ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Գրիգորյան Հակոբ Բորիսի

ՄԻ ԴԱՍԻ ՍԻՆԳՈՒԼՅԱՐ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԵԹՈԴԻ ԵՎ ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ ԴՐԱ ԳՈՐԾԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա.01.07 - «Հաշվողական մաթեմատիկա»
մասնագիտությամբ

ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի

գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան – 2009

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Григорян Акоп Борисович

О МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ К ПРИКЛАДНЫМ ЗАДАЧАМ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата

физико-математических наук по специальности

01.01.07 – "Вычислительная математика"

Ереван – 2009

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում:

Գիտական ղեկավար` ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Ս.Մ. Մխիթարյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ` ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Յու.Ռ. Հակոբյան

ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Ա. Հ. Քամալյան

Առաջատար կազմակերպություն` Հայաստանի պետական ճարտարագիտական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2009թ. հունիսի 17-ին, ժ. 15^{30} –ին ԵՊՀ – ում գործող ԲՈՀ–ի 044 ”Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն” մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով`
0025, ք. Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ –ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2009թ. մայիսի 16-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար,

ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու` Վ.Ժ. Դումանյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете.

Научный руководитель : доктор физ.-мат. наук С.М. Мхитарян

Официальные оппоненты : доктор физ.-мат. наук Ю.Р. Акопян

кандидат физ.-мат. наук А.Г. Камалян

Ведущая организация : Государственный инженерный университет Армении

Защита состоится 17 июня 2009г. в 15^{30} на заседании специализированного совета ВАК 044 “Математическая кибернетика и математическая логика”, действующего в ЕГУ по адресу: 0025, Ереван, ул. Ал. Манукяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.

Автореферат разослан 16 мая 2009г.

Ученый секретарь специализированного совета,

кандидат физ.-мат. наук В.Ж. Думанян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Многочисленные смешанные краевые задачи математической физики, дифракции упругих и электромагнитных волн, математической теории упругости и, вообще, механики сплошных сред сводятся к решению сингулярных интегральных уравнений (СИУ) первого или второго рода. Ядра этих уравнений обычно представляются суммами своих главных частей в виде ядер Коши, Гильберта и других родственных ядер, и регулярных функций. Вследствие таких структур ядер, решения СИУ, в отличие от решений фредгольмовских интегральных уравнений второго рода, обладают двумя характерными особенностями:

– на концах интервала интегрирования имеют особенности интегрируемого порядка и, поэтому, вблизи них становятся сколь угодно большими;

– при приближении к концом интервала интегрирования обычно бесконечное число раз меняют знак, и тем самым, сильно осциллируют.

Эти два обстоятельства сильно усложняют разработку эффективных численных методов решения СИУ. По этой причине они, по сравнению с аналитическими методами решения СИУ, глубоко и всесторонее развитых на основе краевых задач теории аналитических функций, менее исследованы. Между тем решениями СИУ в прикладных задачах описываются их важные физические характеристики. Исследование закономерностей их изменения, в широких диапазонах геометрических и физических параметров задачи, представляет теоретический и практический интерес. Этого можно достичь лишь при помощи эффективных вычислительных алгоритмов и процедур решения СИУ.

В последние десятилетия в численных методах решения СИУ применяются методы вычисления сингулярных интегралов, основанные на квадратурных формулах Гаусса, построенных по узлам классических ортогональных многочленов. Этими методами решение СИУ сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений. Однако непосредственное применение этого метода к решению СИУ второго рода, из-за обращения решения в бесконечность на концах интервала интегрирования и явления осциляции, не эффективно, так как приводит к большому обему вычислений. К тому же, эти методы имеют низкую степень точности. Поэтому возникает необходимость в разработке эффективной методики численной реализации решения СИУ второго рода, адекватно учитывающую свойства неограниченности и осцилляции решения. Построение такого вычислительного алгоритма представляет собой актуальную задачу, имеющую теоретическое и практическое значение.

Цель и задачи диссертационной работы. Целью диссертационной работы является разработка эффективной методики численной реализации одного класса СИУ второго рода с постоянными коэффициентами, часто встречающихся в разнообразных областях прикладной математики и описывающих смешанные краевые задачи. При этом ставились следующие задачи:

– разработка методики вычисления сингулярных интегралов с ядрами Коши, Гильберта и родственными ядрами, имеющих осциллирующие на концах интервала интегрирования плотности;

– построение точных аналитических решений класса СИУ второго рода с указанными ядрами, удобных для применения предложенного вычислительного алгоритма к сингулярным интегралам;

– построение вычислительных процедур и получение численных результатов в соответствии с существующими оценками;

– применение вычислительной методики к решению плоской контактной задачи теории упругости с учетом сил сцепления.

Объект исследования. Один класс СИУ второго рода с постоянными коэффициентами, решения которых обладают свойствами неограниченности на концах интервала интегрирования и осцилляции.

Методы исследования. В диссертационной работе использовались методы математического анализа, комплексного анализа, теории краевых задач аналитических функций, сингулярных интегральных уравнений, интегрального преобразования Фурье.

Научная новизна. Взяв за основу метод вычисления сингулярных интегралов, основанный на квадратурных формулах Гаусса в узлах классических ортогональных многочленов и развитый в работах Старка[1], А. А. Корнейчука[2], Ф. Эрдогана, Г.Д. Гупты и Т.С. Кука[3], П.С. Теокариса и Н.И. Лоакимидиса[4], методы краевых задач, изложенных в монографиях Ф.Д. Гахова[5], Н.И. Мусхелишвили[6], а также результаты В. Копелмана и Т.Д. Пинкусса[7], С.М. Мхитаряна[8], в диссертации разработана новая вычислительная методика решения СИУ второго рода с постоянными коэффициентами. При этом предварительно строятся точные аналитические решения СИУ, которые получаются при помощи подхода, основанного на построении обобщенных собственных функций соответствующих сингулярных интегральных операторов.

