսիմալ ուղիղների հատման կետում գտնվող հանգույցները:
Հաշվի առնելով այն հանգամանքը, որ v_{12}, v_{23}, v_{31} –ը գտնվում են սիմետրիկ դիրքերում, պարզ է, որ ինչ ապացուցենք մեկի համար, ճիշտ կլինի մյուս երկուսի համար:

Պնդում 3.3.2. *v_{12} –ի կողմից օգտագործվող յուրաքանչյուր ուղիղ անցնում է մեկական հանգույցով l_1 –ից և մեկական հանգույցով l_2 –ից: Ընդ որում l_1 և l_2 ուղիղներին պատկանող յուրաքանչյուր հանգույց, բացի v_{12} –ից, գտնվում է v_{12} -ի կողմից օգտագործվող ճիշտ մեկ ուղղի վրա:*

Պնդում 3.3.3. *X բազմության ոչ մի հանգույց չի գտնվում v_{12} , v_{23} , v_{31} հանգույցներով սահմանափակված եռանկյունուց դուրս: Կամ այլ բառերով՝ X բազմության հանգույցները սահմանապակված են l_1, l_2, l_3 ուղիղներով:*

Պնդում 3.3.4. *Դիցուք l' ուղիղը օգտագործվում է v_{31} հանգույցի կողմից, իսկ l'' –ն՝ v_{32} –ի: Եթե այդ ուղիղները հատվում են (v_{12}, v_{23}, v_{31}) եռանկյան ներսում, ապա նրանց հատման կետը հանգույց է: Ավելին, եթե l_0' –ն և l_0'' –ն այլ ուղիղներ են համապատասխանաբար v_{31} և v_{32} հանգույցների կողմից օգտագործվող, և նրանցից գոնե մեկը տարբեր է՝ $l' \neq l_0'$ կամ $l'' \neq l_0''$, ապա նրանք հատվում են տարբեր հանգույցներում:*

Պնդում 3.3.5. *v_{31} –ի կողմից օգտագործվող ուղիղները եռանկյան ներսում հատում չունեն: Կամ այլ բառերով՝ եթե $x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{n-1}^1$ -ը l_1 ուղղի ներքին հանգույցներն են, իսկ $x_1^3, x_2^3, \ldots, x_{n-1}^3$ -ը l_3 ուղղի ներքին հանգույցներն են, ապա v_{31} հանգույցի կողմից օգտագործվող այն ուղիղը, որն անցնում է l_1 ուղղի x_i^1 հանգույցով անցնում է l_3 ուղղի x_i^3 հանգույցով, $i = 1,2,\ldots,n-1$:*

Վերջում ապացուցվում է հետևյալ հիմնական թեորեմը՝

Թեորեմ 3.3.1. *Եթե $X \subset R^2$ –ը երեք մաքսիմալներով սահմանափակված GC_n բազմություն է, ապա այն իրենից ներկայացնում է ընդհանրացված Նյուտոնի ցանց:*

Չորրորդ գլխում քննարկվում են որոշ հարցեր՝ կապված երկու հարթ հանրահաշվական կորերի հատման կետի պատիկության հետ, որտեղ հատման պատիկությունը բնութագրվում է մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ օպերատորներով: Կապացուցենք, որ եթե A-ն m-պատիկ կետ է մի կորի համար և n-պատիկ կետ է մեկ այլ կորի համար, ապա A կետում այդ կորերի հատման թվաբանական պատիկությունը կամ հատումների քանակը ամենաքիչը mn է և ճիշտ mn է, եթե այդ կորերը A կետում ընդհանուր շոշափող չունեն:

Այս գլխում մենք գործ կունենանք կոմպլեքս տարածության վրա որոշված միայն երկու փոփոխականից բազմանդամների հետ:

Π_n^0 -ով նշանակենք n աստիճանի համասեռ բազմանդամների տարածությունը իսկ Π -ով n աստիճանի բոլոր բազմանդամների տարածությունը:

Դիցուք $\hat{p}$ -ը և $\check{p}$ –ն p բազմանդամի համապատասխանաբար վերին և ստորին համասեռ շերտերն են:

