ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՎԱՐԴԱՆՈՎ ԱՐՏԱՇԵՍ ՀԱՅԿԻ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԵՎ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ԿՈՇՏ ՀԻՄՔԻ ՎՐԱ ԴՐՎԱԾ ԻԶՈՏՐՈՊ ՇԵՐՏՈՒՄ

Ա.02.04 "Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա" մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ – 2011

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН РА

ВАРТАНОВ АРТАШЕС ГАЙКОВИЧ

УПРУГИЕ И МАГНИТОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ В ИЗОТРОПНОМ СЛОЕ, ЛЕЖАЩЕМ НА ЖЕСТКОМ ОСНОВАНИИ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.02.04 – "механика деформируемого твердого тела"

ЕРЕВАН – 2011

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում:

Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ.-մաթ.գիտ. դոկտոր Կ.Բ. Ղազարյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆիզ.-մաթ.գիտ. դոկտոր Ս.Վ. Սարգսյան
ֆիզ.-մաթ.գիտ. դոկտոր Ռ.Ս. Գևորգյան

Առաջատար կազմակերպություն՝
Երևանի Ճարտարապետության և Շինարարության Պետական Համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2011թ. մայիսի 20–ին, ժամը 14^{00}-ին
ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում գործող 047 մասնագիտական խորհրդի նիստում (հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող., 24բ, avsah@mechins.sci.am):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի գրադարանում:
Սեղմագիրն առաքված է՝ 19 ապրիլի 2011թ.

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար,

տեխ. գիտ. դոկտոր Ռ.Մ. Կիրակոսյան

Тема диссертации утверждена в Институте Механики НАН РА.

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук К.Б. Казарян

Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук С.В. Саркисян
доктор физ.-мат. наук Р.С. Геворкян

Ведущая организация: Ереванский Государственный Университет Архитектуры и Строительства

Защита диссертации состоится <u>20-го мая 2011г. в 14^{00} часов</u>

на заседании специализированного совета 047 в Институте механики НАН РА по адресу: 0019, г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна, $24^{б}$, avsah@mechins.sci.am.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА.

Автореферат разослан 19-го апреля 2011г.
Учёный секретарь специализированного совета,

доктор тенхн. наук *Р.М. Киракосян*

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Диссертация посвящена вопросам колебания и распространения упругих и магнитоупругих волн в изотропном слое, который скреплен с жестким основанием. Рассматриваемый класс задач является предельным случаем более сложной задачи распространения упругих волн в слое, лежащем на упругом основании. Упругий слой с плоскопараллельными лицевыми плоскостями представляет собой частный случай математической модели упругого волновода.

В диссертации отмечаются классические работы Похгаммера, Рэлея, Лэмба и других ученых посвященных проблеме распространения упругих волн в цилиндре, слое со свободными поверхностями. Приводятся многочисленные достяжения армянской школы механиков, в частности, работы А. С. Аветисяна, К. Л. Агаяна, С. А. Амбарцумяна, Д. Асаняна, А. Г. Багдоева, Г. Е. Багдасаряна, М. В. Белубекяна, А. В. Геворкяна, Э. Х. Григоряна, З. Н. Данояна, К. Б. Казаряна, М. М. Минасяна, П. А. Мкртчяна, Р. Н. Овакимяна, С. В. Саркисяна, С. О. Саркисяна по проблемам поведения упругих плит и пластин изготовленных из электропроводящих материалов во внешнем электромагнитном поле, а также, по вопросам распространения электро-магнито-упругих волн в пьезоактивных волноводах. В этих работах в рамках линейной теории электромагнитоупругости приводятся многочисленные результаты колебания и устойчивости электропроводящих и пьезоактивных структур. Приводятся как точные решения, так и решения полученные на основе приближенных методов и гипотез, в частности, на основе гипотезы Кирхгофа.

К первым работам по исследованию распространения магнитоупругих волн в проводящем упругом волноводе (плита, полый цилиндр) можно отнести работы С. Калицкого (1962г.), Г. Е. Багдасаряна и М. В. Белубекяна (1967г.).

Отдельный класс исследований представляют собой задачи с неклассическими граничными условиями. Отличительной чертой этих задач является то обстоятельство, что симметричная и антисимметричная мода колебаний не разделяются, а также, что к этому классу задач неприменимы гипотезы классической теории балок и пластин, в частности, гипотеза Кирхгофа и уточненные теории.

Задача распространении волн в упругом слое, одна из лицевых плоскостей которого жестко закреплена, а другая свободна от напряжений, в двумерной постановке, впервые была решена П. К. Ишковым (1941г.), которым было получено дисперсионное уравнение и проведено сравнение с результатами задачи Лемба. Было показано, что наименьшая фазовая скорость распространения волны в слое равна фазовой скорости поверхностных волн Рэлея. В дальнейшем данную задачу детально рассмотрели М. Д. Мартыненко и В. В. Мелешко.