[1]Старк. Обобщенная квадратурная формула для интегралов Коши. – Ракетная техника и космонавтика, 1971, том 9, 244 – 245.

[2]Корнейчук А.А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов. Вычислительная математика и математическая физика. М.,Наука 1964. 64 – 73.

[3]F. Erdogan, G. D. Gupta and T. S. Cook, Numerical solution of singular integral equations, Mechanics of Fracture, G. C. Sih, ed., vol. 1, Noordhoff, Leyden, 1973, 368 – 425.

[4]Theocaris P.S., Laokimidis N.I. Numerical integration metods for the solution of singular integral equations. Quart, Appl. Math, Vol. XXXV, No1, 1977, 173–183.

Основные положения, выносимые на защиту:

- разработка эффективного вычислительного алгоритма вычисления сингулярных интегралов с ядрами Коши, Гильберта и с другими родственными ядрами, имеющих осциллирующие на концах интервала интегрирования плотности;
- проведение вычислений и получение численных результатов в соответствии с существующими оценками;
- применение полученных результатов к численной реализации плоской контактной задачи теории упругости с учетом сил сцепления.

Практическая значимость. Полученные в диссертационной работе результаты имеют теоретический характер и ориентированы на их использование в прикладных задачах, описываемых СИУ.

Апробация полученных результатов. Результаты диссертационной работы докладывались на семинарах кафедры численного анализа и математического моделирования ЕГУ, кафедры математики и математического моделирования РАУ, на VI международной конференции по проблемам динамики взаимодействия деформируемых сред (сентябрь 21-26, 2008, Горис-Степанакерт), на общем семинаре факультета информатики и прикладной математики ЕГУ.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 4-х научных статьях, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы (32 наименования). Объем работы – 109 стр.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** обсуждается актуальность темы исследования, формулируются цели и задачи диссертационной работы, дается краткий обзор научной литературы по исследуемой тематике и кратко излагается содержание диссертации.

Глава 1 посвящена построению обобщенных собственных функций интегральных операторов с ядрами Коши, Гильберта и с другими родственными ядрами методами теории краевых задач аналитических функций. Выводятся формулы обобщенного преобразования Фурье разложения произвольной функции из L^2 по

[5]Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М., Наука,1977.

[6]Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Наука, 1968.

[7]Koppelman W., Pincus J.D. Spectral representations for finit Hilbert transformation. Math Z., Bd. 71, H.H., 1959, 399 – 407.

[8]Мхитарян С. М. О спектральных разложениях интегральных операторов, аналогичных конечному преобразованию Гильберта. Математические исследования, АН Молдавской ССР, Кишинев, т.4, вып.1, 1969, 98 – 109.

полученным обобщенным собственным функциям.

В параграфе 1.1 излагаются известные формулировки постановки задачи Римана теории аналитических функций. Через L обозначается совокупность конечного числа простых разомкнутых дуг и простых замкнутых контуров плоскости комплексного переменного z, не имеющих общих точек, и предполагающихся гладкими; причем на каждой дуге и контуре L выбрано определенное положительное направление.

Ставится следующая задача:

найти кусочно-голоморфную функцию $F(z)$ с линией скачков L, граничные значения слева и справа которой удовлетворяют условию

$$F^{+}(t)=G(t)F^{-}(t)+f(t) \text{ на } L$$

(кроме концов), где $G(t)$ и $f(t)$ – заданные на L функции, причем $G(t)\neq 0$ всюду на L.

Кроме того, предполагается, что заданные на L функции $G(t)$ и $f(t)$ удовлетворяют условию Гельдера, т.е. принадлежат классу H.

Поставленная задача называется *задачей Римана* или *задачей сопряжения*.

В случае, когда $f(t)=0$ всюду на L, задача называется *однородной*. В работе рассматривается лишь тот частный и весьма простой случай, когда $G(t)$ – постоянное число.

В параграфе 1.2 приводятся известные сведения о формулах Фурье-Планшереля в классе $L^2(-\infty,\infty)$ и теорема Планшереля.

Теорема 1.2.1(Планшерель). *Оператор V, действующий в L^2 и задаваемый с помощью соотношения*

$$Vf(x)=F(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\sigma x}-1}{ix}f(x)dx ,$$

является унитарным. Обратный оператор описывается формулой

$$V^{-1}F(\sigma)=f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\sigma x}-1}{-i\sigma}F(\sigma)d\sigma .$$

Операторы V и V^{-1} являются соответственно операторами преобразования Фурье и обратного преобразования Фурье в L^2, и их можно определить следующими соотношениями:

$$Vf(x)=F(\sigma)=\underset{N\to\infty}{l.i.m.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N}f(x)e^{i\sigma x}dx , \tag{1a}$$

$$V^{-1}F(\sigma)=f(x)=\underset{N\to\infty}{l.i.m.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N}F(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma . \tag{1b}$$

В параграфе 1.3 описывается процедура построения обобщенных собственных функций интегрального оператора с ядром Коши и выводятся формулы обобщенного преобразования Фурье о разложении произвольной функций из $L^2[-1,1]$ по полученным обобщенным собственным функциям.

При том рассматривается интегральный оператор с ядром Коши

$$S\varphi(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(s)}{s-x}ds\,, \tag{2}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши и средней квадратической сходимости. С целью построения обобщенных собственных функций оператора (2) рассмотривается спектральное соотношение оператора (2):

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(s)}{s-x}ds = \lambda\varphi(x) \quad (|x| < a)\,, \tag{3}$$

где $\lambda = th(\pi\mu)$ $(-\infty < \mu < +\infty)$, а $\varphi(x)$ – неизвестная обобщенная функция. Для решения интегрального уравнения (3) воспользуемся методами теории краевых задач аналитических функций. Для этого вводится кусочно-голоморфная функция

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(s)}{s-z}ds$$

в комплексной плоскости $z = x + iy$ с разрезом по отрезке $[-a, a]$ действительной оси. Воспользовшись формулами Племеля-Сохоцкого:

$$\Phi^{+}(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(s)}{s-x}ds\,, \tag{4a}$$

$$\Phi^{-}(x) = -\frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(s)}{s-x}ds\,, \tag{4b}$$