$p(D) = p\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ -ով նշանակենք p բազմանդամին համապատասխանող հաստատուն գործակիցներով դիֆերենցիալ օպերատորը:

Բերենք կետում կորի հատման պատիկության և կետում երկու կորերի հատման պատիկության սահմանումները[8]:

Սահմանում 4.1.1. *Հետևյալ*

$$M_\lambda(p) = \{f \in \Pi : (D^\alpha f)p|_\lambda = 0, \alpha \in Z_+^2\}$$

բազմանդամային տարածությունը կանվանենք p կորի պատիկության տարածություն λ կետում (որտեղ Z_+ -ը ոչ բացասական ամբողջ թվերի տարածությունն է), իսկ այդ տարածության չափողականությունը՝ p կորի թվաբանական պատիկություն λ կետում:

Սահմանում 4.1.2. $M_\lambda(p,q) = M_\lambda(p) \cap M_\lambda(q)$ *բազմանդամային տարածությունը կանվանենք p և q կորերի հատման պատիկության տարածություն λ կետում, իսկ այդ տարածության չափողականությունը կանվանենք λ կետում p և q կորերի հատումների քանակ կամ թվաբանական պատիկություն:*

(a,b) կետը կոչվում է r-պատիկ կետ p կորի համար եթե p –ի բոլոր ածանցյալները r –ից փոքր զրոյանում են (a,b) կետում և կա ամենաքիչը մեկ r -րդ կարգի ածանցյալ, որը 0 չի այդ կետում: Այսինքն՝

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} p(a,b) = 0, i + j < r, \text{և}$$

$\exists i_0, j_0 \in Z_+$ այնպիսին, որ $i_0 + j_0 = r$, բայց $\frac{\partial^{i_0+j_0}}{\partial x^{i_0} \partial y^{j_0}} p(a,b) \neq 0$:

Հաջորդ պարագրաֆում ապացուցվում է, որ եթե կոորդինատական համակարգի սկզբնակետը m-պատիկ կետ է p կորի համար և n-պատիկ կետ է q կորի համար, ապա p և q կորերը սկզբնակետում ունեն ամենաքիչը mn հատում և ունեն ճիշտ mn հատում եթե p և q կորերը սկզբնակետում ընդհանուր շոշափող չունեն:

Այնուհետև ցույց է տրվում, որ կետում կորի պատիկության տարածությունը իզոմորֆիզմի ճշտությամբ ինվարիանտ է կոորդինատական համակարգի զուգահեռ տեղափոխության նկատմամբ: Այնուհետև, օգտագործելով ստացված արդյունքները, ապացուցվում է, որ վերը նշված հատկությունը տեղի ունի ոչ միայն կոորդինատական համակարգի սկզբնակետի համար, այլ ցանկացած այլ կետի համար:

Այսուհետև $M(p)$ և $M(p,q)$ –ով կնշանակենք համապատասխանաբար $M_{(0,0)}(p)$ և $M_{(0,0)}(p,q)$ պատիկության տարածությունները: $Z(p)$ –ով նշանակենք

$$p(D)f = 0$$

դիֆերենցիալ հավասարման բազմանդամային լուծումների տարածությունը:

$Z(p,q) = Z(p) \cap Z(q)$ –ով հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի բազմանդամային լուծումների տարածությունը՝

$$\begin{cases} p(D)f = 0 \\ q(D)f = 0 \end{cases}:$$

Մի բազմանդամի կիրառությունը մեկ այլ բազմանդամի վրա կհասկանանք որպես համապատասխան դիֆերենցիալ օպերատորի կիրառությունը:

Ապացուցում ենք հետևյալ լեմմաները:

Լեմմա 4.2.1. *Եթե* $p, f \in \Pi$, *ապա* $p(D)f|_{(0,0)} = f(D)p|_{(0,0)}$.

Լեմմա 4.2.2. $Z(p)$ *տարածությունը D-ինվարիանտ է: Կամ այլ բառերով ասած, եթե*

$f \in Z(p)$, *ապա* $f_x \in Z(p)$ *և* $f_y \in Z(p)$:

Լեմմա 4.2.3. *Ցանկացած* $p \in \Pi$ *բազմանդամի համար* $M(p) = Z(p)$:

---

[8] H. Hakopian and M. Tonoyan. Partial differential analogs of ordinary differential equations and systems. New York J. Math., 10:89–116, 2004.