В классе задач с неклассическими условиями, в рамках асимптотического метода решения задач математической физики, на основе уравнений и соотношений пространственной задачи теории упругости Л. А. Агаловяном, М. Л. Агаловяном, Р. С. Геворкяном, Т. В. Закаряном, Р. Ж. Оганесяном был рассмотрен ряд задач собственных и вынужденных колебаний анизотропных и ортотропных прямоугольных пластин. Были рассмотрены различные граничные условия на лицевых плоскостях пластинки, в частности, когда одна из лицевых плоскостей пластинки жестко закреплена, а другая свободна или жестко закреплена. Установлена асимптотика и определены частоты и формы собственных колебаний, в частности показано, что собственные колебания, не являются чисто сдвиговыми и продольными.

Задача локализованных колебаний полубесконечной круговой цилиндрической оболочки, торец которого свободен от напряжений, в рамках безмоментной теорий оболочек, впервые решена Р. А. Багдасаряном, М. В. Белубекяном, К. Б. Казаряном. В моментной теории эта задача рассмотрена Г. Р. Гулгазаряном.

Цель и задачи работы.

- Решение трехмерной задачи и вывод дисперсионного уравнения относительно фазовой скорости для однородной и неоднородной плит на жестком основании. Опредление частот собственных колебаний.
- Установление точности и границ применимости метода Левинсона, впервые предложенного для решения трехмерных задач колебания и изгиба плиты со свободными краями.
- Решение задачи колебаний идеально проводящего слоя на жестком основании, находящегося во внешнем магнитном поле. Исследование эффектов влияния внешнего магнитного поля на частоты колебаний плиты.
- Исследование задачи колебаний безмоментных цилиндрических оболочек конечной длины на жестком основании.

Научная новизна.

- Получено дисперсионное уравнение относительно фазовых скоростей колебаний и соответствующие им собственные функции перемещений для трехмерной задачи колебаний толстой плиты на жестком оснований.

- Показано, что метод Левинсона является точным методом для решения этого класса задач. Указан класс краевых задач, для которых метод Левинсона не приемлем.
- Получены дисперсионное уравнение относительно фазовых скоростей колебаний для трехмерной задачи колебаний толстой и неоднородной плиты на жестком оснований. Выявлено влияние неоднородности плиты на фазовою скорость собственных колебаний.
- Решены задачи магнитоупругих колебаний упругого слоя на жестком основании, находящемся во внешнем продольном магнитном поле. Установлено, что внешнее магнитное поле слабо изменяет частоту собственных колебаний слоя.
- Решена задача локализованных колебаний цилиндрической оболочки конечной длины, когда один из торцов оболочки жестко заделан, а другой – свободен от механических напряжений. Установлено существование минимального значения относительной длины, меньше которой локализованные колебания отсутствуют.

Практическая ценность работы.

Исследуемая проблема является важной с точки зрения приложений и непосредственно относится к теории сейсмических методов разведки недр земной коры, дает возможность смоделировать процессы распространения сейсмических волн в тектонических плитах. Задачи рассматриваемые в диссертации помогут понять и исследовать колебательные процессы прикладных проблем сейсмологии на примере модели упругого слоя на жестком основании.

Апробация работы.

Основные результаты диссертационной работы были представлены и доложены на следующих конференциях:

- Международная научно-техническая конференция «Архитектура и строительство – актуальные проблемы», Ереван – Джермук, 2008г.
- AIAA Structures, Structural Dynamics, and Materials 49th Conference, USA, 2008.
- “Topical problems of continuum mechanics, The second International Conference”, Dilijan, 2010.

- VIII международная научная конференция «Математические проблемы механики неоднородных структур», Институт прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача, Львов, 2010.

Публикации.

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в шести научных работах.

Структура и объем работы.

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Она состоит из 108 страниц, содержит 10 фигур и 11 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность и практическая значимость темы, дан обзор задач и проблем, связанных с тематикой диссертации и методов их решения.

В **Главе 1** приводятся основные положения и соотношения теории упругости. В **Параграфе 1** приводятся уравнения движения для изотропного тела, граничные и начальные условия. Приводится общий метод Ламе для решения задачи посредством динамических потенциалов. В **Параграфе 2** описывается задача Рэлея и Лемба о распространении волн в слое со свободными лицевыми поверхностями. В **Параграфе 3** приводится метод и задача М. Левинсона для слоя со свободными краями, который позволяет решить трехмерную задачу слоя с различными граничными условиями. В **Параграфе 4** описывается модель идеального проводника, уравнения движения для идеального проводника а также динамические уравнения магнитоупругости.

В **Параграфе 1 Главы 2**, с помощью динамических потенциалов точно решена задача конечной плиты в трехмерной постановке.