соотношение (3) записывается в виде

$$\Phi^{+}(x) + \Phi^{-}(x) = \lambda[\Phi^{+}(x) - \Phi^{-}(x)] \qquad x \in (-a,\, a)\,,$$

откуда при помощи простых преобразований получается следующая простейшая однородная задача сопряжения граничных значений аналитических функций:

$$\Phi^{+}(x) = g\Phi^{-}(x)\,, \tag{5}$$

$$g = -\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \;\; (\lambda = th(\pi\mu))\,, \tag{6}$$

где g – постоянное число. Для построения решения задачи (5) – (6) рассмотрим определенную в комплексной плоскости z с разрезом $[-a, a]$ функцию

$$X(z) = (z+a)^{-\gamma}(z-a)^{\gamma-1} \qquad (\gamma = \alpha + i\beta).$$

Эта функция в комплексной плоскости z с разрезом $[-a, a]$ многозначна, точнее, в каждой точке z принимает бесконечное число значений. Берется та однозначная аналитическая ветвь функции $X(z)$, которая на бесконечности обладает асимптотикой

$$X(z) \cong \frac{1}{z} \qquad (z \to \infty).$$

Тогда краевые значения функции $X(z)$ на сторонах разреза $[-a, a]$ связаны между собой соотношением

$$X_{+}(x) = e^{2\pi i\gamma}X_{-}(x)\,, \qquad x \in (-a,\, a)\,. \tag{7}$$

Требуя, чтобы имело место равенство

$$g = -e^{2\pi\mu} = e^{2\pi i\gamma}\,,$$

определяется показатель γ:

$$\gamma = \frac{1}{2} - i\mu \quad (-\infty < \mu < +\infty)$$

и, в результате, при помощи (5) – (6)

$$\Phi(z) = X(z) = (z-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(z+a)^{-\frac{1}{2}+i\mu} \qquad (-\infty < \mu < +\infty). \tag{8}$$

Далее, при помощи (8) и (4a) – (4b) находится решение однородного сингулярного интегрального уравнения (3):

$$\varphi(x) = \Phi^+(x) - \Phi^-(x) = X_+(x) - X_-(x), \quad x \in (-a, a),$$

которое представляется формулой

$$\varphi(x) = \varphi_\mu(x) = (a-x)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(a+x)^{-\frac{1}{2}+i\mu}, \quad x \in (-a, a). \tag{9}$$

Сопоставлением (9) и (3) устанавливается спектральное соотношение

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi_\mu(s)}{s-x}ds = th(\pi\mu)\varphi_\mu(x) \ \left(-a < x < a; -\infty < \mu < +\infty\right). \tag{10}$$

В итоге, доказано следующее утверждение:

Лемма 1.3.3. *При любом $\mu\ (-\infty < \mu < +\infty)$ функция $\varphi_\mu(x)$ является решением уравнения (3), т.е. при $-\infty < \mu < +\infty$ функции $\varphi_\mu(x)$ являются обобщенными собственными функциями оператора (2).*

Далее, рассмотриваются формулы Фурье-Планшереля (1a) - (1b) в классе $L^2(-\infty,+\infty)$, где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши и средней квадратичной сходимости. В этих формулах после простых замен переменных и преобразований получены формулы

$$G(\mu) = \int_{-1}^{1} g(x)\varphi_{-\mu}(x)dx, \tag{11a}$$

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\mu)\varphi_\mu(x)d\mu \tag{11b}$$

обобщенного преобразования Фурье, которые являются формулами разложения произвольной функции $g(x) \in L^2[-1,1]$ по функциям $\varphi_\mu(x)$. При этом равенство Парсеваля принимает следующую форму:

$$\int_{-1}^{1}|g(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|G(\mu)|^2 d\mu .$$

В результате доказана

Теорема 1.3.4. *Взаимно обратные формулы обобщенного преобразования Фурье (11a) и (11b) устанавливают изометрию между пространствами $L^2[-1,1]$ и $L^2(-\infty,\infty)$.*

В параграфе 1.4 описывается построение обобщенных собственных функций интегральных операторов, порожденных ядерными функциями $1\Big/\sin\frac{x}{2}$ и $1\Big/sh\frac{x}{2}$.

Выводятся формулы обобщенного преобразования Фурье о разложении произвольной функции по обобщенным собственным функциям соответствующих интегральных операторов, которые будут решениями следующих однородных сингулярных интегральных уравнений:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\omega(s,\lambda)}{\sin\frac{s-x}{2}}ds=\lambda\omega(x,\lambda),\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\psi(s,\lambda)}{sh\frac{s-x}{2}}ds=\lambda\psi(x,\lambda),\qquad (-\alpha<x<\alpha),$$

где λ – спектральный параметр.

С этой целью в комплексной плоскости с разрезом вдоль дуги $\overline{a}a$ $(a=e^{i\alpha})$ единичной окружности с центром в начале координат рассмотрена следующая многозначная функция комплексного переменного:

$$g(z)=(z-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(z-\overline{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}.$$

Выберается та аналитическая ветвь этой функции, которая при $z\to\infty$ обладает асимптотикой

$$g(z)\cong\frac{1}{z}.$$

С помощью интегральной формулы Коши для области, ограниченной окружностью Γ_R радиусом R и контуром C, охватывающую разрез $\overline{a}a$ по дуге единичной окружности (рис. 1), получается соотношение

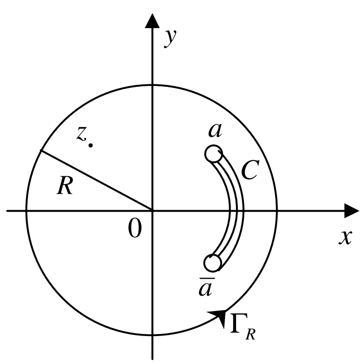

Рис.1

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\oint_{\Gamma_R}+\oint_{C}\right)\frac{(w-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(w-\overline{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}}{w-z}dw=$$

$$=(z-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(z-\overline{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}.\quad(12)$$

