ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Մանուկյան Ալեքսանդր Գալուստի

ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԲԱԶՄԱՑԱՆՑԱՅԻՆ ՎԵՐԱՊԱՅՄԱՆԱՎՈՐԻՉՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ ԷԼԻՊՏԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՏԱՐՐԱՅԻՆ ՄՈՏԱՐԿՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա.01.07 »Հաշվողական մաթեմատիկա«
մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան – 2008

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Манукян Александр Галустович

ПОСТРОЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОСЕТОЧНЫХ ПЕРЕОБУСЛАВЛИВАТЕЛЕЙ ДЛЯ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.07 „Вычислительная математика“

Ереван – 2008

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ-մաթ. գիտ. դոկտոր **Յու.Ռ. Հակոբյան**

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆիզ-մաթ. գիտ. դոկտոր **Հ.Ա. Հակոբյան**
ֆիզ-մաթ. գիտ. թեկնածու **Վ.Ս. Բոնդարենկո**

Առաջատար կազմակերպություն՝ Հայաստանի պետական ճարտարագիտական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2008թ. հունիսի 13- ին, ժ. 14^{00} -ին ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 044 “Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն” մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝ 0025, ք.Երևան, Ալ.Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրը առաքված է 2008թ. մայիսի 13-ին:

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
ֆիզ-մաթ. գիտ. թեկնածու Վ.Ժ. Դումանյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете

Научный руководитель : доктор физ.-мат. наук **Ю.Р. Акопян**

Официальные оппоненты : доктор физ.-мат. наук **А.А. Акопян**
кандидат физ.-мат. наук **В.С. Бондаренко**

Ведущая организация : Государственный инженерный университет Армении

Защита состоится 13 июня 2008г. в 14^{00} на заседании специализированного совета ВАК 044 “Математическая кибернетика и математическая логика”, действующего в ЕГУ по адресу: 0025, Ереван, ул. А.Манукяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.

Автореферат разослан 13 мая 2008г.

Ученый секретарь
специализированного совета,
канд. физ.-мат. наук В.Ж. Думанян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящее время метод конечных элементов является одним из наиболее эффективных методов численного решения уравнений математической физики. Процесс решения краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными с помощью метода конечных элементов состоит в основном из следующих двух этапов:

- конечноэлементная аппроксимация краевой задачи;
- решение системы сеточных уравнений.

При конечноэлементной аппроксимации линейного дифференциального уравнения получается система линейных алгебраических уравнений (система сеточных уравнений), неизвестными которой являются значения приближенного решения в узлах сетки. При этом алгебраическая система обладает следующими характерными особенностями:

- система имеет высокий порядок, пропорциональный числу узлов сетки;
- матрица системы является разреженной;
- система, как правило, плохо обусловлена.

Поэтому применение стандартных общих численных методов линейной алгебры для решения систем сеточных уравнений не всегда является целесообразным. В связи с этим возникла необходимость в разработке специальных численных методов, которые учитывают характерные особенности решаемой задачи и позволяют найти решение системы, затрачивая меньший объем вычислительной работы по сравнению с общими методами линейной алгебры.

В последние годы важное значение приобрели алгоритмы решения сеточных задач большой размерности, в которых используются последовательности сгущающихся сеток. Актуальность таких алгоритмов резко возросла в связи с появлением высокопроизводительных компьютеров. Эти эффективные методы получили название *многосеточных*. Среди них важное место занимают *алгебраические многосеточные методы переобуславливания*, при построении которых используется в основном *алгебраическая* информация, содержащаяся в матрице системы сеточных уравнений. В этом аспекте эти методы являются достаточно универсальными и применимы к широкому классу краевых задач, что делает разработку таких методов и их теоретическое обоснование актуальной задачей.

Цель и задачи диссертационной работы. Скорость сходимости итерационных методов решения систем сеточных уравнений зависит от числа обусловленности матрицы системы, которое, как правило, растет с уменьшением шага сетки. Поэтому в итерационных методах решения систем сеточных уравнений используются так называемые *переобуславливающие матрицы* или, как их еще называют, *переобуславливатели*. Целью диссертационной работы является построение оптимальных (в определенном смысле) алгебраических многосеточных переобуславливателей с внутренними чебышевскими итерациями для матриц жесткости, которые возникают при конечноэлементной аппроксимации двумерных линейных эллиптических уравнений с краевыми условиями смешанного типа. При этом ставились следующие основные задачи:

– разработка методики построения алгебраических многосеточных переобуславливателей на иерархических треугольных сетках, с учетом различных краевых условий;

– получение оценок числа обусловленности переобусловленных матриц жесткости, не зависящих от числа уровней измельчения сетки;

– получение оптимальных по порядку оценок арифметической цены многосеточных переобуславливателей;

– численная реализация построенных многосеточных переобуславливателей.

Объект исследования. Алгебраические многосеточные переобуславливатели для симметричных положительно определенных матриц, возникающих при конечноэлементной аппроксимации эллиптических уравнений с краевыми условиями смешанного типа.

Методы исследования. Использовались методы математического анализа, теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории метода конечных элементов, линейной алгебры и теории матриц.

