

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Հրաչյան Գուրգեն Գագիկի

ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ԾՐԱԳՐԵՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ
ՍԵՄԱՆՏԻԿԱՅԻ ՄԱՍԻՆ

Ա.01.09 «Մաթեմատիկական կիրառություններ և մաթեմատիկական
տրամաբանություն» մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

Ս Ե Ղ Ս Ա Գ Ի Ր

Երևան-2009

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Грачян Гурген Гагикович

ОБ ОСНОВНОЙ СЕМАНТИКЕ
ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОГРАММ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.09 “Математическая кибернетика и
математическая логика”

Ереван-2009

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝	Ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր	Ս.Ա. Նիգիյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	Ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր	Հ.Բ. Մարանջյան
	Ֆիզ.մաթ. գիտ. թեկնածու	Ս.Ա. Ավետիսյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման
պրոբլեմների ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կայանալու է 2009 թ. հունիսի 5-ին ժամը 14⁰⁰-ին ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 044 «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ Երևանի պետական համալսարանի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2009թ. մայիսի 4-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար՝ Ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու	Վ.Ժ. Դումանյան
--	----------------

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете

Научный руководитель:	доктор физ.-мат. наук	С.А. Нигиан
Официальные оппоненты:	доктор физ.-мат. наук	Г.Б. Маранджян
	кандидат физ.-мат. наук	С.А. Аветисян

Ведущая организация: Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА

Защита диссертации состоится 5-го июня 2009 г. в 14⁰⁰ часов на заседании специализированного совета ВАК 044 “Математическая кибернетика и математическая логика” при ЕГУ по адресу: 0025 г. Ереван, ул. Алека Манукяна, 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 4-го мая 2009 г.

Ученый секретарь специализированного совета,
кандидат физ.-мат. наук

В.Ж. Думанян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В диссертационной работе рассматриваются бестиповые и строго типизированные функциональные программы. Бестиповые функциональные программы представляют собой системы уравнений с отделяющимися переменными в бестиповом λ -исчислении. Основная (детонационная) семантика таких программ определяется как терм в бестиповом λ -исчислении, использующий некоторый комбинатор неподвижной точки. Обычно используется комбинатор неподвижной точки Y (парадоксальный комбинатор Карри). Существует множество технологий интерпретации бестиповых функциональных языков программирования. Например, Eval/Apply-интерпретатор, SECD машина, метод, основанный на редукции графов, метод CPS преобразований. Исследование соотношения процедурных семантик используемых методов и основной семантики является одной из актуальных и важных проблем теории функционального программирования. Перечисленные методы, а также многие другие, эквивалентны, так называемым, алгоритмам интерпретации. В работе¹ процедурные семантики алгоритмов интерпретации сравниваются с основной семантикой, определяемой с помощью комбинатора неподвижной точки Y . Возникает естественный вопрос: верны ли эти результаты для произвольного комбинатора неподвижной точки? Таким образом, важным является рассматриваемый в диссертационной работе вопрос об инвариантности основной семантики относительно комбинатора неподвижной точки, а также вопрос о том, как ведут себя основные семантики, определяемые разными комбинаторами неподвижной точки, при конкретных редукционных стратегиях.

В диссертационной работе исследуется также наименьшее решение строго типизированных функциональных программ (систем уравнений с отделяющимися переменными в монотонных моделях типового λ -исчисления), главная компонента которого является основной семантикой программы. В работе², доказывается, что компоненты порядков ≤ 2 наименьшего решения такой системы уравнений достигаются при ординале ω (ординал, соответствующий натуральному ряду). В диссертационной работе исследуется вопрос о том, при каких ординалах достигаются компоненты порядков ≥ 3 .

Цель диссертационной работы. Целью диссертационной работы является:

- Исследовать вопрос об инвариантности основной семантики бестиповой функциональной программы относительно комбинатора неподвижной точки.
- Выяснить β -равны ли основные семантики, определяемые разными комбинаторами неподвижной точки. Исследовать поведения основных семантик, определяемых разными комбинаторами неподвижной точки, при конкретных редукционных стратегиях.
- Дать оценки ординалов, при которых достигаются компоненты порядков ≥ 3 наименьшего решения строго типизированной функциональной программы.

¹ Нигиян С.А., Аветисян С.А. О семантике бестиповых функциональных программ. Программирование, N3, 2002, стр. 5-14.

² Нигиян С.А. Об интерпретации функциональных языков программирования. Программирование, N2, 1993, стр. 58-68.

Методика исследований. Методика исследований включает в себя методы теории алгоритмов, бестипового и типового λ -исчислений, теории множеств.

Научная новизна.

1. Доказывается теорема об инвариантности основной семантики, согласно которой основные семантики, определяемые с помощью двух разных комбинаторов неподвижной точки, эквивалентны в том смысле, что, если применить их к одним и тем же начальным данным, то получим один и тот же результат.
2. Доказывается, что несмотря на указанную эквивалентность, основные семантики, определяемые разными комбинаторами неподвижной точки, не всегда β -равны и не всегда ведут себя одинаково при использовании, так называемых, улучшенных активных редукционных стратегий и активных редукционных стратегий, удовлетворяющих некоторому естественному условию.
3. Устанавливается (с точностью до двух ординалов) ординал, при котором достигается наименьшая неподвижная точка произвольного монотонного отображения, определенного на полном множестве. Оцениваются ординалы, при которых достигаются компоненты наименьшего решения строго типизированной функциональной программы, имеющие порядок ≥ 3 .