Затем устанавливается, что при стремлении R к бесконечности, интеграл Коши по Γ_R стремится к нулю и, следовательно, из (12)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{(w-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(w-\overline{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}}{w-z}dw=(z-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(z-\overline{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}.\qquad(13)$$

Формула (13), с учетом краевых значений функции $g(z)$ на сторонах разреза по дуге $\overline{a}a$ единичной окружности, преобразуется к виду

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{a}}^{a}\frac{-2ich(\pi\mu)(a-\zeta)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta-\overline{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}}{\zeta-z}d\zeta=(z-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(z-\overline{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}.$$

Отсюда, при помощи предельного перехода $z\to t\,(t\in\overline{a}a)$ и формул Племеля-Сохоцкого, выводится соотношение

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\overline{a}}^{a}\frac{(a-\zeta)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta-\overline{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}}{\zeta-t}d\zeta=th(\pi\mu)(a-t)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(t-\overline{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu};$$

далее производится замена переменых

$$a=e^{i\alpha},\ \overline{a}=e^{-i\alpha},\ t=e^{ix},\ \zeta=e^{is}.$$

После простых преобразований получается искомое спектральное соотношение

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\omega_\mu(s)}{2\sin\frac{s-x}{2}}ds = th(\pi\mu)\omega_\mu(x), \tag{14}$$

где

$$\omega_\mu(x) = \left(\sin\frac{\alpha-x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(\sin\frac{\alpha+x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}, (-\alpha<x<\alpha; \alpha<\pi; -\infty<\mu<+\infty). \tag{15}$$

Аналогичным способом получено соотношение

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\psi_\mu(s)}{2sh\frac{s-x}{2}}ds = th(\pi\mu)\psi_\mu(x), \tag{16}$$

где

$$\psi_\mu(x) = \left(sh\frac{\alpha-x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(sh\frac{\alpha+x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu} \qquad (-\alpha<x<\alpha; -\infty<\mu<+\infty). \tag{17}$$

Итак, доказана

Лемма 1.4.1. *При любом* μ $(-\infty<\mu<+\infty)$ *функции* $\psi_\mu(x)$ *из (17) и* $\omega_\mu(x)$ *из (15) – решения СИУ (16) и (14) соответственно, и являются обобщенными собственными функциями соответствующих интегральных операторов.*

Далее преобразуются полученные формулы (11a) – (11b)

$$G(\mu) = \int_{-\alpha}^{\alpha} g(s)\psi_{-\mu}(s)ds, \tag{18a}$$

$$g(x) = \frac{sh\alpha}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\mu)\psi_\mu(x)d\mu, \tag{18b}$$

в которых равенство Парсеваля принимает следующую форму:

$$\int_{-1}^{1}|g(x)|^2 dx = \frac{sh\alpha}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|G(\mu)|^2 d\mu.$$

Аналогично получаются

$$G(\mu) = \int_{-\alpha}^{\alpha} g(t)\omega_{-\mu}(t)dt, \tag{19a}$$

$$g(t) = \frac{\sin\alpha}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\mu)\omega_\mu(t)d\mu, \tag{19b}$$

где равенство Парсеваля принимает вид

$$\int_{-1}^{1}|g(x)|^2 dx = \frac{\sin\alpha}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|G(\mu)|^2 d\mu.$$

Формулы (18a) – (18b) и (19a) – (19b) представляют собой формулы разложения произвольной функции $g(x)\in L^2[-\alpha,\alpha]$ по функциям $\psi_\mu(x)$ и $\omega_\mu(x)$ соответственно.

Таким образом доказано следующее утверждение:

Теорема 1.4.2. *Формулы обобщенного преобразования Фурье (18a) – (18b) и (19a) – (19b) устанавливают изометрию между пронстранствами* $L^2[-\alpha,\alpha]$ *и* $L^2(-\infty,\infty)$.

В <u>параграфе 1.5</u> обобщенные собственные функции интегральных операторов, порожденных ядерными функциями $ctg\frac{x}{2}+i$ и $cth\frac{x}{2}+1$ строятся совершенно аналогичным методом и для них имеют место соотношения

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(ctg\frac{s-t}{2}+i\right)\vartheta_{\mu}(s)ds = th(\pi\mu)\vartheta_{\mu}(t), \tag{20}$$

где

$$\vartheta_{\mu}(x) = e^{-\frac{ix}{2}}\left(\sin\frac{\alpha-x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(\sin\frac{\alpha+x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}, \lambda = th(\pi\mu), \tag{21}$$
$$(-\alpha < x < \alpha; -\infty < \mu < +\infty)$$

есть обобщенные собственные функции интегрального оператора, порожденного ядром $ctg\frac{x}{2}+i$. Аналогично,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(cth\frac{s-x}{2}+1\right)\xi_{\mu}(s)ds = th(\pi\mu)\xi_{\mu}(x), \tag{22}$$

где

$$\xi_{\mu}(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(sh\frac{\alpha-x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(sh\frac{\alpha+x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}, \lambda = th(\pi\mu), (-\alpha<x<\alpha, -\infty<\mu<+\infty) \tag{23}$$

есть обобщенные собственные функции интегрального оператора, порожденного ядром $cth\frac{x}{2}+1$.

Далее формулы (19a) – (19b) после простых преобразований принимают вид

$$G(\mu) = \int_{-\alpha}^{\alpha} g(t)\vartheta_{-\mu}(t)e^{it}dt, \tag{24a}$$

$$g(x) = \frac{\sin\alpha}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\mu)\vartheta_{\mu}(x)d\mu. \tag{24b}$$

Сходным образом формулы (18a) – (18b) записываются в виде

$$G(\mu) = \int_{-\alpha}^{\alpha} g(s)\xi_{-\mu}(s)e^{s}ds, \tag{25a}$$

$$g(x) = \frac{sh\alpha}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\mu)\xi_{\mu}(x)d\mu. \tag{25b}$$

Соотношениями (24a) – (24b) и (25a) – (25b) выражаются формулы разложения произвольной функции $g(x)\in L^2[-\alpha,\alpha]$ по функциям $\vartheta_{\mu}(x)$ и $\xi_{\mu}(x)$, соответственно.