Научная новизна. Используя общие принципы построения алгебраических многосеточных переобуславливателей с внутренними итерациями для эллиптических уравнений с краевыми условиями типа Дирихле-Неймана, развитые в работах У.Аксельсона и П.Вассилевского[1], Ю.А.Кузнецова[2], Ю.Р.Акопяна и Ю.А.Кузнецова[3], в диссертации разработана новая техника построения алгебраических многосеточных переобуславливателей для матриц жесткости, возникающих при конечноэлементной аппроксимации на треугольных сетках в многоугольных областях эллиптических уравнений с краевыми условиями смешанного типа, когда на одной части границы стоит условие Дирихле, а на другой – третье краевое условие.

Практическая значимость. Полученные в диссертационной работе результаты носят теоретический характер и имеют явно выраженную практическую направленность. Они могут быть использованы при создании эффективных алгоритмов решения систем конечноэлементных уравнений большой размерности.

Основные положения, выносимые на защиту:

– разработка и теоретическое обоснование техники построения алгебраических многосеточных переобуславливателей для матриц жесткости, возникающих при конечноэлементных аппроксимациях на треугольных сетках двумерных эллиптических уравнений с краевыми условиями смешанного типа: условие Дирихле - третье краевое условие;

– получение оценок чисел обусловленности переобусловленных матриц жесткости, не зависящих от числа уровней измельчения сетки;

[1] O. Axelsson and P. S. Vassilevski. Algebraic multilevel preconditioning methods. I. - Numer. Math., 56, 1989, 157-177.
[2] Yu. A. Kuznetsov. Algebraic multigrid domain decomposition methods. - Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling, v. 4, № 5, 1989, 351-379.
[3] Yu. R. Hakopian and Yu. A. Kuznetsov. Algebraic multigrid/substructuring preconditioners on triangular grids. - Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling , v. 6, № 6, 1991, 453-483.

– получение оптимальных по порядку оценок арифметической цены построенных многосеточных переобуславливателей.

Апробация полученных результатов. Результаты диссертации докладывались на годичной научной конференции РАУ (Ереван, 2006), на семинаре кафедры численного анализа и математического моделирования ЕГУ, на общем семинаре факультета информатики и прикладной математики ЕГУ.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в трех научных статьях.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка цитируемой литературы (50 наименований). Объем работы – 70 стр.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** обсуждается актуальность темы исследования, формулируются цели и задачи диссертационной работы.

В **Главе** 1 описываются алгебраические многосеточные методы переобуславливания, их роль при решении систем сеточных уравнений, дается краткий обзор научной литературы по исследуемой тематике.

Для решения системы линейных алгебраических уравнений высокого порядка

$$Ax = b \tag{1}$$

с симметричной положительно определенной матрицей $A \in R^{n \times n}$, как правило, применяются итерационные методы. Например, двухслойный чебышевский метод или метод сопряженных градиентов. Известно, что скорость сходимости итерационного метода зависит от *числа обусловленности* матрицы системы. Чем больше число обусловленности, тем больше итераций требуется совершить для достижения заданной точности и, как следствие, большее число арифметических операций. Так как в диссертации широко используется это понятие, напомним его определение: *для любых симметричных положительно определенных матриц A и B числом обусловленности $cond(B^{-1}A)$ матрицы $B^{-1}A$ называется отношение наибольшего собственного числа матрицы $B^{-1}A$ к ее наименьшему собственному числу*.

Для улучшения обусловленности матрицы A системы (1) вводится в рассмотрение симметричная положительно определенная матрица B, называемая *переобуславливателем*, и вместо системы (1) рассматривается равносильная система

$$B^{-1}Ax = B^{-1}b\,. \tag{2}$$

К переобуславливателю B предъявляются, как правило, два основных требования:

– матрица B должна хорошо аппроксимировать матрицу A в том смысле, что число обусловленности $cond(B^{-1}A)$ должно быть существенно меньше числа обусловленности $cond(A)$ матрицы A;

– система уравнений с матрицей B должна быть легко разрешимой.

С учетом этих требований, вводится понятие оптимального переобуславливателя. А именно, матрица B рассматривается в качестве *оптимального переобуславливателя* для матрицы A, если:

– матрица B спектрально эквивалентна матрице A, то есть существуют такие положительные постоянные c_1 и c_2, не зависящие от порядка n матрицы A, что

$$c_1 u^T B u \le u^T A u \le c_2 u^T B u \qquad \forall u \in R^n;$$

в этом случае $cond\,(B^{-1}A) \le c_2 / c_1$, и число итераций, необходимых для получения решения системы (2) с заданной точностью, не зависит от порядка этой системы;

– число арифметических операций, требуемых для решения системы с матрицей B, пропорционально числу неизвестных.

Завершается глава кратким изложением содержания диссертации.

Глава 2 посвящена построению двухсеточных переобуславливателей для матриц жесткости, возникающих при конечноэлементной аппроксимации двумерных линейных эллиптических уравнений с краевыми условиями смешанного типа. Строятся двухсеточные переобуславливатели на иерархической последовательности треугольныхных сеток. Каждая последующая сетка получается из предыдущей с помощью единообразной процедуры измельчения, при которой узлы грубой сетки являются одновременно узлами более мелких сеток. Шаг самой грубой сетки велик настолько, чтобы объем вычислительной работы, необходимый для решения редуцированной системы сеточных уравнений, был достаточно мал. В то же время, шаг самой мелкой сетки выбирается настолько малым, чтобы обеспечить требуемую точность численного решения задачи. На каждом уровне измельчения осуществляется специальное разбиение треугольной сетки на подструктуры, которое лежит в основе построения двухсеточных переобуславливателей.