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в диссертационной работе, носят как теоретический, так и практический характер. Они могут быть использованы при создании бестиповых функциональных систем программирования и обоснования их корректности.

Апробация работы и публикации. Основные результаты диссертации докладывались на семинаре кафедры программирования и информационных технологий ЕГУ, на общем семинаре факультета информатики и прикладной математики ЕГУ, на международных конференциях CSIT-05, Ереван, 2005 и CSIT-07, Ереван, 2007.

Основные результаты работы отражены в 5-ти публикациях.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка используемой литературы (49 наименований). Объем работы – 93 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении описывается задача диссертационного исследования, обосновывается актуальность темы диссертации и её новизна. Дается краткий обзор содержания работы.

Глава 1 посвящена доказательству теоремы об инвариантности основной семантики бестиповых функциональных программ.

В разделе 1.1 приводятся определения и результаты, используемые в главах 1 и 2. Определяются понятие терма, β -редукции и приводятся используемые нами основные теоремы λ -исчисления. Все приводимые определения и результаты можно найти в монографии¹.

Пусть V – счетное множество переменных. Множество термов Λ определяется традиционным образом:

¹ Барендрегт Х. Лямбда-исчисление, его синтаксис и семантика, М.: Мир, 1985, 606 с..

1. если $x \in V$, то $x \in \Lambda$;
2. если $M_1, M_2 \in \Lambda$, то $(M_1 M_2) \in \Lambda$;
3. если $x \in V$ и $M \in \Lambda$, то $(\lambda x M) \in \Lambda$.

Принято использовать следующую сокращенную запись термов: терм $(\dots(M_1 M_2) \dots M_k)$, где $M_i \in \Lambda$, $i = 1, \dots, k$, $k > 1$, принято обозначать $M_1 M_2 \dots M_k$; терм $(\lambda x_1 (\lambda x_2 (\dots (\lambda x_m M) \dots)))$, где $M \in \Lambda$, $x_j \in V$, $j = 1, \dots, m$, $m > 0$, принято обозначать $\lambda x_1 \dots x_m. M$.

Традиционным образом вводятся понятия свободного и связанного вхождения переменной в терм и понятие свободной переменной терма. Множество всех свободных переменных терма M условимся обозначать $FV(M)$. Терм, не содержащий свободных переменных, назовем замкнутым. Множество всех замкнутых термов обозначим Λ^0 .

Через $M[x_1, \dots, x_m]$ условимся обозначать терм M с указанием интересующих нас попарно различных переменных $x_1, \dots, x_m$, $m \geq 1$. Через $M[N_1, \dots, N_m]$ или через $M[x_1 := N_1, \dots, x_m := N_m]$ обозначим терм, полученный в результате одновременной подстановки термов $N_1, \dots, N_m$ в терм M вместо всех свободных вхождений переменных $x_1, \dots, x_m$, соответственно. Подстановку назовем допустимой, если ни одна свободная переменная подставляемого терма не связывается в результате подстановки. Далее, мы будем рассматривать только допустимые подстановки.

Термы M и N назовем конгруэнтными (обозначим $M \equiv N$), если один терм можно получить из другого переименованием связанных переменных. Далее, мы не будем различать конгруэнтные термы.

Понятие β -редукции определяется как следующее множество пар:

$$\beta = \{((\lambda x. R)Q, R[x := Q]) \mid R, Q \in \Lambda, x \in V\}.$$

Терм вида $(\lambda x. R)Q$ называется β -редексом (далее просто редексом), а терм $R[x := Q]$ – его сверткой. Традиционным образом определяются отношение одношаговой β -редукции ($\rightarrow_\beta$), отношение β -редукции ($\rightarrow \rightarrow_\beta$) и отношение β -равенства ($=_\beta$). Далее, условимся отношение одношаговой β -редукции называть просто одношаговой редукцией, а отношение β -редукции – просто редукцией. Будем также опускать символ β в соответствующих обозначениях, т.е. отношение $\rightarrow_\beta$ обозначать $\rightarrow$, отношение $\rightarrow \rightarrow_\beta$ – $\rightarrow \rightarrow$, а отношение $=_\beta$ – $=$.

Терм, не содержащий редексов, называется β -нормальной формой (далее, просто нормальной формой). Множество всех нормальных форм условимся обозначать NF , а множество всех замкнутых нормальных форм – NF^0 . Будем говорить, что терм M имеет нормальную форму, если существует терм $N \in NF$ такой, что $M = N$.

Теорема Черча-Россера.

- а) Если $M \rightarrow \rightarrow M_1$ и $M \rightarrow \rightarrow M_2$, то существует такой терм N , что $M_1 \rightarrow \rightarrow N$ и $M_2 \rightarrow \rightarrow N$.
- б) Если $M_1 = M_2$, то существует такой терм N , что $M_1 \rightarrow \rightarrow N$ и $M_2 \rightarrow \rightarrow N$.

Следствие теоремы Черча-Россера.

- а) Если $M = N$, где N – нормальная форма, то $M \rightarrow \rightarrow N$.

б) Если $M = N_1$ и $M = N_2$, где N_1 и N_2 – нормальные формы, то $N_1 \equiv N_2$.

Теорема о неподвижной точке. Существует такой терм Z , что если его применить к произвольному терму M , то получим неподвижную точку терма M , т.е. $M(ZM) = ZM$.

