ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԱՄԻՐՋԱՆ ԼԵՎԻԿԻ ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

ԽՄԲԵՐԻ n-ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼՆԵՐԻ ԱՎՏՈՄՈՐՖԻԶՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա.01.06 – "Հանրահաշիվ և թվերի տեսություն" մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ - 2012

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ГЕВОРГЯН АМИРДЖАН ЛЕВИКОВИЧ

ОБ АВТОМОРМФИЗМАХ n-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.06 – "Алгебра и теория чисел"

ЕРЕВАН - 2012

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի խորհրդի կողմից:

Գիտական ղեկավար՝	ֆիզ–մաթ. գիտ. դոկտոր Վ. Ս. Աթաբեկյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	ֆիզ–մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆ. Ռ. Ա. Սարգսյան ֆիզ–մաթ. գիտ. դոկտոր Վ. Հ. Միքայելյան
Առաջատար կազմակերպություն՝	Խ. Աբովյանի անվ. Հայկական պետական մանկավարժական համալսարան,

Պաշտպանությունը կկայանա 2012թ. հունիսի 19–ին ժ. 15^{00}–ին Երևանի պետական համալսարանում գործող ԲՈՀ-ի Մաթեմատիկայի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում (0025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքվել է 2012թ. մայիսի 18–ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար,

ֆիզ–մաթ. գիտ. դոկտոր, դոցենտ Տ. Ն. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена советом факультета математики и механики Ереванского государственного университета.

Научный руководитель:	доктор физ–мат. наук В. С. Атабекян
Официальные оппоненты:	доктор физ–мат. наук, проф. Р.А.Саргсян
	доктор физ–мат. наук, В. Г. Микаелян
Ведущая организация:	Армянский государственный педагогический университет им. Х.Абовяна,

Защита диссертации состоится 19 июня 2012г. в 15^{00} на заседании специализированного совета ВАК Математика 050 при Ереванском государственном университете (0025, г. Ереван, ул. Ал. Манукяна 1).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.

Автореферат разослан 18–ого мая 2012г.

Ученый секретарь специализированного совета,

доктор физ–мат. наук, доцент Т. Н. Арутюнян

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В диссертации исследуются автоморфизмы n-периодических произведений групп. Изучаются внешние и нормальные автоморфизмов n-периодических произведений некоторых классических групп.

Операции n-периодических произведений групп были введены С.И.Адяном в работе [1]. Им было установлено, что для каждого нечетного $n \geq 665$ может быть построена новая операция умножения групп, названная *периодическим произведением данного периода* n или n-*периодическим произведением*. Построенные операции периодического произведения групп решают проблему А.И.Мальцева о существовании отличной от свободного и прямого произвдения ассоциативной, точной и наследственной по подгруппам операции (см. также [2], [3], [4]). Доказано также (см. [5]), что периодическое произведение нечетного периода $n \geq 665$ данного семейства групп является простой группой в том и только том случае, когда каждый множитель этого произведения становится единичной группой при добавлении тождества $x^n = 1$. Указанный критерий простоты позволяет строить новые серии конечно порожденных бесконечных простых групп в многообразиях периодических групп нечетного составного периода nk, где $k > 1$ и $n \geq 665$. Этим, в частности, дается положительным ответом на проблему 23 из монографии Х.Нейман [6]: может ли многообразие, отличное от многообразия всех групп, содержать бесконечное количество неизоморфных неабелевых простых групп?

Работой [1] С.И.Адяна открылись новые возможности в теории периодических групп. В ней показано, что теория Новикова-Адяна может быть распространена на изучение факторизаций свободных произведений по специально выбранным соотношениям вида $X^n = 1$.

Теория Новикова-Адяна первоначально была создана для решения известной проблемы Бернсайда о конечно порожденных периодических группах. Если порядок конечной группы равен n, то в ней выполняется тождественное соотношение $x^n = 1$. Проблема Бернсайда спрашивает обратное: *будет ли локально конечной всякая группа, в которой выполняется тождество* $x^n = 1$*?* Впервые отрицательное решение этой проблемы было получено в серии совместных работ [7]. В последствии, созданная в [7] теория была усовершенствована и опубликована в монографии [8], где было доказано, что для всех $m > 1$ и нечетных $n \geq 665$ свободная бернсайдовая группа $B(m, n)$ бесконечна. Свободной бернсайдовой группой $B(m, n)$ периода n и ранга m называется группа, имеющая следующее задание:

$$B(m, n) = \langle a_1, a_2, ...a_m |\ X^n = 1 \text{ для всех слов } X = X(a_1, ..., a_m) \rangle.$$