В параграфе 2.1 дается постановка эллиптической краевой задачи. Пусть Ω – односвязная область в плоскости с декартовыми координатами $x = (x_1, x_2)$, являющаяся объединением некоторого числа треугольников Δ_m, $m = 1, 2, ..., l$. Через Γ_0 обозначается замкнутое подмножество границы $\partial\Omega$, состоящее из сторон треугольников Δ_m (Γ_0 может быть и пустым множеством). Пусть $\Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma_0$. Через $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ обозначается подпространство пространства Соболева $\mathrm{H}^1(\Omega)$, состоящее из функций, обращающихся в нуль на Γ_0.

В области Ω рассматривается уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(c_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = f\,, \tag{3}$$

в котором $c_{ij} = c_{ji}$, с краевыми условиями

$$u\big|_{\Gamma_0} = 0\,, \qquad \left. \left(\frac{\partial u}{\partial N} + su \right) \right|_{\Gamma_1} = 0\,, \tag{4}$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial N} \equiv \sum_{i,j=1}^{2} c_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(\vec{n}, x_i)$$

(здесь $\vec{n}$ – внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$). Предполагается, что уравнение (3) удовлетворяет условию равномерной эллиптичности, то есть существуют такие положительные постоянные α_1 и α_2, что

$$\alpha_1 \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{2} c_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \alpha_2 \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2 \tag{5}$$

для всех $x \in \overline{\Omega}$ и любых вещественных ξ_1, ξ_2. Предполагается также, что $s \ge s_0 > 0$ на $\overline{\Gamma}_1$.

Определяется *обобщенное решение* задачи (3) – (4) как функция $u(x) \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющая тождеству

$$a(u,v) = (f,v)_\Omega \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{6}$$

где

$$a(u,v) \equiv \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} c_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\Gamma_1} suvd\gamma, \qquad (f,v)_\Omega \equiv \int_\Omega f\, v\, dx. \tag{7}$$

Предполагается, что $f \in L_2(\Omega)$, а коэффициенты c_{ij} и s – ограниченные достаточно гладкие функции, при которых обобщенное решение задачи (3) – (4) существует и единственно.

При наличии неравенств (5), для каждого треугольника Δ_m, $m = 1, 2, \ldots, l$ существуют положительные постоянные $\alpha_1^{(m)}$ и $\alpha_2^{(m)}$ такие, что

$$\alpha_1^{(m)} \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{2} c_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \alpha_2^{(m)} \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2 \tag{8}$$

для всех $x \in \overline{\Delta}_m$ и любых вещественных ξ_1, ξ_2. Обозначим $\Gamma_{1,m} \equiv \Gamma_1 \bigcap \partial\Delta_m$. Пусть положительные постоянные $\beta_1^{(m)}$ и $\beta_2^{(m)}$ таковы, что

$$\beta_1^{(m)} \le s(\gamma) \le \beta_2^{(m)} \qquad \forall \gamma \in \overline{\Gamma}_{1,m}. \tag{9}$$

Определим для каждого треугольника Δ_m, где $1 \le m \le l$, билинейную форму

$$a_m(u,v) \equiv \int_{\Delta_m} \sum_{i,j=1}^{2} c_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma_{1,m}} suvd\gamma. \tag{10}$$

Тогда

$$a(u,v) = \sum_{m=1}^{l} a_m(u,v). \tag{11}$$

Для построения переобуславливателя, наряду с билинейными формами $a_m(u,v)$ из (10), в рассмотрение вводятся билинейные формы

$$b_m(u,v) \equiv \int_{\Delta_m} c\nabla u \nabla v dx + \int_{\Gamma_{1,m}} \sigma uvd\gamma, \qquad 1 \le m \le l \tag{12}$$

с кусочно-постоянными коэффициентами c и σ, которые определяются следующим образом:

$$c(x) \equiv c_m = \left(\alpha_1^{(m)} + \alpha_2^{(m)}\right)\big/2 \ , \qquad x \in \Delta_m ,$$
$$\sigma(\gamma) \equiv \sigma_m = \left(\beta_1^{(m)} + \beta_2^{(m)}\right)\big/2 \ , \qquad \gamma \in \Gamma_{1,m} .$$

При этом справедливо отношение эквивалентности

$$\mu_1^{(m)} b_m(u,u) \le a_m(u,u) \le \mu_2^{(m)} b_m(u,u) \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega) , \tag{13}$$

где постоянные $\mu_1^{(m)}$ и $\mu_2^{(m)}$ определяются через величины $\alpha_i^{(m)}$ и $\beta_i^{(m)}$ из (8) и (9). Отношение эквивалентности (13) играет существенную роль при построении переобуславливателя для конечноэлементной матрицы задачи (3) – (4). Осуществляется это путем перехода от конечноэлементной матрицы, определяемой билинейной формой $a(u,v)$, к конечноэлементной матрице, определяемой билинейной формой

$$b(u,v) = \sum_{m=1}^{l} b_m(u,v) \tag{14}$$

с кусочно-постоянными коэффициентами.

