ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Դավիդովա Դիանա Սերգեյի

ՀՅՈՒՍՎԱԾ q-ԵՐԿԿԱՎԱՐՆԵՐԻ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄՆԵՐԸ

Ա.01.06. «Հանրահաշիվ և թվերի տեսություն»
մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների
թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

Ս Ե Ղ Մ Ա Գ Ի Ր

Երևան 2012

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Давидова Диана Сергеевна

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СПЛЕТЕННЫХ q-БИРЕШЕТОК

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

**диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.06 “Алгебра и теория чисел”**

Ереван 2012

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում:

Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Յու. Մ. Մովսիսյան

Պաշտոնական ընդիմախոսներ՝ ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Հ. Բ. Մարանջյան
ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու Ա. Շ. Մալխասյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Վրաստանի տեխնիկական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2012թ. նոյեմբերի 20-ին, ժամը 15^{00}-ին ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 050 «Մաթեմատիկա» մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ հասցեով՝ Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ Երևանի պետական համալսարանի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2012 թ. հոկտեմբերի 19-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար՝ Ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Տ. Հ. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете.

Научный руководитель**:** доктор физ. мат. наук Ю. М. Мовсисян
Официальные оппоненты: доктор физ. мат. наук Г. Б. Маранджян
кандидат физ. мат. наук А. Ш. Малхасян

Ведущая организация: Грузинский технический университет

Защита диссертации состоится 20 ноября 2012г. в 15^{00} часов на заседании специализированного совета 050 “Математика” ВАК, при ЕГУ по адресу: 0025, г. Ереван, ул. Алека Манукяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 19 октября 2012г.

Ученый секретарь специализированного совета доктор физ. мат. наук Т. А. Арутюнян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Бирешеткой называется алгебра с четырьмя бинарными операциями $(L;\cap,\cup,*,\Delta)$, где редукты $L_1 = (L;\cap,\cup)$ и $L_2 = (L;*,\Delta)$ являются решетками. Понятие бирешетки было впервые введено Мэтью Гинсбергом в 1988 году, как единообразная структура для применения в искусственном интеллекте [1]. В дальнейшем бирешетки были изучены Мелвином Фиттингом и применены в логическом программировании [2-6], в теории истинности [7-8] и других областях. М. Фиттинг так же изучал связь бирешеток с семейством многозначных логик, обобщающих трехзначную логику Клини [9-10] (см. так же [11-12]). Основной идеей в понятии бирешетки является существование двух (частичных) отношений порядка, имеющих различные интерпретации в приложениях. Эти два отношения порядка, разумеется, должны быть каким-то образом связаны. М. Гинсберг, например, рассматривает связь в виде дополнительной унарной операции – отрицание. М. Фиттинг, с другой стороны, исследовал связь в виде условий, наложенных на структуру решеток (например, условие дистрибутивности или сплетенности).

Бирешетка $(L;\cap,\cup,*,\Delta)$ называется дистрибутивной, если любая пара операций из множества $\{\cap,\cup,*,\Delta\}$ удовлетворяет обоим тождествам дистрибутивности. Бирешетка называется ограниченной, если ее редукты $L_1 = (L;\cap,\cup)$ и $L_2 = (L;*,\Delta)$ – ограниченные решетки.

Поскольку каждой решетке соответствует частичный порядок, то каждой бирешетке $(L;\cap,\cup,*,\Delta)$ соответствуют два отношения порядка. Через $\leq_\cap$ обозначим порядок, соответствующий редукту $(L;\cap,\cup)$, а через $\leq_*$ – порядок, соответствующий редукту $(L;*,\Delta)$. Бирешетка $(L;\cap,\cup,*,\Delta)$ называется сплетенной, если отношение порядка $\leq_\cap$ сохраняется относительно операций $*,\Delta$, а отношение $\leq_*$ сохраняется относительно операций $\cap$ и $\cup$, т.е.

$$a \leq_\cap b \ \&\ c \leq_\cap d \rightarrow a * c \leq_\cap b * d \rightarrow a\Delta c \leq_* b\Delta d,$$

$$a \leq_* b \ \&\ c \leq_* d \rightarrow a \cap c \leq_* b \cap d \ \&\ a \cup c \leq_* b \cup d.$$

В работах [1-2, 13-14] изучаются ограниченные дистрибутивные или ограниченные сплетенные бирешетки. О приложении этих результатов в семантике логического программирования см. в [15]. В общем случае, бирешетки без условия ограниченности, характеризуются в [16] (см. так же [17]). Теория двойственности для бирешеток развивается в [18-21].

Настоящая диссертационная работа посвящена изучению более общих алгебраических структур, а именно q-бирешеток (или би-q-решеток). Алгебра $(L;\cap,\cup,*,\Delta)$ называется q-бирешеткой, если редукты $(L;\cap,\cup)$ и $(L;*,\Delta)$ являются q-решетками и справедливо тождество $a \cap a = a * a$, а q-решеткой называется алгебра $(L;\cap,\cup)$ с двумя бинарными операциями, удовлетворяющая следующим тождествам (см.[22]):

1. $a \cap b = b \cap a$, $a \cup b = b \cup a$ (коммутативность);
2. $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$, $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$ (ассоциативность);
3. $a \cap (b \cup a) = a \cap a$, $a \cup (b \cap a) = a \cup a$ (слабое поглощение);
4. $a \cap (b \cap b) = a \cap b$, $a \cup (b \cup b) = a \cup b$ (слабая идемпотентность);
5. $a \cup a = a \cap a$ (уравненность).

В отличие от решеток, каждой q-решетке $(L; \cap, \cup)$ соответствует отношение квазипорядка (т.е. рефлексивное и транзитивное отношение) Q, определяемое следующим образом:

$$aQb \leftrightarrow a \cap b = a \cap a \leftrightarrow a \cup b = b \cup b.$$

Поскольку q-бирешетка обладает структурой двух q-решеток, то ей будут соответствовать два отношения кавазипорядка. Интерес представляют те q-бирешетки, в которых существует естественная связь между отношениями квазипорядка. Такая связь, как и в случае бирешеток, устанавливается двумя способами. Первый заключается в наложении некоторых свойств монотонности на отношения квазипорядка. Т.е. это q-бирешетки с условием дистрибутивности или сплетенности. Второй путь заключается в расширении сигнатуры, т.е. в добавлении унарных операций, связанных с основными бинарными операциями. В диссертационной работе описаны q-бирешетки со сплетенной бинарной операцией и унарными операциями автоморфизма, антиавтоморфизма, отрицания и слияния.

