ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՍԱՐԳՍՅԱՆ ՄԵՍՐՈՊ ԶՈՀՐԱԿԻ

ՍԱԼԵՐԻ ՍՏԻՊՈՂԱԿԱՆ ԵՎ ԱԶԱՏ ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿԱՆ

Ա.02.04.- « Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա » մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ-2011

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН РА

САРГСЯН МЕСРОП ЗОГРАКОВИЧ

АСИМПТОТИКА ВЫНУЖДЕННЫХ И СВОБОДНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04- “Механика деформируемого твердого тела”

ЕРЕВАН-2011

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում

Գիտական ղեկավար՝ ֆ.մ.գ.դ., ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս Լ.Ա. Աղալովյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆ.մ.գ.դ., ՀՀ ԳԱԱ թղթ. անդամ Ս.Հ. Սարգսյան
ֆ.մ.գ.դ., պրոֆ. Գ.Ռ. Ղուլղազարյան

Առաջատար կազմակերպություն Հայաստանի պետական
Ճարտարագիտական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 27 մայիսի 2011թ. ժ. 14 –ին
Մեխանիկայի ինստիտուտում գործող 047 մասնագիտական խորհրդում

(Հասցեն՝ 375019 ք. Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24բ, avsah@mechins.sci.am)

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 23 ապրիլի 2011 թ.

Մասնագիտական խորհրդի գիտական
քարտուղար, տ.գ.դ. պրոֆ Ռ.Մ.Կիրակոսյան

Тема диссертации утверждена в Институте механики НАН РА

Научный руководитель д.ф.м.н., академик НАН РА Л.А. Агаловян

Официальные оппоненты д.ф.м.н., чл. корр. НАН РА С.О. Саркисян
д.ф.м.н., проф. Г.Р. Гулгазарян

Ведущая организация: Государственный инженерный
университет Армении

Защита состоится 27 мая 2011г., в 14^{00} на заседании специализированного совета 047 в Институте механики.

Адрес: 375019 г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б, avsah@mechins.sci.am.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА.

Автореферат разослан 23 апреля 2011г.

Ученый секретарь
специализированного совета
д.т.н. профессор. Р.М.Киракосян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Почти во всех современных конструкциях и сооружениях важными составляющими являются балки, пластины и оболочки, в том числе анизотропные и слоистые. Поэтому вопросы определения их напряженно-деформированных состояний при статических и динамических воздействиях остаются всегда актуальными. Определение напряженно-деформируемых состояний тел на основе уравнений трехмерной задачи теории упругости является одной из сложных задач математической физики.

В настоящее время известны три основные группы аналитических методов, а также численные методы определения напряженно – деформированных состояний тонких тел. Аналитическими методами являются: метод гипотез, метод разложения искомых величин в ряды по параметру толщины, асимптотический метод.

На основе известной гипотезы о недеформируемых нормалях Кирхгофа – Лява, построена классическая теория пластин и оболочек С.П. Тимошенко, В.З. Власовым, А.Л. Гольденвейзером, А.И. Лурье, В.В. Новожиловым, В. Флюгге и др.

Классическая теория анизотропных пластин, в том числе слоистых, построена С.Г. Лехницким, а для анизотропных однослойных и многослойных оболочек С.А. Амбарцумяном. Позднее были построены уточненные теории Э. Рейсснера, С.А. Амбарцумяна, типа Тимошенко.

В методе разложения по параметру толщины все искомые величины представляются в виде произведения двух функций – одна из которых зависит от координат срединой поверхности, а другая от поперечной координаты. При этом в качестве последней выбирают различные функции: степенную функцию, полиномы Лежандра. Это направление развито в работах Коши, Кильчевского Н.А., Векуа И.Н., Понятовского В.В и др.

На основе этих теорий решено огромное количество задач статики и динамики тонких тел. Помимо вышеуказанных авторов отметим работы В.А. Бабешко, Г.Е. Багдасаряна, А.В. Белоконя, М.В. Белубекяна, Е.И. Беспаловой, В.В. Болотина, А.Т. Василенко, В.В. Васильева, И.И. Воровича, К.З. Галимова, В.Ц. Гнуни, Э.И. Григолюка, Я.М. Григоренко, А.Я. Григоренко, Г.Р. Гулгазаряна, Р.М. Киракосяна, В.А. Крысько, Л.А. Мовсисяна, Х.М. Муштари, В.Н. Паймушина, Б.Л. Пелеха, В.В. Пикуля, В.С. Саркисяна, С.В. Саркисяна, И.Г. Терегулова, К.Ф. Черныха и др.

В последние десятилетия в теории оболочек и пластин интенсивно начал развиваться асимптотический метод благодаря работам К.О. Фридрихса, А.Л. Гольденвейзера, А. Грина, И.И. Воровича, Н.Г. Гурьянова, Л.Ю. Коссовича, П.Е. Товстика, Г.Н. Чернышева, Н.Н. Рогачевой, Ю.А. Устинова, Ю.Д. Каплунова, Ю.Н. Бутенко и др., а для анизотропных пластин и оболочек метод развит в работах Л.А. Агаловяна, Р.С. Геворкяна, А.М. Хачатряна, М.Л. Агаловяна, Л.Г. Гулгазарян и др.

Асимптотический метод оказался особенно эффективным для решения неклассических краевых статических и динамических задач. Для этого класса задач Л.А Агаловяном установлена принципиально новая асимптотика для компонент тензора напряжений и вектора перемещения.

В.С. Саркисяном использованы физические и геометрические малые параметры для исследования изгиба и кручения стержней, изгиба, колебания и устойчивости анизотропных пластин и оболочек в классической постановке.

Асимптотический метод существенно развит С.О. Саркисяном для решения задач магнитоупругости и несимметричной теории упругости.

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию вынужденных и собственных колебаний ортотропных пластин при наличии кулоново трения между пластинкой и основанием или внутреннего вязкого трения, когда на их лицевых поверхностях заданы смешанные граничные условия теории упругости. Установлена асимптотика для компонент тензора напряжений и вектора перемещения, которая в первой краевой задачи теории упругости принципиально отличается от асимптотики в соответствующей статической задаче.

Асимптотическим методом определены общий интеграл рассмотренных задач, амплитуды вынужденных колебаний, формы собственных колебаний. Установлены условия возникновения резонанса. Проведено сопряжение решений внутренней задачи и погранслоя.

Целью диссертационной работы является:

- Изучение вынужденных колебаний ортотропных пластин, при наличии кулоново трения между пластинкой и основанием, когда на лицевых плоскостях задан ряд смешанных граничных условий теории упругости;
- исследование динамического пограничного слоя, в частности, характера убывания величин погранслоя при наличии кулоново трения между пластинкой и основанием;
- изучение вынужденных колебаний ортотропных пластин с учетом внутреннего вязкого трения, под воздействием нормальных усилий, приложенных к лицевым поверхностям пластинки;
- определение частот и форм собственных колебаний ортотропных пластин, при наличии внутреннего вязкого трения;
- исследование характера вынужденных и собственных колебаний в зоне пограничного слоя при наличии внутреннего вязкого трения;
- установление условий возникновения резонанса и его предотвращения при динамических воздействиях;
- Проведение сопряжения решений внутренней задачи и погранслоя.