Այս լեմմայից նաև հետևում է, որ $M(p,q) = Z(p,q)$:

Լեմմա 4.2.4. *Եթե $p \in \Pi_m^0$ և $q \in \Pi_n^0$ բազմանդամները չունեն ընդհանուր կոմպոնենտ, ապա $dimZ(p,q) = mn$:*

Լեմմա 4.2.5. *Եթե $f \in Z(p)$ ապա $\hat{f} \in Z(\check{p})$:*

Լեմմա 4.2.6. *Եթե $p \in \Pi_m$ և $q \in \Pi_n$ բազմանդամների ներքին համասեռ շերտերը չունեն ընդհանուր կոմպոնենտ, ապա գոյություն ունի $Z(p,q)$ տարածության այնպիսի բազիս, որտեղ բազմանդամների վերին համասեռ շերտերը գծորեն անկախ են:*

Թեորեմ 4.2.1. *Եթե $p,q \in \Pi$, $\check{p} \in \Pi_m^0$ և $\check{q} \in \Pi_n^0$ ապա $dimZ(p,q) \geq mn$.*

Թեորեմ 4.2.2. *Դիցուք $p,q \in \Pi$: Եթե $\check{p} \in \Pi_m^0$ և $\check{q} \in \Pi_n^0$ բազմանդամները ընդհանուր բաժանարար չունեն ապա $dimZ(p,q) = mn$:*

Միավորելով Թեորեմ 4.2.1 և Թեորեմ 4.2.2 –ի արդյունքները՝ կարող ենք ձևակերպել հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 4.2.3. *Երկու հարթ հանրահաշվական կորերի հատումների քանակը կոորդինատական համակարգի սկզբնակետում ամենաքիչը mn է և ճիշտ mn է, եթե այդ կորերին համապատասխանող բազմանդամները չունեն ընդհանուր կոմպոնենտ, կամ որ նույնն է՝ այդ կորերը սկզբնակետում ընդհանուր շոշափող չունեն, որտեղ m – ը և n -ը համապատասխանաբար այդ կորերի ներքին համասեռ շերտերի աստիճաններն են:*

Հետևանք 4.2.1. (Լուծման շարունակման մասին) *Դիցուք $p,q \in \Pi$ և $\check{p}$ և $\check{q}$ բազմանդամները ընդհանուր արտադրիչ չունեն: Եթե $f' \in Z(\check{p},\check{q})$, ապա գոյություն ունի $f \in \Pi$ այնպիսին, որ $\check{f} = f'$ և $f \in Z(p,q)$:*

Կետում կորի պատիկության տարածության ինվարիանտությունը (կոորդինատական համակարգի զուգահեռ տեղափոխության նկատմամբ) ապացուցելու միջոցով ապացուցվում է հետևյալ հիմնական թեորեմը:

Թեորեմ 4.2.4. *Եթե A –ն m-պատիկ կետ է p կորի համար և n-պատիկ կետ է q կորի համար, ապա p և q կորերը A կետում ունեն ամենաքիչը mn հատում և ունեն ճիշտ mn հատում, եթե այդ կետում կորերը ընդհանուր շոշափող չունեն:*

Պարագրաֆ 4.3 –ում մենք կնկարագրենք երկու կորերի հատման կետի պատիկության տարածությունը, որտեղ այդ կորերը տրված են որպես այդ կետով անցնող համապատասխանաբար m և n քանակով ուղիղների արտադրյալ: Գլխավոր արդյունքը տալիս է այդ տարածության բազիսը՝ օգտագործելով բազմանդամներ, որոնք համապատասխանում են այդ ուղիղների ուղղությամբ ածանցյալներին:

Արդեն ցույց ենք տվել, որ կոորդինատական համակարգի զուգահեռ տեղափոխությունից կետում կորի պատիկության տարածությունը մնում է նույնը (իզոմորֆիզմի ճշտությամբ, յուրաքանչյուր բազմանդամի համապատասխանում է նույն բազմանդամը միայն տեղափոխված կոորդինատական համակարգում): Ուստի առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ այդ կետը կոորդինատական համակարգի սկզբնակետն է, քանի որ դրան միշտ կարող ենք հասնել կոորդինատական համակարգի զուգահեռ տեղափոխության միջոցով: Այդ դեպքում պարզ է, որ այդ կետով անցնող ուղիղների արտադրյալով կորոշվի երկչափ համասեռ բազմանդամ: Մյուս կողմից գիտենք, որ երկու փոփոխականից ցանկացած համասեռ բազմանդամ իրենից ներկայացնում է կոորդինատական համակարգի սկզբնակետով անցնող ուղիղների արտադրյալ[9]: Այսպիսով, մենք նկարագրելու ենք երկու համասեռ կորերի հատման

[9] R. S. Walker, Algebraic Curves, - Springer, Berlin (1978).

պատիկության տարածությունը կոորդինատական համակարգի սկզբնակետում, եթե նրանք չունեն ընդհանուր արտադրիչ։

Նշանակենք $M = M_{(0,0)}$ ։ M տարածության բազիսը կառուցելու համար մեզ պետք կգան հետևյալ օժանդակ պնդումները։

Պնդում 4.3.1. *Դիցուք* $l(x,y) = \alpha x + \beta y$, $p(x,y) = \sum_{i+j=n} a_{ij} x^i y^j$, *ապա* $l^n(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) p(x,y) = n!\, p(\alpha, \beta)$ *։*

Մասնավորապես եթե $p(x,y) = l_1 \cdot \ldots \cdot l_n$, *որտեղ* $l_i = a_i x + b_i y$, $i = 1,2,\ldots,n$, *կունենանք, որ եթե* (α, β) *կետը պատկանում է* l_i *ուղիղներից որևէ մեկին ապա* $l^n(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) p(x,y) = 0$ *։ Ընդհանուր դեպքում* $l^n(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})(l_1 \cdot \ldots \cdot l_n) = 0$ *այն և միայն այն դեպքում եթե* l *ուղիղն ունի* $l_1, l_2, \ldots, l_n$ *ուղիղներից որևէ մեկի ուղղությունը։*

Պնդում 4.3.2. *Դիցուք տրված են* $\{l_i\}_{i=1}^{n+1}$ *տարբեր ուղիղներ* $(0,0)$ *կետով անցնող, այդ դեպքում* $l_1^k, l_2^k, \ldots, l_{n+1}^k$ *բազմանդամները գծորեն անկախ են, որտեղ* $k \ge n$ *։*

Այժմ օգտագործելով վերևի պնդումները՝ կարող ենք ապացուցել հետևյալ թեորմը։

Թեորեմ 4.3.1. *Դիցուք* C_1 *կորը տրված է որպես* $l_1, l_2, \ldots, l_m$ *ուղիղների արտադրյալ, որոնք անցնում են* $(0,0)$ *կետով։* $C_1 : P(x,y) = l_1 l_2 \cdot \ldots \cdot l_m = 0$ *։ Իսկ* C_2 *կորը տրված է որպես* $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \ldots, \tilde{l}_n$ *ուղիղների արտադրյալ, որոնք նույնպես բոլորն անցնում են (0,0) կետով, բոլորը տարբեր են միմյանցից և* l_i *ուղիղներից։* $C_2 : Q(x,y) = \tilde{l}_1 \tilde{l}_2 \cdot \ldots \cdot \tilde{l}_n = 0$ *։ Դիցուք* $n \ge m$ *։ Դիցուք* L_i *և* $\tilde{L}_i$ *համապատասխանաբար* l_i *and* $\tilde{l}_i$ *ուղղություններին համապատասխանող ածանցյալներին համապատասխանող բազմանդամներն են։ Այդ դեպքում հետևյալ* mn *քանակությամբ բազմանդամների բազմությունը հանդիսանում է M տարածության բազիս ։*