Целью диссертационной работы является:

1. Охарактеризовать q-бирешетки с помощью решеток;
2. Охарактеризовать q-бирешетки с помощью фильтров и идеалов q-бирешетки.

Методика исследований. Методика исследований включает в себя методы теории решеток и универсальной алгебры с использованием понятий сверхтождества и суперпроизведения, фильтра и идеала q-бирешетки.

Научная новизна.

1. Введено понятие q-полурешетки, установлена ее связь с квазиупорядоченными множествами. Введено общее понятие q-бирешетки, охватывающее понятие бирешетки и другие двойные структуры, часто встречающиеся в алгебре, теории чисел, теории множеств и топологии.
2. Доказана теорема о неподвижной точке для q-решеток, являющаяся расширением известной теоремы А. Тарского о неподвижной точке.
3. Охарактеризованы q-бирешетки со сплетенной бинарной операцией с помощью решеток (характеризация с точностью до гомоморфизма).
4. Охарактеризованы следующие q-бирешетки с унарной операцией и со сплетенной бинарной операцией:
   - q-бирешетки с антиавтоморфизмом;
   - q-бирешетки с автоморфизмом;
   - q-бирешетки с отрицанием;
   - q-бирешетки с отрицанием и слиянием.
5. Произвольные q-решетки описаны с помощью фильтров q-решетки. Соответствующая теорема охватывает известный результат Г. Биркгофа и О. Фринка.
6. q-бирешетки со сплетенной бинарной операцией описаны с помощью фильтров и идеалов q-бирешетки (характеризация а с точностью до изоморфизма).

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в диссертационной работе, носят, в основном, теоретический характер. Они могут быть применены в многозначных логиках и в семантиках новых языков логического программирования.

Апробация работы и публикации. Основные результаты диссертации докладывались на международных конференциях CSIT-09 (Ереван, 2009), ”Modern Algebra and its Applications” (Батуми, 2010), “ Logic, algebra and truth degrees” (Kanazawa, Japan, 2012), на ежегодном отчете математического общества Армении, посвященном 1400-летию Ананиа Ширакаци (Ереван, 2012), на семинарах кафедры алгебры и геометрии ЕГУ.

Основные результаты диссертационной работы отражены в восьми публикациях.

Структура и краткое содержание работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка используемой литературы (52 наименования). Объем работы – 112 страниц.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации и ее новизна, дается краткий обзор содержания диссертационной работы.

Первая глава диссертационной работы посвящена характеризации q-бирешеток со сплетенной операцией. Она состоит из пяти параграфов. В этой главе модифицируется ряд известных результатов из универсальной алгебры [23], вводятся понятия сверхтождества и суперпроизведения. Даются определения q-полурешетки, q-решетки, q-бирешетки. Дается определение сплетенной операции, свойство сплетенности описывается с помощью сверхтождеств. q-решетки с дополнительной сплетенной операцией описываются с помощью пар конгруэнций. Основной результат данной главы заключается в характеризации q-бирешеток со сплетенной бинарной операцией. В конце главы формулируется ряд следствий из теоремы 1.4.5.

В разделе **1.2 §1** вводятся определения сверхтождества и суперпроизведения.

Сверхтождеством называется формула второго порядка (о формулах второго порядка см. [24-25]) следующего вида:

$$\forall X_1, \dots, X_m \forall x_1, \dots, x_n (w_1 = w_2),$$

где $X_1, \dots, X_m$– функциональные переменные, а $x_1, \dots, x_n$ – предметные переменные в словах (термах) w_1, w_2. Обычно сверхтождества записываются без кванторной приставки: $w_1 = w_2$. Будем говорить, что в алгебре $(Q; F)$ выполняется сверхтождество $w_1 = w_2$, если это равенство справедливо, когда в нем каждая предметная переменная и каждая функциональная переменная заменены соответственно любым элементом из Q и любой операцией соответствующей арности из F (предполагается возможность такой замены) [26-28].

Например, в любой решетке $Q(+,\cdot)$ выполняется сверхтождество:

$$X\big(Y(X(x,y),z), Y(y,z)\big) = Y(X(x,y),z).$$

Для категорного определения сверхтождеств, гомоморфизмы между алгебрами $(Q; F)$ и $(Q'; F')$ определяются как пары $(\varphi, \tilde{\psi})$ отображений $\varphi: Q \to Q'$, $\tilde{\psi}: F \to F', |A| = |\tilde{\psi} A|$, с условием:

$$\varphi \mathrm{A}(a_1, \dots a_n) = (\tilde{\psi} A)(\varphi a_1, \dots, \varphi a_n)$$

для любых $A \in F, a_1, \dots, a_n \in Q, |A| = n$ [26-28]. О приложении таких морфизмов в криптографии см. в [29].

Алгебры и их гомоморфизмы $(\varphi, \tilde{\psi})$ (в качестве морфизмов) образуют категорию. Произведение в этой категории называется суперпроизведением алгебр, и обозначаются через $Q \bowtie Q'$ для двух алгебр Q и Q'.

В **§ 2** вводится понятие q-полурешетки. Устанавливается связь между q-полурешетками и отношением квазипорядка.

Определение 1.2.1. Алгебра $(L; \circ)$ называется q-полурешеткой, если на ней выполняются следующие тождества:

1. $a \circ b = b \circ a$; 2. $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$; 3. $a \circ (b \circ b) = a \circ b$.

Каждой q-полурешетке $(L; \circ)$ соответствует квазипорядок Q, определяемый следующим образом:

$$aQb \leftrightarrow a \circ b = a \circ a.$$

В **§ 3** дается определение сплетенной операции.