Терм Z называется комбинатором неподвижной точки. Известны, следующие комбинаторы неподвижной точки:

$Y \equiv \lambda h.(\lambda x.h(xx))(\lambda x.h(xx))$ – парадоксальный комбинатор Карри,

$\Theta \equiv (\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy))$ – комбинатор Тьюринга.

Для формулировки теоремы о кратной неподвижной точке введем обозначения для некоторых термов:

$\langle M_1, \dots, M_n \rangle \equiv \lambda x.xM_1 \dots M_n$, где $x \in V$, $M_i \in \Lambda$, $x \notin FV(M_i)$, $i = 1, \dots, n$, $n \geq 1$;

$U_i^n \equiv \lambda x_1 \dots x_n.x_i$, где $x_j \in V$, $j \neq k \Rightarrow x_j \neq x_k$, $k, j = 1, \dots, n$, $1 \leq i \leq n$, $n \geq 1$;

$P_i^n \equiv \lambda x.xU_i^n$, где $x \in V$, $1 \leq i \leq n$, $n \geq 1$.

Теорема о кратной неподвижной точке. Пусть $M_1, \dots, M_n$ ($n \geq 1$) – произвольные термы, Z – комбинатор неподвижной точки. Тогда

$$M_i L_1^Z \dots L_n^Z = L_i^Z,$$

где

$$L_i^Z \equiv P_i^n (Z (\lambda x. \langle M_1 (P_1^n x) \dots (P_n^n x), \dots, M_n (P_1^n x) \dots (P_n^n x) \rangle)),$$

$i = 1, \dots, n$.

В разделе 1.2 дается определение бестиповой функциональной программы и ее семантики¹. Бестиповая функциональная программа P представляет собой систему уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} f_1 &= M_1[f_1, \dots, f_n], \\ &\dots \\ f_n &= M_n[f_1, \dots, f_n], \end{aligned} \tag{1}$$

где $f_i \in V$, $i \neq j \Rightarrow f_i \neq f_j$, $M_i[f_1, \dots, f_n] \in \Lambda$, $FV(M_i[f_1, \dots, f_n]) \subseteq \{f_1, \dots, f_n\}$, $i, j = 1, \dots, n$, $n \geq 1$. Главным уравнением программы (1) будем считать первое уравнение системы. Зафиксируем комбинатор неподвижной точки Z и рассмотрим следующее решение указанной системы:

$$(L_1^Z, \dots, L_n^Z),$$

где $L_i^Z \equiv P_i^n (Z (\lambda x. \langle M_1 [P_1^n x, \dots, P_n^n x], \dots, M_n [P_1^n x, \dots, P_n^n x] \rangle))$, $i = 1, \dots, n$. Главной компонентой указанного решения назовем терм L_1^Z , который и является семантикой неподвижной точки (основной семантикой) программы P , соответствующей комбинатору неподвижной точки Z . Определим множество $Fix(P, Z)$, соответствующее семантике L_1^Z , следующим образом:

$$Fix(P, Z) = \{(Q_1, \dots, Q_k, M_0) \mid L_1^Z Q_1 \dots Q_k \rightarrow \rightarrow M_0, Q_1, \dots, Q_k, M_0 \in NF^0, k \geq 0\}.$$

¹ Нигиян С.А., Аветисян С.А. О семантике бестиповых функциональных программ. Программирование, N3, 2002, стр. 5-14.

В разделе 1.3 формулируется теорема 1.1 (об инвариантности основной семантики относительно комбинатора неподвижной точки), которая является главным результатом данной главы. А также формулируется основная лемма 1.1 и приводится доказательство теоремы 1.1 с использованием леммы 1.1.

Теорема 1.1 (об инвариантности основной семантики). Для любых комбинаторов неподвижной точки Z , Z' и любой бестиповой функциональной программы P имеем:

$$\text{Fix}(P, Z) = \text{Fix}(P, Z'),$$

т.е., множество $\text{Fix}(P, Z)$, соответствующее семантике неподвижной точки, инвариантно относительно комбинатора неподвижной точки.

Справедливость теоремы 1.1 вытекает из следующей основной леммы 1.1.

Лемма 1.1 (основная). Пусть Z , Z' – произвольные комбинаторы неподвижной точки и M – терм, в котором зафиксировано некоторое вхождение подтерма ZL , $L \in \Lambda$. Обозначим через M' терм, который получается из M заменой указанного вхождения подтерма ZL термом $Z'L$. Предположим также, что свободные вхождения переменных в соответствующих вхождениях подтермов ZL и $Z'L$ не связываются в термах M и M' , соответственно. Тогда M_0 является нормальной формой терма M в том и только в том случае, если M_0 является нормальной формой терма M' .

Разделы 1.4 и 1.5 посвящены доказательству основной леммы 1.1.

В главе 2 доказываем, что основные семантики, определяемые разными комбинаторами неподвижной точки, не всегда β -равны, исследуются основные семантики, определяемые разными комбинаторами неподвижной точки, при различных редукционных стратегиях и рассматриваются бестиповые функциональные программы, состоящие из одного уравнения.

В разделе 2.1 доказываем следующую теорему 2.1.

Теорема 2.1. Существует бестиповая функциональная программа P_0 и такие комбинаторы неподвижной точки Z и Z' , что, если L – основная семантика программы P_0 , определяемая с помощью комбинатора неподвижной точки Z , а L' – основная семантика программы P_0 , определяемая с помощью комбинатора неподвижной точки Z' , то $L \neq L'$.