Динамические уравнения теории упругости взяты в виде

$$\mu\Delta\vec{U} + (\lambda + \mu) graddiv\vec{U} = \rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}$$

Вектор перемещения представлен посредством динамических потенциалов

$$\vec{U} = grad\Phi + rot\vec{\Psi}$$

$$div\vec{\Psi} = 0$$

Одна из лицевых поверхностей плиты жестко закреплена, а другая свободна от напряжений.

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0; \quad z = 0$$

$$u_x = u_y = u_z = 0; \quad z = d$$

На торцах плиты удовлетворяются условия Навье

$$\sigma_{xx}(0,y,z) = \sigma_{xx}(a,y,z) = 0 \quad \sigma_{yy}(x,0,z) = \sigma_{yy}(x,b,z) = 0$$

$$u_z(0,y,z) = u_z(a,y,z) = 0 \quad u_z(x,0,z) = u_z(x,b,z) = 0$$

$$u_y(0,y,z) = u_y(a,y,z) = 0 \quad u_x(x,0,z) = u_x(x,b,z) = 0$$

Решения уравнения движения для слоя ищется в виде гармоничной во времени волны.

После удовлетворения граничных условий получено дисперсионное уравнение, совпадающее с дисперсионными уравнениями полученными в работах П. К. Ишкова, М. Д. Мартыненко и В. В. Мелешко.

$$F(\eta) = -\frac{\left(\lambda^2 + 4p^2q^2\right)\mathrm{th}(kdp)\mathrm{th}(kdq)}{pq} - \frac{4\lambda}{\mathrm{ch}(kdp)\mathrm{ch}(kdq)} + \left(4 + \lambda^2\right) = 0$$

где

$$\lambda = 2 - \eta^2; \quad q = \sqrt{1 - \eta^2}; \quad p = \sqrt{1 - \theta\eta^2};$$

$\eta = \dfrac{\omega}{kc_t}$ безразмерная фазовая скорость колебаний, ω-частота колебаний.

Приведены числовые расчеты минимальных значений относительной толщины слоя, больше которых существуют решения дисперсионного уравнения такие, что фазовая скорость распространения волны меньше чем скорость распространения поперечной волны.

В **Параграфе 2** рассматривается та же задача, что и в параграфе 1, но с применением метода решения, предложенным М. Левинсоном, где функции перемещений принимаются в виде

$$u\left(x,y,z,t\right) = -g\left(z\right)\frac{\partial S\left(x,y,t\right)}{\partial x}$$

$$v\left(x,y,z,t\right) = -g\left(z\right)\frac{\partial S\left(x,y,t\right)}{\partial y}$$

$$w\left(x,y,z,t\right) = f\left(z\right)S\left(x,y,t\right)$$

Установлено, что в обоих случаях совпадают, как дисперсионные уравнения, так и собственные функции.

В **Параграфе 3** с помощью метода Левинсона решается задача распространения волн в слое с экспоненциальной неоднородностью

$$\lambda(z)=\lambda_0 \exp\left[\frac{sz}{d}\right]; \quad \rho(z)=\rho_0 \exp\left[\frac{sz}{d}\right]; \quad \mu(z)=\mu_0 \exp\left[\frac{sz}{d}\right]$$

с теми же граничными условиями.

Получено дисперсионное уравнение относительно безразмерной фазовой скорости η

$$\Omega_1 + \Omega_2 ch\left(\frac{r_{10}}{2}\right)ch\left(\frac{r_{20}}{2}\right) + \Omega_3 sh\left(\frac{r_{10}}{2}\right)ch\left(\frac{r_{20}}{2}\right) +$$
$$+ \Omega_4 ch\left(\frac{r_{10}}{2}\right)sh\left(\frac{r_{20}}{2}\right) + \Omega_5 sh\left(\frac{r_{10}}{2}\right)sh\left(\frac{r_{20}}{2}\right) = 0$$

где

$$\{r_1, r_2\} = d\left(\sqrt{a^2 - 2M\left(M\left(\eta^2(1+\theta)-2\right) \pm \sqrt{M^2\eta^4(-1+\theta)^2 + a^2(-4+8\theta)}\right)}\right)$$

Получены значения относительной толщины слоя p_0 при различных значениях параметра неоднородности, больше которых существуют решения дисперсионного уравнения такие, что фазовая скорость распространения волны меньше чем скорость распространения поперечной волны. Приведены расчеты относительно фазовой скорости волны для различных значений относительной толщины и параметра неоднородности.