$$
\begin{array}{ccccccc|llll}
1 & L_1 & L_1^2 & L_1^3 & \ldots & L_1^{m-1} \ \ldots & L_1^{n-1} & & & & \\
 & L_2 & L_2^2 & L_2^3 & \ldots & L_2^{m-1} \ \ldots & L_2^{n-1} & \{L_2^n, L_1^n\} & & & \\
 & & L_3^2 & L_3^3 & \ldots & L_3^{m-1} \ \ldots & L_3^{n-1} & \{L_3^n, L_1^n\} & \{L_3^{n+1}, L_1^{n+1}, L_2^{n+1}\} & & \\
 & & & L_4^3 & \ldots & L_4^{m-1} \ \ldots & L_4^{n-1} & \{L_4^n, L_1^n\} & \{L_4^{n+1}, L_1^{n+1}, L_2^{n+1}\} & \{L_4^{n+2}, L_1^{n+2}, L_2^{n+2}, L_3^{n+2}\} & \\
 & & & . & . & . & . & . & . & . & \\
 & & & . & . & . & . & . & . & . & \ldots \\
 & & & . & . & . & . & . & . & . & \\
 & & & & & L_m^{m-1} \ \ldots & L_m^{n-1} & \{L_m^n, L_1^n\} & \{L_m^{n+1}, L_1^{n+1}, L_2^{n+1}\} & \{L_4^{n+2}, L_1^{n+2}, L_2^{n+2}, L_3^{n+2}\} & \ldots \{L_m^{n+m-2}, L_1^{n+m-2}, \ldots, L_{m-1}^{n+m-2}\}
\end{array}
$$

Այստեղ $\{L_1,\ldots,L_k\}$ *-ը իրենից ներկայացնում է* $L_1,\ldots,L_k$ *բազմանդամների գծային կոմբինացիա, որի գործակիցները նկարագրվում են ապացույցի ընթացքում:*

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԱՐԴՅՈՒՆՔՆԵՐԸ

Ատենախոսությունում ստացված են հետևյալ հիմնական արդյունքները՝

1. Ապացուցված է մի քանի փոփոխականներով բազմանդամային միջարկման վերաբերյալ Գասքա-Մաեզթուի ընդհանրացված վարկածը երկրորդ աստիճանի բազմանդամների համար եռաչափ դեպքում:
2. Ներմուծված է երեք մաքսիմալ ուղիղներով սահմանափակված երկրաչափական բնութագիր ունեցող բազմության հասկացությունը և ապացուցված է, որ այն իրենից ներկայացնում է ընդհանրացված Նյուտոնի ցանց:
3. Ստացված է կետում երկու հարթ հանրահաշվական կորերի հատման պատիկության ճշգրիտ գնահատական այն դեպքում, երբ պատիկությունը բնութագրվում է հաստատուն գործակիցներով դիֆերենցիալ օպերատորների միջոցով:
4. Նկարագրված է կետում երկու հարթ հանրահաշվական կորերի հատման պատիկության տարածությունը այն դեպքում, երբ կորերը այդ կետով անցնող ուղիղների փնջեր են:

ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅԱՆ ԹԵՄԱՅԻ ՇՐՋԱՆԱԿՆԵՐՈՒՄ ՀՐԱՊԱՐԱԿԱԾ ԱՇԽԱՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՑԱՆԿԸ

1. Apozyan, G. Avagyan and G. Ktryan, “On the Gasca-Maeztu conjecture in $\mathbb{R}^3$ “,East J. on Approx., 16, 1 2010, pp. 25-33.
2. G.S. Avagyan, “On multiple intersection point of homogeneous curves”. Proceedings of YSU, vol. 3, 2009, pp. 32-37.
3. G.S. Avagyan, “On the multiplicity of intersection point of two plane algebraic curves”, Journal of Contemporary Mathematical Analysis, vol. 45, 3, 2010, pp. 123-127.
4. GS. Avagyan, “On generalized principal lattices and geometric characterization”, East J. on Approx., 16, 3 2010, pp. 247-257.