Определение 1.3.1. Скажем, что операция $*$ q-полурешетки $(L; *)$ сплетена с операциями $\cap$, $\cup$ q-решетки $(L; \cap, \cup)$, если отношение квазипорядка $\leq_\cap$ сохраняется относительно операции $*$, а отношение $\leq_*$ сохраняется относительно операций $\cap$, $\cup$, т.е.

$$a \leq_\cap b \ \& \ c \leq_\cap d \rightarrow a * c \leq_\cap b * d,$$

$$a \leq_* b \ \& \ c \leq_* d \rightarrow a \cap c \leq_* b \cap d \ \& \ a \cup c \leq_* b \cup d.$$

Лемма 1.3.3. Операция $*$ q-полурешетки $(L; *)$ сплетена с операциями q-решетки $(L; \cap, \cup)$ тогда и только тогда, когда в алгебре $(L; \cap, \cup, *)$ выполняется следующее сверхтождество [26]:

$$X\big(Y(X(x,y),z), Y(y,z)\big) = X(Y(X(x,y),z), Y(X(x,y),z)).$$

В **§ 4** доказываются теоремы 1.4.1 и 1.4.5.

Теорема 1.4.1. Пусть $(L; \cap, \cup)$ − q-решетка, а $(L; *)$ − q-полурешетка, операция, которой сплетена с операциями $\cap$, $\cup$ и справедливо тождество $a \cap a = a * a$. Тогда, существует пара конгруэнций (θ_1, θ_2) q-решетки $(L; \cap, \cup)$ удовлетворяющая условиям:

1. $a(\theta_1 \cap \theta_2)\mathrm{b} \leftrightarrow a \cap a = \mathrm{b} \cap \mathrm{b}$;
2. $a \leq_\cap b \rightarrow a\theta_1\theta_2 b$;
3. $X\big(Y(X(x,y),z), Y(y,z)\big)\theta_i Y(X(x,y),z)$,

где $X, Y \in \{\cap, \cup\}$, $x, y, z \in L$, для всех $i = 1,2$.

Обратно, каждой паре конгруэнций (θ_1, θ_2) q-решетки $(L; \cap, \cup)$, удовлетворяющей условиям 1-3, соответствует q-полурешетка $(L; *)$ операция которой сплетена с операциями $\cap, \cup$ и справедливо тождество $a \cap a = a * a$.

Определение 1.4.1. Алгебра $(L; \cap, \cup, *, \Delta)$ с четырьмя бинарными операциями называется q-бирешеткой, если редукты $(L; \cap, \cup)$ и $(L; *, \Delta)$ являются q-решетками и справедливо тождество $a \cap a = a * a$.

Теорема 1.4.5. Пусть $L_1 = (L; \cap, \cup)$ и $L_2 = (L; *, \Delta)$ – q-решетки и справедливо тождество $a \cap a = a * a$. Операция $*$ сплетена с операциями $\cap, \cup$ тогда и только тогда, когда q-бирешетка $(L; \cap, \cup, *, \Delta)$ эпиморфно отображается в суперпроизведение двух решеток; Причем, этот эпиморфизм удовлетворяет условию: $\varphi(x) = \varphi(y) \leftrightarrow x \cap x = y \cap y$.

Следовательно, данный эпиморфизм является изоморфизмом на бирешетке идемпотентных элементов.

Вторая глава состоит из пяти параграфов, здесь изучаются q-бирешетки с унарными операциями: автоморфизм, антиавтоморфизм, отрицание и слияние. Вводятся понятия q-полурешетки с автоморфизмом, q-решетки с автоморфизмом и q-бирешетки с автоморфизмом. Так же вводятся понятия q-решетки с антиавтоморфизмом, q-бирешетки с антиавтоморфизмом, q-бирешетки с отрицанием и q-бирешетки со слиянием. Дается определение суперпроизведения решеток с отрицанием. q-решетки с автоморфизмом и с дополнительной сплетенной операцией описываются с помощью пар конгруэнций (Теорема 2.2.1). С помощью пар конгруэнций описываются также q-бирешетки с антиавтоморфизмом и с дополнительной сплетенной операцией. Основные результаты второй главы: описание q-бирешеток с автоморфизмом и со сплетенной бинарной операцией (Теорема 2.2.5), описание q-бирешеток с антиавтоморфизмом и со сплетенной бинарной операцией (Теорема 2.3.3), описание q-бирешеток с отрицанием и со сплетенной бинарной операцией (Теорема 2.4.1). описание q-бирешеток со сплетенной бинарной операцией, обладающей коммутирующими унарными операциями отрицания и слияния (Теорема 2.4.2) В конце главы формулируется ряд следствий из теорем 2.2.5, 2.3.3, 2.4.1, 2.4.2.

В § 1 даются основные определения, используемые в главе.

Определение 2.1.1. Унарная операция $'$ на алгебре (Q, F) называется инволюцией, если $(x')' = x$ для всех $x \in Q$.

Определение 2.1.2. Алгебра $(L; \cap, ')$ называется q-полурешеткой с автоморфизмом, если $(L; \cap)$ – q-полурешетка, $'$ – инволюция, удовлетворяющая следующему тождеству:

$$(x \cap y)' = x' \cap y'.$$

Определение 2.1.3. Алгебра $(L; \cap, \cup, ')$ называется q-решеткой с автоморфизмом, если $(L; \cap, ')$ и $(L; \cup, ')$ – q-полурешетки с автоморфизмом.

Определение 2.1.4. Алгебра $(\mathrm{L}; \cap, \cup, \neg)$ называется q-решеткой с антиавтоморфизмом, если $(\mathrm{L}; \cap, \cup)$ – q-решетка, $\neg$ − инволюция, удовлетворяющая тождествам:

$$1.\ \ \neg(x \cap y) = \neg x \cup \neg y; \quad 2.\ \ \neg(x \cup y) = \neg x \cap \neg y.$$

В **§ 2** q-решетки с автоморфизмом и со сплетенной бинарной операцией описываются с помощью пар конгруэнций. Дается определение q-бирешетки с автоморфизмом. Характеризуются q-бирешетки с автоморфизмом и со сплетенной бинарной операцией.