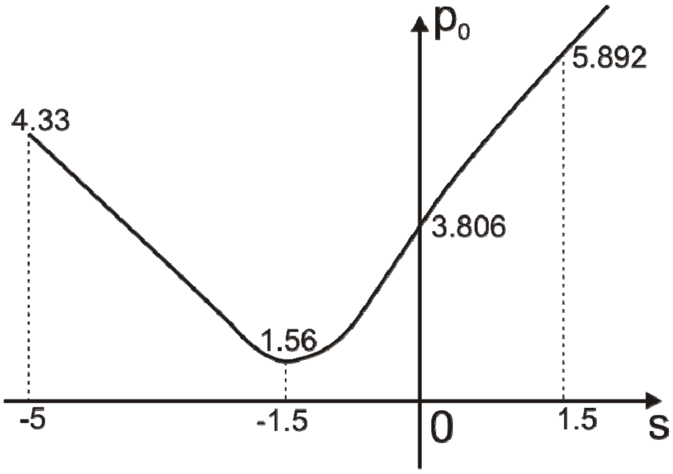

Рис. 3. Зависимость относительной толщины слоя от параметра неоднородности.

В Параграфах 1 и 2 Главы 3 решаются двумерные задачи распространения магнитоупругих волн в слое, лежащем на жестком основании для двух случаев:

1) Продольное постоянное магнитное поле перпендикулярно направлению распространения волны

2) Продольное постоянное магнитное поле параллельно направлению магнитоупругой волны.

Уравнение движения для идеального проводника взято в виде

$$c_T^2\Delta_0\vec{u}+\left(c_L^2-c_T^2\right)graddiv\vec{u}+\frac{\mu_0}{4\pi\rho}\left[rotrot\left(\vec{u}\times\overrightarrow{H_0}\right)\right]\times\overrightarrow{H_0}=\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}$$

где

$$c_L^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho};\qquad c_T^2=\frac{\mu}{\rho}$$

Граничные условия на поверхностях пластинки взяты в виде

$$\begin{cases}\sigma_{13}+T_{13}=T_{13}^{(1)}\\ \sigma_{33}+T_{33}=T_{33}^{(1)}\\ e_1=e_1^{(1)}\end{cases}\qquad \text{при}\quad z=0$$

$$\begin{cases}u_1=0\\ u_3=0\\ e_1=e_1^{(2)}\end{cases}\qquad \text{при}\quad z=d$$

где σ_{13} и σ_{33} компоненты тензора напряжений, T_{13} и T_{33} компоненты тензора Максвелла.

Вместе с уравнениями движения рассмотрены линейные уравнения электродинамики окружающей среды (вакуума)

$$c_0^2 \Delta h_2^{(e)} - \ddot{h}_2^{(e)} = 0$$
$$c_0^2 \Delta e_1^{(e)} - \ddot{e}_1^{(e)} = 0$$

Их решения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} h_2^{(1)} &= C_1 \exp[-v_3 z + ik(x-ct)] \\ e_1^{(1)} &= C_2 \exp[-v_3 z + ik(x-ct)] \end{aligned}\right\} \text{при} \quad z \geq d$$
$$\left.\begin{aligned} h_2^{(2)} &= C_3 \exp[v_3 z + ik(x-ct)] \\ e_1^{(2)} &= C_4 \exp[v_3 z + ik(x-ct)] \end{aligned}\right\} \text{при} \quad z \leq 0$$

где

$$v_3^2 = k^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_0^2}\right)$$

После удовлетворения граничных условий из однородной системы уравнений получены дисперсионные уравнения:

для случая, когда направление магнитного поля перпендикулярно направлению магнитоупругой волны

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 \operatorname{ch}(kd\alpha)\operatorname{ch}(kd\beta) + \Gamma_3 \operatorname{sh}(kd\alpha)\operatorname{sh}(kd\beta) = 0$$

где

$$\alpha^2 = 1 - \frac{c^2}{c_1^2}; \quad \beta^2 = 1 - \frac{c^2}{c_T^2}$$

для случая, когда направление магнитного поля параллельно направлению магнитоупругой волны

$$F(\eta) = pq(Q_2 P_1 P_3 + P_2 Q_1 Q_3) +$$
$$+sh[kdp]\left(\bar{H}_0^2 q P_2 (P_3 Q_2 - P_2 Q_3) ch[kdq] + \left(q^2 Q_1 P_2 P_3 + p^2 P_1 Q_2 Q_3\right) \operatorname{sh}[kdq]\right) +$$
$$+pch[kdp](\bar{H}_0^2 Q_2 (P_2 Q_3 - P_3 Q_2) sh[kdq] - q(P_3 Q_2 Q_1 + Q_3 P_2 P_1) ch[kdq]);$$

где

$$\{p,q\} = \sqrt{-\frac{\gamma E + \eta^2 + G\bar{H}_0^2 \pm \sqrt{D^2\eta^4 + 2DG\eta^2\bar{H}_0^2 + F^2\bar{H}_0^4}}{2\left(\gamma + \bar{H}_0^2\right)}}$$

$$D = \gamma - 1; \quad E = \eta^2 - 2; \quad G = \eta^2 - 1 - \gamma; \quad F = \eta^2 + 1 - \gamma$$

$$\gamma = \frac{1}{\theta} = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\mu}; \quad \eta = \frac{\omega}{k}\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}; \quad \bar{H}_0^2 = \frac{H_{0x}^2}{4\pi\mu}$$

Приведены расчеты относительно фазовой скорости магнитоупругой волны для различных значений относительной толщины слоя и параметра характеризующего магнитное поле.