РЕЗЮМЕ

Авагян Григор Славикович

О МНОГОМЕРНОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И О КРАТНОСТИ ТОЧКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ КРИВЫХ

Одномерная полиномиальная интерполяция является классической задачей с давней историей и с довольно полной теорией. Задача многомерной полиномиальной интерполяции намного сложнее и многие фундаментальные проблемы остаются открытыми до сих пор. В отличии от одномерного случая, в многомерной интерполяции существование и единственность интерполяционного многочлена Лагранжа всегда зависит от геометрического распределения интерполяционных точек. Обозначим пространство двумерных многочленов степени не больше n через $\Pi_{\mathrm{n}}(\mathbb{R}^2)$. Известной корректной конструкцией интерполяционых точек для этого пространства является множество $\binom{n+2}{2}$ точек, удовлетворяющих геометрической характеристики (GC_n), введенной Чанг и Яо. Примерно 27 лет назад Гаска и Маезту предложили GM гипотезу, в которой утверждается, что для каждого GC_n множества в $\mathbb{R}^2$, существует прямая, которая проходит через $n+1$ точек этого множества. Прямые, содержащие $n+1$ точек GC_n множества X называются максимальными прямыми. Максимальные прямые играют важную роль в исследовании GC множеств. До сих пор доказано, что GM гипотеза верна для степеней $n \leq 4$. Для $n = 5$ гипотеза ни доказана и ни опровергнута. Карл де Бор обобщил GM гипотезу для R^d и назвал ее GM_d гипотезой, которая утверждает, что для каждого GC_n множества в R^d, существует гиперплоскость, которая содержит $dim\Pi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{d}} - \mathrm{dim}\Pi_{\mathrm{n-1}}^{\mathrm{d}}$ точек этого множества. В диссертаций доказано, что эта гипотеза верна для Π_2^3, то есть верна следующая

Теорема. *Пусть $X \subset R^3$ - GC_2 множество с $\#X = dim\Pi_2^3 = 10$. Тогда, существует максимальная плоскость, т.е. существует плоскость, которая проходит через $dim\Pi_2^3 - dim\Pi_1^3 = 6$ узла множества X.*

Далее, в работе исследованы GC множества, имеющие ровно три максимальные прямые. GC множества с тремя максимальными прямыми представляют особый интерес, так как, это минимально возможное число максимальных прямых, при предположении, что GM гипотеза верна [см. “J. M. Carnicer and M. Gasca, On Chung and Yao’s geometric characterization for bivariate polynomial interpolation, Curve and Surface Design, 2003, pp. 11-30”].

Обобщенные сети Ньютона являются множествами узлов, порожденных тремя семействами прямых. Известно, что обобщенные сети Ньютона удовлетворяют геометрической характеристике и содержат три максимальные прямые. Дж. Карнисер и Ц. Годес показали, что обратное утверждение верно для степеней ≤ 7. То есть, если множество узлов удовлетворяет геометрической характеристике и имеет ровно три максимальные прямые, то оно является обобщенной сетью Ньютона [см. “J. Carnicer and C. Godes. Geometric characterization and generalized principal lattices. J. Approx. Theory, 143:2-14, 2006”]. В диссертаций это утверждение доказано для произвольной степени, но с одним ограничением на распределение узлов на максимальных прямых, а именно: если множество узлов удовлетворяет геометрической характеристике и ограничено тремя максимальными прямыми, то оно является обобщенной сетью Ньютона.

В сязи с многомерной полиномиальной интерполяцией Эрмита мы исследуем понятие кратности точки пересечения двух плоских алгебраических кривых, где кратность описывается с помощью дифференциальных операторов с постоянными коэффицентами. Мы используем одну и ту же букву для обозначения многочлена $p \in \Pi$ и кривой данной этим многочленом, т.е., определенной уравнением $p(x, y) = 0$. Через $p(D) = p(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$, обозначаем дифференциальный оператор с постоянными коэффицентами, соответствующий многочлену p. Ниже приводим определение кратности точки кривой и кратности точки пересечения двух кривых [см. “H. Hakopian and M. Tonoyan. Partial differential analogs of ordinary differential equations and systems. NewYork J. Math., 10:89–116, 2004”].