Теорема 2.2.1. Пусть $(L; \cap, \cup, ')$ – q-решетка с автоморфизмом и $(L; *, ')$ – q-полурешетка с автоморфизмом, операция $*$ сплетена с операциями $\cap$ и $\cup$, и справедливо тождество $a \cap a = a * a$. Тогда существует пара конгруэнций (θ_1, θ_2) на q-решетке с автоморфизмом $(L; \cap, \cup, ')$, удовлетворяющая условиям:

1. $a(\theta_1 \cap \theta_2)\mathrm{b} \leftrightarrow a \cap a = \mathrm{b} \cap \mathrm{b}$;
2. $a \leq_{\cap} b \to a\theta_1\theta_2 b$;
3. $X\big(Y(X(x,y),z), Y(y,z)\big)\theta_i Y(X(x,y),z)$,

где $X, Y \in \{\cap, \cup\}$, $x, y, z \in L$, для всех $i = 1,2$.

Обратно, каждой паре конгруэнций (θ_1, θ_2) q-решетки с автоморфизмом $(L; \cap, \cup, ')$, удовлетворяющей условиям 1-3, соответствует q-полурешетка с автоморфизмом $(L; *, ')$

бинарная операция, которой сплетена с операциями $\cap$, $\cup$ и справедливо тождество $a \cap a = a * a$.

Определение 2.2.1. Алгебра $(L; \cap, \cup, *, \Delta, ')$ с четырьмя бинарными и инволюцией $'$ называется q-бирешеткой с автоморфизмом, если $(L; \cap, \cup, ')$ и $(L; *, \Delta, ')$ являются q-решетками с автоморфизмом и справедливо тождество $a \cap a = a * a$.

Теорема 2.2.5. Пусть $L_1 = (L; \cap, \cup, ')$ и $L_2 = (L; *, \Delta, ')$ – q-решетки с автоморфизмами и справедливо тождество $a \cap a = a * a$. Операция $*$ сплетена с операциями $\cap, \cup$ тогда и только тогда, когда q-бирешетка с автоморфизмом $(L; \cap, \cup, *, \Delta, ')$ эпиморфно отображается в суперпроизведение двух решеток с автоморфизмами; Причем, этот эпиморфизм удовлетворяет условию: $\varphi(x) = \varphi(y) \leftrightarrow x \cap x = y \cap y$. Следовательно, данный эпиморфизм является изоморфизмом на бирешетке идемпотентных элементов.

В § 3 q-решетки с антиавтоморфизмом и сплетенной бинарной операцией описываются с помощью пар конгруэнций. Дается определение q-бирешетки с антиавтоморфизмом. характеризуются q-бирешетки с антиавтоморфизмом и со сплетенной бинарной операцией.

Теорема 2.3.1. Пусть $(L; \cap, \cup, \neg)$ и $(L; *, \Delta, \neg)$ – q-решетки с антиавтоморфизмом, операция $*$ сплетена с операциями $\cap$, $\cup$ и справедливо тождество $a \cap a = a * a$. Тогда, существует пара конгруэнций (θ_1, θ_2) алгебры $(L; \cap, \cup, \neg)$, удовлетворяющая условиям:

1. $a(\theta_1 \cap \theta_2)\mathrm{b} \leftrightarrow a \cap a = \mathrm{b} \cap \mathrm{b}$;
2. $a \leq_{\cap} b \to a\theta_1\theta_2 b$;
3. $X\big(Y(X(x,y),z), Y(y,z)\big)\theta_i Y(X(x,y),z)$,

где $X, Y \in \{\cap, \cup\}$, $x, y, z \in L$, для всех $i = 1,2$.

4. $\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$.

Обратно, каждой паре конгруэнций (θ_1, θ_2) q-решетки с антиавтоморфизмом $(L; \cap, \cup, \neg)$, удовлетворяющей условиям 1-4, соответствует q-решетка с антиавтоморфизмом $(L; *, \Delta, \neg)$ операция $*$ которой сплетена с операциями $\cap$, $\cup$ и справедливо тождество $a \cap a = a * a$.

Определение 2.3.1. Алгебра $(L; \cap, \cup, *, \Delta, \neg)$ с четырьмя бинарными и инволюцией называется q-бирешеткой с антиавтоморфизмом, если $(L; \cap, \cup, \neg)$ и $(L; *, \Delta, \neg)$ − q-решетки с антиавтоморфизмом и справедливо тождество $a \cap a = a * a$.

Теорема 2.3.3. Пусть $L_1 = (L; \cap, \cup, \neg)$, $L_2 = (L; *, \Delta, \neg)$ – q-решетки с антиавтоморфизмом и справедливо тождество $a \cap a = a * a$. Операция $*$ сплетена с операциями $\cap, \cup$ тогда и только тогда, когда q-бирешетка с антиавтоморфизмом $(L; \cap, \cup, *, \Delta, \neg)$ эпиморфно отображается в суперпроизведение двух решеток с антиавтоморфизмом; Причем, этот эпиморфизм удовлетворяет условию: $\varphi(x) = \varphi(y) \leftrightarrow x \cap x = y \cap y$. Следовательно, данный эпиморфизм является изоморфизмом на бирешетке идемпотентных элементов.

В § 4 изучаются q-бирешетки с унарными операциями отрицания и слияния. Даются определения q-бирешеток с отрицанием и q-бирешеток со слиянием. Характеризуются q-бирешетки с отрицанием и со сплетенной бинарной операцией, описываются q-бирешетки со сплетенной бинарной операцией и с коммутирующими унарными операциями отрицанием и слияния.

Определение 2.4.1. Алгебра $(L; \cap, \cup, *, \Delta, ^{-})$ с четырьмя бинарными операциями и инволюцией $^{-}$ называется q-бирешеткой с отрицанием, если $(L; \cap, \cup, ^{-})$ − q-решетка с

антиавтоморфизмом, а $(L; *, \Delta, ^{-})$ − q-решетка с автоморфизмом и справедливо тождество $a \cap a = a * a$.

Если имеем решетку $L = (L;\cap,\cup)$, то на суперпроизведении $L \bowtie L = (L \times L; (\cap,\cup), (\cup,\cap), (\cap,\cap), (\cup,\cap))$ можно определить операцию отрицания следующим образом: $(a_1, a_2)^{-} = (a_2, a_1)$.