Группа $B(m,n)$ свободна в многообразии всех n-периодических групп, т.е. всех групп, в которых выполняется тождественное соотношение $x^n = 1$. Ключевые результаты о свободных бернсайдовых группах, полученные на базе теории, построенной в фундаментальных работах [7]–[8], показывают, что группы монографии [8] обладают многими свойствами, аналогичными свойствам абсолютно свободных групп. Как установлено С.И. Адяном в монографии, при $m > 1$ и любом нечетном $n \geq 665$: a) в группе $B(m,\, n)$ разрешимы проблемы равенства и сопряженности, b) всякая коммутативная или конечная подгруппа группы $B(m,\, n)$ – циклическая группа, c)центр группы $B(m,\, n)$ – тривиален, d) для любого конечного ранга $m > 1$ группа $B(m,\, n)$ имеет показательный рост, e)группа $B(2,\, n)$ содержит изоморфные копии свободных периодических групп $B(m,\, n)$ любого конечного ранга $m \geq 1$, f)при $m > 65$ (а также при $m > 1$ и составных нечетных $n = ks$, где $k \geq 665$ и $(k, s) = 1$) группа $B(m,\, n)$ не удовлетворяет условиям минимальности и максимальности для нормальных подгрупп. Кроме того, для $m > 1$ и нечетных $n \geq 665$ группа $B(m,\, n)$ может быть представлена как предел бесконечной серии гиперболических групп, т.е. групп, задаваемых конечным числом определяющих соотношений с условием Дена, в то время как сама группа $B(m,\, n)$ не только негиперболична, но и не может быть задана конечной системой определяющих соотношений (см. [8, гл.VI, теорема 2.13]), [9] – [12]).

Автоморфизм группы G называется внутренним, если он имеет вид $i_g(x) = gxg^{-1}$, т. е. образ всякого элемента из G получается сопряжением фиксированным элементом g. Если $\phi(H) = H$ для любой нормальной подгруппы H группы G, то автоморфизм ϕ называется **нормальным автоморфизмом группы** G. Ясно, что все внутренние автоморфизмы являются нормальными. Возникает естественный вопрос об обратном включении. В общем случае ответ отрицателен, т.е. существуют группы, для которых существует автоморфизмы которые являются нормальными но не внутренним. Примеры такого рода групп построены и в данной диссертации. Тем не менее, совпадение нормальных и внутренних автоморфизмов установлено для многих классов групп.

А. Любоцкий в [13] и А. Лю в [14] независимо доказали, что каждый нормальный автоморфизм нециклической абсолютно свободной группы F является внутренним, т.е. имеет место равенство $Inn(F) = Aut_{\mathcal{N}}(F)$, где $Inn(F)$ и $Aut_{\mathcal{N}}(F)$ – группы всех внутренних и нормальных автоморфизмов соответственно. Соответствующее равенство было доказано в разные годы для различных интересных классов групп (см. [13] – [21]). В частности, В.Романков [16] показал, чо если G – свободная разрешимая группа класса $r \geq 2$, то ее группы нормальных и внутренних автоморфизмов совпадают. Аналогичное утвержде-

ние для свободных нильпотентных групп ступени нильпотентности 2 доказал Г.Эндимиони [19], а для фундаментальных групп замкнутых поверхностей отрицательной эйлеровой характеристики доказано О.Богополским, Е.Кудрявцевой и Х.Цишангом [20]. М.В.Нещадим в [22], усиливая результаты работ [13] и [14], доказал, что каждый нормальный автоморфизм свободного произведения нетривиальных групп – внутренний. А.Минасян и Д.Осин в [21] доказали, что если G – нециклическая относительно гиперболическая группа без нетривиальных конечных нормальных подгрупп, то $Inn(G) = Aut_{\mathcal{N}}(G)$.

Вопрос об исследовании автоморфизмов периодических групп представляет особый интерес и был поставлен А.Ю.Ольшанским в коуровской тетради. Значительные результаты в этом направлении появились лишь сравнительно недавно в работах [24]–[30]. В работе [23] доказано, что каждый нормальный автоморфизм свободной бернсайдовой группы $B(m,n)$ нечетного периода $n \geq 1003$ является внутренним. Показано также, что группа внутренних автоморфизмов групп $B(m,n)$ является максимальной среди всех тех подгрупп группы $Aut(B(m,n))$, порядки элементов которых ограничены числом n. В работах [25]–[26] в $Aut(B(m,n))$ указаны свободные полугруппы для всех нечетных экспонент $n \geq 665$ (см. также [27]). Более того, в работе [28] найдена абсолютно свободная подгруппа в группе $Aut(B(3,n))$ при достаточно больших нечетных n.

Цель работы.

1. Исследование автоморфизмов n–периодических произведений бесконечных циклических групп при нечетных $n \geq 665$.

2. Описание нормальных автоморфизмов n–периодических произведений циклических групп нечетного порядка $r \geq 1003$, в случаях, когда r делит n.

3. Построение внешних нормальних автоморфизма n–периодических произведений некоторых периодических групп ограниченного периода.

4. Исследование автоморфизмов свободных групп, стабилизирующих нормальные подгруппы бесконечного индекса.

Методы исследования. В работе применяются различные методы комбинаторной теории групп и теории n-периодических произведений, а также – элементы теории Новикова-Адяна.

Научная новизна. Все результаты работы являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты работы имеют теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы при изучении автоморфизмов различных групп и при исследовании периодических групп.