Причем, теорема 2.1 доказываем для классических комбинаторов неподвижной точки Y и Θ .

В разделе 2.2 для ряда классических редукционных стратегий доказываем, что основные семантики бестиповой функциональной программы, определяемые разными комбинаторами неподвижной точки, не всегда ведут себя одинаково. То есть, возможно, что с помощью данной редукционной стратегии, терм, полученный применением одной из семантик к некоторым термам, редуцируется к нормальной форме, а в случае другой, редукция бесконечна.

Редукционной стратегией называется произвольное отображение $S : \Lambda \rightarrow \Lambda$ такое, что для любого терма M , $M \rightarrow \rightarrow S(M)$. Из этого определения, согласно

следствию теоремы Черча-Россера, вытекает, что если $M \in NF$, то $S(M) \equiv M$. Редукционная стратегия S называется одношаговой, если при $M \in \Lambda \setminus NF$, $M \rightarrow S(M)$. Редукцию $M \rightarrow \rightarrow N$ назовем S редукцией, если $N \equiv S^n(M)$, где $n \geq 0$ и $S^n(M)$ определяется следующим образом: $S^0(M) \equiv M$, $S^{k+1}(M) \equiv S(S^k(M))$, $k \geq 0$.

Для S редукции $M \rightarrow \rightarrow N$, мы будем использовать запись $M \xrightarrow{S} \rightarrow N$. Редукционная стратегия S называется нормализующей, если для любого терма M , имеющего нормальную форму M_0 , имеет место $M \xrightarrow{S} \rightarrow M_0$.

Пусть S – редукционная стратегия, Z_1, Z_2 – комбинаторы неподвижной точки, P – бестиповая функциональная программа и L_1, L_2 – основные семантики программы P , определяемые с помощью Z_1, Z_2 , соответственно. Тогда, согласно теореме 1.1 об инвариантности основной семантики, для любых $Q_1, \dots, Q_k, M_0 \in NF^0$ ($k \geq 0$) имеем

$$L_1 Q_1 \dots Q_k \rightarrow \rightarrow M_0 \Leftrightarrow L_2 Q_1 \dots Q_k \rightarrow \rightarrow M_0.$$

Возникает вопрос: имеет ли место то же самое для редукционной стратегии S , т.е. имеет ли место следующее?

$$L_1 Q_1 \dots Q_k \xrightarrow{S} \rightarrow M_0 \Leftrightarrow L_2 Q_1 \dots Q_k \xrightarrow{S} \rightarrow M_0 \quad (2)$$

Редукционная стратегия определяется как произвольное отображение с ограничением, что это отображение, как отношение, является подмножеством отношения β -редукции. Следовательно, нетрудно построить “искусственную” стратегию, для которой (2) не имеет место. Ввиду этого, мы рассматриваем данный вопрос для “естественных” классов стратегий, которые мы сейчас определим.

Определим класс активных редукционных стратегий и класс улучшенных активных стратегий. Все редукционные стратегии этих классов являются одношаговыми. Пусть Δ – произвольное множество термов, содержащее все нормальные формы, т.е. $NF \subset \Delta \subset \Lambda$. Определим активную редукционную стратегию AS_Δ . Пусть $M \in \Lambda \setminus NF$ и $(\lambda x.R)Q$ – самый левый редекс терма M . Тогда:

1. если $Q \in \Delta$, то $AS_\Delta(M)$ определяется как результат одношаговой редукции терма M , во время которой свертывается самый левый редекс $(\lambda x.R)Q$;
2. в противном случае, если $Q \notin \Delta$, то $AS_\Delta(M)$ определяется как терм, полученный путем замены рассмотренного вхождения терма Q термом $AS_\Delta(Q)$.

Определим улучшенную активную редукционную стратегию ASR_Δ . Пусть $M \in \Lambda \setminus NF$ и $(\lambda x.R)Q$ – самый левый редекс терма M . Тогда:

1. если $Q \in \Delta$ или $x \notin FV(R)$, то $ASR_\Delta(M)$ определяется как результат одношаговой редукции терма M , во время которой свертывается самый левый редекс $(\lambda x.R)Q$;
2. в противном случае, если $Q \notin \Delta$, то $ASR_\Delta(M)$ определяется как терм, полученный путем замены рассмотренного вхождения терма Q термом $ASR_\Delta(Q)$.

“Улучшение” во втором определении состоит в том, что если терм R самого левого редекса $(\lambda x.R)Q$ рассматриваемого терма не содержит свободных вхождений переменной x , то нет смысла редуцировать терм Q , и в этом случае также свертывается редекс $(\lambda x.R)Q$.

Теорема 2.2. Пусть редукционная стратегия AS_Δ ($NF \subset \Delta \subset \Lambda$) не нормализующая и пусть множество Δ не содержит термов вида $\lambda y.(\lambda x.R)Q$ ($R, Q \in \Lambda$, $x, y \in V$). Тогда существует программа P , комбинаторы неподвижной точки Z_1, Z_2 и термы $N_1, \dots, N_k \in NF^0$ ($k \geq 0$) такие, что если L_1, L_2 – основные семантики программы P , определяемые с помощью Z_1, Z_2 , соответственно, то $L_1 N_1 \dots N_k \xrightarrow{AS_\Delta} M_0 \in NF^0$, а AS_Δ редукция терма $L_2 N_1 \dots N_k$ продолжается бесконечно.