Такое суперпроизведение будем называть суперпроизведением с отрицанием и обозначать как обычное суперпроизведение, т.е. следующим образом. $L_1 \bowtie L_1$

Теорема 2.4.1. Пусть $(L; \cap,\cup,*, \Delta, ^{-})$ − q-бирешетка с отрицанием. Операция $\cap$ сплетена с операциями $*, \Delta$ тогда и только тогда, когда существует эпиморфизм φ между q-бирешеткой с отрицанием $(L; \cap,\cup,*, \Delta, ^{-})$ и суперпроизведением с отрицанием $A \bowtie A$, где A – решетка; Причем, этот эпиморфизм удовлетворяет условию: $\varphi(x) = \varphi(y) \leftrightarrow x \cap x = y \cap y$. Следовательно, данный эпиморфизм является изоморфизмом на бирешетке идемпотентных элементов.

Определение 2.4.2. Алгебра $(L; \cap,\cup,*, \Delta, \sim)$ с четырьмя бинарными операциями и инволюцией $\sim$ называется q-бирешеткой со слиянием, если $(L; \cap,\cup, \sim)$ − q-решетка с автоморфизмом, а $(L; *, \Delta, \sim)$ − q-решетка с антиавтоморфизмом и справедливо тождество $a \cap a = a * a$ для всех $a \in L$.

Если имеем решетку с антиавтоморфизмом $L = (L; \cap,\cup, ')$, то на суперпроизведении $(L;\cap,\cup) \bowtie (L; \cap,\cup) = (L \times L; (\cap,\cup), (\cup,\cap), (\cap,\cap), (\cup,\cap))$ можно определить операцию слияния следующим образом: $\sim (a, b) = (b', a')$.

В дальнейшем, под суперпроизведением $L \bowtie L$ решетки с аниавтоморфизмом $L = (L; \cap,\cup, \neg)$ будем понимать выше описанную алгебру.

Теорема 2.4.2. Пусть $(L; \cap,\cup,*, \Delta, ^{-}, \sim)$ − q-бирешетка с коммутирующими унарными операциями отрицания и слияния. Операция $\cap$ сплетена с операциями $*, \Delta$ тогда и только тогда, когда существует эпиморфизм φ между алгеброй $(L; \cap,\cup,*, \Delta, ^{-}, \sim)$ и суперпроизведением с отрицанием $A \bowtie A$, где A – решетка с антиавтоморфизмом; Причем, этот эпиморфизм удовлетворяет условию: $\varphi(x) = \varphi(y) \leftrightarrow x \cap x = y \cap y$. Следовательно, данный эпиморфизм является изоморфизмом на бирешетке идемпотентных элементов.

В § 5 формулируется ряд следствий из теорем 2.2.5, 2.3.3, 2.4.1 и 2.4.2.

В третьей главе q-решетки и сплетенные q-бирешетки характеризуются с помощью фильтров и идеалов.

В § 1 даются определения фильтра и идеала q-решетки. Произвольные q-решетки характеризуются с помощью фильтров q-решетки.

Определение 3.1.1. q-подрешетка F q-решетки $(L; \wedge,\vee)$ называется фильтром, если для любых $x \in F, y \in L$ элемент $x \vee y$ лежит в F.

Множество всех фильтров q-решетки L обозначим через $F(L)$.

Определение 3.1.2. q-подрешетка I q-решетки $(L; \wedge,\vee)$ называется идеалом, если для любых $x \in I, y \in L$ элемент $x \wedge y$ лежит в I.

Пусть для каждого $a \in L$, $f(a) = \{F \in F(L) | a \in F\}$. На множестве $f(L) = \{f(a) | a \in L\}$ зададим операции $\cap^*$ и $\cup^*$ следующим образом:

$$f(a) \cap^* f(b) = \{F \in F(L) | \exists X \in f(a \wedge a), \exists Y \in f(b \wedge b), X \cup Y \subseteq F\};$$

$$f(a) \cup^* f(b) = \{F \in F(L) | \exists X \in f(a \wedge a), \exists Y \in f(b \wedge b), X \cap Y \subseteq F\}.$$

Теорема 3.1.1. Произвольная q-решетка $L = (L;\wedge,\vee)$ изоморфна q-решетке $(f(L);\cap^*,\cup^*)$.

В § 2 вводятся понятия фильтра и идеала q-бирешетки, Сплетенные q-бирешетки описываются с помощью фильтров и идеалов q-бирешетки.

Определение 3.2.1. Подмножество $F \subseteq L$ называется фильтром q-бирешетки $L = (L;\wedge,\vee,*,\Delta)$, если F – фильтр обоих редуктов q-бирешетки, т.е.

(*ff1*) если $x, y \in F$, то $x \wedge y \in F$;

(*ff2*) если $x, y \in F$, то $x * y \in F$;

(*ff3*) если $x \in F, y \in L$ и $x \leq_\wedge y$, то $y \vee y \in F$;

(*ff4*) если $x \in F, y \in L$ и $x \leq_* y$, то $y \Delta y \in F$,

где $x, y \in L$.

Обозначим множество всех фильтров q-бирешетка L через $FF(L)$.

Определение 3.2.2. Подмножество $I \subseteq L$ называется идеалом q-бирешетки $L = (L;\wedge,\vee,*,\Delta)$, если I – фильтр редукта $(L;\cap,\cup)$ и идеал редукта $(L;*,\Delta)$, т.е.

(*fi1*) если $x, y \in I$, то $x \wedge y \in I$;

(*fi2*) если $x, y \in I$, то $x \Delta y \in I$;

(*fi3*) если $x \in I, y \in L$ и $x \leq_\wedge y$, то $y \vee y \in I$;

(*fi4*) если $y \in I, x \in L$ и $x \leq_* y$, то $x * x \in I$,

где $x, y \in L$.

Обозначим множество всех идеалов q-бирешетка L через $FI(L)$.