Апробация полученных результатов. Основные результаты диссертации докладывались на годичных научных конференциях 2010 г. и 2011 г. Российско-Армянского(Славянского) университета, на международных конференциях "Мальцевские чтения – Новосибирск, 2011 "Международная конференция, посвященная 100-летию проф. В. В.Морозова, Казань-2011".

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в четырёх статьях и двух тезисах, список которых приводится в конце автореферата. Из совместной работы 1) автору принадлежит теорема 2.1 и следствие 2.2, а из совместной работы 6) – теорема 1.

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 68 страницах и состоит из введения, четерех глав, содержащих 23 параграфа, и списка литературы из 76 наименований.

Содержание работы

Во введении приведен обзор результатов, связанных с темой диссертации а также краткое описание содержания диссертации.

Содержание главы 1. В главе 1 исследуются автоморфизмы n-периодических произведений циклических групп. Доказывается структурная теорема об автоморфизмах n-периодических произведений циклических групп, порядки каторых или бесконечны, или являются собственными кратными числа n, где $n \geq 665$ – произвольное нечетное число.

Первое основное утверждение этой главы является теорема 1.1. В нем, в частности, указываются условия, которым удовлетворяют все автоморфизмы периодических произведений бесконечных циклических групп.

Теорема 1.1. *Пусть* $F = \prod_{i \in I}{}^{n} \langle a_i \rangle$ *есть* $n-$*периодическое произведение циклических групп* $\langle a_i \rangle$, $i \in I$, *порядок каждой из которых или бесконечен, или есть некоторое нечетное число* $n_i \neq n$, *для которой наибольший общий делитель* $(n_i, n) > 1$. *Тогда*

a. если ϕ *есть автоморфизм группы* F, *то для любого* $i \in I$ *существует такой* $j \in I$, *что* $\phi(a_i) = u_i a_j^s u_i^{-1}$, $u_i \in F$, $s \in \mathbb{Z}$. *При этом,* $s = \pm 1$, *если порядок* a_i *бесконечен и* s *взаимно прост с* n_i, *если порядок* a_i *равен* n_i*;*

b. если ϕ *есть нормальный автоморфизм группы* F, *то* $\phi(a_i) = u_i a_i^s u_i^{-1}, u_i \in F$, $i \in I$. *При этом,* $s = 1$, *если порядок* a_i *бесконечен, и* s *взаимно прост с* n_i, *если порядок* a_i *равен* n_i.

Из этого получается следующее следствие для $n-$периодического произведения бесконечных циклических групп.

Следствие 1.1 *Пусть* $F = \prod\limits_{i\in I}{}^{n}\langle a_i\rangle$ *есть* $n-$*периодическое произведение бесконечных циклических групп. Тогда*

a. если ϕ *есть автоморфизм группы* F*, то для любого* $i \in I$ *существует такой* $j \in I$*, что* $\phi(a_i) = u_i a_j^{\epsilon} u_i^{-1}$*, где* $u_i \in F$ *и* $\epsilon = \pm 1$*;*

b. если ϕ *есть нормальный автоморфизм группы* F*, то* $\phi(a_i) = u_i a_i u_i^{-1}, u_i \in F$ *для любого* $i \in I$*.*

При доказательстве приведенных результатов существенно используется следующее предложение, которое представляет отдельный интерес.

Предложение 1.1. *Пусть* $G = \prod\limits_{i\in I}{}^{n} G_i$ *есть* n*-периодическое произведение* G_i*,* $i \in I$*, где* $n \geq 665$ *– произвольное нечетное число. Тогда для каждой подгруппы* G_i *группы* G *и для любого* $x \in G$*,* $x \notin G_i$ *имеет место равенство* $G_i \bigcap xG_ix^{-1} = \{1\}$*.*

Напоминаем, что *подгруппа* H *группы* G *называется антинормальной подгруппой, если для каждого элемента* $x \in G \setminus H$ *имеет место равенство* $H \bigcap xHx^{-1} = \{1\}$*.*

Таким образом, из предложения 1.1 следует, что множители n-периодического произведения являются антинормальными подгруппами всего произведения.

Содержание главы 2. В работе [23] доказано, что все нормальные автоморфизмы n-периодических произведений циклических групп порядка n нечетных $n \geq 1003$ являются внутренними. Совпадение нормальных автоморфизмов с внутренними доказано и для некоторых других классов групп: для проконечных групп – М.Жарденом [15], для свободных разрешимых про-p-групп ступени разрешимости ≥ 3 – Н.С.Романовским [17], для свободных нильпотентных групп ступени нильпотентности 2 – Г.Эндимиони [19], для фундаментальных групп замкнутых поверхностей отрицательной эйлеровой характеристики - О.Богополским, Е.Кудрявцевой и Х.Цишангом [20].

Совпадение нормальных и внутренних автоморфизмов для свободного произведение бесконечных циклических групп был получен А. Любоцким в [13], а для свободного произведения произвольных нетривиальных групп – М.В.Нещадимом в [21].

Заметим, что аналогичное утверждение в общем случае неверно для n-периодических произведений групп. Этот вопрос мы обсудим в следующей главе диссертации.