В **главе 2** на основе построенных в главе 1 обобщенных собственных функций и формул обобщенного преобразования Фурье решаются сингулярные интегральные уравнения второго рода с ядрами Коши, Гильберта и другими родственными ядрами с постоянными коэффициентами. Для решения каждого уравнения сначала при помощи обобщенных формул преобразования Фурье решение уравнения представляется соответствующим интегралом, а затем, подставляя его в сингулярное интегральное уравнение, получаются решения в аналитическом виде.

В параграфе 2.1 изложены необходимые известные сведения об условиях перестановки сингулярных интегралов.

В параграфе 2.2 решается СИУ с ядром Коши

$$-ith(\pi\mu)\varphi(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(s)}{s-x}ds=f(x),\ (-\infty<\mu<+\infty) \tag{26a}$$

при условии

$$\int_{-a}^{a}\varphi(s)ds=0, \tag{26b}$$

где $f(x)\in H[-a,a]$. Исходя из формул (11b), решение интегрального уравнения (26a) представляется следующим интегралом:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{\mu}(x)\Phi(\mu)d\mu \quad , \quad (-1<x<1), \tag{27}$$

где $\Phi(\mu)$ – неизвестная функция. Для определения этой функции интеграл (27) подставляется в интегральное уравнение (26a) и преобразовывается. Имея в виду полученные формулы разложения (11a) – (11a,b), получается соотношение

$$\Phi(\mu)=C\delta(\mu-\mu_0)+\frac{F(\mu)}{i\left(th(\pi\mu)-th(\pi\mu_0)\right)},\quad (-\infty<\mu<+\infty), \tag{28}$$

где

$$F(\mu)=\int_{-1}^{1}\varphi_{-\mu}(x)f(x)dx. \tag{29}$$

Неизвестная постоянная C определяется из условии (26b):

$$C=ch^2(\pi\mu_0)\int_{-1}^{1}\varphi_{-\mu_0}(x)xf(x)dx=ch^2(\pi\mu_0)\int_{-1}^{1}(1-x)^{-\frac{1}{2}+i\mu_0}(1+x)^{-\frac{1}{2}-i\mu_0}xf(x)dx. \tag{30}$$

Далее, подстановкой (28) в (27) и с учетом (30), для решения СИУ (26a) при условии (26b) получается формула

$$\varphi(x)=-\frac{i}{2}sh(2\pi\mu_0)f(x)-\frac{ch^2(\pi\mu_0)}{\pi}\varphi_{\mu_0}(x)\int_{-1}^{1}\frac{(1-s^2)\varphi_{-\mu_0}(s)}{s-x}f(s)ds,\quad (-1<x<1), \tag{31}$$

или

$$\begin{aligned}\varphi(x)=&-\frac{i}{2}sh(2\pi\mu_0)f(x)-\\&-\frac{ch^2(\pi\mu_0)}{\pi}(1-x)^{-\frac{1}{2}-i\mu_0}(1+x)^{-\frac{1}{2}+i\mu_0}\int_{-1}^{1}\frac{(1-s)^{\frac{1}{2}+i\mu_0}(1+s)^{\frac{1}{2}-i\mu_0}}{s-x}f(s)ds,(-1<x<1),\end{aligned} \tag{32}$$

где интеграл в точке $s=x$ понимается в смысле главного значения по Коши.

Полученный результат сформулировен в виде следующего утверждения.

Теорема 2.2.1. *Решение СИУ (26a), при условии (26b) и* $f(x)\in H[-a,a]$, *в классе функций, неограниченных на концах интервала* $(-a,a)$, *выражается формулой (32).*

В <u>параграфе 2.3</u> и <u>параграфе 2.4</u> рассматриваются СИУ с ядрами Гильберта и другими родственными ядрами, решения которых строятся аналогичным образом (как в параграфе 2.2).

В параграфе 2.3 для СИУ

$$-th(\pi\mu_0)\psi(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\psi(s)}{2sh\frac{s-x}{2}}ds=f(x), \tag{33a}$$

при условии

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\psi(s)ds=Q, \tag{33b}$$

где Q – известная величина, а $f(x)\in H[-\alpha,\alpha]$, решение $\psi(x)$ представляется в виде

$$\psi(x)=A_1\psi_{\mu_0,-\frac{1}{2}}(x)-\frac{ich^2(\pi\mu_0)}{2\pi}\psi_{\mu_0,-\frac{1}{2}}(x)\int_{-\alpha}^{\alpha}cth\frac{s-x}{2}f(s)\psi_{-\mu_0,\frac{1}{2}}(s)ds+\frac{1}{2}sh(2\pi\mu_0)f(x), \tag{34}$$

где

$$\begin{cases}\psi_{\mu,-\frac{1}{2}}(x)=\psi_\mu(x)=\left(sh\frac{\alpha-x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\\ \psi_{-\mu,\frac{1}{2}}(x)=\left(sh\frac{\alpha-x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+i\mu}\left(sh\frac{\alpha+x}{2}\right)^{\frac{1}{2}-i\mu}\end{cases}, \tag{35}$$

$$A_1=\frac{ch(\pi\mu_0)}{2\pi P_{-\frac{1}{2}+i\mu_0}(ch\alpha)}Q-\frac{ch(\pi\mu_0)sh(2\pi\mu_0)}{4\pi P_{-\frac{1}{2}+i\mu_0}(ch\alpha)}\int_{-\alpha}^{\alpha}f(s)ds-$$

$$-\frac{ich^3(\pi\mu_0)}{4\pi^2P_{-\frac{1}{2}+i\mu_0}(ch\alpha)}\int_{-\alpha}^{\alpha}\psi_{-\mu_0,\frac{1}{2}}(s)f(s)ds\int_{-\alpha}^{\alpha}cth\frac{x-s}{2}\psi_{\mu_0,-\frac{1}{2}}(x)dx, \tag{36}$$