Пусть для каждого $a \in L$, $Bi(a) = \{X \subseteq L) | X - \text{идеал q} - \text{бирешетки } L\}$ и $Bf(a) = \{X \subseteq L) | - \text{фильтр q} - \text{бирешетки } L\}$. Зададим на множествах $Bi(L)$ и $Bf(L)$ бинарные операции $\cap^*$ и $\cup^*$ следующим образом:

$$Bf(a) \cap^* Bf(b) = \{F \in FF(L) | \exists X \in Bf(a \wedge a), \exists Y \in Bf(b \wedge b), X \cup Y \subseteq F\};$$

$$Bf(a) \cup^* Bf(b) = \{F \in FF(L) | \exists X \in Bf(a \wedge a), \exists Y \in Bf(b \wedge b), X \cap Y \subseteq F\};$$

$$Bi(a) \cap^* Bi(b) = \{I \in FI(L) | (\exists X \in Bi(a \wedge a)) (\exists Y \in Bi(b \wedge b)) X \cup Y \subseteq I\};$$

$$Bi(a) \cup^* Bi(b) = \{I \in FI(L) | (\exists X \in Bi(a \wedge a)) (\exists Y \in Bi(b \wedge b)) X \cap Y \subseteq I\}.$$

Теорема 3.2.1. Сплетенная q-бирешетка $L = (L;\wedge,\vee,*,\Delta)$ изоморфна суперпроизведению q-решеток $(Bf(L);\cap^*,\cup^*)$ и $(Bi(L);\cap^*,\cup^*)$.

В § 3 даются определения простого фильтра и идеала q-решетки, простого фильтра и простого идеала q-бирешетки. Доказывается ряд следствий из теорем 3.1.1 и 3.2.1.

Определение 3.3.1. Фильтр F q-решетки $(L;\wedge,\vee)$ называется простым, если выполняется условие:

$$x, y \in L \text{ и } x \vee y \in F, \text{ то } x \in F \text{ или } y \in F.$$

Определение 3.3.2. Идеал I q-решетки $(L;\wedge,\vee)$ называется простым, если выполняется условие:

$$x, y \in L \text{ и } x \wedge y \in F, \text{ тогда } x \in F \text{ или } y \in F.$$

Следствие 3.3.4. Каждый идеал дистрибутивной q-решетки является пересечением всех простых идеалов, содержащих данный идеал.

Определение 3.3.3. Фильтр F q-бирешетки $(L;\wedge,\vee,*,\Delta)$ называется простым, если F – простой фильтр для обоих редуктов, т.е.

1. если $x, y \in L$ и $x \vee y \in F$, то $x \in F$ или $y \in F$;

2. если $x, y \in L$ и $x \Delta y \in F$, то $x \in F$ или $y \in F$.

Определение 3.3.4. Идеал I q-бирешетки $(L;\wedge,\vee,*,\Delta)$ называется простым, если I – простой фильтр и простой идеал соответственно для первого и второго редукта, т.е.

1. если $x, y \in L$ и $x \wedge y \in I$, то $x \in I$ или $y \in I$;
2. если $x, y \in L$ и $x \vee y \in I$, то $x \in I$ или $y \in I$.

Следствие 3.3.10. Любой фильтр F дистрибутивной q-бирешетки является пересечением всех простых фильтров этой q-бирешетки, его содержащих.

Следствие 3.3.11. Любой идеал I дистрибутивной q-бирешетки является пересечением всех простых идеалов этой q-бирешетки, его содержащих.

Список литературы

1. M. L. Ginsberg, Multi-valued logics: a uniform approach to reasoning in artificial intelligence, Computational intelligence, 4, 1988, 256-316.
2. M. C. Fitting, Bilattices in logic programming, in: G. Epstain ed., Proc. 20th Internat. Symp. on Multiple-Valued Logic, The IEEE, New York, 1990, 238-246.
3. M. C. Fitting, Bilattices and the semantics of logic programming, Journal of Logic Programming, 11, 2, 1991, 91-116.
4. M. Kondo. Filter theory of bilattices in the semantics of logic programming, Far East Journal of Mathematical Sciences, 3, 2001, 177-190.
5. Y. Loyer, U. Straccia, Epistemic foundation of the well-founded semantics over bilattices, lecture notes in Computer Science, 3153, 2004, 513-524.
6. M. C. Fitting, Negation as refutation, Proc. 4th Annual Symp. on Logic in Computation Science, IEEE Press, 1989, 63-70.
7. M. C. Fitting, Bilattices and the theory of truth, Journal of Philosophical Logic, 18, 1989, 225-256.
8. M. C. Fitting, Bilattices are nice things, In Self-reference, vol.176 of CSLI Lecture Notes, 2006, CSLI Publications, 53-77.
9. M. C. Fitting, Kleene’s logic, generalized, Journal of logic and computation, 1, 1991, 797-810.
10. M. C. Fitting, Kleene’s three valued logic and their children. Fundamenta Informaticae, 20, 1994, 113-131.
11. O. Arieli, A. Avron, Reasoning with logical bilattices, Journal of Logic, Language and Information, 5, 1996, 25-63.
12. U. Riveccio, An algebraic study of bilattice-based logics, Ph. D. Dissertation, University of Barcelona, 2010. Electronic version available at http://arxiv.org/abs/10102552.
13. A. B. Romanowska, A. Trakul, On the structure of some bilattices, Universal and Applied Algebra, World Scientific, 1989, 235-253.
14. A. Avron, The structure of interlaced bilattices, Math. Struct. In Comp. Science, Cambridge University Press, 6, 1996, 287-289.
15. B. Mobasher, D. Pigozzi, G. Slutski, Multi-valued logic programming semantics. An algebraic approach, Theoretical Computer Science 171, 1997, 77-109.
16. Yu. M. Movsisyan, A. B. Romanowska, J. D. H. Smith, Superproducts, hyperidentities, and algebraic structures of logic programming, Comb. Math. And Comb.Comp., 58, 2006, 101-111.