В.А.Романковым в [16] указаны достаточные условия, при которых множества нормальных автоморфизмов и внутренних автоморфизмов группы $F/[N, N]$ (где F - абсолютно свободная группа и N – произвольная нормальная подгруппа) совпадают.

А.Минасяном и Д.Осиным в [21] доказывается, что если G - нециклическая относительно гиперболическая группа без нетривиальных конечных нормальных подгрупп, то опять $Inn(G) = Aut_{\mathcal{N}}(G)$, что является усилением аналогичных утверждений работ [15],[16],[22] и [21].

В настоящей главе доказывается, что если нечетное число n делится на нечетное число $k \geq 1003$, то все нормальные автоморфизмы периодического произведения циклических групп порядка k – внутренные. Этот результат является усилением основного результата работы [23]. Получено также достаточное условие, при удовлетворении которой данный нормальный автоморфизм n-периодического произведения бесконечных циклических групп является внутренним автоморфизмом.

Доказаны следующие основные утверждения.

Теорема 2.1 *Пусть n и $r \geq 1003$ – нечетные числа и $F = \prod\limits_{i\in I}{}^{n}\langle a_i\rangle$ есть $n-$периодическое произведение циклических групп $\langle a_i\rangle$, $i \in I$, порядок каждой из которых равен r. Тогда если n делится на r, то каждый нормальный автоморфизм группы $F = \prod\limits_{i\in I}{}^{n}\langle a_i\rangle$ является внутренним.*

Теорема 2.2 *Пусть $\phi : \langle a\rangle \overset{n}{*} \langle b\rangle \to \langle a\rangle \overset{n}{*} \langle b\rangle$ есть нормальный автоморфизм двух бесконечных циклических групп. Фиксируем элемент Z такой, что $\phi(Z) = b^9$. Тогда автоморфизм ϕ является внутренним автоморфизмом только и только в том случае, когда коммутатор $[a^d,\ Z^{-1}a^dZ]$ сопряжен в группе $\langle a\rangle \overset{n}{*} \langle b\rangle$ с коммутатором $[a^d,\ b^{-9}\,a^d\,b^{\,9}]$.*

При доказательстве теоремы 2.2 применялись некоторые фактор группы группы F, построенные на базе групп из совместной работы С.И.Адяна и И.Г.Лысенка [29], а также – некоторые их модификации, построенные в [23]. С помощью этих групп строятся способствующие доказательству предложения 2.2 нормальные подгруппы.

Следующее утверждение как следует, так и обобщает теорему 2.1

Следствие 2.1 *Пусть $\phi : \prod\limits_{i\in I}{}^{n}\langle a_i\rangle \to \prod\limits_{i\in I}{}^{n}\langle a_i\rangle$ есть нормальный автоморфизм. Фиксируем элементы Z_i такие, что $\phi(Z_i) = a_i^9$. Тогда, если коммутаторы $[a_j^d,\ Z_i^{-1}a_j^dZ]$ и $[a_j^d,\ a_i^{-9}\,a_j^d\,a_i^{\,9}]$ сопряжены в группе $\prod\limits_{i\in I}{}^{n}\langle a_i\rangle$ для всех $i \neq j$, то ϕ является внутренним автоморфизмом и наоборот.*

Содержание главы 3. В главе 3 мы исследуем внешние автоморфизмы n-периодических произведений некоторых периодических групп. Напоминаем, что автоморфизм группы, который не является внутренним автоморфизмом, называется *внешним автоморфизмом.*

Фактор группу $Out(G) = Aut(G)/Inn(G)$ называют группой внешних автоморфизмов группы G. Очевидно, каждый нетривиальный смежный класс фактор группы $Aut(G)/Inn(G)$ состоит из внешних автоморфизмов. Как было отме-

чено в главе 2, если группа G или – свободная группа, или – свободное произведение нетривиальных групп, то фактор группа $Aut(G)_{\mathcal{N}}/Inn(G)$ – тривиальная группа. Возникает естественный вопрос: тривиальна ли групп $Aut_{\mathcal{N}}(G)/Inn(G)$, если G – n-периодическое произведение нетривиальных групп.

Согласно основному результату настоящей главы, существуют n-периодические произведения групп, которые обладают внешними нормальными автоморфизмами. Ясно, что для этих групп G фактор группа $Aut(G)_{\mathcal{N}}/Inn(G)$ – нетривиальна. Отсюда следует, что резулататы, полученные М.В.Нещадимом в [22] для свободных произведений групп, в которых утверждается, что каждый нормальный автоморфизм свободного произведения нетривиальных групп – внутренний, невозможно распространить на n-периодические произведения групп.

Доказательства основных результатов этой главы опираются на некоторых базовых свойствах n-периодических произведений групп, которые приведены в предыдущей главе.

Допустим, что порядки всех элементов группы G взаимно просты с заданным фиксированным числом n. Тогда, если к системе определяющих соотношений группы G добавить всевозможтые определяющие соотношения вида $a^n = 1$, где a пробегает множество всех элементов группы G, то в результате получим тривиальную группу. Это в точности означает, что группа G совпадает со своей подгруппой, порожденной всеми n-ыми степенями элементов из G, т.е. $G = G^n$. Очевидными примерами групп, удовлетворяющих условию $G = G^n$, являются свободные бернсайдовы группы $B(m, k)$ с показателем k, взаимно простым с n. Первая основная теорема этой главы относится к группам с условием $G = G^n$.