Теорема 2.3. Пусть редукционная стратегия ASR_Δ ($NF \subset \Delta \subset \Lambda$) не нормализующая. Тогда существует программа P , комбинаторы неподвижной точки Z_1, Z_2 и термы $N_1, \dots, N_k \in NF^0$ ($k \geq 0$) такие, что если L_1, L_2 – основные семантики программы P , определяемые с помощью Z_1, Z_2 , соответственно, то $L_1 N_1 \dots N_k \xrightarrow{ASR_\Delta} M_0 \in NF^0$, а ASR_Δ редукция терма $L_2 N_1 \dots N_k$ продолжается бесконечно.

В разделе 2.3 рассматриваются бестиповые функциональные программы, состоящие из одного уравнения, т.е. программы следующего вида

$$f = M[f]. \quad (3)$$

Пусть Z – произвольный комбинатор неподвижной точки. Тогда терм

$$K^Z \equiv Z(\lambda f.M[f]) \quad (4)$$

является решением уравнения (3).

Теорема 2.4. Пусть Z – произвольный комбинатор неподвижной точки, P – программа (3), L^Z – основная семантика программы P , определяемая с помощью Z и K^Z – терм (4). Тогда

$$L^Z Q_1 \dots Q_k \rightarrow M_0 \Leftrightarrow K^Z Q_1 \dots Q_k \rightarrow M_0,$$

для любых $M_0, Q_1, \dots, Q_k \in NF^0$.

Теорема 2.5. Существует бестиповая функциональная программа P , состоящая из одного уравнения, комбинатор неподвижной точки Z и термы $N_1, \dots, N_k$ ($k \geq 0$) такие, что если L – основная семантика программы P , определяемая с помощью Z обычным образом, а K – основная семантика программы P , определяемая с помощью Z согласно (4), то $KN_1 \dots N_k \xrightarrow{ANFR} M_0 \in NF$, где $ANFR = ASR_{NF}$, но $ANFR$ редукция терма $LN_1 \dots N_k$ продолжается бесконечно.

В главе 3 приводятся оценки ординала, при котором достигается наименьшая неподвижная точка произвольного монотонного отображения и оценки ординалов, при которых достигаются компоненты порядка ≥ 3 наименьшего решения строго типизированной функциональной программы.

В разделе 3.1 приводятся используемые определения и результаты, взятые из работ^{1,2}. Пусть $A_1, \dots, A_n$ – частично упорядоченные множества с частичными

¹ Moschovakis Y.N. On Basic Notions of Theory of Induction. Logic, Foundations of Mathematics and Computability, Butts, Hintikka, eds. Reidel, 1977, p. 207-236.

² Нигиян С.А. Об интерпретации функциональных языков программирования. Программирование, N2, 1993, стр. 58-68

порядками $\subseteq_1, \dots, \subseteq_n$, соответственно. Определим частичный порядок на множестве $A_1 \times \dots \times A_n$ следующим образом:

$$(a_1, \dots, a_n) \subseteq (b_1, \dots, b_n) \text{ если } a_i \subseteq b_i, 1 \leq i \leq n,$$

для любых $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in A_1 \times \dots \times A_n$.

Если A и B – частично упорядоченные множества с частичными порядками $\subseteq_A, \subseteq_B$, соответственно, то частичный порядок на множестве отображений $\Phi = \{f \mid f : A \rightarrow B\}$ определим следующим образом: для любых $f, g \in \Phi$, $f \subseteq g$, если $f(a) \subseteq_B g(a)$, для каждого $a \in A$. Отображение $f \in \Phi$ называется монотонным, если для любых $a_1, a_2 \in A$, из $a_1 \subseteq_A a_2$ следует $f(a_1) \subseteq_B f(a_2)$. Множество всех монотонных отображений из A в B обозначим $[A \rightarrow B]$.

Частично упорядоченное множество A называется полным, если всякое линейно упорядоченное подмножество A имеет наименьшую верхнюю грань. Очевидно, что всякое полное множество имеет наименьший элемент – $\sup \emptyset$. Известно, что если A и B – полные множества, то таковыми будут и множества $A \times B$ и $[A \rightarrow B]$.

Пусть A – полное множество, $f \in [A \rightarrow A]$ и Ω – наименьший элемент множества A . Для всякого ординала l , определим $f^l(\Omega)$ следующим образом: $f^0(\Omega) = \Omega$, если существует l' такой, что $l = l' + 1$, то $f^l(\Omega) = f(f^{l'}(\Omega))$, в противном случае $f^l(\Omega) = \sup \{f^{l'}(\Omega) \mid l' < l\}$. Известно¹, что существует ординал l_0 такой, что $f^{l_0}(\Omega)$ есть наименьшая неподвижная точка отображения f .

Зафиксируем счетное предметное множество M такое, что $\perp \in M$, и определим частичный порядок на нем следующим образом: для каждого $m \in M$, $\perp \subseteq m$, $m \subseteq m$. Определим множество типов $TYPES$ и одновременно каждому типу α сопоставим натуральное число $\text{ord}(\alpha)$, называемое его порядком.