а $P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(ch\alpha)$ известная функция Лежандра. Для СИУ

$$-th(\pi\mu_0)\omega(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\omega(s)}{2\sin\frac{s-x}{2}}ds=f(x), \tag{37a}$$

при условии

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\omega(s)ds=Q, \tag{37b}$$

где Q – известная величина, а $f(x)\in H[-\alpha,\alpha]$, решение $\omega(s)$ получается в виде

$$\omega(x)=A_2\omega_{\mu_0,-\frac{1}{2}}(x)-\frac{ich^2(\pi\mu_0)}{2\pi}\omega_{\mu_0,-\frac{1}{2}}(x)\int_{-\alpha}^{\alpha}ctg\frac{s-x}{2}f(s)\omega_{-\mu_0,\frac{1}{2}}(s)ds+\frac{1}{2}sh(2\pi\mu_0)f(x), \tag{38}$$

где

$$\begin{cases} \omega_{\mu,-\frac{1}{2}}(x) = \omega_\mu(x) = \left(\sin\dfrac{\alpha - x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu} \left(\sin\dfrac{\alpha + x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu} \\ \omega_{-\mu,\frac{1}{2}}(x) = \left(\sin\dfrac{\alpha - x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+i\mu} \left(\sin\dfrac{\alpha + x}{2}\right)^{\frac{1}{2}-i\mu} \end{cases}, \tag{39}$$

$$A_2 = \frac{ch(\pi\mu_0)}{2\pi P_{-\frac{1}{2}+i\mu_0}(\cos\alpha)} Q - \frac{ch(\pi\mu_0)sh(2\pi\mu_0)}{4\pi P_{-\frac{1}{2}+i\mu_0}(\cos\alpha)} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(s)ds -$$

$$- \frac{ich^3(\pi\mu_0)}{4\pi^2 P_{-\frac{1}{2}+i\mu_0}(\cos\alpha)} \int_{-\alpha}^{\alpha} \omega_{-\mu_0,\frac{1}{2}}(s) f(s) ds \int_{-\alpha}^{\alpha} ctg\frac{x-s}{2}\, \omega_{\mu_0,-\frac{1}{2}}(x)dx, \tag{40}$$

а $P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\cos\alpha)$ – функция Лежандра.

В параграфе 2.4 для СИУ

$$th(\pi\mu_0)\vartheta(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\alpha}^{\alpha} \vartheta(s) ctg\left(\frac{s-x}{2} + i\right) ds = f(x), \tag{41a}$$

при условии

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \vartheta(s)ds = Q, \tag{41b}$$

где Q – известная величина, а $f(x) \in H[-\alpha,\alpha]$, решение $\vartheta(x)$ представляется в виде

$$\vartheta(x) = A_3 \vartheta_{\mu_0,-\frac{1}{2}}(x) - \frac{ich^2(\pi\mu_0)}{2\pi} \vartheta_{\mu_0,-\frac{1}{2}}(x) \int_{-\alpha}^{\alpha} ctg\frac{x-t}{2}\, \vartheta_{-\mu_0,\frac{1}{2}}(t) e^{it} f(t)dt - \frac{1}{2} sh(2\pi\mu_0) f(x), \tag{42}$$

где

$$\begin{aligned} &\vartheta_{\mu,-\frac{1}{2}}(x) = \vartheta_\mu(x) = e^{-\frac{ix}{2}} \left(\sin\frac{\alpha - x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu} \left(\sin\frac{\alpha + x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}, \\ &\vartheta_{-\mu,\frac{1}{2}}(x) = e^{-\frac{ix}{2}} \left(\sin\frac{\alpha - x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+i\mu} \left(\sin\frac{\alpha + x}{2}\right)^{\frac{1}{2}-i\mu}, \end{aligned} \tag{43}$$

$$A_3 = \frac{\sin\alpha}{4\pi I(\mu_0,\alpha)} \left(\frac{2\pi Q}{\sin\alpha} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\mu) I(\mu,\alpha)}{th(\pi\mu_0) - th(\pi\mu)} d\mu \right) +$$

$$+ i\frac{ch^2(\pi\mu_0)}{4\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin t \left(\sin\frac{\alpha - t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu_0} \left(\sin\frac{\alpha + t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu_0} e^{\frac{it}{2}} f(t)dt, \tag{44}$$

$$I(\mu,\alpha) = 2\int_0^{\alpha} \frac{\cos\left(\dfrac{s}{2} + \mu \ln\gamma(\alpha,s)\right)}{\sqrt{\sin\dfrac{\alpha - s}{2} \sin\dfrac{\alpha + s}{2}}} ds, \quad \gamma(\alpha,s) = \frac{\sin\dfrac{\alpha - s}{2}}{\sin\dfrac{\alpha + s}{2}}. \tag{45}$$

Для СИУ

$$th(\pi\mu_0)\xi(x) - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha}\xi(s)\left(cth\frac{s-x}{2}+1\right)ds = f(x)\,, \tag{46a}$$

при условии

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\xi(s)ds = Q\,, \tag{46b}$$

где Q – известная величина, а $f(x)\in H[-\alpha,\alpha]$, решение $\xi(x)$ выражается формулой

$$\xi(x) = A_4\xi_{\mu_0,-\frac{1}{2}}(x) - \frac{ich^2(\pi\mu_0)}{2\pi}\xi_{\mu_0,-\frac{1}{2}}(x)\int_{-\alpha}^{\alpha}cth\frac{x-t}{2}\xi_{-\mu_0,\frac{1}{2}}(t)e^t f(t)dt - \frac{1}{2}sh(2\pi\mu_0)f(x)\,, \tag{47}$$