Теорема 3.1 *Пусть G произвольная группа без инволюций, обладающая автоморфизмом порядка 2. Тогда если для некоторого нечетного числа $n \geq 665$ группа G совпадает со своей подгруппой G^n, то n-периодическое произведение $G \overset{n}{*} G$ обладает внешним нормальным автоморфизмом.*

Следует подчеркнуть, что согласно основному результату работы [23] (см. также [24], [30]), для любого нечётного числа $n \geq 1003$ каждый нормальный автоморфизм свободной периодической группы $B(m, n)$ ранга $m > 1$ (конечного или бесконечного) является внутренним автоморфизмом, т.е. имеет место равенство $Inn(B(m, n)) = Aut_{\mathcal{N}}(B(m, n))$.

Согласно теореме 5 работы [5], если все G_i суть свободные периодические группы показателя n, то n-периодическое произведение $\prod\limits_{i \in I}{}^{n} G_i$ также есть свободная периодическая группа показателя n, ранг которой равен сумме рангов сомножителей G_i.

Таким образом, в терминах n-периодических произведений указанный результат работы [23] можно переформулировать следующим образом: для любого нечётного числа $n \geq 1003$ каждый нормальный автоморфизм n-периодического

произведения $B(m_1,n)\overset{n}{*}B(m_2,n)$ свободных периодических групп $B(m_1,n)$ и $B(m_2,n)$ рангов m_1, $m_2 \geq 1$ является внутренним автоморфизмом. Более того, для любого нечётного числа $n \geq 1003$ каждый нормальный автоморфизм n-периодического произведения $\prod\limits_{i\in I}^{n}\langle a_i\rangle$ конечных циклических групп порядка n является внутренним автоморфизмом произведения $\prod\limits_{i\in I}^{n}\langle a_i\rangle$.

В связи с этим отметим, что из теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.1 *Для любого нечётного числа $n \geq 665$ и для любого взаимно простого с n нечетного числа k n-периодическое произведение $\prod\limits_{i\in I}^{n}\langle a_i\rangle$, где $\langle a_i\rangle$ – конечные циклические группу порядка k и $|I| > 1$, обладает нормальным автоморфизмом, который не является внутренним.*

Спроведливо также

Следствие 3.2 *Для любого нечётного числа $n \geq 665$ и для любого взаимно простого с n нечетного числа k n-периодическое произведение $B(m,k)\overset{n}{*}B(m,k)$ обладает внешним нормальным автоморфизмом.*

Теорема 3.2 *Пусть G_1 и G_2 – произвольные группы, обладающие автоморфизмами порядка $k > 1$ и порядок каждого элемента групп G_1, G_2 взаимно прост как с k, так и с n, где $n \geq 665$ некоторое нечетное число. Тогда n-периодическое произведение $G_1\overset{n}{*}G_2$ обладает внешним нормальным автоморфизмом.*

Следствие 3.3 *Для любого нечётного числа $n \geq 665$ и для любых взаимно простых с n нечетных чисел k_1, k_2 n-периодическое произведение $B(m_1,k_1)\overset{n}{*}B(m_2,k_2)$ обладает внешним нормальным автоморфизмом.*

Следствие 3.4 *Существует бесконечное множество неизоморфных групп, n-периодический квадрат которых при любом простом $n \geq 665$ обладает внешним нормальным автоморфизмом.*

Содержание главы 4. В этой главе мы докажем, что всякий автоморфизм свободной группы, стабилизирующий каждую нормальную подгруппу бесконечного индекса, является внутренним автоморфизмом.

Основной результат является дополнением результата Любоцкого из работы [13], где принадлежность $\alpha \in Inn(F)$ доказывается при предположении, что $\alpha(N) = N$ для всех нормальных подгрупп N группы F, имеющих индекс равный степени простого числа $p \neq 2$. Он усиливает также результат Люэ [14], где принадлежность $\alpha \in Inn(F)$ доказывается при предположении, что $\alpha(N) = N$ для всех нормальных подгрупп N группы F.

Теорема 4.1 *Каждый автоморфизм $\alpha \in Aut(F)$ неабелевой абсолютно свободный группы F который стабилизирует каждую нормальную подгруппу бесконечного индекса, является внутренним автоморфизмом.*

В доказательстве этого результата используются известная теорема Магнуса о свободе и его теорема о том, что если два элемента r_1 и r_2 некоторой

свободной группы F имеют одно и то же нормальное замыкание в F то r_1 сопряжен либо с r_2, либо с r_2^{-1}.

Список литературы

[1] С. И. Адян, “Периодическое произведение групп”, *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Тр. МИАН, **142**, Наука, М., 1976, 3–21.

[2] С.И.Адян, “Еще раз о периодических произведениях групп и проблеме А.И.Мальцева”, *Матем. заметки*, **88**:6 (2010).