1. $M \in TYPES$ и $\text{ord}(M) = 0$;
2. если $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta \in TYPES$ ($k \geq 1$), то $[\alpha_1 \times \dots \times \alpha_k \rightarrow \beta] \in TYPES$ и $\text{ord}([\alpha_1 \times \dots \times \alpha_k \rightarrow \beta]) = \max(\text{ord}(\alpha_1), \dots, \text{ord}(\alpha_k), \text{ord}(\beta)) + 1$

Известно, что всякий тип является полным множеством. Пусть $\alpha \in TYPES$ и $c \in \alpha$. Тогда c будем называть константой типа α и положим $\text{ord}(c) = \text{ord}(\alpha)$. Каждому типу α сопоставим счетное множество переменных типа α – V_α , которые могут принимать значения из множества α . Если $x \in V_\alpha$, то положим $\text{ord}(x) = \text{ord}(\alpha)$. Приведем определение типизированного терма. Так как далее мы будем рассматривать только типизированные термы, то условимся, далее говоря терм, понимать типизированный терм. Множество всех термов типа α обозначим через Λ_α . Параллельно с определением терма, для каждого терма t определим множество свободных переменных терма t , которое обозначим $FV(t)$. Предположим также, что $FV(t) \subseteq \{y_1, \dots, y_n\}$ ($n \geq 0$), где $y_i \in V_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in TYPES$,

¹ Moschovakis Y.N. On Basic Notions of Theory of Induction. Logic, Foundations of Mathematics and Computability, Butts, Hintikka, eds. Reidel, 1977, p. 207-236.

$i = 1, \dots, n$ и, что $\bar{y}_0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)$, где $y_i^0 \in \alpha_i$, $i = 1, \dots, n$. Каждому терму t сопоставим значение терма $t - \text{val}_{\bar{y}_0}(t) \in \alpha$.

1. Если $c \in \alpha$, $\alpha \in TYPES$, то $c \in \Lambda_\alpha$, $FV(c) = \emptyset$ и $\text{val}_{\bar{y}_0}(c) = c$;
2. если $x \in V_\alpha$, $\alpha \in TYPES$, то $x \in \Lambda_\alpha$, $FV(x) = \{x\}$ и, если $x = y_i$ ($1 \leq i \leq n$), то $\text{val}_{\bar{y}_0}(x) = y_i^0$;
3. если $\tau \in \Lambda_{[\alpha_1 \times \dots \times \alpha_k \rightarrow \beta]}$, $t_i \in \Lambda_{\alpha_i}$, $\beta, \alpha_i \in TYPES$, $i = 1, \dots, k$, $k \geq 1$, то $\tau(t_1, \dots, t_k) \in \Lambda_\beta$,

$$FV(\tau(t_1, \dots, t_k)) = FV(\tau) \cup \bigcup_{i=1}^k FV(t_i),$$

$$\text{val}_{\bar{y}_0}(\tau(t_1, \dots, t_k)) = \text{val}_{\bar{y}_0}(\tau)(\text{val}_{\bar{y}_0}(t_1), \dots, \text{val}_{\bar{y}_0}(t_k));$$

4. если $\tau \in \Lambda_\beta$, $x_i \in V_{\alpha_i}$, $\beta, \alpha_i \in TYPES$ и $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$, $i, j = 1, \dots, k$, $k \geq 1$, то $\lambda x_1 \dots x_k[\tau] \in \Lambda_{[\alpha_1 \times \dots \times \alpha_k \rightarrow \beta]}$,

$$FV(\lambda x_1 \dots x_k[\tau]) = FV(\tau) \setminus \{x_1, \dots, x_k\},$$

если $FV(\lambda x_1 \dots x_k[\tau]) = \{y_{i_1}, \dots, y_{i_s}\}$, $s \geq 0$ и $\bar{y}_0' = (y_{i_1}^0, \dots, y_{i_s}^0)$, то $\text{val}_{\bar{y}_0}(\lambda x_1 \dots x_k[\tau])$

определяется следующим образом:

$$\text{val}_{\bar{y}_0}(\lambda x_1 \dots x_k[\tau])(\bar{x}_0) = \text{val}_{\bar{x}_0 \bar{y}_0'}(\tau),$$

для всякого $\bar{x}_0 \in \alpha_1 \times \dots \times \alpha_k$.

Строго типизированная функциональная программа P представляет собой следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} F_1 = t_1 \\ \dots \\ F_n = t_n, \end{cases} \quad (5)$$

где $F_i \in V_{\alpha_i}$, $t_i \in \Lambda_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in TYPES$, $FV(t_i) \subset \{F_1, \dots, F_n\}$, $i = 1, \dots, n$, $n > 0$ и $i \neq j \Rightarrow F_i \neq F_j$, $i, j = 1, \dots, n$. Предполагаем также, что термы $t_1, \dots, t_n$ используют только константы порядков 0 и 1, причем константы порядка 1 являются вычислимыми функциями. Каждой такой программе P сопоставим монотонное отображение $\psi_P \in [\alpha_1 \times \dots \times \alpha_n \rightarrow \alpha_1 \times \dots \times \alpha_n]$ следующим образом: для каждого $\bar{g} \in \alpha_1 \times \dots \times \alpha_n$, $\psi_P(\bar{g}) = (\text{val}_{\bar{g}}(t_1), \dots, \text{val}_{\bar{g}}(t_n))$. Если $\bar{g} \in \alpha_1 \times \dots \times \alpha_n$ и $\bar{g} = (g_1, \dots, g_n)$, то обозначим $\bar{g}_i = g_i$, $1 \leq i \leq n$. Скажем, что $\bar{g} \in \alpha_1 \times \dots \times \alpha_n$ – решение системы уравнений P , если $\psi_P(\bar{g}) = \bar{g}$. В работе¹ доказано, что если $(f_1, \dots, f_n)$ – наименьшее решение программы P и Ω – наименьший элемент множества $\alpha_1 \times \dots \times \alpha_n$, то для любой F_i

¹ Нигиян С.А. Об интерпретации функциональных языков программирования. Программирование, N2, 1993, стр. 58-68

($1 \leq i \leq n$) такой, что $\text{ord}(F_i) \leq 2$, имеет место $f_i = \psi_P^\omega(\Omega)_i$, где ω – ординал, соответствующий натуральному ряду.