17. Yu. M. Movsisyan, Bilattices and hyperidentities, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2011, v.274, 174-192.
18. B. Mobasher, D. Pigozzi, G. Slutzki and G. Voutsadakis, A duality theory for bilattices, Algebra Universalis, 43, 2-3, 2000, 109-125.
19. A. Jung, U. Rivecco, Priestley duality for bilattices, Studia Logica, Springer, 82, 2006, 1-30.
20. A. Craig, L. M. Cabrer and H. A. Priestley, Beyond $\mathcal{FOUR}$: representations of non-interlaced bilattices using natural duality, Research Workshop on Duality Theory in Algebra, Logic and Computer Science University of Oxford, June 2012, 16.
21. H. Priestley, Distributive bilattices and their cousins: representation via natural dualities, Research Workshop on Duality Theory in Algebra, Logic and Computer Science, June 2012, 18.
22. I. Chajda, Lattices in quasiordered sets, Acta Polacky University, Olomouc, 31, 1992, 6-12.
23. G. Gratzer, Universal algebra, Springer-Verlag, 1979.
24. А. Черч, Введение в математическую логику, М.:ИЛ, 1, 1961.
25. А. И. Мальцев, Некоторые вопросы теории классов моделей, Тр. IV Всесоюзного математического съезда, Изд-во АН СССР, 1, 1963, 169-198.
26. Ю. М. Мовсисян, Введение в теорию алгебр со сверхтождествами, Изд-во Ереванского государственного университета, Ереван, 1986.
27. Ю. М. Мовсисян, Сверхтождества и сверхмногообразия в алгебрах, Изд-во Ереванского государственного университета, Ереван, 1990.
28. Ю. М. Мовсисян, Сверхтождества в алгебрах и многообразиях, УМН, 53, 1, 1998, 61-114.
29. A. D. Anosov, On homomorphisms of many-sorted algebraic systems in connection with cryptographic applications, Discrete Mathematics and Applications, 17, 4, 2007, 331–347.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Д. С. Давидова, Решетки с дополнительными сплетенными операциями, Уч. Записки Ереванского Государственного Университета Естественные науки, 3, 2008, 34-38.
2. D. S. Davidova, On the structure of interlaced q-bilattices, Proceedings of the International Conference CSIT, Yerevan 2009, 57-58 (with Yu. M. Movsisyan).
3. D. S. Davidova, q-bilattices, Proceedings of the International Conference Modern Algebra and its Applications, Georgia, Batumi 2010, 124-127 (with Yu. M. Movsisyan).
4. D. S. Davidova, On q-bilattices, Proceedings of the Yerevan State University Physical and Mathematical Sciences, 3, 2011, 9-16.
5. Д. С. Давидова, Представление q-решеток, Математика в высшей школе, 8, 1, 2012, 9-16.
6. D. S. Davidova, Interlaced q-bilattices, Armenian Mathematical Union Annual Session 2012 Dedicated to 1400 anniversary of Anania Shirakatsy, 2012, 82-86 (with Yu. M. Movsisyan).
7. D. S. Davidova, Representat,ion theorem for interlaced q-bilattices, Proceedings of the International Conference Logic, Algebra and Truth degrees 2012, September 10-14, 2012, Kanazawa, Ishikawa, Japan, JAIST, Kurt Gödel society, 110-113. (with Yu. M. Movsisyan).
8. D. S. Davidova, q-Bilattices, Journal of Mathematical Sciences, vol. 186, № 5, Springer, 798-801 / doi: 10.1007/s10958-012-1036-4 (with Yu. M. Movsisyan).

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Դավիդովա Դիանա

Հյուսված q-երկկավարների ներկայացումները

Ատենախոսությունը նվիրված է հյուսված q-երկկավարների ուսումնասիրությանը:

Երկկավարի գաղափարը ներմուծվել է Մեթյու Գինսբերգի կողմից 1988թ. որպես միասեռ կառուցվածք՝ արհեստական բանականության մեջ կիրառելու համար: Չորս երկտեղ գործողություններով $(L;\cap,\cup,*,\Delta)$ հանրահաշիվը կոչվում է երկկավար, եթե $L_1 = (L;\cap,\cup)$ և $L_2 = (L;*,\Delta)$ ռեդուկտները կավարներ են: Հետագայում երկկավարները ուսումնասիրվել են Մելվին Ֆիթթինգի կողմից և կիրառվել տրամաբանական ծրագրավորման մեջ, Կլինիի տրամաբանությունում և այլ բնագավարներում: Երկկավարը օժտված է երկու մասնակի կարգավորված հարաբերություններով, որոնք կիրառություններում ունեն տարբեր մեկնաբանություններ: Այդ հարաբերությունների զույգը բնականաբար պետք է լինեն միմյանց հետ կապված: Մ. Գինսբերգի աշխատանքում հարաբերությունները կապված են մեկտեղանի գործողությամբ, որը կոչվում է ժխտման գործողություն: Մյուս կողմից, Մ. Ֆիթթինգի աշխատանքներում սահմանափակումները դրվում են կավարների կառուցվածքի վրա (բաշխականության պայմաններ կամ հյուսվածության պայման):

$(L;\cap,\cup,*,\Delta)$ հանրահաշիվը կոչվում է q-երկկավար, եթե դրա $(L;\cap,\cup)$ և $(L;*,\Delta)$ ռեդուկտները q-կավարներ են և տեղի ունի հետևյալ նույնությունը՝ $a * a = a \cap a$: q-կավարի գաղափարը ներմուծվել է Ի. Խայդայի կողմից. $(L;\cap,\cup)$ հանրահաշիվը կոչվում է q-կավար, եթե այն բավարարում է հետեյալ նույնություններին՝

1. $a \cap b = b \cap a$,
   $a \cup b = b \cup a$;
2. $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$,
   $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$;
3. $a \cap (b \cup a) = a \cap a$,
   $a \cup (b \cap a) = a \cup a$;
4. $a \cap (b \cap b) = a \cap b$,
   $a \cup (b \cup b) = a \cup b$;
5. $a \cup a = a \cap a$.

Ի տարբերություն կավարների, յուրաքանչյուր $(L;\cap,\cup)$ q-կավարի համապատասխանում է քվազիկարգի Q հարաբերություն (այսինքն՝ ռեֆլեքսիվ և տրանզիտիվ հարաբերություն), որը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$aQb \leftrightarrow a \cap b = a \cap a \leftrightarrow a \cup b = b \cup b.$$

Քանի որ q-երկկավարը օժտված է երկու q-կավարների կառուցվածքով, ապա նրան կհամապատասխանի երկու քվազիկարգ: Հետաքրքրություն են ներկայացնում այն q-երկկավարները, որոնցում քվազիկարգերի միջև գոյություն ունի բնական կապ: Ինչպես և երկկավարների դեպքում, այդ կապը կարելի է հաստատել երկու եղանակով: Նախ քվազիկարգերի վրա դիտարկվում են մոնոտոնության հատկությունները, այսինքն՝ դիտարկվում են բաշխականության կամ հյուսվածության պայմաններով օժտված q-երկկավարներ: Երկրորդ եղանակը կայանում է սիգնատուրայի ընդլայման մեջ, այսիքն՝ ավելացվում են ունար գործողություններ, որոնք կապված են հիմնական երկտեղ գործողությունների հետ: Սույն աշխատանքում ուսումնասիրվում են հյուսված q-երկկավարներ, որոնք օժտված են հետևյալ մեկտեղ գործողություններով՝ ավտոմորֆիզմով, անտիավտոմորֆիզմով, ժխտումով, միաձուլումով:

Աշխատանքում կատարված հետազոտությունների արդյունքում ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները:

1. Ներմուծվել է q-կիսակավարի գաղափարը, հաստատվել է փոխմիարժեք համապատասխանություն q-կիսակավարների և քվազիկարգավորված բազմությունների միջև: Ներմուծվել է q-երկկավարի գաղափարը, որը ընդգրկում է իր մեջ երկկավարի գաղափարը և այլ զույգ կառուցվածքներ ունեցող համակարգեր, որոնք հաճախ հանդիպում են հանրահաշվում, թվերի տեսությունում, բազմությունների տեսությունում և տոպոլոգիայում:
2. Ապացուցվել է անշարժ կետի վերաբերյալ թեորեմ q-կավարների համար, որն անշարժ կետի մասին Տարսկու հայտնի թեորեմի ընդլայնումն է:
3. Կավարների միջոցով բնութագրվել են հյուսված երկտեղ գործողությունով q-երկկավարները (նկարագրում հոմոմորֆիզմի ճշտությամբ):
4. Բնութագրվել են հյուսված երկտեղ գործողությունով q-երկկավարները, որոնք օժտված են հետևյալ մեկտեղ գործողություններով.
    - ավտոմորֆիզմով q-երկկավարները;
    - անտիավտոմորֆիզմով q-երկկավարները;
    - ժխտումով q-երկկավարները;
    - ժխտումով և միաձուլումով q-երկկավարները:
5. Կամայական q-կավար նկարագրվում է q-կավարի ֆիլտրների միջոցով: Համապատասխան թեորեմը ընդգրկում է Գ. Բիրկհոֆի և Օ. Ֆրինկի հայտնի արդյունքը:
6. Կամայական հյուսված q-երկկավար նկարագրվում է q-երկկավարի ֆիլտրների և իդեալների միջոցով (բնութագրում իզոմորֆիզմի ճշտությամբ):

Abstract

Diana Davidova

Representations of interlaced q-bilattices

The thesis is devoted to the study of interlaced q-bilattice structures.

The concept of a bilattice was investigated by Mathew Ginsberg in 1988 as a uniform framework for diversity applications in artificial intelligence. The algebra, $(L;\cap,\cup,*,\Delta)$, with four binary operations is called a bilattice, if the reducts, $L_1 = (L;\cap,\cup)$ and $L_2 = (L;*,\Delta)$, are lattices. Further, bilattices were investigated by Melvin Fitting and were applied in logic programming, theory of truth degrees, Klenee's logic and in other fields. The main idea of the notion of a bilattice is the existence of two partial orders, which have different interpretations. These two orders must be connected in some manner. For example, M. Ginsberg uses for this a unary operation called negation, which is connected with the binary operations of the bilattice. On the other hand, M. Fitting connected the orders by some imposed conditions on the bilattice structure (the conditions of distributivity or the interlaced conditions). Correspondingly, M. Fitting introduced the concept of the “distributive bilattice” and the “interlaced bilattice”.

The algebra, $(L;\cap,\cup,*,\Delta)$, is called a q-bilattice, if the reducts, $L_1 = (L;\cap,\cup)$ and $L_2 = (L;*,\Delta)$, are q-lattices and the identity, $a * a = a \cap a$, is satisfied. The notion of a q-lattice was introduced by I. Chajda. The algebra, $(L;\cap,\cup)$, is called a q-lattice, if it satisfies the following identities:

1. $a \cap b = b \cap a$,
   $a \cup b = b \cup a$;
2. $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$,
   $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$;
3. $a \cap (b \cup a) = a \cap a$,
   $a \cup (b \cap a) = a \cup a$;
4. $a \cap (b \cap b) = a \cap b$,
   $a \cup (b \cup b) = a \cup b$;
5. $a \cup a = a \cap a$.

Unlike of lattices, a quasiorder, i.e. a reflexive and a transitive relation, Q, corresponds to any q-lattice, $(L;\cap,\cup)$, which is defined by the following rule:

$$aQb \leftrightarrow a \cap b = a \cap a \leftrightarrow a \cup b = b \cup b.$$

Since a q-bilattice has the structure of the two q-lattices, then two quasiorderes correspond to the q-bilattice. The q-bilattices in which there is some natural connection between the quasiorderes are applicable. As in the case of bilattices, such
connection can be established in the two ways. The first way is imposed by the conditions of monotonicity of quasiorderes, i.e. q-bilattices with the interlaced condition (or distributivity). The second way is to extended the signature of the q-bilattice, adding some unary operations, which are connected with binary operations. In the present thesis the interlaced q-bilattices with the following unary operations: an automorphism, an antiautomorphism, a negation and a conflation, are investigated.

The main results in the thesis are as the following:

1. The notion of a q-semilattice is introduced. The connection between q-semilattices and quasiordered sets is defined. The concept of a q-bilattice is introduced, which captures the bilattice concept and the other twice structures often occurring in algebra, number theory, set theory and in topology.
2. The theorem of the fixed point for q-lattices is proved, which is the extension of the well-known Tarski's theorem of the fixed point.
3. q-bilattices with interlaced binary operation are characterized with the use of lattices (characterization up to homomorphism).
4. The q-bilattices with interlaced binary operation and with the following unary operations are characterized:
    - q-bilattices with automorphism;
    - q-bilattices with antiautomorphism;
    - q-bilattices with negation;
    - q-bilattices with negation and conflation;
5. An arbitrary q-lattice is characterized by q-lattice's filters. The corresponding theorem includes the well-known result of G. Birkhoff and O. Frink.
6. The interlaced q-bilattice is characterized by q-bilattice filters and ideals (characterization up to isomorphism).

The formulations of some corollaries of the main results are given.