где

$$\begin{gathered}\xi_{\mu,-\frac{1}{2}}(x) = \xi_\mu(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(sh\frac{\alpha-x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(sh\frac{\alpha+x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu},\\ \xi_{-\mu,\frac{1}{2}}(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(sh\frac{\alpha-x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+i\mu}\left(sh\frac{\alpha+x}{2}\right)^{\frac{1}{2}-i\mu},\end{gathered} \tag{48}$$

$$A_4 = \frac{sh\alpha}{4\pi I(\mu_0,\alpha)}\left(\frac{2\pi Q}{sh\alpha} - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\mu)I(\mu,\alpha)}{th(\pi\mu_0)-th(\pi\mu)}d\mu\right) +$$

$$+\,i\frac{ch^2(\pi\mu_0)}{4\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}sht\left(sh\frac{\alpha-t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu_0}\left(sh\frac{\alpha+t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu_0}e^{\frac{t}{2}}f(t)dt\,, \tag{49}$$

$$I(\mu,\alpha) = 2\int_0^{\alpha}\frac{ch\left(\frac{s}{2}-\mu\ln\gamma(\alpha,s)\right)}{\sqrt{sh\frac{\alpha-s}{2}\,sh\frac{\alpha+s}{2}}}ds,\quad \gamma(\alpha,s) = \frac{sh\frac{\alpha+s}{2}}{sh\frac{\alpha-s}{2}}\,. \tag{50}$$

В параграфе 2.5 в качестве применения результатов предыдущих параграфов этой главы, рассматривается плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления в контактной зоне, которая описывается сингулярным интегральным уравнением с ядром Коши второго рода и с постоянными коэффициентами вида (26а).

Глава 3 посвящена методике вычисления интегралов типа Коши, с помощью которой вычисляются аналитические решения СИУ. Полученные в главе 2 формулы решения СИУ позволяют эффективно вычислять эти интегралы при помощи квадратурной формулы Гаусса для вычисления сингулярного интеграла с ядром Коши, используя при этом корни многочленов Чебышева второго рода как узлы. Здесь же приведены алгоритмы для вычисления решений СИУ, а также таблицы с конкретными численными результатами.

В параграфе 3.1 рассматривается квадратурная формула Гаусса для сингулярного интеграла с ядром Коши вида

$$I\,u(x) = \int_{-1}^{1}\frac{w(t)u(t)}{t-x}dt \qquad (-1<x<1). \tag{51}$$

В частности, если весовая функция $w(x)$ имеет вид

$$w(x)=\sqrt{1-x^2}\ , \tag{52}$$

то интеграл из (51) вычисляется с помощью следующей квадратурной формулы

$$\tilde{I}\ u(x_r)=\sum_{m=1}^{M}\frac{a_m u(t_m)}{t_m-x_r}\ , \tag{53}$$

где

$$a_m=\frac{\pi}{M+1}\sin^2\frac{\pi m}{M+1}\ , \tag{54}$$

здесь узлы t_m есть корни многочлена Чебышева второго рода степени M :

$$t_m=\cos\frac{\pi m}{M+1},\quad (m=\overline{1,M})\ , \tag{55}$$

а узлы x_r – корни многочлена Чебышева первого рода степени $M+1$:

$$x_r=\cos\frac{2r-1}{2(M+1)}\pi,\quad (r=\overline{1,M+1})\ . \tag{56}$$

Отметим, что квадратурная формула Гаусса для сингулярного интеграла с ядром Коши справедлива в дискретной системе точек $x=x_r\ (r=\overline{1,M+1})$.

При этом имеет место оценка [2]

$$\left|\tilde{I}\ u(x)-I\ u(x)\right|\le\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}w(t)dt\cdot\max_{-1\le x\le 1}\left|u'(x)-L_{2M-1}(x)\right|=\max_{-1\le x\le 1}\left|u'(x)-L_{2M-1}(x)\right|\ , \tag{57}$$

где $L_{2M-1}(x)$ – многочлен наилучшего приближения для $u'(x)$.

В <u>параграфе 3.2</u>, используя квадратурную формулу Гаусса, приведенную в параграфе 3.1 для вычисления решения СИУ (26a) при условии (26b), которое имеет вид (31), доказано следующее утверждение:

Теорема 3.2.1. *Значения решения СИУ (26a), при условии (26b) в узлах* x_r *– корнях многочленов Чебышева первого рода степени* $M+1$*, выражаются формулой*

$$\varphi(x_r)=-\frac{i}{2}sh(2\pi\mu_0)f(x_r)-ch^2(\pi\mu_0)\varphi_{\mu_0}(x_r)I(x_r,\mu_0)\ , \tag{58}$$

где

$$I(x_r,\mu_0)=\frac{1}{M+1}\sum_{m=1}^{M}\frac{g(s_m)\sin^2\frac{\pi m}{M+1}}{s_m-x_r},\quad (r=\overline{1,M+1})\ , \tag{59}$$

$$g(s)=\left(\frac{1-s}{1+s}\right)^{i\mu_0}f(s), \tag{60}$$

а s_m *корни многочлена Чебышева второго рода степени* M .

В этом параграфе дается также последовательность операций для вычисления $\varphi(x)$, при помощи которой проведены вычисления и получены численные результаты.

В таблице приведены численные значения интеграла $I(x_r, \mu_0)$ и решения СИУ (26a) – (26b) $\varphi(x)$, при $f(x) = x^3, \mu_0 = 0.17$ и различных M, которые иллюстрируют ход изменения этих характеристик.