Таблица 1

	η	
kd	$\bar{H}_{0y} = 0$	$\bar{H}_{0x} = 0$
10	0.919	0.919
7	0.924	0.924
6	0.931	0.931
5	0,947	0.946
4	0.986	0.986
3	1.09	1.014
2	1.421	1.204
1	1.732	1.273
0.01	1.732	1.314
0	1.732	1.32

	η	
kd	$\bar{H}_{0y} = 0.1$	$\bar{H}_{0x} = 0.1$
10	0.921	0.926
7	0.926	0.931
6	0.933	0.938
5	0.948	0.953
4	0.988	0.993
3	1.095	1.014
2	1.421	1.205
1	1.74	1.274
0.01	1.74	1.316
0	1.74	1.326

Таблица 2

Материал	Алюминий	Серебро	Медь	Сталь
$\bar{H}_0$ (Э)	1.8×10^5	1.87×10^5	2.39×10^5	3.17×10^5

Как следует из **Таблицы 1**, для обоих случаев, наименьшее значение фазовая скорость принимает при $kd \to \infty$, равной скорости Рэлея. С уменьшением kd фазовая скорость увеличивается. Показано, что магнитное поле слабо влияет на фазовою скорость волны, при всех значениях параметра относительной толщины kd. Данное обстоятельство существенно отличается от задачи колебаний плиты со свободными краями, где для тонкой пластинки показано, существенное влияние внешнего магнитного поля на частоту магнитоупругих колебаний, в то время как для толстой плиты влияние магнитного поля не существенно.

В **Таблице 2** приведены значения напряженностей внешнего магнитного поля соответствующие безразмерному параметру $\bar{H}_0 = 0.1$, для различных материалов.

В **Параграфе 1 Главы 4** приводятся постановка задачи, основные уравнения и соотношения безмоментной теории цилиндрических оболочек

Уравнения движения, выраженные через усилия, имеют вид

$$\begin{cases} R\dfrac{\partial T_x}{\partial x} + \dfrac{\partial S}{\partial \theta} = Rh\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ R\dfrac{\partial S}{\partial x} + \dfrac{\partial T_\theta}{\partial \theta} = Rh\rho\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ -T_\theta = Rh\rho\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases}$$

где

$$T_x = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{R}\right)\right]$$

$$T_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{R} + \nu\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

$$S = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right]$$

В **Параграфе 2** решается задача локализованных колебаний конечной круговой цилиндрической оболочки, одна сторона которой жестко закреплена, а другая свободна от напряжений

$$T_x = 0,\ S = 0 \text{ при } x = 0 \text{ (свободная сторона)}$$

$$U = 0,\ V = 0 \text{ при } x = L \text{ (заделанная сторона)}$$

Решения уравнений движения для замкнутой оболочки ищутся в виде плоской волны, гармоничной во времени

$$\begin{cases} U = U_n\left(\tilde{x}\right)\sin\left(n\theta\right)e^{i\omega t} \\ V = V_n\left(\tilde{x}\right)\cos\left(n\theta\right)e^{i\omega t} \\ W = W_n\left(\tilde{x}\right)\sin\left(n\theta\right)e^{i\omega t} \end{cases}$$

Получено дисперсионное уравнение относительно фазовой скорости волны

$$\Gamma_1 ch\left(\tfrac{nLp_n}{R}\right)ch\left(\tfrac{nLq_n}{R}\right) - \Gamma_2 sh\left(\tfrac{nLp_n}{R}\right)sh\left(\tfrac{nLq_n}{R}\right) - \Gamma_3 = 0$$