В параграфе 2.2 описывается построение иерархических треугольных сеток и вводятся основные понятия и обозначения. Определяется конечноэлементная система сеточных уравнений на основе кусочно-линейной аппроксимации.

Процесс построения иерархической последовательности треугольных сеток основан на следующей процедуре измельчения: каждый треугольник имеющейся сетки с помощью отрезков, соединяющих середины его сторон, разбивается на четыре треугольника. Руководствуясь этим правилом, строится последовательность триангуляций τ_k, $k = 0,1,2,...,p$ области Ω ($p \ge 1$ есть число уровней измельчения сетки). Для значений $k = 0,1,2,...,p$ вводятся следующие обозначения:

N_k – множество узлов триангуляции τ_k, принадлежащих $\overline{\Omega} \setminus \Gamma_0$;

n_k – число узлов в множестве N_k;

G_k – пространство сеточных функций, заданных на множестве N_k;

V_k – пространство непрерывных в области $\overline{\Omega}$ функций, линейных на каждом треугольнике триангуляции τ_k и обращающихся в нуль на Γ_0.

Между сеточными функциями $u \in G_k$ и кусочно-линейными функциями $\hat{u} \in V_k$ существует естественное взаимно-однозначное соответствие. Запись $\hat{u} = prol(u : V_k)$ означает, что функция $\hat{u} \in V_k$ является *восполнением* сеточной функции $u \in G_k$.

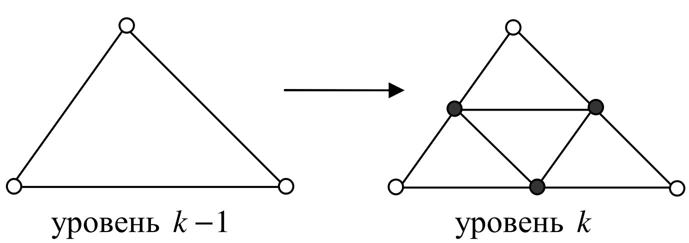

Рис. 1 Измельчение сетки.

Пусть $e \in \tau_{k-1}$ есть некоторый треугольный элемент $(1 \le k \le p)$. На следующем этапе измельчения сетки он разбивается на четыре треугольных элемента k-го уровня, в результате чего элемент e превращается в так называемый суперэлемент. На всех уровнях k, где $1 \le k \le p$, множество узлов N_k разбивается на два непересекающихся подмножества

$$N_k = N_k^{(1)} \bigcup N_k^{(2)}, \tag{15}$$

где $N_k^{(1)}$ – узлы типа ●, $N_k^{(2)}$ – узлы типа ○ (рис.1); в силу разбиения, $N_k^{(2)} = N_{k-1}$. Узлы упорядочиваются в соответствии с принятым разбиением.

На основе интегрального тождества (6) формулируется конечноэлементная задача, соответствующая задаче (3) – (4): *для заданной функции* $f \in L_2(\Omega)$ *найти функцию* $\hat{u} \in V_p$ *такую, что*

$$a(\hat{u}, \hat{v}) = (f, \hat{v})_\Omega \quad \forall \hat{v} \in V_p. \tag{16}$$

Задача (16) сводится к решению системы сеточных уравнений

$$Au = g \tag{17}$$

с симметричной положительно определенной матрицей A порядка n_p и правой частью $g \in G_p$. При этом матрица A удовлетворяет соотношению

$$v^T A u = a(\hat{u}, \hat{v}) \quad \forall u, v \in G_p, \tag{18}$$

где $\hat{u} = prol(u : V_p)$, $\hat{v} = prol(v : V_p)$.

Матрица A может быть получена с помощью хорошо известной в литературе по методам конечных элементов операции *ансамблирования* (она обозначается символом *assem*) матриц жесткости для отдельных треугольников Δ_m, где $m = 1, 2, ..., l$:

$$A = assem\{A_m : m = 1, 2, ..., l\}. \tag{19}$$

В <u>параграфе 2.3</u> описывается переход от исходной конечноэлементной матрицы A к спектрально эквивалентной ей матрице L. Сначала, применяя технику отображения треугольников Δ_m на стандартный единичный равносторонний треугольник Δ, для матриц A_m строятся матрицы L_m такие, что справедливо отношение эквивалентности

$$\delta_1^{(m)} u^T L_m u \le u^T A_m u \le \delta_2^{(m)} u^T L_m u \quad \forall u \in G_p^m, \tag{20}$$

где

$$\delta_1^{(m)} = \mu_1^{(m)} \theta_1^{(m)}, \quad \delta_2^{(m)} = \mu_2^{(m)} \theta_2^{(m)}. \tag{21}$$

Положительные постоянные $\theta_1^{(m)}$ и $\theta_2^{(m)}$ не зависят от числа уровней измельчения сетки, а определяются лишь геометрическими параметрами треугольника Δ_m. Затем, используя операцию ансамблирования, строится матрица

$$L = assem\{\kappa_m L_m : m = 1, 2, ..., l\}, \tag{22}$$

где положительные величины κ_m определяются следующим образом:

$$\kappa_m = \sqrt{\delta_1^{(m)} \delta_2^{(m)}}, \quad m = 1, 2, ..., l. \tag{23}$$

При таком выборе параметров κ_m получается минимальная верхняя оценка числа обусловленности $cond(L^{-1}A)$, а именно,

$$cond(L^{-1}A) \le \max_{1 \le m \le l} \frac{\delta_2^{(m)}}{\delta_1^{(m)}}. \tag{24}$$

Описанный прием позволяет свести дальнейшие построения к регулярным сеткам с равносторонними треугольными ячейками. Получены важные вспомогательные формулы, позволяющие выражать значения интегралов по локальным конечно-элементным структурам от кусочно-линейных функций через их значения в узлах сетки.