Научная новизна. В диссертационной работе

- асимптотическим методом определен общий интеграл трехмерной динамической краевой задачи для ортотропных пластин, при наличия кулоново трения между пластинкой и основанием, который состоит из решений внутренней задачи и задачи пограничного слоя;
- построены решения внутренней задачи и пограничного слоя ортотропной пластинки при смешанных граничных условиях с учетом кулоново трения между пластинкой и основанием;
- установлены условия возникновения резонанса;
- показано, что решение внутренней задачи становится математически точным, когда заданные на лицевых плоскостях пластинки функции являются многочленами от продольных координат. Приведены решения частных задач;
- выведены характеристические уравнения относительно показателей экспоненциального убывания величин погранслоя. Определены корни этого уравнения для пластинки из стеклопластика;
- определено общее решение пространственной динамической задачи для ортотропных пластин при наличии внутреннего вязкого трения. Во внутренней

- построено решение для пограничного слоя в трехмерной задаче о вынужденных колебаниях ортотропных пластин, с учетом внутреннего вязкого трения, показано, что пограничный слой распадается на плоский и антиплоский пограничные слои;
- показано, что величины в антиплоском пограничном слое затухают быстрее чем в плоском;
- проведено сопряжение решений внутренней задачи и пограничного слоя на боковой поверхности;
- определены частоты и формы собственных колебаний ортотропной пластинки в смешанных краевых задачах при наличии внутреннего вязкого трения;
- показано, что в пластинке могут возникнуть собственные колебания двух типов – сдвиговые и продольные. Определены формы этих колебаний, которые с точностью исходного приближения независимы;
- показано, что один тип собственных колебаний может порождать собственные колебания другого типа. Однако, амплитуды колебаний последних на порядок меньше;
- выявлен характер собственных колебаний в зоне пограничного слоя, определены показатели убывания соответствующих экспоненциальных функций;
- показано, что наличие сопротивления приводит к затухающим собственным колебаниям, как по времени, так и по продольному направлению.

Практическая ценность работы. Полученные в работе результаты могут быть использованы в расчетах различных конструкций современной техники, приборостроения, машиностроения и строительства.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на:
- South-Caucasian Summer School, Mathematical Modeling of Thin Structures, (Tsakhkadzor, Armenia, 2008)
- VI международной конференции “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”(Горис-Степанакерт, Армения, 2008г.)
- FINAL MEETING of INTAS Project “Some Nonclassical Problems for Thin Structures” (Rome, Italy, 2009)
- Юбилейной научной сессии посвященной 90-летию ЕГУ (Ереван 2009г.)
- Международной Школы-Конференции молодых ученых «Механика 2009», (Агавнадзор, Армения,2009г.)
- II международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды” (Дилижан, Армения, 2010г.)
- семинарах “Механика тонкостенных систем” Института механики НАН Армении (Ереван 2008-2011гг)

Диссертационная работа в целом обсуждена на семинаре “Механика тонкостенных систем” Института механики НАН Армении, и на общем семинаре Института механики НАН Армении (2011г.)

Публикации. По теме диссертации опубликованы 7 научных работ, список которых приводится в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 104 наименований. Общий объем работы составляет 118 страниц печатного текста, включая 17 фигур и 15 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулированы цели и задачи исследования, дан краткий обзор работ отечественных и зарубежных авторов, связанных с рассмотренными в диссертации вопросами. Отмечена теоретическая и практическая ценность работы, дано краткое описание работы по главам.

В первой главе в трехмерной постановке исследованы вынужденные колебания ортотропной пластинки свободно лежащей на жестком основании, с учетом кулоново трения между пластинкой и основанием. Определены амплитуды вынужденных колебаний, установлены условия возникновения резонанса. Исследован пограничный слой, проведено сопряжение решений внутренней задачи и пограничного слоя.

В **§1.1** сформулирована динамическая задача теории упругости для ортотропной пластинки $D=\{(x,y,z):\ (x,y)\in D_0,\ |z|\le h,\ h<<l\}$. Требуется найти решение системы динамических уравнений пространственной задачи теории упругости для ортотропного тела при граничных условиях

$$\begin{aligned} &z=-h:\ \ w=0,\ \ \sigma_{xz}=f_1\sigma_{zz},\ \ \sigma_{yz}=f_2\sigma_{zz} \\ &z=h:\ \ \sigma_{zz}=-P(x,y)\exp(i\Omega t),\ \ \sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} &z=-h:\ \ w=0,\ \ \sigma_{xz}=f_1\sigma_{zz},\ \ \sigma_{yz}=f_2\sigma_{zz}, \\ &z=h:\ \ \sigma_{zz}=-P(x,y)\exp(i\Omega t),\ \ u=v=0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} &z=-h:\ \ w=0,\ \ \sigma_{xz}=f_1\sigma_{zz},\ \ \sigma_{yz}=f_2\sigma_{zz}, \\ &z=h:\ \ w=w^{+}(x,y)\exp(i\Omega t),\ \ \sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} &z=-h:\ \ w=0,\ \ \sigma_{xz}=f_1\sigma_{zz},\ \ \sigma_{yz}=f_2\sigma_{zz}, \\ &z=h:\ \ w=w^{+}(x,y)\exp(i\Omega t),\ \ u=v=0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $P(x,y)$ - нормальная нагрузка, $w^{+}(x,y)$ - заданное нормальное перемещение, Ω - частота вынуждающего воздействия i - мнимая единица, l - характерный тангенциальный размер пластинки.

В **§1.2** решение сформулированной задачи ищется в виде

$$\begin{aligned} &\sigma_{\alpha\beta}(x,y,z,t)=\sigma_{jk}(x,y,z)\exp(i\Omega t),\ \ \alpha,\beta=x,y,z;\ \ j,k=1,2,3, \\ &(u,v,w)=(u_x,u_y,u_z)\exp(i\Omega t). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Затем, перейдя к безразмерным координатам и перемещениям $\xi=x/l,\ \eta=y/l,\ \zeta=z/h,\quad U=u_x/l,\ V=u_y/l,\ W=u_z/l.$ получена сингулярно возмущенная малым параметром $\varepsilon = h/l$ система дифференциальных уравнений. Решение этой системы складывается из решений внутренней задачи (I^{int}) и пограничного слоя (I_b)

$$I = I^{\text{int}} + I_b \tag{1.6}$$

Решение внутренней задачи имеет вид

$$\begin{aligned} &\sigma_{jk} = \varepsilon^{-1+s}\sigma_{jk}^{(s)}, \quad j,k = 1,2,3, \\ &\left(U,V,W\right) = \varepsilon^{s}\left(U^{(s)},V^{(s)},W^{(s)}\right), \qquad s = \overline{0,N}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

После подстановки (1.7) в вышеуказанные преобразованные уравнения трехмерной задачи и приравнения в каждом уравнении коэффициентов при одинаковых степенях ε, получена система, откуда $\sigma_{jk}^{(s)}$ выражаются через перемещения:

$$\begin{aligned} &\sigma_{12}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}}\left(\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta}\right), \ \sigma_{11}^{(s)} = -A_{23}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} + A_{22}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} - A_{12}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta}, \\ &\sigma_{13}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}}\left(\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi}\right), \ \ \sigma_{22}^{(s)} = -A_{13}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} - A_{12}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} + A_{33}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta}, \\ &\sigma_{23}^{(s)} = \frac{1}{a_{44}}\left(\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta}\right), \ \ \sigma_{33}^{(s)} = A_{11}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} - A_{23}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} - A_{13}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$A_{11} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{\Delta}, \ A_{22} = \frac{a_{22}a_{33} - a_{23}^2}{\Delta}, \ A_{33} = \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{\Delta},$$

$$A_{12} = \frac{a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23}}{\Delta}, \ A_{13} = \frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{\Delta}, \ A_{23} = \frac{a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23}}{\Delta},$$

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2.$$

а для определения $U^{(s)}, V^{(s)}$ получены уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}\Omega_*^2 U^{(s)} = R_U^{(s)}, \\ &\frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{44}\Omega_*^2 V^{(s)} = R_V^{(s)}, \\ &\frac{\partial^2 W^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\Omega_*^2}{A_{11}} W^{(s)} = R_W^{(s)}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$R_U^{(s)}=-\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta}-a_{55}\left(\frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right),\quad R_V^{(s)}=-\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta}-a_{44}\left(\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right),$$

$$R_W^{(s)}=\frac{A_{23}}{A_{11}}\frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial\zeta\partial\xi}+\frac{A_{13}}{A_{11}}\frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial\zeta\partial\eta}-\frac{1}{A_{11}}\left(\frac{\partial\sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right).$$

где $\Omega_*^2=\rho h^2\Omega^2$, ρ - плотность, $Q^{(m)}\equiv 0$ при $m<0$. Решениями уравнений (1.9) являются

$$U^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)=C_{U1}^{(s)}(\xi,\eta)\sin\sqrt{a_{55}}\Omega_*\zeta+C_{U2}^{(s)}(\xi,\eta)\cos\sqrt{a_{55}}\Omega_*\zeta+U_\tau^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),$$

$$V^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)=C_{V1}^{(s)}(\xi,\eta)\sin\sqrt{a_{44}}\Omega_*\zeta+C_{V2}^{(s)}(\xi,\eta)\cos\sqrt{a_{44}}\Omega_*\zeta+V_\tau^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),\quad (1.10)$$

$$W^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)=C_{W1}^{(s)}(\xi,\eta)\sin\frac{\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}}\zeta+C_{W2}^{(s)}(\xi,\eta)\cos\frac{\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}}\zeta+W_\tau^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),$$

где $U_\tau^{(s)},V_\tau^{(s)},W_\tau^{(s)}$ - частные решения соответствующих уравнений (1.9).