где

$$\left\{p_n, q_n\right\} = \sqrt{\frac{\gamma_1 \pm \sqrt{\gamma_1^2 - 4\gamma_0\gamma_2}}{2\gamma_2}}$$

$$\gamma_0 = \left(1 - \eta_n^2\right)\eta_n^2\left(1 - \alpha\eta_n^2 + m^2\right)$$

$$\gamma_1 = \eta_n^2\left[2 + m^2(5 - 4\alpha) - \eta_n^2(1 + \alpha)\right] =$$

$$= \eta_n^2\left\{(1 - \eta_n^2) + (1 - \alpha\eta_n^2) + m^2\left[4(1 - \alpha) + 1\right]\right\} > 0$$

$$\gamma_2 = \eta_n^2 - 4m^2(1 - \alpha)$$

$$m = n^{-1}$$

Данное дисперсионное уравнение численно решается в диапазоне частот $\sqrt{2\left(1 + \upsilon\right)}\big/n < \eta_n < 1$. На **Рис. 1** приводится график зависимостей частоты локализованных колебаний от L / R для значения коэффициента Пуассона $\nu = 0.2$. Расчёты показали, что безразмерная частота η_n уменьшается, достигая асимптоты при увеличении соотношения L / R. Асимптота достигается быстрее при более высоких волновых числах n. При разных волновых числах, существует минимальное значение L / R, меньше которого локализованные колебания (колебания с фазовой скоростью меньше чем скорость поперечной волны) не существуют.

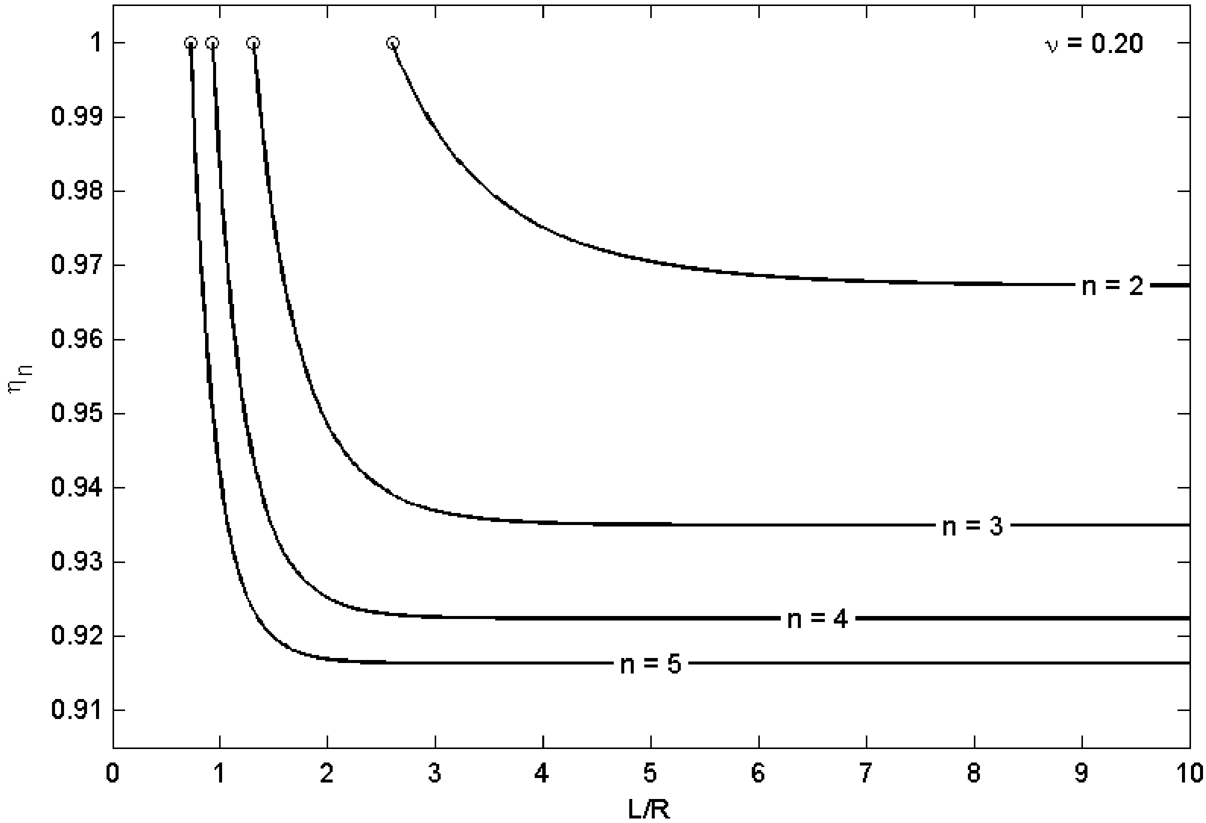

Рис.1 Безразмерная частота η_n в зав. от L/R, $\nu = 0.20$

В **Параграфе 3** рассмотрен предельный случай этой задачи, когда при стремлении радиуса цилиндрической оболочки к бесконечности, имеем задачу планарных колебаний пластинки, находящейся в плосконапряженном состояний, с аналогичными граничными условиями

$m \to 0$, $R \to \infty$ и $n \to \infty$, в то время как соотношение $n/R \to k$

