ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Նալբանդյան Հակոբ Սիմոնի

ՏԵՂԱԴՐՈՒԹՅԱՆ ԿԱՆՈՆԻ ՏԱՐԱՏԵՍԱԿՆԵՐԻ ԷՖԵԿՏԻՎՈՒԹՅՈՒՆԸ ԴԱՍԱԿԱՆ ԵՎ ՈՉ ԴԱՍԱԿԱՆ ՏՐԱՄԱԲԱՆԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա.01.09 «Մաթեմատիկական կիբերնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան 2011

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Налбандян Акоп Симонович

ЭФФЕКТИВНОСТЬ РАЗНОВИДНОСТЕЙ ПРАВИЛА ПОДСТАНОВКИ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ И НЕКЛАССИЧЕСКИХ ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 – “Математическая кибернетика и математическая логика”

Ереван 2011

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտում

Գիտական ղեկավար Ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր Ա.Ա. Չուբարյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ Ֆիզ.մաթ.գիտ.դոկտոր Հ.Բ. Մարանջյան
Ֆիզ.մաթ. գիտ. թեկնածու Հ .Ռ. Բոլիբեկյան

Առաջատար կազմակերպություն Ռուս-Հայկական (Սլավոնական) Համալսարան

Պաշտպանությունը կկայանա 2011 թ. մայիսի 27-ին, ժամը 14^{00} -ին, ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 044 «Մաթեմատիկական կիբերնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանության» մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ հասցեով՝ 375025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ Երևանի Պետական Համալսարանի գրադարանում:
Սեղմագիրն առաքված է 2011թ. ապրիլի 22-ին

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար
ֆիզ.մաթ. գիտ. թեկնածու Վ.Ժ. Դումանյան

Тема диссертации утверждена в Институте проблем информатики и автоматизации НАН РА

Научный руководитель доктор физ.мат наук А.А. Чубарян

Официальные оппоненты: доктор физ.мат наук Г.Б.Маранджян
кандидат физ.мат наук О.Р.Болибекян

Ведущая организация Российско-Армянский (Славянский) университет

Защита состоится 27-го мая 2011г. в 14^{00} часов на заседании специализировнного совета 044 “Математическая кибернетика и математическая логика” ВАК, при ЕГУ по адресу: 375025, г. Ереван, ул. Алека Манукяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского Государственного универстета.

Автореферат разослан 22-го апреля 2011г.

Ученый секретарь специализированного совета
кандидат физ.мат. наук В.Ж. Думанян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В диссертационной работе для классического, интуиционистского и минимального исчисления высказываний исследована эффективность различных модификаций правила подстановки с точки зрения двух основных критериев сложностных характеристик выводов: количества различных формул вывода и общей длины вывода.

В работе введено понятие глубинно-ограниченного правила подстановки и сравнены по обеим указанным критериям выводы в системах Фреге с правилом подстановки без ограничений, в системах Фреге с глубинно-ограниченным правилом подстановки и в системах Фреге без правила подстановки.

Используя полученные результаты , а также результаты для ранее исследованного правила подстановки с ограничением на количество переменных, вместо которых допустима одновременная подстановка, для классического исчисления высказываний доказана одинаковая эффективность (с полиномиальной точностью) по длине выводов систем Фреге и систем Фреге с правилом подстановки (в то время как еще в 1969г. было доказано, что правило подстановки может существенно ускорить количество шагов, во всех обзорах теории сложностей выводов соответствующая задача для длины выводов указывалась в числе нерешенных). В качестве «моста» между двумя сравниваемыми системами послужила система Фреге, дополненная правилом единичного переименования, т.е. подстановки с ограничением как на глубину (0) подставляемой формулы, так и на количество (1) переменных, вместо которых допустима одновременная подстановка.

Для доказательства указанного основного результата были получены ряд вспомогательных результатов, часть которых оказались неприемлемыми для интуиционистской и минимальной логик.

Используя результаты полученные за последние годы рядом авторов, доказано, что системы Фреге с правилом подстановки для интуиционистского и минимального исчисления высказываний существенно эффективнее систем Фреге, без правила подстановки, не только по шагам выводов, но и по общей длине выводов. На основе полученных в диссертационной работе результатов уточнена иерархия различных систем доказательств классической, интуиционистской и минимальной логик.

Актуальность работы.

Исследования сложностных характеристик выводов в различных логических и логико-математических системах, возникшие в связи с разработками автоматизации доказательств, особо актуальны как в связи с разработками систем искусственного интеллекта, так и для различных задач криптографии.