M	r	x_r	$I(x_r, \mu_0)$	$\varphi(x_r)$
5	1	0.9659258263	-0.2533584159 + i 0.1318899822	1.4177996590 – i 0.2768789739
5	3	0.2588190451	0.1457559229 – i 0.0170860960	-0.1994756707 – i 0.0058071411
5	4	-0.2588190451	0.1457559229 + i 0.0170860960	-0.1994756707 + i 0.0058071411
5	6	-0.9659258263	-0.2533584159 – i 0.1318899822	1.4177996590 + i 0.2768789739
15	1	0.9951847267	-0.2940272674 + i 0.2140514759	4.4975748699 + i 1.2441502479
15	5	0.6343932842	0.1473435627 – i 0.0525281666	-0.2647551515 – i 0.1404766210
15	11	-0.4713967368	0.1743066739 + i 0.0393593672	-0.2658151237 + i 0.0544249689
15	12	-0.6343932842	0.1473435627 + i 0.0525281666	-0.2647551515 + i 0.1404766210
15	13	-0.7730104534	0.0473752822 + i 0.0400563536	-0.1205476405 + i 0.2520140389
15	16	-0.9951847267	-0.2940272674 – i 0.2140514759	4.4975748699 – i 1.2441502479
30	1	0.9987165072	-0.2873354493 + i 0.2328295121	8.0810410226 + i 4.5248780278
30	5	0.8978045396	-0.1317618698 + i 0.0283060490	0.3857043687 – i 0.3512722660
30	10	0.5712682151	0.1665402268 – i 0.0491333136	-0.2772507165 – i 0.1012612888
30	15	0.1011683220	0.1218710900 – i 0.0057761930	-0.1610586856 + i 0.0014046100
30	20	-0.3943558551	0.1676993132 + i 0.0308122667	-0.2434987658 + i 0.0296152996
30	25	-0.7907757369	0.0273887074 + i 0.0350308640	-0.0817268385 + i 0.2680186383
30	31	-0.9987165072	-0.2873354493 – i 0.2328295121	8.0810410226 – i 4.5248780278

В <u>параграфе 3.3</u> решения СИУ с ядрами $\dfrac{1}{2sh\dfrac{s-x}{2}}$ и $\dfrac{1}{2\sin\dfrac{s-x}{2}}$, после преобразования приводятся к удобному виду, для которого также можно применить квадратурную формулу Гаусса для вычисления сингулярного интеграла с ядром Коши.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

В результате проведенных исследований получены следующие основные результаты.

1. Предложен эффективный алгоритм вычисления сингулярных интегралов с ядрами Коши, Гильберта и другими родственными ядрами, позволяющий с большой точностью вычислить эти интегралы с осциллирующими плотностями.

2. Разработан новый подход к аналитическому решению сингулярных интегральных уравнений второго рода с постоянными коэффициентами, основанный на построении методами краевых задач теории аналитических функций обобщенных собственных функций соответствующих сингулярных интегральных операторов; эти аналитические решения удобны для применения предложенного вычислительного алгоритма.

3. Предложен метод численной реализации этого алгоритма для одного класса сингулярных интегральных уравнений второго рода с постоянными коэффициентами, встречающегося в разнообразных областях прикладной математики и математической теории упругости.

4. Осуществлена численная реализация сингулярного интегрального уравнения второго рода с постоянными коэффициентами и с ядром Коши, описывающего плоскую контактную задачу теории упругости с учетом сил сцепления в контактной зоне.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Григорян А.Б. Об одном способе построения решения сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши. Ученые записки ЕГУ, 2007, №1, с. 3 – 16.

2. Григорян А.Б. О решении двух типов сингулярных интегральных уравнений. Вестник Российско-Армянского (Славянского) университета, серия: физико-математические и естественные науки, № 2, 2007, с. 74 – 90.

3. Григорян А.Б. Об одном способе построения решений двух сингулярных интегральных уравнений. Вестник Российско-Армянского (Славянского) университета, серия: физико-математические и естественные науки, № 1, 2008, с. 60 – 70.

4. Григорян А.Б., Мхитарян С.М. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений и их приложеии к контактным и смешанным задачам теории упругости. “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред” (Труды VI международной конференции, сентябрь 21-26, 2008, Горис-Степанакерт). изд–во Института механики НАН РА, Ереван 2008, с. 178 – 182.

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հակոբ Բորիսի Գրիգորյան

“Մի դասի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների լուծման մեթոդի և կիրառական խնդիրներում դրա գործածության մասին”

Ատենախոսությունում կառուցված է հաստատուն գործակիցներով երկրորդ սեռի Կոշու, Հիլբերտի և հարակից տիպի կորիզներով սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների մի դասի անալիտիկ լուծումները և մշակված է հաշվողական մեթոդ այդ հավասարումների լուծումների թվային իրականացման համար: Ստացված են հետևյալ հիմնական արդյունքները:

1. Կոշու, Հիլբերտի և հարակից տիպի կորիզներով սինգուլյար ինտեգրալների հաշվման համար առաջարկված է արդյունավետ հաշվողական ալգորիթմ, որը թույլ է տալիս հաշվել օսցիլիացիա ունեցող խտության ֆունկցիաներով այդպիսի ինտեգրալները բավական մեծ ճշտությամբ:

2. Մշակված է հաստատուն գործակիցներով երկրորդ սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների անալիտիկ լուծման նոր մոտեցում, որը հիմնաված է անալիտիկ ֆունկցիաների եզրային խնդիրների մեթոդների օգնությամբ համապատասխան ինտեգրալ օպերատորների ընդհանրացված սեփական ֆունկցիաների կառուցման վրա; այդ անալիտիկ լուծումները հարմար են առաջարկվող հաշվողական ալգորիթմի կիրառման համար:

3. Առաջարկված է հաստատուն գործակիցներով երկրորդ սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների մի դասի լուծման թվային իրականացման մեթոդ, որոնք հանդիպում են կիրառական մաթեմատիկայի և առաձգականության տեսության տարբեր խնդիրներում:

4. Կատարված է Կոշու կորիզով հաստատուն գործակիցներով երկրորդ սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման լուծման թվային իրականացում, որը նկարագրում է առաձգականության տեսության հարթ կոնտակտային խնդիրը կոնտակտի տիրույթում հարակցման ուժերի հաշվառումով:

Hakob B. Grigoryan

“About method of solution of a class of singular integral equations and its applications”