Определение 1. *Пространство многочленов* $M_\lambda(p) = \{f \in \Pi : D^\alpha f(D)p|_\lambda = 0, \alpha \in Z_+^2\}$, *называется пространством кратности точки* λ *относительно кривой* p, *а число* $dimM_\lambda(p)$ *называется ее арифметической кратностью.*

Определение 2. *Пространство многочленов* $M_\lambda(p) = \{f \in \Pi : D^\alpha f(D)p|_\lambda = 0, \alpha \in Z_+^2\}$ *называется пространством кратности пересечения точки* λ *относительно кривых* p *и* q, *а число* $dimM_\lambda(p, q)$ *называется числом пересечения указанных кривых в точке* λ *или арифметической кратностью точки пересечения.*

Существуют различные способы определения кратности пересечения двух кривых, для которых теорема Безу верна. Один из таких способов использует формальные степенные ряды и основан на результанте двух кривых. Для этого определение доказано, что, если A – m-кратная точка для F и n-кратная точка для G, то F и G имеют не менее mn пересечений в A, и имеют в точности mn пересечений, если F и G не имеют общих касательных в A [см. “R. S. Walker, Algebraic Curves, - Springer, Berlin (1978)”]. Мы доказываем, что это утвеждение верно и для кратности пересечения в смысле **Определения 2**.

В конце диссертационной работы, мы описываем пространство кратности точки пересечения двух кривых для одного частного случая.

Основные результаты полученные в диссертационной работе:

1. Обобщенная гипотеза Гаска-Маезту доказана для многочленов второй степени в трехмерном случае.
2. Введено понятие ограниченности тремя максимальными прямыми для множества узлов удовлетворяющего геометрической характеристике. Доказано, что множество узлов, удовлетворяющее геометрической характеристике и ограниченное тремя максимальными прямыми, является обобщенной сетью Ньютона.
3. Получена точная оценка арифметической кратности точки пересечения двух плоских алгебраических кривых, где кратность определяется с помощью дифференциальных операторов с постоянными коэффицентами. Доказано, что если A – точка с кратностью m для одной из кривых и точка с кратностью n для другой, то арифметическая кратность точки пересечения A не меньше mn и есть в точности mn, если кривые не имеют общих касательных в точке A.
4. Описано пространство кратности точки пересечения двух алгебраических кривых в случае, когда кривые являются пучками прямых проходящие через эту точку, т.е., кривые являются как произведения разных прямых, проходящих через эту точку.

ABSTRACT

Avagyan Grigor

ON MULTIVARIATE POLYNOMIAL INTERPOLATION AND MULTIPLICITY OF INTERSECTION POINT OF CURVES

The univariate polynomial interpolation is a classical subject, with a long history and a rather complete theory. The multivariate polynomial interpolation is much more complicated and many fundamental problems are still open. In contrast to the univariate case in multivariate polynomial interpolation the existence and uniqueness of a Lagrange interpolation polynomial always depend on the geometrical distribution of the interpolation points. Let us denote the space of bivariate polynomials of degree not greater than n by $\Pi_n(\mathbb{R}^2)$. A well-known unisolvent (or poised) construction of interpolation points for this space is the one of $\binom{n+2}{2}$ points satisfying the geometric characterization (GC_n) introduced by Chung and Yao. About 27 years ago Gasca and Maeztu made the GM conjecture which says that for every GC_n set in R^2 there is a line which passes through $n + 1$ points of that set. Lines containing $n+1$ points of a GC_n set X are called maximal lines. Maximal lines play an important role in the investigation of GC sets. So far it is proved that GM conjecture is true for the degrees $n \leq 4$. For $n = 5$ the conjecture neither is proved nor disproved. Carl de Boor generalized the GM conjecture for R^d as GM_d conjecture which says that for every GC_n set in R^d there is a hyperplane which contains $dim\Pi_n^d - \dim\Pi_{n-1}^d$ points of that set. In the thesis we show that this conjecture is true for Π_2^3, namely, we have

Theorem. *Let $X \subset R^3$ be a GC_2 set with $\#X = dim\Pi_2^3 = 10$. Then there is a maximal plane, i.e., there is a plane which passes through $dim\Pi_2^3 - dim\Pi_1^3 = 6$ nodes of X.*