В разделе 3.2 приводятся оценки ординала, при котором достигается наименьшая неподвижная точка произвольного монотонного отображения.

Пусть A – полное множество. Через $D(A)$ мы будем обозначать множество всех линейно упорядоченных подмножеств множества A , а через $DL(A)$ – множество всех вполне упорядоченных подмножеств множества A . Для каждого вполне упорядоченного множества $D \in DL(A)$, через $o(D)$ мы будем обозначать соответствующий ему ординал. Определим множество ординалов $L(A)$ следующим образом:

$$L(A) = \{l \mid \exists D \in DL(A), o(D) = l\}.$$

Теорема 3.1. Пусть A – полное множество, $f \in [A \rightarrow A]$, Ω – наименьший элемент множества A и l_A – ординал, соответствующий множеству ординалов $L(A)$. Тогда $f^{l_A}(\Omega) = f^{l_A+1}(\Omega)$, т.е. $f^{l_A}(\Omega)$ – наименьшая неподвижная точка отображения f .

Теорема 3.2. Пусть A – полное множество и Ω – наименьший элемент множества A , l_A – ординал, соответствующий множеству $L(A)$. Тогда для любого ординала l_0 такого, что $l_0 + 2 < l_A$, существует такое отображение $f \in [A \rightarrow A]$, что $f^{l_0}(\Omega) \subset f^{l_0+1}(\Omega)$.

В разделе 3.3 приводятся оценки ординалов, при которых получаются компоненты порядка ≥ 3 наименьшего решения строго типизированных программ. Следующая теорема 3.3 непосредственно следует из теоремы 3.1.

Теорема 3.3. Пусть P – программа (5), ψ – отображение, соответствующее системе P , Ω – наименьший элемент множества $\alpha_1 x \dots x \alpha_n$, l_p – ординал, соответствующий множеству $L(\alpha_1 x \dots x \alpha_n)$ и $\bar{f} = (f_1, \dots, f_n)$ – наименьшее решение системы P . Тогда $f_i = \psi^{l_p}(\Omega)_i$, $1 \leq i \leq n$.

Рассмотрим программу (5). Скажем, что переменная F_i зависит от переменной F_j ($1 \leq i, j \leq n$), если существуют $i_1, \dots, i_s$, $s \geq 2$, такие, что $i_1 = i$, $i_s = j$, $1 \leq i_k \leq n$ и $F_{i_{k+1}} \in FV(t_{i_k})$ для всех $k = 1, \dots, s-1$. Через $DV(F_i)$ мы будем обозначать множество всех переменных от которых зависит F_i , т.е. $DV(F_i) = \{F_j \mid F_i \text{ зависит от } F_j\}$. Заметим, что $FV(t_i) \subset DV(F_i)$. Очевидно, что только что введенное нами отношение "зависимости" между переменными транзитивно. Следовательно, если переменная F_i зависит от переменной F_j , то $DV(F_j) \subset DV(F_i)$. Через $DV_3(F_i)$ мы будем обозначать множество всех переменных порядка три и выше, от которых зависит переменная F_i , т.е. $DV_3(F_i) = \{F_j \in DV(F_i) \mid \text{ord}(F_j) \geq 3\}$. Очевидно, что если переменная F_i зависит от переменной F_j , то $DV_3(F_j) \subset DV_3(F_i)$. Скажем, что переменная F_i рекурсивна, если F_i зависит от самой себя., т.е. $F_i \in DV(F_i)$.

Теорема 3.4. Пусть P – программа (5), ψ – отображение, соответствующее системе P , Ω – наименьший элемент множества $\alpha_1 x \dots x \alpha_n$, $\bar{f} = (f_1, \dots, f_n)$ – наименьшее решение системы P и $\text{ord}(F_{i_0}) \geq 3$ ($1 \leq i_0 \leq n$). Тогда, если все переменные множества $DV_3(F_{i_0})$ не рекурсивны, то $f_{i_0} = \psi^{\omega+k+1}(\Omega)_{i_0}$, где $k = \text{card}(DV_3(F_{i_0}))$.

Теорема 3.5. Для любых типов α и β , существует такая программа P вида (5) и такая переменная F_i ($1 \leq i \leq n$) порядка $\text{ord}([\alpha \rightarrow \beta]) + 2$, что если ψ – отображение, соответствующее системе уравнений P , Ω – наименьший элемент множества $\alpha_1 x \dots x \alpha_n$, $\bar{f} = (f_1, \dots, f_n)$ – наименьшее решение системы P и l_0 – ординал, соответствующий множеству $L([\alpha \rightarrow \beta])$, то для любого ординала l такого, что $l + 2 < l_0$, имеем $\psi^l(\Omega)_i \subset \psi^{l+1}(\Omega)_i$.