Исследования сложностных характеристик выводов в системах исчислении высказываний получили бурное развитие после известного результата Кука-Рехова[1], доказавших в 1979г., что $NP \neq coNP$ в том и только в том случае, если не существует полиномиально ограниченной системы доказательств классических тавтологий, т.е. если для любой системы доказательств классической пропозициональной логики найдется последовательность таких формул, нижние оценки длин кратчайших выводов которых имеют суперполиномиальную зависимость от длин формул. Исследования развиваются в двух направлениях: поиска новых систем доказательств и поиска класса формул, трудно доказуемых в данной системе.

Логические рассуждения при доказательстве тех или иных комбинаторных утверждений, претендующих на роль труднодоказуемых, носят конструктивный (интуиционистский) характер, а иногда ограничиваются рамками минимальной логики Иогансона. В связи с упомянутыми обстоятельствами и рядом существенных отличий между классической и неклассическими логиками, не менее актуальными являются исследования сложностей выводов в неклассических логиках.

[1] Cook S.A., Reckhow A.R. The relative efficiency of propositional proof systems}, Journal of Symbolic Logic, 44, 1979, 36-50.

Целями диссертационной работы являются:

- Сравнение эффективности систем Фреге классического исчисления высказываний с глубинно-ограниченным правилом подстановки с системами Фреге с правилом подстановки без ограничений и без правила подстановки как по шагам выводов, так и по общей длине выводов.
- Сравнение по длине выводов систем Фреге классического исчисления высказываний без правила подстановки и с правилом подстановки.
- Исследования вышесказанных двух задач для соответствующих систем Фреге интуиционистского и минимального исчисления высказываний.

Методы исследований

В работе использованы

- различные методы оценок сложностных характеристик выводов,
- известные методы сравнений одних систем доказательств с другими,
- методы моделирования одних типов выводов другими в той же системе доказательств.

Научная новизна.

- Решена одна из нерешенных задач теории сложностей выводов: для классического исчисления высказываний доказана одинаковая эффективность по общей длине выводов систем Фреге и систем Фреге с правилом подстановки.
- Доказана существенная эффективность по шагам выводов систем Фреге с правилом подстановки без ограничений по сравнению с системами Фреге с глубинно-ограниченным правилом подстановки, а также существенная эффективность последних систем по сравнению с системами Фреге без правила подстановки опять же по шагам выводов.
- Обоснованы причины невозможности доказательства результатов, аналогичных указанному в первом пункте, для одноименных систем интуиционистской и минимальной логик.

Выносящиеся на защиту основные положения:

- Доказательство существенного ускорения шагов выводов при применении правила подстановки без ограничений по сравнению с выводами с применением глибинно-ограниченного правила подстановки, а также существенного ускорения шагов выводов последних по сравнению с выводами без правила подстановки.
- **Доказательство для классического исчисления высказываний одинаковой эффективности по общей длине выводов систем Фреге с правилом подстановки и систем Фреге без правила подстановки** (в отличие от возможности существенного ускорения первых по сравнению со вторыми по количеству шагов).
- Доказательство различной эффективности как по шагам выводов, так и по общей длине всех вышеперечисленных типов систем Фреге для интуиционистской и минимальной логик.

Обоснованность и достоверность результатов

Все результаты сформулированы в виде теорем, которые доказаны

Практическая ценность

Уточнение различной или одинаковой эффективности различных консервативных расширений систем Фреге для ряда логик могут быть использованы в процессе автоматизации доказательств; а значит, и в разработках, направленных на построение элементов искусственного интелекта.

Апробация работы

Основные результаты диссертационной работы докладывались

- на летней Всеевропейской логической конференции (ESM “Logic Colloquium”-2009), состоявшейся в 2009г. в Софии (Болгария),
- на международной конференции по вычислительным наукам и информационным технологиям CSIT-2009 (г. Ереван, Армения),

- на летней Всеевропейской логической конференции (ESM “Logic Colloquium”-2010), состоявшейся в 2010г. в Париже (Франция),
- на научном семинаре ИПИиА НАН РА в 2011г.,
- на научном семинаре факультета ИПМ ЕГУ в 2011г.

<u>Публикации</u>

По теме диссертации опубликовано 6 научных работ, список которых приведен в конце автореферата.

<u>Структура и объем диссертации</u>

Диссертация состоит из введения, трех глав, кратких выводов и списка цитируемой литературы. Работа изложена на 90 страницах машинописного текста, содержит 1 диаграмму, а список литературы содержит 39 наименований.