[3] А. Ю. Ольшанский, “Проблема А. И. Мальцева об операциях над группами”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **14** (1989), 225–249.

[4] S. V. Ivanov, “On periodic products of groups”, *Internat. J. Algebra Comput.*, **5**:1 (1995), 7–17.

[5] С. И. Адян, “О простоте периодических произведений групп”, *Докл. АН СССР*, **241**:4 (1978), 745–748.

[6] Х. Нейман, *Многообразия групп*, Мир, М., 1969.

[7] П. С. Новиков, С. И. Адян, “О бесконечных периодических группах. I, II, III”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32** (1968), 212–244, 251–524, 709–731.

[8] С. И. Адян, *Проблема Бернсайда и тождества в группах*, Наука, М., 1975..

[9] С. И. Адян, “О подгруппах свободных периодических групп нечетного показателя”, *Сб. статей, посвещенный 80-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова*, Тр.МИАН, **112**, 1971, 64–72.

[10] С. И. Адян, “Аксиоматический метод построения групп с заданными свойствами”, *УМН*, **32**:1(193) (1977), 3–15.

[11] С. И. Адян, “Исследования по проблеме Бернсайда и связанным с ней вопросам”, *Алгебра, математическая логика, теория чисел, топология*, Тр.МИАН, **168**, 1984, 179–205.

[12] С. И. Адян, “Проблема Бернсайда о периодических группах и смежные вопросы”, *Совр. пробл. матем.*, **1**, 2003, 5–28.

[13] A. Lubotzky, “Normal automorphisms of free groups”, *J. Algebra*, **63**:2 (1980), 494–498.

[14] A. S.-T. Lue, “Normal automorphisms of free groups”, *J. Algebra*, **64**:1 (1980), 52–53.

[15] M. Jarden, “Normal automorphisms of free profinite groups”, *J. Algebra*, **62**:1 (1980), 118–123.

[16] В. А. Романьков, “Нормальные автоморфизмы дискретных групп”, *Сибирск. Мат. Ж.*, **24**:4 (1983), 138–149.

[17] Ч. К. Гупта, Н. С. Романовский, “Нормальные автоморфизмы свободной в многообразии $\mathbb{N}_2\mathcal{A}$ про-p-группы”, *Алгебра и логика*, **35**:3 (1996), 249–267.

[18] Н. С. Романовский, “Нормальные автоморфизмы свободных разрешимых про-p-групп”, *Алгебра и логика*, **36**:4 (1997), 441–453.

[19] G. Endimioni, “Pointwise inner automorphisms in a free nilpotent group”, *Q. J. Math.*, **53**:4 (2002), 397–402.

[20] O. Bogopolski, E. Kudryavtseva, H. Zieschang, “Simple curves on surfaces and an analog of a theorem of Magnus for surface groups”, *Math. Z.*, **247**:3 (2004), 595–609.

[21] A. Minasyan, D. Osin, “Normal automorphisms of relatively hyperbolic groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **362** (2010), 6079-6103.

[22] М. В. Нещадим, “Свободное произведение групп не имеет внешних нормальних автоморфизмов”, *Алгебра и логика*, **35**:5 (1996), 562–566.

[23] В. С. Атабекян, “Нормальные автоморфизмы свободных бернсайдовых групп”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:2 (2011), 3–18.

[24] E. A. Cherepanov, “Normal automorphisms of free Burnside groups of large odd exponents”, *Internat. J. Algebra Comput*, **16**:5 (2006), 839–847.

[25] А. С. Пайлеванян, Х. Р. Ростами, “Об автоморфизмах и вложениях свободных периодических групп”, *Известия НАН Армении. Математика*, **46**:2 (2011), 59–70.

[26] A. S. Pahlevanyan, “The Fibonacci automorphism of free Burnside groups”, *Rairo–ITA Theoretical Informatics and Applications*, **45**:2 (2011), 59-67.

[27] E. A. Cherepanov, "Free semigroup in the group of automorphisms of the free Burnside group *Communications in Algebra,* **33:2**, (2005), 539-547

[28] Rémi Coulon, “Outer automorphisms of free Burnside groups”, *arXiv :1008.4495*, 2010, 1-19.

[29] С. И. Адян, И. Г. Лысёнок, “О группах, все собственные подгруппы которых конечные циклические”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:5 (1991), 933–990.

[30] В. С. Атабекян, “Не φ-допустимые нормальные подгруппы свободных бернсайдовых групп”, *Изв.НАН Армении. Математика*, **45**:2 (2010), 21–36.

Работы автора по теме диссертации

1. В.С.Атабекян, А.Л.Геворгян, “О внешних нормальных автоморфизмах периодических произведений групп”, *Известия НАН Армении: Математика*, **46**:6 (2011), 3–10.

2. А. Л. Геворгян, “О нормальных автоморфизмах n-периодических произведений”, *Вестник РАУ, Физ. Мат. и Ест. науки*, 2011, № 2, 42–48.

3. А. Л. Геворгян, “Об автоморфизмах свободных групп, стабилизирующих нормальные подгруппы бесконечного индекса”, *Сборник науч. статей РАУ. Пятая год. науч. конф.*, 2010, 102–105.