Параграф 2.4 посвящен построению двухсеточных переобуславливателей. Исходя из матрицы L, определенной в (22), рекурсивно строится последовательность матриц конечноэлементного типа

$$L \equiv L^{(p)},\ L^{(p-1)},\ .\ .\ .\ .\ ,\ L^{(1)},\ L^{(0)} \tag{25}$$

и соответствующая последовательность переобуславливателей

$$B^{(p)}, B^{(p-1)}, \dots, B^{(1)}, \tag{26}$$

ассоциированных с иерархическими триангуляциями τ_k, $k = p,\ p-1, \dots, 0.$ Для значений $k \ge 1$ матрицы $L^{(k)}$ имеют блочную структуру

$$L^{(k)} = \begin{bmatrix} L_{11}^{(k)} & L_{12}^{(k)} \\ L_{21}^{(k)} & L_{22}^{(k)} \end{bmatrix}, \tag{27}$$

в соответствии с принятым разбиением (15) множества узлов N_k на подмножества. Матрицы $B^{(k)}$ имеют следующий блочный вид:

$$B^{(k)} = \begin{bmatrix} B_{11}^{(k)} & B_{12}^{(k)} \\ B_{21}^{(k)} & \dfrac{1}{2} L^{(k-1)} + B_{21}^{(k)} B_{11}^{(k)^{-1}} B_{12}^{(k)} \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Элементы матриц $L^{(k)}$ и $B^{(k)}$ вычисляются с помощью полученных в работе рекуррентных формул. Основываясь на блочном представлении (28), в котором участвует матрица $L^{(k-1)}$, ассоциированная с триангуляцией τ_{k-1}, матрица $B^{(k)}$ называется *двухсеточным переобуславливателем* для матрицы $L^{(k)}$.

На каждом уровне измельчения сетки получены оценки границ спектра матриц $B^{(k)^{-1}} L^{(k)}$, не зависящие от общего числа уровней.

Теорема 2.4.2[4] Для всех значений $k = 1, 2, \dots, p$, независимо от выбора положительных параметров κ_m в (22), а также значений кусочно-постоянных коэффициентов c и σ в подобластях Δ_m и на звеньях ломаной Γ_1 соответственно, собственные числа матриц $B^{(k)^{-1}} L^{(k)}$ принадлежат отрезку $[1, 5]$.

Следует особо отметить, что техника построения конечноэлементных матриц (25) и соответствующих переобуславливателей (26) несколько отличается от подхода,

[4] Нумерация теорем дается в соответствии с текстом диссертации.

применяемого в работах авторов, упомянутых выше (см. раздел **Научная новизна**). Здесь, при перехода с мелкой сетки на более грубую, происходит искажение конечноэлементных операторов на части границы, где стоит третье краевое условие. Они не являются (за исключением $L^{(p)}$) конечноэлементными аналогами оператора дифференциальной задачи. Однако, за счет выбора специальным образом введенных параметров удалось получить те же границы спектра переобусловленных матриц, что и для случая краевых условий Дирихле-Неймана.

Глава 3 посвящена построению многосеточного переобуславливателя для матрицы жесткости системы сеточных уравнений.

В <u>параграфе 3.1</u> , основываясь на блочном представлении (28) матриц $B^{(k)}$, для значений $k=1,2,\ldots,p$ последовательно определяются матрицы

$$M^{(k)} = \begin{bmatrix} B_{11}^{(k)} & B_{12}^{(k)} \\ B_{21}^{(k)} & \frac{1}{2}R^{(k-1)} + B_{21}^{(k)} {B_{11}^{(k)}}^{-1} B_{12}^{(k)} \end{bmatrix}, \tag{29}$$

где

$$\begin{cases} R^{(0)} = L^{(0)} & \text{для} \quad k=1, \\ R^{(k-1)} = L^{(k-1)}\left[I^{(k-1)} - \prod_{j=1}^{\nu}\left(I^{(k-1)} - \theta_j^{(k-1)} {M^{(k-1)}}^{-1} L^{(k-1)} \right) \right]^{-1} & \text{для} \quad 2 \le k \le p. \end{cases} \tag{30}$$

Здесь I – единичная матрица, а параметры $\theta_i^{(k-1)}$ выражаются через корни многочлена Чебышева первого рода степени ν.

Матрица $M \equiv M^{(p)}$ рассматривается в качестве *многосеточного переобуславливателя* для матрицы L. Таким образом, согласно (29), многосеточный переобуславливатель строится путем замены матрицы $L^{(k-1)}$ в блочном представлении (28) двухсеточного переобуславливателя на задаваемую неявно и рекурсивно определяемую матрицу. Рассмотрен вопрос выбора степени ν многочленов Чебышева. Обосновывается выбор $\nu = 3$. Доказано следующее утверждение.