<u>Содержание работы</u>

Работа состоит из введения и трех глав.

Во введении приводится обзор результатов, которые явились предпосылкой для исследований настоящей работы, а также те основные понятия, которые лежат в основе дальнейшего изложения.

Мы будем пользоваться общепринятыми понятиями пропозициональной формулы, классической тавтологии, систем Фреге и систем Фреге, дополненных различными модификациями правила подстановки, вывода в данной системе (в виде последовательности формул и в виде дерева), сложностных характеристик выводов и полиномиальной сводимости систем доказательств, определенных Куком и Реховым.

Длину формулы φ, определяемую как количество всех вхождений в нее логических связок, обозначим через $|\varphi|$. Очевидно, что линейной функцией от $|\varphi|$ оцениваются и полная длина формулы, понимаемая как количество всех символов, и количество вхождений переменных.

Язык каждой из рассматриваемых систем задается при ее определении.

Каждая из рассматриваемых систем Φ содержит конечное множество схем аксиом и конечное множество схематически заданных правил вывода. Вывод в системе Φ (Φ-вывод) определяется как конечная последовательность формул каждая из которых либо является аксиомой, либо получается из предыдущих по правилам вывода.

Основополагающими во всей работе являются следующие понятия: ℓ-сложность (длина) вывода, определяемая как сумма длин всех формул вывода, t-сложность – как количество шагов вывода, ℓ-сложность (t-сложность) формулы φ в системе Φ, определяемая как минимальное значение среди ℓ-сложностей (t-сложностей) Φ-выводов формулы φ и обозначаемая через ℓ_{φ}^{Φ} $\left(t_{\varphi}^{\Phi}\right)$.

Пусть Φ_1 и Φ_2 суть пропозициональные системы выводов. Следуя Куку и Рехову, напомним понятие полиномиальной сводимости.

<u>Определение 1.</u> Φ_1 $p-\ell$-сводится к Φ_2 $(\Phi_1 \preccurlyeq_{\ell} \Phi_2)$, если существует такой полином $p(\,)$, что для любой формулы φ, выводимой и в Φ_1 и Φ_2, $\ell_{\varphi}^{\Phi_2} \leq p\left(\ell_{\varphi}^{\Phi_1}\right)$.

<u>Определение 2.</u> Φ_1 $p-\ell$-эквивалентна Φ_2 $(\Phi_1 \sim_{\ell} \Phi_2)$, если $\Phi_1 \preccurlyeq_{\ell} \Phi_2$ и $\Phi_2 \preccurlyeq_{\ell} \Phi_1$.

Понятие $p-\ell$-эквивалентности соответствует общепринятому понятию p-эквивалентности.

Аналогично вводятся понятия $p-t$-сводимости и $p-t$-эквивалентности.

<u>Определение 3.</u> Φ_1 имеет экспоненциальное ℓ-ускорение (t-ускорение) относительно Φ_2, если $\Phi_2 \preccurlyeq_{\ell} \Phi_1$ $(\Phi_2 \preccurlyeq_{t} \Phi_1)$ и существует последовательность формул φ_n таких, что $\ell_{\varphi_n}^{\Phi_2} > 2^{\theta\left(\ell_{\varphi_n}^{\Phi_1}\right)}$ $\left(t_{\varphi_n}^{\Phi_2} > 2^{\theta\left(t_{\varphi_n}^{\Phi_1}\right)}\right)$.

Как уже указывались, в настоящей работе исследуются сложностные характеристики выводов в системах Фреге с различными модификациями правила подстановки. Г. Цейтин[2] и А. Чубарян впервые установили неожиданное свойство правила подстановки, позволяющее резко сократить **количество шагов** выводов.

[2] Цейтин Г., Чубарян А.А. О некоторых оценках длин логических выводов в классическом исчислении высказываний. Матем. вопр. киберн. и вычисл. техн. ЕН Арм СССР, 1975, 57-64.

Этот же результат затем был получен и иными авторами (Я. Крайчек, С. Басс[3]). Как впоследствии оказалось разные модификации правил подстановки также могут обеспечивать разную эффективность системы в смысле “уменьшения” того или иного критерия сложности.

Для одной из таких модфикаций в настоящей работе также установлено ускорение шагов выводов (глава первая).

Однако, еще с 1969 г. разными авторами исследовался вопрос о возможности сокращения длины вывода при применении правила подстановки, более того многие выдвигали гипотезу, что такое сокращение *возможно* и даже проводили аналогию со сравнением представления булевых функций в виде формул и представлением булевых функций схемами из функциональных элементов.