Next in the thesis we investigate the GC sets having exactly three maximal lines. The GC sets with exactly three maximal lines are of special interest because it is the minimal possible number of maximal lines for a GC set provided that the GM conjecture is true [see "J. M. Carnicer and M. Gasca, On Chung and Yao's geometric characterization for bivariate polynomial interpolation, Curve and Surface Design, 2003, pp. 11-30"]. Generalized principle lattices are sets of nodes generated by three families of lines. It is well known that generalized principle lattices satisfy the geometric characterization and contain exactly three maximal lines. J. Carnicer and C. Godes have shown that the converse statement is valid for degrees ≤ 7 . Namely, if a set of nodes satisfies the geometric characterization and has exactly three maximal lines, then it is a generalized principal lattice [see "J. Carnicer and C. Godes. Geometric characterization and generalized principal lattices. J. Approx. Theory, 143:2-14, 2006"]. In the thesis we prove the same statement for arbitrary degrees, but with certain restriction on the distribution of nodes on the maximal lines. Namely, if a set of nodes satisfies geometric characterization and is bounded by three maximal lines, then it is a generalized principal lattice.

In connection with the Hermit multivariate polynomial interpolation we study the concept of multiplicity of intersection point of two plane algebraic curves, where the multiplicity is characterized by means of constant coefficient differential operators. We use the same letter to denote the polynomial $p \in \Pi$ and the curve arisen by this polynomial, i.e. given by the equation

$p(x,y) = 0$. With $p(D) = p(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y})$, we denote the constant coefficient differential operator corresponding to the polynomial p. Below we bring the definition of multiplicity of a point of a curve and that of an intersection point of two curves [see "H. Hakopian and M. Tonoyan. Partial differential analogs of ordinary differential equations and systems. New York J. Math., 10:89–116, 2004"].

Definition 1. *The polynomial space*

$$M_\lambda(p) = \{f \in \Pi: D^\alpha f(D)p|_\lambda = 0, \alpha \in Z_+^2\},$$

is called the multiplicity space of the point λ *with respect to the curve* p, *and the number* $dim M_\lambda(p)$ *- the arithmetical multiplicity.*

Definition 2. *The space*

$$M_\lambda(p,q) = M_\lambda(p) \cap M_\lambda(q),$$

is called the intersection multiplicity space of the point λ *with respect to the curves* p *and* q, *and* $dim M_\lambda(p,q)$ – *the number of intersections of those curves at the point* λ *or the arithmetical multiplicity of the intersection point.*

There are different definitions of intersection multiplicity of two curves at a point, in case of which the theorem of Bezout holds. One of the approaches is defined by formal power series and is based on the resultant of two curves. With this approach it is proved that if A is an m-fold point for F and n-fold point for G then F and G have at least mn intersections at A, and they have exactly mn intersections there if F and G have no common tangents at A [see "R. S. Walker, Algebraic Curves, - Springer, Berlin (1978)"]. We prove that the same statement is true with the intersection multiplicity given in **Definition 2.**

At the end of the thesis we also give a description of the multiplicity space of intersection point of two curves in a particular case.

The following main results are obtained in the thesis:

5. The generalized Gasca-Maeztu conjecture is proved for second degree polynomials in trivariate case.
6. For the set of nodes satisfying geometric characterization it is introduced the concept of the boundedness by three maximals. It is proved that a set of nodes satisfying the geometric characterization and bounded by three maximal lines is necessarily a generalized principal lattice.
7. An exact estimate for the arithmetical multiplicity of intersection point of two plane algebraic curves is obtained, where the multiplicity is given by constant coefficient differential operators. It is proved that if A is a point of multiplicity m for one of the curves and, a point of multiplicity n for the other curve, then the arithmetical multiplicity of the intersection point A (or the number of intersections) is not less than mn and is equal to mn when the curves do not have a common tangent at the point A.
8. The multiplicity space of intersection point of two plane algebraic curves is described in the case when the curves are pencils of lines passing through that point, i.e., curves are given as products of distinct lines, passing through that point.