Теорема 3.1.1 *При $\nu = 3$, независимо от выбора положительных параметров κ_m в (22), а также значений кусочно-постоянных коэффициентов c и σ в подобластях Δ_m и на звеньях ломаной Γ_1 соответственно, справедлива оценка*

$$cond(M^{-1}L) \le 3 + 2\sqrt{5}. \tag{31}$$

Матрица M берется в качестве многосеточного переобуславливателя и для исходной матрицы жесткости A. С учетом оценок (24) и (31) получен следующий результат.

Теорема 3.1.2 *Пусть $\nu = 3$ и параметры κ_m в (22) выбраны согласно (23). Тогда справедлива оценка*

$$cond(M^{-1}A) \le \left(3 + 2\sqrt{5}\right) \max_{1 \le m \le l} \frac{\delta_2^{(m)}}{\delta_1^{(m)}}, \tag{32}$$

где $\delta_1^{(m)}$ и $\delta_2^{(m)}$ – величины из отношения эквивалентности (20).

В <u>параграфе 3.2</u> обсуждаются вопросы численной реализации многосеточного переобуславливателя. Дается процедура MG PREC/$M^{(k)}$ решения системы с матрицей $M^{(k)}$, $1 \le k \le p$. Алгоритм требует обращения матриц $B_{11}^{(k)}$ и $R^{(k-1)}$ из (29). Матрица $B_{11}^{(k)}$ является диагональной. При $k \ge 2$ решение системы с матрицей $R^{(k-1)}$ эквивалентно выполнению $\nu = 3$ шагов чебышевского итерационного метода с переобуславливателем $M^{(k-1)}$. На самой грубой сетке система сеточных уравнений с матрицей $L^{(0)}$ решается с помощью некоторого прямого метода с затратой $O(1)$ арифметических операций. В заключение дается оценка числа арифметических операций A_{ops}, затрачиваемых на решение системы с матрицей M, а именно,

$$A_{ops} \approx \left(64 + A_{ops}^{(0)}\right) n_p, \tag{33}$$

где $A_{ops}^{(0)}$ – число арифметических операций, требуемых для решения системы с матрицей $L^{(0)}$. Величина A_{ops} называется *арифметической ценой* переобуславливателя M.

Таким образом, построенный многосеточный переобуславливатель можно рассматривать как оптимальный в том смысле, что он спектрально эквивалентен исходной матрице жесткости, а его арифметическая цена пропорциональна размерности алгебраической задачи, с коэффициентом пропорциональности, не зависящем от шага сетки.

В **Главе 4** даны результаты численных расчетов, подтверждающих эффективность применения построенного многосеточного переобуславливателя для решения системы сеточных уравнений (17). В качестве внешней итерационной процедуры был выбран метод Ричардсона с многосеточным переобуславливателем M.

В процессе численной реализации были решены следующие подзадачи:

- разработан алгоритм построения иерархической последовательности вложенных триангуляций;
- разработаны процедуры построения системы сеточных уравнений (вычисления коэффициентов и правых частей системы сеточных уравнений);
- разработан алгоритм хранения, вызова и обработки больших разреженных массивов данных.

В качестве модельной задачи рассматривается уравнение Пуассона

$$-\Delta u = 2\left(1 - xy\right) e^{x+y} \tag{34}$$

в области

$$\Omega = \left\{ \left(x, y\right):\ -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le \frac{1}{2};\ -1 \le x \le \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} < y \le 1 \right\},$$

приведенной на рис. 2.

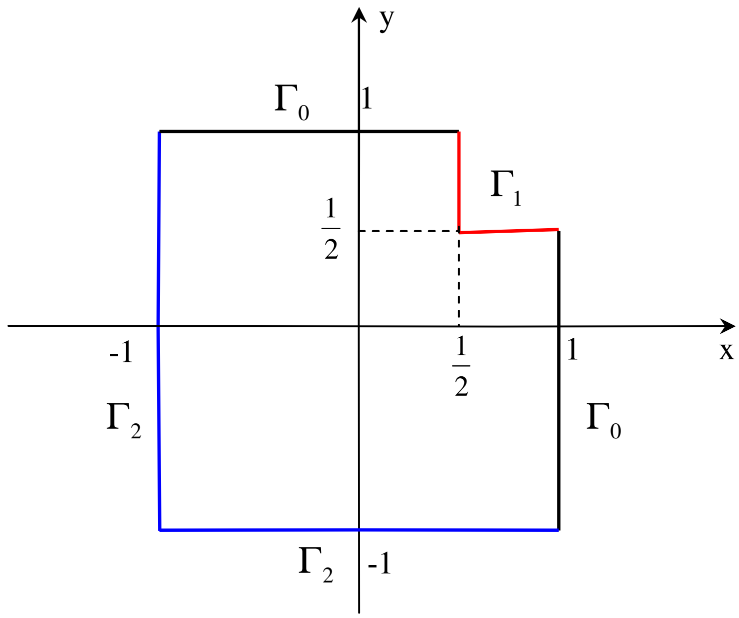

Рис. 2 Область Ω.

Поставлены следующие граничные условия:

$$u\big|_{\Gamma_0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial n} + u\right)\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{1}{2}u\right)\bigg|_{\Gamma_2} = 0. \tag{35}$$

Точным решением задачи (34) - (35) является функция

$$u(x, y) = e^{x+y}\left(x-1\right)\left(y-1\right). \tag{36}$$

Осуществляется начальная триангуляция τ_0 области Ω, как показано на рис. 3.