В настоящей работе для классического исчисления высказываний доказывается полиномиальная эквивалентность по дине выводов для систем Фреге и систем Фреге с правилом подстановки (глава вторая).

Для интуиционистской и минимальной логик предполагаемое ускорение длины вывода при введении правила подстановки действительно имеет место (обосновывается в третьей главе диссертации), что указывает на еще одно существенное отличие между классическими и неклассическими логиками .

<u>В первой главе</u>, состоящей из двух параграфов, вводится понятие глубинно-ограниченного правила подстановки и сравниваются для классической логики системы Фреге, системы Фреге с глубинно-ограниченным правилом подстановки и системы Фреге с правилом подстановки без ограничений.

<u>В первом параграфе</u> приводятся основные определения.

Каждая система Фреге $\mathcal{F}$ содержит перечислимое множество пропозициональных переменных, некоторое конечное, функционально полное множество пропозициональных связок. $\mathcal{F}$ определяется конечным множеством

[3] Pudlak P. Lengths of proofs. Handbooks of proof theory, North-Holland, 1998, 547-637.

схематически заданных правил вывода $\frac{A_1 A_2 \dots A_k}{B}$ (при k=0 соответствующее правило определяет схему аксиом). $\mathcal{F}$ непротиворечива и полна.

Подстановкой принято называть некоторое отображение $\sigma = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_1 & \dots & \varphi_s \\ p_1 & p_1 & \dots & p_s \end{pmatrix}$, $(s \geq 1)$, где p_i $(1 \leq i \leq s)$ – пропозициональные переменные, а φ_i $(1 \leq i \leq s)$ – пропозициональные формулы. Для произвольной формулы A через $A\sigma$ обозначается результат применения подстановки σ к формуле A, то есть формула, получающаяся повсеместной заменой каждого вхождения переменных p_i, если таковые имеются, формулами φ_i, соответственно. Правилом подстановки записывается в виде $\frac{A}{A\sigma}$.

Если количество переменных, для которых допустимы одновременная подстановка, не ограничено, то такое правило подстановки называется *мультипликативным*, а если заранее указывается некоторая константа $k \geq 1$ и каждый раз позволяется делать замену всех вхождений не более, чем k различных переменных, то имеется *k-ограниченное* правило подстановки. Для $k = 1$ подстановку принято называть единичной.

Глубину пропозициональной формулы φ, понимаемую в общепринятом смысле, обозначим через $d(\varphi)$. Подстановку σ назовем *m-глубинно-ограниченной* если для некоторой константы $m \geq 0$, $d(\varphi_i) \leq m$ $(1 \leq i \leq s)$. Подстановка называется *переименованием* при $m = 0$.

Для дальнейших рассмотрений мы зафиксируем конкретную систему Фреге $\mathcal{F}$. Систему получаемую из $\mathcal{F}$ добавлением мультипликативного правила подстановки без каких-либо ограничений обозначим через $S\mathcal{F}$. Системы полученные при добавлении к $\mathcal{F}$ k-ограниченного правила подстановки или m-глубинно-ограниченного правила подстановки будем обозначать соответственно через $S_k\mathcal{F}$ и $S^m\mathcal{F}$.

Далее по аналогии с результатом С. Баса о полиномиальной сводимости

$\mathcal{SF}$ к $S^0\mathcal{F}$ [4], доказывается, что $S^m\mathcal{F}$ полиномиально ℓ-сводится к $S^0\mathcal{F}$.

<u>В втором параграфе</u> приводятся результаты о сравнении систем $\mathcal{SF}$, $S_k\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}$, полученные в[5]

1) $\forall k \geq 1\ \mathcal{SF} \sim_\ell S_k\mathcal{F}$,
2) $\forall k_1, k_2\ (k_1 k_2 \geq 1)\ S_{k_1}\mathcal{F} \sim_t S_{k_2}\mathcal{F}$,
3) $\forall k \geq 1\ \mathcal{SF}$ имеет экспоненциальное t-ускорение относительно $S_k\mathcal{F}$,
4) $\forall k \geq 1\ S_k\mathcal{F}$ имеет экспоненциальное t-ускорение относительно $\mathcal{F}$.

и доказывается

Теорема 1.1.