В **§1.3** По формулам (1.8) определены также напряжения и удовлетворены граничные условия (1.1). Из этих условий однозначно определяются функции $C_{Uj}^{(s)}(\xi,\eta),(U,V,W)$ и общий интеграл внутренней задачи. Для компонент перемещений имеем:

$$U^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)=\frac{\sqrt{a_{55}}}{\Omega_*\sin 2\sqrt{a_{55}}\Omega_*}\Big(\sigma_{13\tau}^{(s)}(\zeta=1)\cos\sqrt{a_{55}}\Omega_*(1+\zeta)+$$

$$+\Big(f_1Q_p^{(s)}(\xi,\eta)-\sigma_{13\tau}^{(s)}(\zeta=-1)\Big)\cos\sqrt{a_{55}}\Omega_*(1-\zeta)\Big)+U_\tau^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),$$

$$V^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)=\frac{\sqrt{a_{44}}}{\Omega_*\sin 2\sqrt{a_{44}}\Omega_*}\Big(\sigma_{23\tau}^{(s)}(\zeta=1)\cos\sqrt{a_{44}}\Omega_*(1+\zeta)+\quad (1.11)$$

$$+\Big(f_2Q_p^{(s)}(\xi,\eta)-\sigma_{23\tau}^{(s)}(\zeta=-1)\Big)\cos\sqrt{a_{44}}\Omega_*(1-\zeta)\Big)+V_\tau^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),$$

$$W^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{\cos\frac{2\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}}}\left(\frac{p^{(s)}(\xi,\eta)-\sigma_{33\tau}^{(s)}(\zeta=1)}{\Omega_*\sqrt{A_{11}}}\sin\frac{\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}}(1+\zeta)-\right.$$

$$\left.-W_\tau^{(s)}(\zeta=-1)\cos\frac{\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}}(1-\zeta)\right)+W_\tau^{(s)}(\xi,\eta,\zeta).$$

$$Q_p^{(s)}(\xi,\eta)=\frac{1}{\cos\frac{2\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}}}\Big(p^{(s)}(\xi,\eta)-\sigma_{33\tau}^{(s)}(\zeta=1)\Big)-$$

$$-W_\tau^{(s)}(\zeta=-1)\Omega_*\sqrt{A_{11}}tg\frac{2\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}}+\sigma_{33\tau}^{(s)}(\zeta=-1),$$

По формулам (1.8) определены напряжения. Решение внутренней задачи, полностью определяется после удовлетворения граничных условий при $y = \pm h$.

Найденное решение будет конечным, если

$$\sin 2\sqrt{a_{55}}\Omega_* \neq 0, \quad \sin 2\sqrt{a_{44}}\Omega_* \neq 0, \quad \cos\frac{2\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}} \neq 0 \tag{1.12}$$

В противном случае, происходит резонанс.

Подобным образом в **§1.4, §1.5, §1.6** удовлетворены остальные граничные условия, поучены окончательные выражения для компонент вектора перемещения и тензора напряжений. Выведены условия возникновения резонанса для всех вариантов граничных условий.

В **§1.7** показано, что когда функции $P(x,y)$ или $w^+(x,y)$ являются многочленами, итерационный процесс обрывается и получаем точное решение внутренней задачи. Найдены эти решения, когда

$$P(x,y) = p = \text{const} \tag{1.13}$$

$$w^+(x,y) = -w^+ = \text{const} \tag{1.14}$$

В **§1.8** построены графики амплитуд перемещений и напряжений для пластинки из стеклопластика СВАМ 10:1 для всех случаев граничных условий при постоянном нормальном воздействии.

Решение внутренней задачи, как правило, не удовлетворяет граничным условиям при $x = 0, l$. Для устранения возникшей неувязки строится пограничный слой. Этому посвящен **§1.9**. В уравнениях и соотношениях упругости вводится новая переменная $\gamma = \xi/\varepsilon$, всем искомым величинам приписывается индекс ,,b" (от слова boundary) и решение преобразованной системы ищется в виде

$$\begin{aligned} &\sigma_{jkb} = \varepsilon^{-1+s}\sigma_{jkb}^{(s)}(\eta,\zeta)\exp(-\lambda\gamma), \\ &U_b = \varepsilon^s U_b^{(s)}(\eta,\zeta)\exp(-\lambda\gamma), \quad (U,V,W) \quad j,k = 1,2,3, \quad s = \overline{0,N}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

где $\operatorname{Re}\lambda > 0$ - характеризует скорость убывания величин при удалении от боковой поверхности $x = 0$ во внутрь пластинки. Показано, что все искомые величины можно выразить через $U_b^{(s)}, V_b^{(s)}, W_b^{(s)}$, для определения которых получены уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 U_b^{(s)}}{\partial\zeta^2} + \lambda\left(a_{55}A_{23} - 1\right)\frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial\zeta} + a_{55}\left(A_{22}\lambda^2 + \Omega_*^2\right)U_b^{(s)} = -a_{55}A_{12}\lambda\frac{\partial V_b^{(s-1)}}{\partial\eta} - a_{55}\frac{\partial\sigma_{12b}^{(s-1)}}{\partial\eta}, \\ &\frac{\partial^2 W_b^{(s)}}{\partial\zeta^2} + \lambda\frac{A_{23}a_{55} - 1}{A_{11}a_{55}}\frac{\partial U_b^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\lambda^2 + a_{55}\Omega_*^2}{a_{55}A_{11}}W_b^{(s)} = \frac{A_{13}}{A_{11}}\frac{\partial^2 V_b^{(s-1)}}{\partial\eta^2} - \frac{1}{A_{11}}\frac{\partial\sigma_{23b}^{(s-1)}}{\partial\eta}, \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial^2 V_b^{(s)}}{\partial\zeta^2} + a_{44}\left(\frac{1}{a_{66}}\lambda^2 + \Omega_*^2\right)V_b^{(s)} = \lambda\frac{a_{44}}{a_{66}}\frac{\partial U_b^{(s-1)}}{\partial\eta} - a_{44}\frac{\partial\sigma_{22b}^{(s-1)}}{\partial\eta} - \frac{\partial^2 W_b^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta}. \tag{1.17}$$

В исходном приближении система уравнений (1.16) описывает плоский, а уравнение (1.17) антиплоский пограничные слои. Для перемещений получены:

$$U_b^{(0)} = \sum_{j=1}^{4} G_{jb}^{(0)}(\eta)\exp k_j\zeta,$$
$$W_b^{(0)} = \sum_{j=1}^{4} L_j G_{jb}^{(0)}(\eta)\exp k_j\zeta. \tag{1.18}$$
$$V_b^{(0)} = C_{1b}^{(0)}\sin\theta_a\zeta + C_{2b}^{(0)}\cos\theta_a\zeta, \tag{1.19}$$
где
$$k_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{-B_1\lambda^2 - \Omega_*^2 B_2 \pm \sqrt{D}}{2}},\quad \theta_a = \sqrt{(\frac{\lambda_a^2}{a_{66}} + \Omega_*^2)a_{44}}$$

Значения D, B_1, B_2 известны и определяются по формулам приводимым в диссертационной работе.