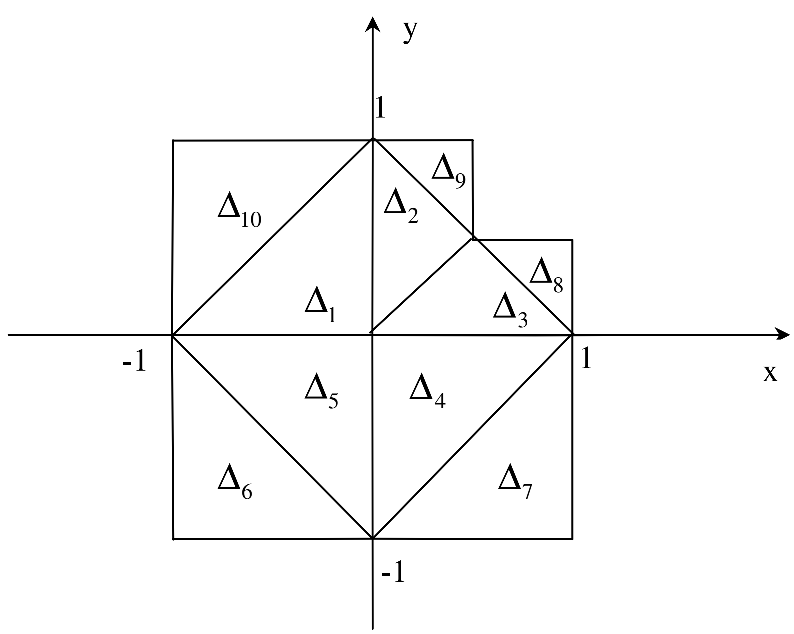

Рис. 3 Начальная триангуляция τ_0 области Ω.

Выбирается некоторое число уровней измельчения сетки $p \geq 1$ (в процессе численных экспериментов выбирались различные значения p). На рис 4 дана последовательность триангуляций для случая $p = 2$.

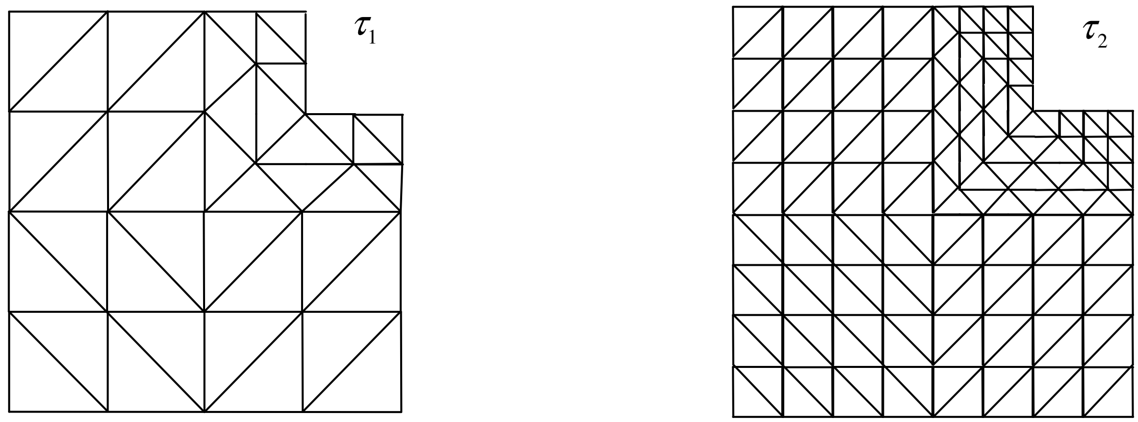

Рис. 4 Последовательность триангуляций $(p = 2)$.

Ниже приведена таблица 1, в которой даны результаты применения итерационного метода Ричардсона с многосеточным переобуславливателем M. В качестве начального приближения была взята сеточная функция $u^{(0)} \equiv 1$. Погрешность оценивалась в норме

$$\|u\| = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i^2},$$

где N – число узлов сетки.

Таблица 1 Результаты итераций с многосеточным переобуславливателем

p	N	It	ε
3	327	55	0.00015638
4	1295	55	0.00025598
5	5151	55	0.00028920
6	20543	55	0.00027581

p – число уровней измельчения сетки;

N – число узлов сетки;

It – число итерации;

ε – погрешность.

В таблице 2, для сравнения, приведены результаты применения итерационного метода Ричардсона без переобуславливания.

Таблица 2 Результаты итераций без переобуславливания

p	N	It	ε
3	327	500	0.00016353
4	1295	500	0.00144255
5	5151	500	0.00119123
6	20543	500	0.00106221

В таблице 3 приведены данные, отражающие преимущество применения многосеточного переобуславливателя.

Таблица 3 Вычисления с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$

p	N	It (Rich)	It (Rich/Prec)
3	327	311	35
4	1295	647	37
5	5151	631	36
6	20543	537	34

Полученное решение представлено графически на рис. 5.