1) $\forall m \geq 1\ \mathcal{SF} \sim_\ell S^m\mathcal{F}$,
2) $\forall m_1, m_2\ (m_1 m_2 \geq 1)\ S^{m_1}\mathcal{F} \sim_t S^{m_2}\mathcal{F}$,
3) $\forall m \geq 0\ \mathcal{SF}$ имеет экспоненциальное t-ускорение относительно $S^m\mathcal{F}$,
4) $\forall m \geq 0\ S^m\mathcal{F}$ имеет экспоненциальное t-ускорение относительно $\mathcal{F}$.

Результаты пунктов 1) и 2) доказываются моделированием одних выводов другими.

Для доказательства пунктов 3) и 4) приводятся примеры последовательностей формул, “легко” выводимых в одной из систем и “трудно” – в другой.

Все перечисленные результаты указывают на равноэффективность по длине выводов систем Фреге с подстановкой без ограничений и систем Фреге с различными ограничениями на правило подстановки, в то время как по шагам выводов $\mathcal{SF}$ существенно эффективнее и $S^m(\mathcal{F})$ $(m \geq 0)$ и $S_k(\mathcal{F})$ $(k \geq 1)$, а последние существенно эффективнее $\mathcal{F}$ также по шагам выводов.

<u>Во второй главе</u>, состоящей из двух параграфов, доказывается *основной* результат о полиномиальной эквивалентности систем Фреге ($\mathcal{F}$) и систем Фреге с

---

[4] Buss R.S., Some remarks on lengths of propositional proofs, Arch. Math. Logic (1995) 34: 377-394.
[5] Chubaryan An., Chubaryan Arm., Aleksanyan S., Comparison of the Complexities in Frege Proofs with Different Substitution Rules, Math. Probl. Of Comp. Science 30, Yerevan, 2008, 36-39.

правилом подстановки ($S\mathcal{F}$) для классического исчисления высказываний. В качестве “моста” между двумя указанными типами систем рассматриваются системы Фреге с двумя типами ограничений (единичное переименование) на правило подстановки ($S_1^0\mathcal{F}$).

В первом параграфе приводятся доказательства вспомогательных утверждений:

1. Обосновывается применение для изменения конструкции выводов в $S_1^0\mathcal{F}$ игры Доказывающий-Опровергающий (Prover-Adversary game), введённой в качестве метода получения нижней оценки шагов выводов в системах Фреге (без правила подстановки) классического исчисления высказываний.
2. По аналогии с результатом Крайчека[6] доказывается

   Лемма 2.1.1 *Существует такой полином $p(\ )$, что для каждой тавтологии φ если количество формул в ее $S_1^0\mathcal{F}$-выводе, заданной в виде последовательности, не превышает n, то существует ее $S_1^0\mathcal{F}$-вывод в виде дерева, количество шагов которого не превышает $p(n)$.*

3. Приводится

   Лемма 2.1.2

   $$S_1^0\mathcal{F} \sim_t \mathcal{F},$$

   доказательство которой основано на том факте, что вывод с правилом подстановки в виде дерева не имеет никакого преимущества по количеству шагов перед выводом без правила подстановки.

4. Определяется понятие право-усеченного вывода и доказывается

   Лемма 2.1.3 *В классическом исчислении высказываний каждый $\mathcal{F}$-вывод тавтологии может быть трансформирован в право-усеченный $\mathcal{F}$-вывод той же тавтологии, количество формул в котором не больше количества формул первоначального вывода.*

[6] Krajicek J. Lower bounds to the size of constant-dept propositional proofs, Journal of Symbolic Logic, vol. 39, 1994, 73-86.

5. Доказывается

Лемма 2.1.4 *Если t-количество формул в право-усеченном $\mathcal{F}$-выводе тавтологии φ, то длина этого вывода не более 3* $t^3 \cdot |\varphi|$.

При доказательстве используется идея Басса доказательства аналогичного утверждения для глубинно-ограниченных систем Фреге.

В втором параграфе формулируется и доказывается основной результат

Основная теорема

$$S\mathcal{F} \sim_{\ell} \mathcal{F}.$$

Доказательство основано на результатах, приведенных в первой главе и следующего утверждения.

Основная лемма

$$S_1^0\mathcal{F} \sim_{\ell} \mathcal{F}.$$

Во третьей главе, состоящей из двух параграфов, сравниваются те же системы доказательств, но уже для интуиционистской и минимальной логик.

В первом параграфе даются определения систем Фреге, расширенных систем Фреге (extended Frege) и систем Фреге с различными модификациями правила подстановки для интуиционистской логики и логики Иогансона.

Указывается ряд основных отличий между определяемыми здесь системами и их аналогами для классического исчисления высказываний.