Решение пограничного слоя удовлетворяет граничным условиям
$$z=-h:\ w=0,\ \sigma_{xz}=f_1\sigma_{zz},\ \sigma_{yz}=f_2\sigma_{zz}$$
$$z=h:\quad \sigma_{zz}=\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0. \tag{1.20}$$

$$z=-h:\quad w=0,\ \sigma_{xz}=f_1\sigma_{zz},\ \sigma_{yz}=f_2\sigma_{zz},$$
$$z=h:\quad \sigma_{zz}=0,\ u=v=0. \tag{1.21}$$

$$z=-h:\quad w=0,\ \sigma_{xz}=f_1\sigma_{zz},\ \sigma_{yz}=f_2\sigma_{zz},$$
$$z=h:\quad w=0,\ \sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0. \tag{1.22}$$

$$z=-h:\quad w=0,\ \sigma_{xz}=f_1\sigma_{zz},\ \sigma_{yz}=f_2\sigma_{zz},$$
$$z=h:\quad w=u=v=0. \tag{1.23}$$

В **§1.10, §1.11, §1.12, §1.13** удовлетворены все варианты граничных условий (1.20)- (1.23). Удовлетворение условий (1.20) - (1.23) приводит в каждом случае к решению однородных систем алгебраических уравнений соответственно в плоской и антиплоской задачах. Эти системы имеют ненулевые решения, если их определители равны нулю, которые есть уравнения для определения показателей экспоненты λ_p и λ_a. Определены несколько значений этих показателей для пластинки из стеклопластиков СВАМ 10:1 и СТЭТ.

Показано, что наличие кулоново трения с основанием приводит к тому что, плоскому погранслою сопровождает антиплоский погранслой.

В **§1.14** проведено сопряжение решений внутренней задачи и пограничного слоя в близи края $x=0$. Рассмотрен случай, когда при $x=0$ заданы условия
$$\sigma_{xx}=\varphi(\eta,\zeta),\ \sigma_{xy}=\psi(\eta,\zeta),\ \sigma_{xz}=\chi(\eta,\zeta). \tag{1.24}$$
и в частности $\sigma_{xx}=\sigma_{xy}=\sigma_{xz}=0.$

Использован метод наименьших квадратов

$$J=\int_{-1}^{1}\Big[\Big(\sigma_{xx}^{\text{int}}(\xi=0)+\sigma_{xxb}(\gamma=0)-\varphi(\eta,\zeta)\Big)^2+$$
$$+\Big(\sigma_{xz}^{\text{int}}(\xi=0)+\sigma_{xzb}(\gamma=0)-\chi(\eta,\zeta)\Big)^2+\Big(\sigma_{xy}^{\text{int}}(\xi=0)+\sigma_{xyb}(\gamma=0)-\psi(\eta,\zeta)\Big)^2\Big]d\zeta. \qquad (1.25)$$

Минимизировав функционал (1.25) соответственно в плоской и антиплоской задачах получены системы неоднородных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов входящие в решение погранслоя.

Во второй главе исследованы вынужденные колебания ортотропной пластинки свободно лежащей на жестком основании, при наличии внутреннего вязкого трения, когда на верхней лицевой плоскости задано нормальное воздействие (нормальная нагрузка, или нормальное перемещение). Помимо определения решения внутренней задачи построено также решение погранслоя. Получены характеристические уравнения для показателей экспоненциального убывания величин плоского и антиплоского погранслоев. Проведено сопряжение решений внутренней задачи и погранслоя.

В **§2.1** сформулирована постановка задач и приведены основные уравнения. Требуется найти ненулевые решения пространственной динамической задачи теории упругости для пластинки $D=\{(x,y,z):\ (x,y)\in D_0,\ |z|\le h,\ h<<l\}$ при двух вариантов граничных условий

$$\begin{aligned}&z=-h:\ \ w=0,\ \ \sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0.\\&z=h:\qquad \sigma_{zz}=\sigma_{zz}^{+}(\xi,\eta)\cos\Omega t\quad \sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0,\end{aligned} \qquad (2.1)$$

$$\begin{aligned}&z=-h:\ \ w=0,\ \ \sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0.\\&z=h:\qquad w=w^{+}(\xi,\eta)\cos\Omega t,\ \ \sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0,\end{aligned} \qquad (2.2)$$

где $\sigma_{zz}^{+}(\xi,\eta)$ - нормальная нагрузка, $w^{+}(\xi,\eta)$ - заданное нормальное перемещение, $\xi=x/l,\eta=y/l$, Ω - частота вынуждающего воздействия.

В **§2.2** Решение задачи ищется в виде

$$\begin{aligned}&\sigma_{\alpha\beta}=\sigma_{\alpha\beta1}\sin\Omega t+\sigma_{\alpha\beta2}\cos\Omega t,\qquad \alpha,\beta=x,y,z,\\&u=u_1\sin\Omega t+u_2\cos\Omega t,\quad (u,v,w).\end{aligned} \qquad (2.3)$$

Перейдя к безразмерным координатам и перемещением, получена сингулярно возмущенная малым параметром $\varepsilon=h/l$ система, решение внутренней задачи которой имеет вид

$$\begin{aligned}&\sigma_{\alpha\beta j}^{\text{int}}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{\alpha\beta j}^{(s)},\qquad \alpha,\beta=x,y,z;\quad s=\overline{0,N},\\&\left(U_j^{\text{int}},V_j^{\text{int}},W_j^{\text{int}}\right)=\varepsilon^{s}\left(U_j^{(s)},V_j^{(s)},W_j^{(s)}\right),\quad j=1,2.\end{aligned} \qquad (2.4)$$

для простоты вычислений, сделав обозначения:

$$\begin{aligned}&Z_U^{(s)}=U_1^{(s)}+iU_2^{(s)},\ \left(U,V,W\right),\\&Z_{\alpha\beta}^{(s)}=\sigma_{\alpha\beta1}^{(s)}+i\sigma_{\alpha\beta2}^{(s)},\ \ \alpha,\beta=x,y,z.\end{aligned} \qquad (2.5)$$

получена рекуррентная система относительно функций $Z_U^{(s)}\left(U,V,W\right)$, $Z_{\alpha\beta}^{(s)}$, откуда функции $Z_{\alpha\beta}^{(s)}$ выражаются через функции $Z_U^{(s)}\left(U,V,W\right)$. Для определения последних получены уравнения

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 Z_U^{(s)}}{\partial \zeta^2}+a_{55}\left(\Omega_*^2-i2K\Omega_*\right)Z_U^{(s)}=R_U^{(s)},\\
&\frac{\partial^2 Z_V^{(s)}}{\partial \zeta^2}+a_{44}\left(\Omega_*^2-i2K\Omega_*\right)Z_V^{(s)}=R_V^{(s)},\\
&\frac{\partial^2 Z_W^{(s)}}{\partial \zeta^2}+\frac{1}{A_{11}}\left(\Omega_*^2-i2K\Omega_*\right)Z_W^{(s)}=R_W^{(s)},
\end{aligned}\tag{2.6}$$

где $R_U^{(s)}$, $R_V^{(s)}$, $R_W^{(s)}$ - для каждого **s** известные функции, в частности,

$$R_U^{(0)}=R_V^{(0)}=R_W^{(0)}=0\,.$$

Используя (2.3),(2.5) все искомые величины определяются по общим формулам

$$Q_1^{(s)}=\frac{Z_Q^{(s)}+\overline{Z}_Q^{(s)}}{2},\;\; Q_2^{(s)}=\frac{Z_Q^{(s)}-\overline{Z}_Q^{(s)}}{2i},\tag{2.7}$$

где Q любая из искомых величин.

В **§2.3, §2.4** удовлетворены граничные условия для каждого из вариантов и определены все неизвестные функции $Z_U^{(s)}\left(U,V,W\right)$, следовательно, и функции $Z_{\alpha\beta}^{(s)}$.

При граничных условиях (2.1) найденное решение будет конечным если

$$\sin 2\Omega_K\sqrt{a_{55}}\neq 0,\; \sin 2\Omega_K\sqrt{a_{44}}\neq 0,\, \cos\frac{2\Omega_K}{\sqrt{A_{11}}}\neq 0.\tag{2.8}$$

А при (2.2), если

$$\sin 2\Omega_K\sqrt{a_{55}}\neq 0,\; \sin 2\Omega_K\sqrt{a_{44}}\neq 0,\, \sin\frac{2\Omega_K}{\sqrt{A_{11}}}\neq 0.\tag{2.9}$$

В противном случае возникнет резонанс.