Если в теореме 3.5 возьмем $\alpha = \beta = M$, то получится, что компонента порядка 3 наименьшего решения не достигается при ординалах счетной мощности.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Доказывается теорема об инвариантности основной семантики бестиповых функциональных программ, согласно которой основные семантики, определяемые с помощью двух разных комбинаторов неподвижной точки, эквивалентны в том смысле, что если применить их к одним и тем же начальным данным, то получим один и тот же результат. Из этой теоремы следует, что результаты, полученные ранее для основной семантики, определяемой с помощью комбинатора неподвижной точки Y (парадоксальный комбинатор Карри), верны для основных семантик, определяемых с помощью любого комбинатора неподвижной точки.
2. Доказывается, что несмотря на указанную эквивалентность, основные семантики, определяемые разными комбинаторами неподвижной точки, в частности, комбинаторами неподвижной точки Y (парадоксальный комбинатор Карри) и Θ (комбинатор Тьюринга), не всегда β -равны. Доказывается также, что при использовании, так называемых, активных редукционных стратегий (удовлетворяющих некоторому естественному условию) и, так называемых, улучшенных активных редукционных стратегий, основные семантики, определяемые разными комбинаторами неподвижной точки, не всегда ведут себя одинаково. То есть, в одном случае редукция заканчивается результатом, а в другом случае она бесконечна.
3. Устанавливается (с точностью до двух ординалов) значение ординала, при котором достигается наименьшая неподвижная точка произвольного монотонного отображения, определенного на полном множестве. Оцениваются ординалы, при которых достигаются компоненты наименьшего решения строго типизированной функциональной программы, имеющие порядок ≥ 3 .

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Hrachyan G. G.* On Least Fixpoint of Monotone Mappings and Equation Systems in Monotone Models of Typed Lambda Calculus. Algebra, Geometry & Their Applications, Vol. 3-4, YSU, Yerevan, 2004, p. 86-96.
2. *Hrachyan G. G.* On Least Solution of Equation Systems in Monotone Models of Typed Lambda Calculus. Proceedings of the Conference CSIT-2005, Yerevan, 2005, p. 70-73.
3. *Hrachyan G. G.* The Invariance of the Main Semantics of Type-Free Functional Programs Relatively to the Fixpoint Combinator. Proceedings of the Conference CSIT-2007, Yerevan, 2007, p. 48-49.
4. *Грочян Г. Г.* Комбинаторы неподвижной точки и основная семантика бестиповых функциональных программ. ДНАН Армении, том 109, N1, 2009, стр.7-14.
5. *Hrachyan G. G.* The Basic Semantics of Untyped Functional Programs and Reduction Strategies. Transactions of IIAP of NAS RA: Mathematical Problems of Computer Science, Vol. 32, 2009, p. 5-13.

ԱՄՓՈՓԱԳԻՐ

Գուրգեն Գազիկի Հրաչյան

«Ֆունկցիոնալ ծրագրերի հիմնական սեմանտիկայի մասին»

Ատենախոսության հիմնական արդյունքներն են.

1. Ապացուցվում է առանց տիպերի ֆունկցիոնալ ծրագրերի հիմնական սեմանտիկայի ինվարիանտության մասին թեորեմը, ըստ որի, կամայական երկու տարբեր անշարժ կետի կոմբինատորների միջոցով սահմանված հիմնական սեմանտիկաները համարժեք են այն իմաստով, որ եթե դրանք կիրառվում են նույն տվյալներին, ապա ստացվում է միևնույն արդյունքը: Այս թեորեմից հետևում է, որ Y (Կարրիի պարադոքսալ կոմբինատոր) անշարժ կետի կոմբինատորի համար մինչ այժմ ստացված արդյունքները ճիշտ են կամայական անշարժ կետի կոմբինատորի համար:
2. Ապացուցվում է, որ չնայած այս համարժեքությանը, տարբեր անշարժ կետի կոմբինատորների, մասնավորապես Y (Կարրիի պարադոքսալ կոմբինատոր) և Θ (Թյուրինգի կոմբինատոր) անշարժ կետի կոմբինատորների միջոցով սահմանված հիմնական սեմանտիկաները, ոչ միշտ են β -հավասար: Ապացուցվում է նաև, որ այսպես կոչված, ակտիվ ռեդուկցիոն ստրատեգիաները (որոշակի բնական պայմանին բավարարող) և, այսպես կոչված, կատարելագործված ակտիվ ռեդուկցիոն ստրատեգիաները օգտագործելու դեպքում տարբեր անշարժ կետի կոմբինատորներով սահմանված հիմնական սեմանտիկաները ոչ միշտ են իրենց նույն կերպ պահում: Այսինքն, մի դեպքում ռեդուկցիան ավարտվում է արդյունքով, իսկ մյուս դեպքում այն շարունակվում է անվերջ:

3. Որոշվում է այն օրդինալը (2 ճշտությամբ), որի դեպքում ստացվում է մոնոտոն արտապատկերման փոքրագույն անշարժ կետը: Գնահատվում են այն օրդինալները, որոնց դեպքում ստացվում են խիստ տիպիզացված ֆունկցիոնալ ծրագրերի փոքրագույն լուծման ≥ 3 կարգի կոմպոնենտները:

Gurgen G. Hrachyan

“On Basic Semantics of Functional Programs”