Обосновывается достоверность всех результатов первого параграфа, относящихся к количеству шагов выводов в соответствующих системах как интуиционистской, так и минимальной логик.

Обосновывается также невозможность адаптирования доказательств ряда вспомогательных результатов второй главы к неклассическим логикам, чем ставится под сомнение достоверность их утверждений для неклассических логик.

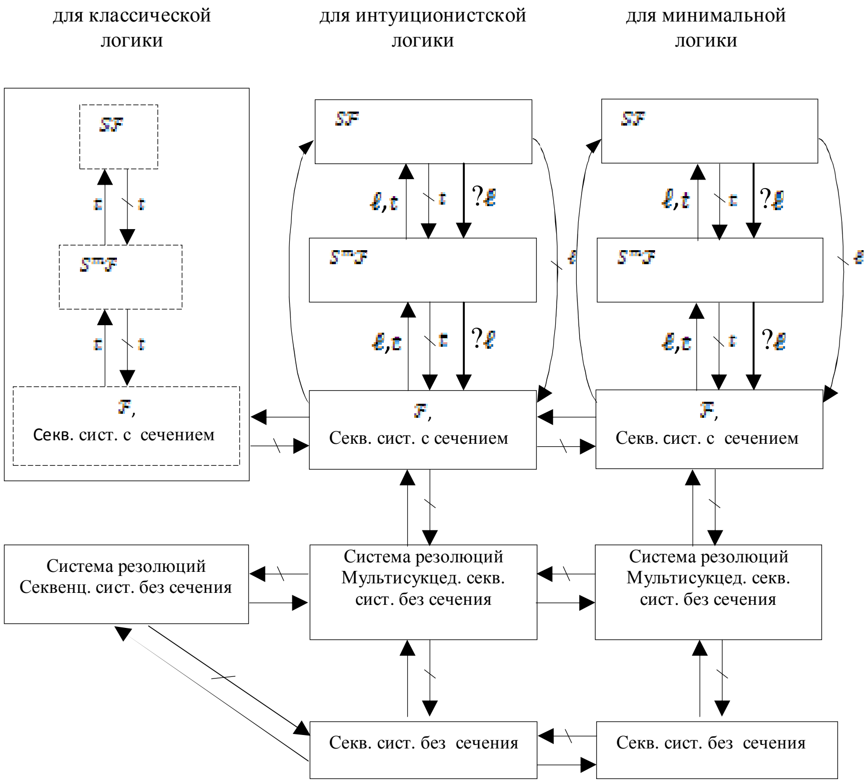
В втором параграфе обосновывается достоверность следующего результата.

Теорема 3.2 *Для интуиционистского (минимального) исчисления высказываний системы Фреге с подстановками имеют экспоненциальное ℓ-ускорение относительно систем Фреге без подстановок.*

При доказательстве используются ряд результатов европейских авторов упомянутых в обзоре Олафа Бейерсдорфа[7].

На основе полученных в работе результатов некоторый фрагмент иерархии систем доказательств классического, интуиционистского и минимального исчисления высказываний может быть уточнен в виде следующей диаграммы.

Уточненный фрагмент иерархии систем доказательств классического интуиционистского и минимального исчисления высказываний



[7] Beyersdorff O. Proof Complexity of Non-classical Logics. Preprint Institute of Comp. Science, Humbolt Unit., Berlin, Germany, 13 pages.

В каждой клетке диаграммы заключены p-эквивалентные системы. Стрелка от одной клетки к другой означает что система(ы) из первой клетки p-сводятся к системе(ам) во второй клетке (в нашей терминологии $p-\ell$-сводятся).

Перечеркнутая стрелочка с пометкой t (ℓ) означает, что система, из которой выходит стрелка, имеет экспоненциальное t-ускорение (ℓ-ускорение) относительно системы, в которую направлена стрелка.

ВЫВОДЫ

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем

1. Сравнивая по “эффективности” системы Фреге с общепринятым правилом подстановки ($\mathcal{SF}$), с глубинно-ограниченным правилом подстановки ($\mathcal{S}^m\mathcal{F}$) и без правила подстановки ($\mathcal{F}$), для классического, интуиционистского и минимального исчисления высказываний доказано, что по <u>количеству шагов выводов</u> полиномиально эквивалентны лишь $\mathcal{S}^{m_1}\mathcal{F}$ и $\mathcal{S}^{m_2}\mathcal{F}$ для произвольных неотрицательных m_1 и m_2, в то время как $\mathcal{SF}$ имеет экспоненциальное ускорение относительно $\mathcal{S}^m\mathcal{F}$, которые в свою очередь имеют экспоненциальное ускорение относительно $\mathcal{F}$.
2. По длине выводов все системы $\mathcal{SF}$, $\mathcal{S}^m\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}$ для классического исчисления высказываний полиномиально эквивалентны.
3. Для интуиционистского и минимального исчисления высказываний системы $\mathcal{SF}$ имеют экспоненциальное ускорение относительно систем $\mathcal{F}$ и по длине выводов, что указывает на еще одно существенное отличие неклассических и классических логик.