В **§2.5** рассмотрены частные случаи вынуждающего воздействия, в частности, когда оно имеет постоянную интенсивность

$$\sigma_{zz}^{+}(\xi,\eta)=-p=\text{const},\tag{2.10}$$

$$w^{+}(\xi,\eta)=-w^{+}=\text{const}.\tag{2.11}$$

при постоянном вынуждающем воздействии итерационный процесс обрывается на приближении $s=1$, и получается математически точное решение. Это решение соответствующее условиям (2.1),(2.10) имеет вид

$$\begin{aligned}
&\sigma_{\alpha\alpha}=\varepsilon^{-1}\left(\sigma_{\alpha\alpha1}^{(0)}\sin\Omega t+\sigma_{\alpha\alpha1}^{(0)}\cos\Omega t\right),\;\; \sigma_{\alpha\beta}=0,\;\;\alpha,\beta=x,y,z,\;\alpha\neq\beta,\\
&w=l\left(W_1^{(0)}\sin\Omega t+W_2^{(0)}\cos\Omega t\right),\;\; u=v=0.
\end{aligned}\tag{2.12}$$

где $Q_1^{(0)} = \operatorname{Re} Z_Q^{(0)}$, $Q_2^{(0)} = \operatorname{Im} Z_Q^{(0)}$, Q -любая из искомых величин,

$$Z_U^{(0)} = Z_V^{(0)} = 0,\ Z_{xy}^{(0)} = Z_{xz}^{(0)} = Z_{yz}^{(0)} = 0,$$

$$Z_W^{(0)} = -\frac{i\varepsilon p}{\Omega_K \sqrt{A_{11}} \cos\frac{2\Omega_K}{\sqrt{A_{11}}}} \sin\frac{\Omega_K}{\sqrt{A_{11}}}\left(1+\zeta\right), \qquad (2.13)$$

$$Z_{xx}^{(0)} = i\varepsilon p \frac{A_{23}}{A_{11}\cos\frac{2\Omega_K}{\sqrt{A_{11}}}} \cos\frac{\Omega_K}{\sqrt{A_{11}}}\left(1+\zeta\right),\ \left(xx, yy, zz; A_{23}, A_{13}, -A_{11}\right).$$

В **§2.6** построены графики нормального перемещения и нормального напряжения для пластинки из СВАМ 10:1, когда нормальное воздействие имеет постоянную интенсивность.

Поскольку решение внутренней задачи, как правило, не удовлетворяет граничным условиям на боковой поверхности пластинки в **§2.7** рассмотрен вопрос устранения возникающей неувязки, для чего построено решение для погранслоя. В уравнениях и соотношениях теории упругости вводится новая переменная $\gamma = \xi/\varepsilon$, и решение преобразованной системы ищется в виде

$$\begin{gathered} \sigma_{\alpha\beta jb} = \varepsilon^{-1+s}\sigma_{\alpha\beta jb}^{(s)}(\eta,\zeta)\exp(-\lambda\gamma), \qquad \alpha,\beta = x, y, z, \\ U_{jb} = \varepsilon^{s} U_{jb}^{(s)}(\eta,\zeta)\exp(-\lambda\gamma),\ \ (U,V,W),\ \ j = 1,2,\quad s = \overline{0,N}. \end{gathered} \qquad (2.14)$$

где λ - пока неизвестный коэффициент, $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Используя обозначения (2.5) получена новая система относительно функций $Z_U^{(s)}\left(U,V,W\right), Z_{\alpha\beta}^{(s)}$, откуда все функции $Z_{\alpha\beta}^{(s)}$ выражены через $Z_U^{(s)}\left(U,V,W\right)$, а для определения последних получены три дифференциальные уравнения, которые в исходном приближении разделяются:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 Z_{Ub}^{(0)}}{\partial\zeta^2} + \lambda\left(A_{23}a_{55} - 1\right)\frac{\partial Z_{Wb}^{(0)}}{\partial\zeta} + a_{55}\left(A_{22}\lambda^2 + \Omega_*^2 - i2K\Omega_*\right)Z_{Ub}^{(0)} = 0, \\ A_{11}\frac{\partial^2 Z_{Wb}^{(0)}}{\partial\zeta^2} + \lambda\left(A_{23} - \frac{1}{a_{55}}\right)\frac{\partial Z_{Ub}^{(0)}}{\partial\zeta} + \left(\Omega_*^2 - i2K\Omega_* + \frac{\lambda^2}{a_{55}}\right)Z_{Wb}^{(0)} = 0, \\ \frac{\partial^2 Z_{Vb}^{(0)}}{\partial\zeta^2} + a_{44}\left(\Omega_*^2 - i2K\Omega_* + \frac{\lambda^2}{a_{66}}\right)Z_{Vb}^{(0)} = 0. \end{gathered} \qquad (2.15)$$

третье уравнение системы (2.15) независимо от первых двух и характеризует антиплоскую задачу, а первые два уравнения - плоскую задачу.

Определены решения уравнений (2.15)

$$Z_{Ub}^{(0)} = \sum_{j=1}^{4} G_{jb}^{(0)}(\eta)\exp k_j\zeta,$$
$$Z_{Wb}^{(0)} = \sum_{j=1}^{4} LG_{jb}^{(0)}(\eta)\exp k_j\zeta, \qquad (2.16)$$
$$Z_{Vb}^{(0)} = \sum_{j=1}^{2} C_{jb}^{(0)}(\eta)\exp \theta_j\zeta. \qquad (2.17)$$

где

$$k_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{-\left(\Phi_1\lambda^2+\Phi_2\right)\pm\sqrt{\left(\Phi_1\lambda^2+\Phi_2\right)^2-4A_{11}\left(A_{22}\lambda^4+\Phi_3\lambda^2+\Phi_4\right)}}{2A_{11}}},$$

$$\theta_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{a_{44}}{a_{66}}\lambda^2 - a_{44}\Omega_*^2 + i2Ka_{44}\Omega_*}.$$

$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ - выражаются через A_{jk}, a_{55}, K, Ω_* по формулам приводимым в диссертационной работе.

В **§2.8 §2.9** удовлетворены граничные условия на лицевых поверхностях соответствующие погранслою, откуда вытекают характеристические уравнения относительно λ_p (плоская задача) и λ_a (антиплоская задача). Вычислены первые несколько значений корней λ_p и λ_a соответственно для пластинки из пластика СВАМ 10:1 и из стеклопластика СТЭТ при $h = 0.5$ м, $\mathrm{k}_1 = 0.2$, $\Omega = 2\pi / 0.1c^{-1}$.В частности, при воздействии нормальной нагрузки на верхнюю лицевую плоскость пластинки, имеем следующие значения:

СВАМ 10:1

	λ_p	λ_a
1	$0.19961 - 0.8963\,i$	0.896929
2	$0.19961 + 0.8963\,i$	2.29646
3	0.45786	3.56686
4	1.94724	4.81152
5	$3.82491 - 0.14623\,i$	6.04636
6	$3.82491 + 0.14623\,i$	7.27639

Табл. 1

СТЭТ

	λ_p	λ_a
1	$0.0869387 - 0.2907\,i$	1.25198
2	$0.0869387 + 0.2907\,i$	2.77552
3	0.7768733	4.23441
4	$1.2106707 - 0.2267\,i$	5.6787
5	$1.2106707 + 0.2267\,i$	7.11729
6	2.10577	8.55304

Табл.2

Из этих таблиц видно, что для пластинки из указанных материалов величины в антиплоском пограничном слое затухают быстрее, чем в плоском.

В **§2.10** проведено сопряжение решений внутренней задачи и погранслоя, используя условия минимума средней квадратичной погрешности.

В **третьей главе** изучены собственные колебания ортотропных пластин при наличии внутреннего трения, когда на лицевых поверхностях заданы однородные смешанные условия динамической задачи теории упругости. Доказано существование трех типов собственных колебаний, из которых два сдвиговые колебания и один - продольные колебания. Установлены собственные формы этих колебаний для исходного приближения. Исследован характер затухания величин пограничного слоя при собственных колебаниях пластинки.