Получено дисперсионное уравнение

$$F(\eta_n) = \left(8 - 4\eta_n^2 + \eta_n^4\right) ch\left(kL\sqrt{1-\eta_n^2}\right) ch\left(kL\sqrt{1-\alpha\eta_n^2}\right) - 4\left(2-\eta_n^2\right) +$$

$$- \frac{sh\left(kL\sqrt{1-\alpha\eta_n^2}\right) sh\left(kL\sqrt{1-\eta_n^2}\right)\left[8 - 4(2+\alpha)\eta_n^2 + (1+4\alpha)\eta_n^4\right]}{\sqrt{1-\eta_n^2}\sqrt{1-\alpha\eta_n^2}} = 0$$

и показано, что оно совпадает с дисперсионными уравнениями параграфа 1 Главы 2. Как следует из числового анализа, значение предельной относительной длины kL и частота колебаний пластинки увеличиваются с увеличением коэффициента Пуассона.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена трехмерная задача колебаний толстой плиты на жестком основании, при условиях Навье на её торцах. На основе метода динамических потенциалов, в точной постановке, получены дисперсионное уравнение относительно фазовых скоростей колебаний и соответствующие им собственные функции перемещений.

Данная задача решена также на основе метода Левинсона. Показано, что метод Левинсона является точным для этого класса задач. Показано, что дисперсионные уравнения и собственные функции, полученные на основе метода потенциалов и метода Левинсона, совпадают. Указан класс краевых задач, для которых метод Левинсона не приемлем.

На основе метода Левинсона, рассмотрена задача колебаний неоднородной плиты на жестком основании, когда коэффициенты характеризующие материал плиты, а именно коэффициенты Ламе и плотность материала, являются экспоненциальными функциями от толщины плиты. Определены предельные значения относительной толщины слоя, больше которой дисперсионное уравнение имеет единственное решение. Установлено, что с увеличением коэффициента Пуассона материала слоя, относительная предельная толщина увеличивается. Определены зависимости фазовой скорости упругих колебаний плиты, от параметра неоднородности слоя. Показано, что значение фазовой скорости при положительных значениях параметра неоднородности (значения модулей упругости и плотность материала на свободном краю меньше чем соответствующие значения на закрепленной поверхности), больше чем соответствующая скорость волны Рэлея для однородной плиты. С другой стороны, при отрицательных значениях параметра неоднородности (а именно когда значения модули упругости и плотность материала на свободном краю больше чем соответствующие значения на закрепленной поверхности), значение фазовой скорости меньше чем соответствующая скорость волны Рэлея.

В рамках двумерных задач магнитоупругости для идеально-проводящего упругого слоя, решены задачи магнитоупругих колебаний упругого слоя на жестком основании, находящемся во внешнем продольном магнитном поле. Рассмотрены два случая: 1) Направление магнитного поля параллельно распространению магнитоупругой волны. 2) Направление магнитного поля перпендикулярно направлению магнитоупругой волны. Получены соответствующие дисперсионные уравнения, относительно магнитоупругой частоты колебаний и установлено, что магнитное поле слабо влияет на фазовую скорость волны, при всех значениях параметра относительной толщины. Данное обстоятельство существенно отличается от задачи колебаний плиты со свободными краями, где для тонкой пластинки показано, существенное влияние внешнего магнитного поля на частоту магнитоупругих колебаний, в то время как для толстой плиты это влияние не существенно. Объяснение этого обстоятельства, а именно слабого влияния внешнего магнитного поля на частоту колебаний, кроется в том, что в задаче колебаний слоя на жестком оснований отсутствуют волны со скоростью меньшей чем скорость волны Рэлея, т.е. нет низкочастотных колебаний, частота которых соизмерима с частотами изгибных колебаний плит со свободными границами.

В рамках безмоментной теории цилиндрических оболочек, решена задача локализованных колебаний цилиндрической оболочки конечной длины, когда один из торцов оболочки жестко заделан, а другой – свободен от механических напряжений. Расчёты показали, что безразмерная частота уменьшается, достигая асимптоты при увеличении относительной длины оболочки. Асимптота достигается быстрее при более высоких волновых числах. Установлено существование минимального значения относительной длины, меньше которой локализованные колебания отсутствуют.

В задаче локализованных колебаний цилиндрической оболочки рассмотрен предельный случай, когда данная задача преобразовывается в плосконапряженную задачу планарных свободных колебаний пластинки конечной высоты, на жестком основании. Приводятся минимальные значения относительной высоты пластинки, меньше которых локализованные колебания не возникают.

ПУБЛИКАЦИИ

1. Вартанов А. Г. Решение задачи собственных колебаний конечной плиты с закрепленным основанием и метод Левинсона, Изв НАН Армении, Механика, 2010, т.63, №4, стр. 23-30.