Список публикаций по теме диссертации

1. А.А. Чубарян, А.С. Налбандян, Сравнение эффективности систем Фреге с различными модификациями правила подстановки, ДНАН Армении, Прикладная матем, 2009, т. 109, N3, 208-213.
2. An. Chubaryan, Arm. Chubaryan, H. Nalbandyan, Efficiency of Week Substitution Rules, ASL, ESM, LC-2009, Sofia, Abstracts, 37-38, and in Bull. Of Symb. Logic, 2010, v.16 , N 1 , p.112.
3. An. Chubaryan, Arm. Chubaryan, H. Nalbandyan, Comparison of the Efficiency of Frege Systems with Restricted Substitution Rules, CSIT-2009, Yerevan, 31-32.
4. H. Nalbandyan, Efficiency of depth-restricted substitution rules, Math. Problems of Comp. Science, Transactions of IIAP of NAS RA, Yerevan, v. 33, 2010,p. 5-10.
5. An. Chubaryan, Arm. Chubaryan, H. Nalbandyan, On the Sizes Frege Proofs and Substitution Frege Proofs, ASL, ESM, LC-2010, Paris, Abstracts of contributed talks, p.7.
6. An. Chubaryan, H. Nalbandyan, , Comparison of`proof sizes in Frege sytems and Substitution Frege systems, IJ ITA, Sofia, 2010, N2, pp.115-122.

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատանքում համեմատված են դասական, ինտուիցիոնիստական և մինիմալ ասույթային հաշվի տարբեր համակարգեր ըստ նրանցում ապացուցվող բանաձևերի արտածման բարդության տարբեր բնութագրիչների՝ արտածման քայլերի քանակի և արտածման երկարության:

Ներմուծվել է խորությամբ սահմանափակված տեղադրման կանոնի գաղափարը, համաձայն որի թույլատրվում է կատարել միայն այնպիսի բանաձևերի տեղադրություն, որոնց խորությունը չի գերազանցում նախապես տրված m թվից: Դիտարկվում է նաև այնպիսի տեղադրության կանոն, երբ սահմանափակում է դրվում այն փոփոխականների քանակի վրա որոնց փոխարեն թույլատրվում է կատարել տեղադրություն:

Հետազոտվող համակարգերն են՝ $\mathcal{F}$ – Ֆրեգեի համակարգերը, $S\mathcal{F}$ – սովորական տեղադրման կանոնով Ֆրեգեի համակարգերը և $S^m\mathcal{F}$ – m խորությամբ սահմանափակված տեղադրման կանոնով Ֆրեգեի համակարգերը և $S_k\mathcal{F}$ - այնպիսի Ֆրեգեի համակարգեր որոնցում տեղադրության կանոնը թույլատրում է միայն k-հատ փոփոխականների միաժամանակյա փոխարինում:

Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից և երեք գլուխներից:

Ներածությունում տրվում են հետազոտվող բնագավառի հայտնի արդյունքներ և հիմնական սահմանումներ:

Գլուխ 1.-ում ապացուցվում է դասական տրամաբանության $S^m\mathcal{F}$ ($m \geq 1$) և $S^0\mathcal{F}$ համակարգերի բազմանդամային համարժեքությունը ըստ արտածումների երկարության և համեմատվում են $S\mathcal{F}$, $S^m\mathcal{F}$ և $\mathcal{F}$ համակարգերը ըստ արտածման քայլերի:

Գլուխ 2.-ում դասական տրամաբանության $\mathcal{SF}$ և $\mathcal{F}$ համակարգերն են համեմատվում ըստ արտածման երկարության, ինչպես նաև որոշ միջանկյալ համակարգեր ըստ արտածման քայլերի:

Գլուխ 3.-ում ինտուիցիոնիստական և մինիմալ տրամաբանության համար համեմատվում են բոլոր վերոհիշյալ տիպի համակարգերը ըստ ար-տածումների բարդության երկու բնութագրիչների:

Ստացված հիմնական արդյունքներն են`

1. Դասական, ինտուիցիոնիստական և մինիմալ տրամաբանությունների համար **ըստ քայլերի քանակի** բազմանդամորեն համարժեք են միայն $\mathcal{S}^{m_1}\mathcal{F}$ և и $\mathcal{S}^{m_2}\mathcal{F}$ համակարգերը (ցանկացած ոչ բացասական ամբողջ m_1 և m_2 համար), մինչ դեռ $\mathcal{SF}$ համակարգերը ունեն էքսպոնենցիալ արագացում $\mathcal{S}^{m}\mathcal{F}$-երի նկատմամբ, որոնք էլ իրենց հերթին ունեն էքսպոնենցիալ արագացում $\mathcal{F}$ տիպի համակարգերի նկատմամբ:
2. Դասական ասույթային հաշվի համար **ըստ արտածումների երկարության** բազմանդամորեն համարժեք են բոլոր երեք տիպի համակարգերը` $\mathcal{F}$, $\mathcal{S}^{m}\mathcal{F}$ և $\mathcal{SF}$ (նշենք, որ $\mathcal{SF}$ և $\mathcal{F}$ համակարգերի հարաբերությունը ըստ արտածումների երկարության մասնագիտական գրականությունում նշվում էր որպես բաց խնդիր):
3. ինտուիցիոնիստական և մինիմալ տրամաբանություններում $\mathcal{SF}$ տիպի համակարգերը ունեն էքսպոնենցիալ արագացում $\mathcal{F}$ տիպի համակարգերի նկատմամբ նաև ըստ արտածումների երկարության, ինչը փաստում է ևս մեկ էական տարբերությունը դասական և ոչ դասական տրամաբանական համակարգերի միջև:

ABSTRACT

Hakob Nabandyan

EFFICIENCY OF SUBSTITUTION RULE MODIFICATIONS FOR CLASSICAL AND NON-CLASSICAL LOGICAL SYSTEMS

In this thesis some proof systems of classical, intuitionistic and minimal propositional logics are compared by different characteristics of proof complexity (by the number of steps and by sizes) for the formulas, proved in these systems.

The depth-restricted substitution rule is introduced such that the substitutions are allowed only for no more than m-depth formulas (for some fixed m). The constant-bounded substitution rule, when the substitution instead only no more than some fixed number of variables is allowed at a time, are considered also.

In this thesis the following systems are investigated: $S\mathcal{F}$-the Frege systems with substitution rule, $S^m\mathcal{F}$-the Frege systems with m-depth-restricted substitution rule, $S_k\mathcal{F}$ - the Frege systems with k-bounded substitution rule and $\mathcal{F}$-the Frege systems without substitution rule.

The thesis consists from Introduction and three parts.

The known results of investigated area and main definitions are given in Introduction.

The polynomial equivalence by size for the systems $S^m\mathcal{F}$ (m ≥1) and $S^0\mathcal{F}$ for classical logic is proved in the part 1. and also the number of steps of proofs in the systems $S\mathcal{F}$, $S^m\mathcal{F}$ and $\mathcal{F}$ are compared in the same place.

In the part 2. the systems $\mathcal{SF}$ and $\mathcal{F}$ for classical logic are compared by size and also different constructions of proofs (as sequence and tree-like) for some intermediate systems are compared by number of steps.

In the part 3. the above-mentioned type systems for intuitionistic and minimal logics are compared by two characteristics of proof complexity.

The main results of this thesis are:

1. For classical, intuitionistic and minimal logic only $\mathcal{S}^{m_1}\mathcal{F}$ and $\mathcal{S}^{m_2}\mathcal{F}$-type systems, for given arbitrary m_1 and m_2, are polynomially equivalent by steps, just as the $\mathcal{SF}$-type systems have exponential speed-up by steps over the $\mathcal{S}^{m}\mathcal{F}$-type systems, wich itself have exponential speed-up by steps over the $\mathcal{F}$-type systems.
2. The systems $\mathcal{F}$, $\mathcal{S}^{m}\mathcal{F}$ and $\mathcal{SF}$ for classical logic **are polynomially equivalent by size of proofs** (note that the relation between the proof size in the systems $\mathcal{F}$ and $\mathcal{SF}$ was pointed in the literature as an open problem).
3. The $\mathcal{SF}$-type systems for intuitionistic and minimal logics have exponential speed-up by size over the $\mathcal{F}$-type systems. This fact is some more difference between classical and non-classical logic.