В **§3.1** дана постановка задачи и приведены основные уравнения. Требуется определить частоты собственных колебаний пластинки $D=\{(x,y,z):\ (x,y)\in D_0,\ |z|\le h,\ h<<l\}$ и собственные функции при наличии внутреннего трения и при следующих граничных условиях на лицевых поверхностях $z=\pm h$ пластинки:

$$\begin{aligned} &z=-h:\ \ w=0,\ \sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0,\\ &z=h:\quad \sigma_{zz}=\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

или

$$z=\pm h:\ \ w=0,\ \sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0. \tag{3.2}$$

Для этого необходимо найти ненулевые решения системы динамических уравнений пространственной задачи теории упругости для ортотропного тела при условиях (3.1) или (3.2).

Решение ищется в виде

$$\begin{aligned} &\sigma_{\alpha\beta}(x,y,z,t)=\sigma_{jk}(x,y,z)\exp(i\omega t),\quad \alpha,\beta=x,y,z;\quad j,k=1,2,3,\\ &(u,v,w)=(u_x,u_y,u_z)\exp(i\omega t). \end{aligned} \tag{3.3}$$

где ω - неизвестная частота собственных колебаний

Затем перейдя к безразмерным координатам и компонентам вектора перемещения получим сингуляно возмущенную малым параметром $\varepsilon=h/l$ систему, решение которой складывается из решений внутренней задачи и погранслоя. Решение внутренней задачи отыскивается в виде

$$\begin{gathered} \sigma_{jk}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{jk}^{(s)},\quad j,k=1,2,3\ \ s=\overline{0,N},\\ (U,V,W)=\varepsilon^{s}\left(U^{(s)},V^{(s)},W^{(s)}\right),\\ \omega_*=\varepsilon^{s}\omega_{*s}.\qquad \omega_*^{\,2}=\rho h^2\omega^2 \end{gathered} \tag{3.4}$$

Применив правило Коши умножения рядов $\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}$, выведена рекуррентная система, откуда напряжения выражаются через перемещения, а для определенияперемещений получены три уравнения

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial\zeta^2}+a_{55}\left(\omega_{*m-n}\omega_{*n}-2iK\omega_{*m}\right)U^{(s-m)}=R_U^{(s)},\\ \frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial\zeta^2}+a_{44}\left(\omega_{*m-n}\omega_{*n}-2iK\omega_{*m}\right)V^{(s-m)}=R_V^{(s)},\\ \frac{\partial^2 W^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\frac{1}{A_{11}}\left(\omega_{*m-n}\omega_{*n}-2iK\omega_{*m}\right)W^{(s-m)}=R_W^{(s)},\\ n=\overline{0,m},\ m=\overline{0,s}. \end{gathered} \tag{3.5}$$

где $R_U^{(s)}\ R_V^{(s)}\ R_W^{(s)}$ известны и определяются по формулам приводимым в диссертационной работе.

Решениями уравнений (3.5) для исходного приближения являются:

$$\begin{aligned} U^{(0)} &= C_{1U}^{(0)} \cos\gamma_{U0}\zeta + C_{2U}^{(0)} \sin\gamma_{U0}\zeta, \\ V^{(0)} &= C_{1V}^{(0)} \cos\gamma_{V0}\zeta + C_{2V}^{(0)} \sin\gamma_{V0}\zeta, \\ W^{(0)} &= C_{1W}^{(0)} \cos\gamma_{W0}\zeta + C_{2W}^{(0)} \sin\gamma_{W0}\zeta. \end{aligned} \tag{3.6}$$

где $\gamma_{U0} = \sqrt{a_{55}\left(\omega_{*0}{}^2 - i2K\omega_{*0}\right)}$, $\left(U,V,W;\ a_{55}, a_{44}, 1/A_{11}\right)$.

Неизвестные коэффициенты $C_{jU}^{(0)}, C_{jV}^{(0)}, C_{jW}^{(0)},\ j=1,2$, должны быть определены из граничных условий на лицевых и боковых поверхностях.

В **§3.3**. при $s=0$ определены напряжения $\sigma_{13}^{(0)},\ \sigma_{23}^{(0)}, \sigma_{33}^{(0)}$ и удовлетворены граничные условия (3.1) и (3.2). Удовлетворение условий (3.1) относительно $\sigma_{13}^{(0)}$ приводит к однородной алгебраической системе. Из условия существования ненулевого решения этой системы (определитель равен нулю) получено уравнение для определения частот ω_{*0} :

$$\sin\gamma_{U0}\cos\gamma_{U0} = 0. \tag{3.7}$$

Откуда вытекают 2 случая:

$$\text{а) } \sin\gamma_{U0} = 0 \Rightarrow \gamma_{U0} = \pi n, \quad n \in \mathrm{N}, \tag{3.8}$$

$$\text{б) } \cos\gamma_{U0} = 0 \Rightarrow \gamma_{U0} = \frac{\pi}{2}\left(2n+1\right), \quad n \in \mathrm{N}. \tag{3.9}$$

1)В случае а), когда $K > \dfrac{\pi n}{\sqrt{a_{55}}}$ имеем:

$$\omega_{*0n} = iK \pm i\sqrt{K^2 - \frac{\pi^2 n^2}{a_{55}}},\ \ n \in \mathrm{N}. \tag{3.10}$$

Из (3.3), (3.4), (3.10) следует, что затухание величин будет происходить без колебания, как $\exp\dfrac{1}{h\sqrt{\rho}}\left(-K - \sqrt{K^2 - \dfrac{\pi^2 n^2}{a_{55}}}\right)t$ или $\exp\dfrac{1}{h\sqrt{\rho}}\left(-K + \sqrt{K^2 - \dfrac{\pi^2 n^2}{a_{55}}}\right)t$.

2)В случае $K < \dfrac{\pi n}{\sqrt{a_{55}}}$ будем иметь:

$$\omega_{*0n} = iK \pm \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{a_{55}} - K^2}, \quad n \in \mathrm{N}. \tag{3.11}$$

Учитывая, что $\omega_*{}^2 = \rho h^2 \omega^2$, из (3.8), (3.9) имеем

$$\omega_{0n}^{\mathrm{I}} = \frac{1}{h\sqrt{\rho}}\left(iK \pm \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{a_{55}} - K^2} \right), \qquad n \in \mathrm{N}. \tag{3.12}$$

$$\omega_{0n}^{\mathrm{II}} = \frac{1}{h\sqrt{\rho}}\left(iK \pm \sqrt{\frac{\pi^2}{a_{55}} \frac{(2n+1)^2}{4} - K^2} \right), \quad n \in \mathrm{N}. \tag{3.13}$$

Поскольку, $1/a_{55} = G_{13}$ достаточно большое число, второй вариант на практике будет встречаться часто и поэтому этот случай рассмотрен более подробно.

Частотам (3.12), (3.13) соответствуют сдвиговые собственные колебания с формами собственных колебаний соответственно

$$\text{а) } U_{n\mathrm{I}}^{(0)} = C_{1Un\mathrm{I}}^{(0)}(\xi, \eta)\cos \pi n \zeta. \tag{3.14}$$

$$\text{б) } U_{n\mathrm{II}}^{(0)} = C_{2Un\mathrm{II}}^{(0)}(\xi, \eta)\sin \frac{(2n+1)\pi}{2}\zeta, \quad n \in \mathrm{N}. \tag{3.15}$$

Случаю а) соответствуют собственные колебания в симметричной задаче (растяжение - сжатие), случаю б) – собственные колебания в антисимметричной задаче (изгиб).

Подобным образом удовлетворены остальные граничные условия, установлены значения частот собственных колебаний, выписаны функции описывающие собственные формы колебаний соответствующие остальным двум типам собственных колебаний.