4. A. L. Gevorgyan, “On automorphisms of n-periodic products of groups”, *Proceedings of the Yerevan State University,Phys. and Math. Sciences*, 2012, № 2(228), 18–25.

5. A.L.Gevorgyan, “On outer automorphisms of periodic products”, *Mal'tsev Meeting, International Conference dedicated to the 60th anniversary of S.S.Goncharov, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, October 11-14*, 2011, 67.

6. В.С. Атабекян, А. Геворгян, “О внешних автоморфизмах периодических произведений групп”, *Международная конференция, посвященная 100-летию проф. В. В. Морозова, Казань, 25-30.09*, 2011, 39–40.

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

ԱՄԻՐՋԱՆ ԼՅՈՎԻԿԻ ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

ԽՄԲԵՐԻ n-ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼՆԵՐԻ ԱՎՏՈՄՈՐՖԻԶՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ատենախոսությունը նվիրված է խմբերի n-պարբերական արտադրյալների ավտոմորֆիզմների ուսումնասիրմանը: Խմբերի n-պարբերական արտադրյալը հանդիսանում է ասոցիատիվ, ճշգրիտ և ժառանգական գործողություն: Այն ներմուծվել է Ս. Ի. Ադյանի կողմից, որով լուծվել է Մալցևի պրոբլեմը՝ բոլոր խմբերի դասում ուղղիղ և ազատ արտադրյալներից տարբեր ասոցիատիվ, ճշգրիտ և ժառանգական գործողության գոյության վերաբերյալ:

Տրված G խմբի ϕ ավտոմորֆիզմը կոչվում է ներքին, եթե գոյություն ունի այնպիսի $g \in G$ տարր, որ $\phi(x) = gxg^{-1}$ կամայական $x \in G$-ի համար: Այն ավտոմորֆիզմը, որն անշարժ է թողնում G-ի բոլոր նորմալ ենթախմբերը, կոչվում է նորմալ ավտոմորֆիզմ: Սահմանումներից անմիջապես բխում է, որ ցանկացած ներքին ավտոմորֆիզմ նորմալ է: Առանձնակի հետաքրքրություն ունի հակադարձ հարցը, որն ուսումնասիրվել է տարբեր մաթեմատիկոսների կողմից խմբերի մի շարք դասերի համար: Ապացուցված է, որ մեկից մեծ ռանգի կամայական բացարձակ ազատ խմբի (Ա.Լյուբոցկի, 1980թ.) և կամայական ոչ տրվիալ ազատ արտադրյալի (Մ.Նեշչադիմ, 1996թ.) նորմալ և ներքին ավտոմորֆիզմները համընկնում են: Ներքին և նորմալ ավտոմորֆիզմների բազմությունների հավասարությունը ապացուցվել է նաև բացասական էյլերյան բնութագրիչով մակերևույթների ֆունդամենտալ խմբերի համար (Օ.Բոգոպոլսկի, Ե. Կուդրյավցևա, Հ. Ցիշանգ, 2004թ.): Հիշատակման արժանի արդյունքներից է ոչ տրիվիալ վերջավոր նորմալ ենթախմբեր չպարունակող ոչ ցիկլիկ հարաբերական հիպերբոլական խմբերի նորմալ և ներքին ավտոմորֆիզմների խբերի համընկնումը (Ա.Մինասյան,Դ.Օսին, 2010թ.):

Անվերջ պարբերական խմբերի ավտոմորֆիզմների ուսումնասիրությունը առանձնակի հետաքրքրություն է ներկայացնում և առաջադրվել է Ա.Օլշանսկու կողմից Կոուրովյան տետրում (1980թ.): Այդ ուղղությամբ շոշափելի արդյունքներ ստացվել են միայն վերջին շրջանում: Ապացուցվել է, որ ազատ բերնսայդյան խմբի $B(m,n)$

կամայական նորմալ ավտոմորֆիմ ներքին ավտոմորֆիզմ է, որտեղ $n \geq 1003$ կամայական կենտ թիվ է: Ցույց է տրված նաև, որ ներքին ավտոմորֆիզմների ենթախումբը մաքսիմալ է $Aut(B(m,n))$ խմբի բոլոր այն ենթախմբերի դասում, որոնք պարունակում են $Inn(B(m,n))$ և որոնց կամայական տարրի կարգ չի գերազանցում n-ը: Հայտնի է նաև որ բավականին մեծ կենտ ցուցիչների համար $Aut(B(m,n))$ պարունակում է ազատ կիսախումբ: Ավելին 2010 թ. Ռ.Կուլոնի կողմից ցույց է տրվել, որ $Aut(B(3,n))$ պարունակում է բացարձակ ազատ խումբ:

Ատենախոսությունում ուսումնասիրվում են ցիկլիկ խմբերի n-պարբերական արտադրյալների ավտոմորֆիզմների խմբերը:

• Նկարագրվում են անվերջ ցիկլիկ խմբերի n-պարբերական արտադրյալների ավտոմորֆիզմները և նորմալ ավտոմորֆիզմները: Գտնվել է անհրաժեշտ և բավարար պայման, որի դեպքում անվերջ ցիկլիկ խմբերի n-պարբերական արտադրյալի նորմալ ավտոմորֆիզմը ներքին ավտոմորֆիզմ է:

• Ցույց է տրվել, որ եթե $r \geq 1003$-ը n-ի կենտ բաժանարարն է, ապա r-կարգի ցիկլիկ խմբերի n-պարբերական արտադրյալի կամայական նորմալ ավտոմորֆիզմ ներքին է: Այս արդյունքը ուժեղացնում է ազատ բեռնսայդյան $B(m,n)$ խմբի նորմալ ավտոմորֆիզմների մասին վերը հիշատակված արդյունքը:

• Ստացվել է բավարար պայման, որի տեղի ունենալու դեպքում խմբերի n-պարբերական արտադրյալը պարունակում է արտաքին նորմալ ավտոմորֆիզմ, որտեղ $n \geq 665$ կամայական կենտ թիվ է:

• Ապացուցվել է, որ գոյություն ունեն այնպիսի խմբեր, որոնց n-պարբերական քառակուսին կամայական պարզ $n \geq 665$ թվի համար պարունակում է արտաքին նորմալ ավտոմորֆիզմ: Վերջինից մասնավորապես հետևում է, որ Նեշչադիմի արդյունքի անալոգը տեղի չունի n-պարբերական արտադրյալների համար:

• Ուսումնասիրվել են նաև ազատ խմբերի այն ավտոմորֆիզմները, որոնք կայունացնում են անվերջ ինդեքսի նորմալ ենթախմբերը (Ա.Լյուբոցկու արդյունքի ուժեղացումը): Ապացուցվել է, որ ազատ խմբի անվերջ ինդեքսի նորմալ ենթախմբերը կայունացնող կամայական ավտոմորֆիզմ ներքին ավտոմորֆիզմ է:

SUMMARY

AMIRJAN LYOVIKI GEVORGYAN

ON AUTOMORPHISMS OF n – PERIODIC PRODUCTS OF GROUPS

Dissertation is devoted to study of automorphisms of n-periodic products of groups. The n-periodic product of groups is associative, exact and hereditary on subgroups operation. This operations was introduced by S.I.Adian. The creation of these operations solved Maltsev's problem on existence of associative, exact and hereditary on subgroups operation different from direct and free products defined on the class of all groups.

For a given group G the automorphism ϕ is called inner,if there exists an element $g \in G$, such that $\phi(x) = gxg^{-1}$ for arbitrary $x \in G$. The automorphism that fixes all the normal subgroups of the group G, is called normal automorphism. From definition immediately follows, that each inner automorphism is normal. The inverse question presents special interest.

It was studied by different mathematicians for a series of classes of groups. It was proved that for each absolutely free group of rank grater than 1 (A.Lyubotzky, 1980) and for any non-trivial free product (M.Neshchadim, 1996), the normal and inner automorphisms coincide.

The equality of sets of normal and inner automorphisms was also proved for fundamental groups of surfaces with negative Euler characteristics (O.Bogopolsky, E. Kudryavtseva, H. Zischang, 2004). It is worth to mention the result about coincidence of normal and inner automorphisms groups of non-cyclic relatively hyperbolic groups containing no non-trivial finite normal subgroups (A.Minasian, D.Osin, 2010).

The study of infinite periodic groups is of special interest and was suggested by A.Yu.Olshanskii' in Kourovka Notebook (1980). Significant results in this direction were obtained only recently. It was proved that each normal automorphism of free

Burnside group $B(m,n)$ is inner for odd $n \geq 1003$.

It is also shown that the subgroup of inner automorphisms is maximal among all the subgroups of the group $Aut(B(m,n))$ containing $Inn(B(m,n))$ and whose each element's order is not grater than n. It is known that for sufficiently large odd exponent n the group $Aut(B(m,n))$ contains a free semigroup. Moreover, R.Coulone proved that the group $Aut(B(3,n))$ contains a free group.

In dissertation the automorphism groups of n-periodic products of cyclic groups are studied.

• The automorphisms and normal automorphisms of n-periodic products of cyclic groups are characterized. A necessary and sufficient condition was obtained for which each normal automorphism of n-periodic product of infinite cyclic groups is inner automorphism.

• It was shown, that if $r \geq 1003$ is an odd divisor of n, then each normal automorphism of n-periodic product of cyclic groups of order r is inner. This result strengthens the result on normal automorphisms of free Burnside group $B(m,n)$ mentioned above.

• We obtain a sufficient condition which ensures the existence of the outer normal automorphism in n-periodic product of some non-trivial groups for any odd $n \geq 665$.

• It was proved that there exist groups whose n-periodic square for any prime $n \geq 665$ contains outer normal automorphism. From this, in particular, immediately follows that the analogous result of Neschadim for free product of non-trivial groups does not hold for n-periodic products.

• We also studied the automorphisms of free groups stabilizing normal subgroups of infinite index (A strengthening of A.Lubotzky's result). It was proved that any normal automorphism stabilizing each infinite index normal subgroup is inner.