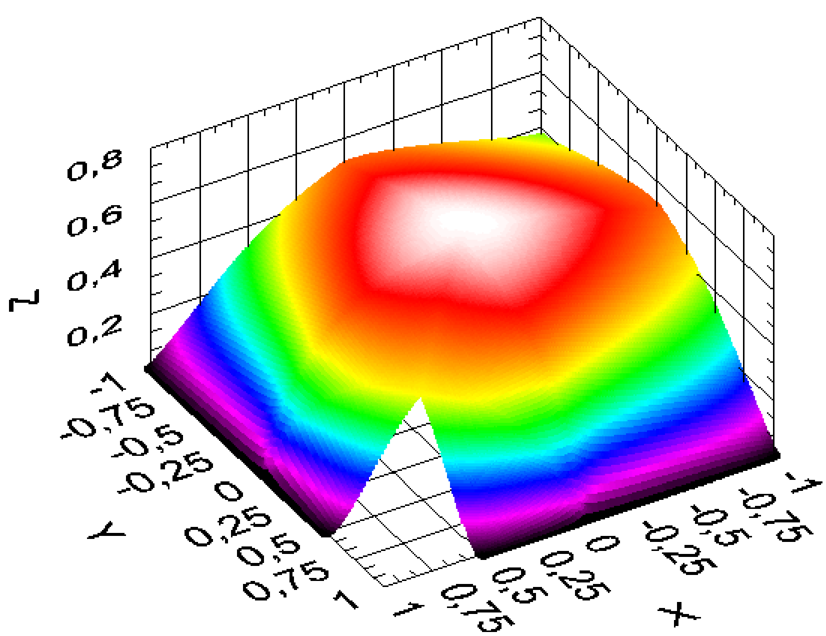

Рис. 5 Графическое представление решения.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

В результате проведенных в диссертации исследований получены следующие основные результаты.

1. Построены алгебраические многосеточные переобуславливатели для симметричных положительно определенных матриц, возникающих при конечноэлементной аппроксимации на треугольных сетках краевых задач для двумерных линейных эллиптических уравнений.

2. Разработана новая техника построения двухсеточных переобуславливателей для задач с краевыми условиями смешанного типа: условие Дирихле – третье краевое условие.

3. На основе двухсеточных переобуславливателей построены оптимальные многосеточные переобуславливатели с внутренними чебышевскими итерациями. Получены оценки числа обусловленности переобусловленных матриц жесткости, не зависящие от числа уровней измельчения сетки, а также оптимальная по порядку оценка арифметической цены одного шага переобуславливания. Полученные теоретические результаты подтверждены численными расчетами.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Манукян А. Г. О построении алгебраических многосеточных переобуславливателей для эллиптических задач. – Сб. научных статей годичной научной конференции Российско-Армянского (Славянского) государственного университета (28.11-02.12, 2006), физико-математические и естественные науки, изд-во РАУ, 2007, 25-34.
2. Акопян Ю. Р., Манукян А. Г. Построение алгебраических многосеточных переобуславливателей для конечноэлементных матриц эллиптических краевых задач. I. Двухсеточные переобуславливатели. – *Вестник Российско-Армянского (Славянского) государственного университета, серия: физико-математические и естественные науки,* № 1, 2007, 22 - 37.
3. Акопян Ю. Р., Манукян А. Г. Построение алгебраических многосеточных переобуславливателей для конечноэлементных матриц эллиптических краевых задач. II. Многосеточный переобуславливатель. – *Вестник Российско-Армянского (Славянского) государственного университета, серия: физико-математические и естественные науки,* № 2, 2007, 91 - 99.

Ա Մ Փ Ո Փ Ա Գ Ի Ր

Ալեքսանդր Գալուստի Մանուկյան

» Հանրահաշվական բազմացանցային վերապայմանավորիչների կառուցումը էլիպտական հավասարումների վերջավոր տարրային մոտարկումների համար «

Ատենախոսությունում կառուցված և հետազոտված են հանրահաշվական բազմացանցային վերապայմանավորիչներ վերջավոր տարրային սիմետրիկ դրական որոշյալ մատրիցների համար, որոնք առաջանում են երկչափ գծային էլիպտական հավասարումների թվային լուծման ժամանակ: Ստացված են հետևյալ հիմնական արդյունքները:

1. Կառուցված են հանրահաշվական բազմացանցային վերապայմանա-վորիչներ սիմետրիկ դրական որոշյալ մատրիցների համար, որոնք առաջանում են երկչափ գծային էլիպտական հավասարումների եռանկյուն ցանցերի վրա վերջավոր տարրային մոտարկման ժամանակ:

2. Խառը տիպի եզրային պայմաններով (Դիրիխլեի պայման - երրորդ եզրային պայման) խնդիրների համար մշակված է երկցանցային վերապայմանավորիչների կառուցման նոր տեխնիկա:

3. Երկցանցային վերապայմանավորիչների հիման վրա կառուցված են ներքին չեբիշևյան իտերացիաներով օպտիմալ բազմացանցային վերապայմանավորիչներ: Ստացված են ցանցի տրոհման մակարդակների թվից անկախ վերապայմանա-վորված կոշտության մատրիցների պայմանավորվածության թվի գնահատական-ները, ինչպես նաև վերապայմանավորման մեկ քայլի թվաբանական գնի ըստ կարգի օպտիմալ գնահատականը: Ստացված տեսական արդյունքները հաստատված են թվային հաշվարկներով:

Aleksandr G. Manukyan

"Constructing algebraic multigrid preconditioners for finite element approximations of elliptic equations"