В **§3.4** показано, что каждое из семейств собственных функций $\{U_{n\mathrm{I}}^{(0)}\}, \{U_{n\mathrm{II}}^{(0)}\}$, $\{V_{n\mathrm{III}}^{(0)}\}, \{V_{n\mathrm{IV}}^{(0)}\}$, $\{W_{n\mathrm{V}}^{(0)}\}, \{W_{n\mathrm{VI}}^{(0)}\}, \{W_{n\mathrm{VII}}^{(0)}\}$ составляет ортогональную систему на интервале $-1 \le \zeta \le 1$, а каждая из групп собственных функции $\{\Psi_{n\mathrm{I}}\} = \{\cos \pi n \zeta\}$, $\{\Psi_{n\mathrm{II}}\} = \left\{\sin \frac{\pi}{2}(2n+1)\zeta\right\}$ составляет ортонормированную систему на том же интервале.

В **§3.5** изучен вклад приближений $s \ge 1$. Показано, что $\omega_{*1n}^{I} = 0$, $U_{nI}^{(1)} = 0$, однако, $V_{nI}^{(1)} \ne 0, W_{nI}^{(1)} \ne 0$, т.е. сдвиговые собственные колебания порождают продольные собственные колебания и, наоборот, т.е. на уровне учета высших приближений один тип собственных колебаний будет сопровождаться другим типом собственных колебаний амплитуды которых на порядок меньше. Показано, что $\omega_{*2n}^{I} \ne 0$, $U_{nI}^{(2)} \ne 0$ следовательно, если ограничиться приближением $s = 2$, будем иметь

$$\begin{aligned} U_{nI} &= U_{nI}^{(0)} + \varepsilon^2 U_{nI}^{(2)}, \\ \omega_{*n}^{I} &= \omega_{*0n}^{I} + \varepsilon^2 \omega_{*2n}^{I}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Аналогичная картина имеет место для остальных вариантов значений частот.

В **§3.6, §3.7** исследованы собственные колебания в зоне пограничного слоя в близи торца $x = 0$. Показано, что все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения при удалении от торца $x=0$ убывают, как $\exp(-\lambda\gamma)$, $\gamma=\xi/\varepsilon$. Выведены характеристические уравнения для определения λ_p и λ_a. Показано, что каждой группе собственных частот $\omega_{*0n}^{I}-\omega_{*0n}^{VII}$ соответствует своя совокупность значений λ_{pn} и λ_{an}.

В **заключении** представлены основные результаты диссертационной работы. Изучены вынужденные и собственные колебания ортотропных пластин, при наличии кулоново трения с основанием или внутреннего вязкого трения, когда на лицевых поверхностях пластины заданы смешанные граничные условия теории упругости.

Определены амплитуды вынужденных колебаний, установлены условия возникновения резонанса. Выведены характеристические уравнения для определения показателей экспоненциального убывания величин пограничного слоя. Проведено сопряжение решений внутренней задачи и пограничного слоя.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

В работе получены , в частности, следующие новые результаты:

- На основе уравнений пространственной задачи теории упругости определено решение внутренней смешанной задачи для ортотропной пластинки при наличии кулоново трения с жестким основанием.
- Указаны случаи, когда решение становится точным, приведены соответствующие частные решения.
- Установлены условия возникновения резонанса[1,4].
- Построено решение для пограничного слоя ортотропной пластинки с учетом кулоново трения между пластинкой и основанием, выведены характеристические уравнения относительно показателей экспоненциального убывания. Вычислены корни этого уравнения для пластинки из стеклопластиков СВАМ 10:1 и СТЭТ. Проведено сопряжение решений внутренней задачи и пограничного слоя.
- Показано, что кулоново трение между пластинкой и основанием приводит к тому, что в исходном приближении плоский погранслой сопровождается с антиплоским погранслоем[3,4].
- Определено решение внутренней задачи ортотропной пластинки свободно лежащей на жестком основании при наличии внутреннего вязкого трения. Для отдельных классов задач получены точные решения.
- Установлены условия возникновения резонанса при наличии внутреннего вязкого трения[2].
- Построено решение для пограничного слоя в трехмерной задаче о вынужденных колебаниях ортотропных пластин с учетом внутреннего вязкого трения. Показано, что пограничный слой распадается на плоский и антиплоский пограничные слои.
- Выведены характерстические уравнения для определения показателей экспоненциального убывания компонент тензора напряжений и вектора перемещения в плоском и антиплоском пограничных слоях. Проведено

- Определены частоты и формы собственных колебаний ортотропной пластинки при смешанных однородных граничных условиях. Показано, что в пластинке могут возникнуть три типа собственных колебаний– два сдвиговые и один продольные. Определены формы этих колебаний, которые с точностью исходного приближения независимы.
- Показано, что один тип собственных колебаний может вызвать собственные колебания других типов. Однако, амплитуды колебаний последних на порядок меньше[7].
- Выявлен характер собственных колебаний в зоне пограничного слоя. Установлено, что каждой собственной частоте соответствует своя группа собственных функций типа пограничного слоя. Определены показатели убывания соответствующих экспоненциальных функций [5].

Список научных работ по теме диссертации

1. Саргсян М.З. Трехмерная задача о вынужденных колебаниях ортотропной пластины, лежащей на жестком основании.// В сб.: Проблемы динамики взаимодействия деф. тел, Тр. VI межд. конференции. Институт механики НАН РА. Ереван. 2008. с. 399-403.
2. Саргсян М. З. О вынужденных колебаниях ортотропных пластин, свободно лежащих на жесткой подстилке, с учетом вязкого трения.// В сб.: МЕХАНИКА 2009. Тр межд. школы-конференции молодых ученых. Ереван: Изд-во ЕГУАС. 2009. С. 297-303.
3. Sargsyan M. Z. On boundary layer the 3D problem about forced vibrations of orthotropic plate, freely-lying on the rigid foundation.// Известия НАН РА. Механика. 2009. Т. 62. №4. С. 73-79.
4. Саргсян М.З. О некоторых пространственных задачах теории упругости для ортотропных пластин.// В сб.: Юбилейная научная сессия посв. 90-летию ЕГУ. Изд-во ЕГУ. 2010. Т. 1. С. 241-250.
5. Саргсян М. З. О характере собственных колебаний ортотропной пластины в зоне пограничного слоя при наличии вязкого сопротивления.// В сб.: Актуальные проблемы механики сплошной среды, Тр. II межд. конф. Ереван: ЕГУАС. 2010. Т. 2.С. 120-124.
6. Агаловян Л.А., Саргсян М.З. К решению трехмерной смешанной динамической задачи о вынужденных колебаниях ортотропной пластины с учетом внутреннего вязкого трения.// Доклады. Изд-во “Гитутюн” НАН РА. Т.110. №2. 2010. С. 163-170.
7. Агаловян Л.А., Саргсян М.З. О собственных колебаниях ортотропных пластин при наличии вязкого сопротивления.// Изв. НАН РА. Механика. Т.64. №1. 2011. С. 26-36.

Ամփոփում

Ատենախոսությունը նվիրված է կոշտ հենարանի վրա ազատ հենված օրթոտրոպ սալերի ստիպողական և ազատ տատանումների ուսումնասիրությանը սալի և հենարանի միջև կուլոնյան շփման կամ ներքին մածուցիկ շփման առկայության դեպքում, երբ սալի դիմային մակերևույթների վրա տրված են առաձգականության տեսության դինամիկական խնդրի խառը եզրային պայմաններ:

Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից, երեք գլուխներից, եզրակացությունից և օգտագործված գրականության ցանկից:

Առաջին գլուխը նվիրված է կոշտ հենարանի վրա ազատ հենված օրթոտրոպ սալի ստիպողական տատանումների ուսումնասիրմանը, սալի և հենարանի միջև կուլոնյան շփման հաշվառմամբ: Դիտարկված են առազգականության տեսության խառը եզրային խնդիրներ, մասնավորապես, երբ սալի վերին նիստի վրա տրված է լարումների թենզորի, կամ տեղափոխության վեկտորի նորմալ բաղադրիչը [1,3,4]:

Որոշված է օրթոտրոպ սալի ներքին խնդրի ասիմպտոտիկական լուծումը, արտածված են ռեզոնանսի առաջացման պայմանները:

Ցույց է տրված, որ բազմանդամային տեսքի նորմալ ազդեցության դեպքում իտերացիոն պրոցեսը ընդհատվում է որոշակի մոտավորությունում և ստացվում է ներքին խնդրի ճշգրիտ լուծումը: Ստացված են համապատասխան ճշգրիտ լուծումները հաստատուն և գծային ինտենսիվություն ունեցող նորմալ ազդեցությունների դեպքերում:

Կառուցված են գրաֆիկներ լարումների թենզորի և տեղափոխության վեկտորի բաղադրիչների ամպլիտուդների համար, երբ նորմալ ազդեցությունը ունի հաստատուն ինտենսիվություն [1, 4]:

Կառուցված է սահմանային շերտի տիպի լուծումը: Ցույց է տրված, որ զրոյական մոտավորությունում խնդիրը բաժանվում է հարթ և հակահարթ խնդիրների: Սակայն հիմքի հետ կուլոնյան շփման հետևանքով հարթ սահմանային շերտը ուղեկցվում է հակահարթ սահմանային շերտով:

Արտածված են բնութագրիչ հավասարումներ հարթ և հակահարթ սահմանային շերտերում լարման թենզորի և տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչների էքսպոնենցիալ օրենքով նվազման ցուցիչների որոշման համար:

Ցույց է տրված, որ մեծությունները հակահարթ սահմանային շերտում ավելի արագ են մարում քան հարթ սահմանային շերտում:

Կատարված է ներքին խնդրի և սահմանային շերտի լուծումների լծորդումը[3, 4]:

Երկրորդ գլխում ուսումնասիրված է կոշտ հենարանի վրա ազատ հենված օրթոտրոպ սալի ստիպողական տատանումները, ներքին մածուցիկ շփման առկայության դեպքում, երբ սալի դիմային հարթությունների վրա տրված են խառը եզրային պայմաններ [2, 6]:

Ստացված է ներքին խնդրի լուծումը: Ի հայտ են բերված ռեզոնանսի առաջացման պայմանները:

Ստացված են ներքին խնդրի ճշգրիտ լուծումներ հաստատուն ինտենսիվությամբ նորմալ ազդեցության դեպքում:

Կառուցված են գրաֆիկներ լարումների թենզորի և տեղափոխության վեկտորի նորմալ բաղադրիչների համար, երբ նորմալ ազդեցությունը ունի հաստատուն ինտենսիվություն:

Ցույց է տրված որ ներքին խնդրի լուծումը ամբողջությամբ որոշվում է դիմային հարթությունների վրա դրված պայմաններից [2]:

Կառուցված է սահմանային շերտին համապատասխանող ասիմպտոտիկ լուծումը: Որոշված են հարթ և հակահարթ սահմանային շերտերում մեծությունների էքսպոնենցիալ օրենքով նվազման ցուցիչները որոշ նյութերի համար:

Կատարված է ներքին խնդրի և սահմանային շերտի լուծումների լծորդումը, երբ սալի կողմնային մակերևույթի վրա տրված են լարումները [6]:

Երրորդ գլուխը նվիրված է կոշտ հենարանի վրա ազատ հենված օրթոտրոպ սալերի ազատ տատանումների ուսումնասիրությանը, ներքին մածուցիկ շփման հաշվառմամբ, երբ սալի դիմային մեկերևույթների վրա տրված են առաձգականության տեսության խառը համասեռ եզրային պայմաններ [5, 7]:

Ցույց է տրված, որ օրթոտրոպ սալում կարող են առաջանալ երեք տիպի սեփական տատանումներ՝ երկու սահքային և մեկ երկայնական, որոնք սկզբնական մոտավորությունում իրարից անկախ են: Որոշված են այդ տատանումների հաճախությունները և սեփական ձևերը:

Ապացուցված է, որ մի տիպի սեփական տատանումը կարող է առաջացնել մյուս երկու տիպի սեփական տատանումներ, սակայն կարգով ավելի փոքր ամպլիտուդով[7]:

Բացահայտված է սեփական տատանումների բնույթը սահմանային շերտում: Ցույց է տրված, որ յուրաքանչյուր սեփական տատանման հաճախությանը համապատասխանում է սահմանային շերտի սեփական ձևերի իր խումբը:

Որոշված են սահմանային շերտի համապատասխան մեծությունների էքսպոնենցիալ օրենքով մարման ցուցիչները սեփական տատանումների դեպքում:

Ցույց է տրված, որ ներքին մածուցիկ շփման առկայության դեպքում սեփական տատանումները դառնում են մարող [5]:

Հաշվի առնելով, որ սալերը հանդիսանում են ժամանակակից գրեթե բոլոր կառուցվածքների և սարքերի բաղկացուցիչ մասեր, ատենախոսությունում ստացված արդյունքները կարող են ստանալ իրենց լայն կիրառությունները:

ABSTRACT

The dissertation is devoted to the study of forced and free vibrations of orthotropic plates freely lying on the rigid foundation in the presence of Coulomb friction between the plate and foundation or internal viscous friction, when on the faces of the plate mixed-boundary conditions of dynamic problem of elasticity theory are given.

The dissertation consists of three chapters, introduction, conclusion and a list of references.

The first chapter is devoted to the study of forced vibrations of orthotropic plate freely lying on the rigid foundation in the presence of Coulomb friction between the plate and foundation. The mixed-boundary problems of elasticity theory are considered, particularly the case, when on the upper plane of the plate the normal component of the stress tensor or of the displacement vector is given [1, 3, 4].

The asymptotic solution of the inner problem of the orthotropic plate is determined. The conditions of appearance of the resonance are obtained.

It is shown that if the intensity of the normal action has a polynomial form the iterative process is interrupted on the certain approximation and an exact solution of the inner problem is obtained. When the intensity of the normal action is constant or linear the corresponding exact solutions are obtained.

When the intensity of the normal action is a constant the graphs for amplitudes of components of the stress tensor and the displacement vector are constructed [1, 4].

The solution of the boundary layer is constructed. It is shown, that the problem is divided into the plane and out-of-plane problems. However, on account of Coulomb friction between the plate and foundation the plane boundary layer is accompanied by the out-of-plane boundary layer.

The characteristic equations for indexes of exponential decrease of components of the stress tensor and displacement vector in the plane and out-of-plane boundary layers are deduced.

It is shown, that quantities in the out-of-plane boundary layer damps faster than in the plane boundary layer.

The conjugation of the solution of the inner problem and of the boundary layer is conducted [3, 4].

In the second chapter the forced vibrations of orthotropic plate freely lying on the rigid foundation taking into account the internal viscous friction are studied, when on the faces of the plate mixed-boundary conditions are given [2,6].

The solution of the inner problem is obtained. The resonance conditions are determined.

The exact solutions of the inner problem, when the intensity of normal action is constant, are obtained.

When the intensity of the normal action is a constant the graphs for normal components of the stress tensor and displacement vector are constructed.

It is shown that the solution of the inner problem is completely determined by the boundary conditions on the faces of the plate [2].

The asymptotic solution corresponding to the boundary layer is obtained. The indexes of the exponential decrease of quantities in the plane and out-of-plane boundary layers are calculated for some materials.

The conjugation of the solution of the inner problem and of the boundary layer is conducted, when on the lateral surface of the plate are given the stresses [6].

The third chapter is devoted to the study of free vibrations of the orthotropic plate freely lying on the rigid foundation in the presence of internal viscous friction, when on the faces of the plate the homogeneous mixed-boundary conditions of elasticity theory are given [5,7].

It is shown, that in the plate the three types of free vibrations can arise – two shear and one longitudinal vibrations. The frequencies of that vibrations and principal modes are determined.

It is proved that the one type of free vibrations can generate the other two types of free vibrations, but order of amplitudes of the generated vibrations is less than order of amplitude of the first type of free vibrations [7].

The character of the free vibrations in the boundary layer is disclosed. It is shown that to the each frequency of the free vibrations corresponds own group of principal modes of boundary layer.

The indexes of the exponential decrease of quantities of boundary layer in the case of free vibrations are determined.

It is shown that in the presence of internal viscous friction the free vibrations are becoming damped vibrations [5].

In account of plates being important component parts of modern constructions and equipments obtained results in the dissertation can be widely used.