2. Вартанов А. Г. Магнитоупругие колебания идеально-проводящего слоя в постоянном магнитном поле. Изв НАН Армении, Механика, 2010, т.63, №3, стр. 33-40

3. Вартанов А.Г., Казарян К. Б., Марзокка П., Миланезе А. Локализованные колебания в окрестности свободного края цилиндрической оболочки. Международная научно-техническая конференция «Архитектура и строительство – актуальные проблемы», 15-18 окт., 2008, Ереван – Джермук, стр. 89-94

4. Vardanov A., Ghazaryan K., Marzocca P., Lamb waves in functionally graded elastic plate, Mathematical Problems of Mechanics of Inhomogeneous Structures, Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine, L’viv, 2010, p.51-53.

5. Belubekyan M., Ghazaryan K., Vardanov A., Milanese A., Marzocca P., Localized Vibrations Near the Free Edge of a Cylindrical Shell, Proceedings of 49th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 2008, USA, pp.1874-1886

6. Ghazaryan K., Marzocca P., Vardanov A., Magnetoelastic vibrations of perfectly conductive elastic layer in an external longitudinal magnetic field. Topical problems of continuum mechanics, Proceedings of the second International Conference, 4-8 October, 2010, Dilijan, Armenia, V. 2, p.271-275.

ԱՄՓՈՓԱԳԻՐ

Դիտարկված է եռաչափ դրվածքով հաստ սալի սեփական տատանումների խնդիր, երբ նրա կողմնային հարթակների վրա բավարարված են Նավյեի պայմանները: Սալի մի եզրը կոշտ ամրակցված է իսկ մյուսը՝ ազատ է մեխանիկական լարումներից: Դինամիկական պոտենցիալների եղանակով, ճշգրիտ դրվածքով, ստացված է ալիքի փուլային արագության նկատմամբ դիսպերսիոն հավասարում: Ստացված են նաև սալի սեփական տատանումներին համապատասխանող սեփական ֆունկցիաները:

Նույն խնդիրը լուծված է առաջին անգամ Լեվինսոնի կողմից՝ ազատ եզրերով շերտի եռաչափ դրվածքով խնդիրը լուծելու համար առաջարկված մեթոդի կիրառմամբ: Արդյունքում ապացուցվել է, որ Լեվինսոնի մեթոդը ճշգրիտ է տվյալ դասի խնդիրների համար: Ցույց է տրված, որ այդ մեթոդի օգնությամբ ստացված դիսպերսիոն հավասարումը և տատանումների սեփական ֆունկցիաները համընկնում են դինամիկական պոտենցիալների միջոցով ստացված դիսպերսիոն հավասարումների և սեփական ֆունկցիաների հետ: Նշված է այն խնդիրների դասը, որոնց համար Լեվինսոնի եղանակը կիրառելի չէ:

Լեվինսոնի մեթոդով լուծված է կոշտ հիմքի վրա դրված անհամասեռ սալի սեփական տատանումների խնդիր, երբ սալի նյութի առաձգականության գործակիցները և խտությունը էքսպոնենցիալ ֆունկցիաներ են՝ կախված սալի հաստությունից: Որոշված են սալի սահմանային հաստության այն արժեքները, որոնցից բարձր դեպքում դիսպերսիոն հավասարումը ունենում է միակ լուծում: Ցույց է տրված, որ Պուասոնի գործակցի մեծացմանը զուգընթաց հետ մեկտեղ մեծանում է նաև հարաբերական սահմանային հաստությունը: Որոշված են ալիքի տարածման փուլային արագության կախվածությունները սալի անհամասեռության գործակցից: Ցույց է տրված, որ անհամասեռության գործակցի դրական արժեքների դեպքում (նյութի առաձգականության գործակիցների և խտության արժեքները սալի ազատ եզրում ավելի փոքր են, քան համապատասխան արժեքները՝ ամրակցված եզրում) ալիքի տարածման փուլային արագությունը ավելի մեծ է քան համասեռ սալում տարածվող Ռելեյի մակերևույթային ալիքի արագությունը: Անհամասեռության գործակցի բացասական արժեքների դեպքում (նյութի առաձգականության գործակիցների և խտության արժեքները սալի ազատ եզրում ավելի մեծ են, քան համապատասխան արժեքները՝ ամրակցված եզրում) ալիքի տարածման փուլային արագությունը փոքր է քան համասեռ սալում Ռելեյի մակերևույթային ալիքի տարածման արագությունից:

Մագնիսաառաձգականության տեսության շրջանակներում կոշտ հիմքի վրա դրված իդեալական հաղորդիչ շերտի համար լուծված է երկչափ դրվածքով երկու խնդիր. Առաջին խնդրում արտաքին երկայնական մագնիսական դաշտի ուղղությունը ուղղահայաց է ալիքի տարածման ուղղությանը: Խնդիրը լուծված է դինամիկական պոտենցիալների միջոցով, ստացված է ալիքի անչափ փուլային արագության նկատմամբ դիսպերսիոն հավասարում, որը մագնիսական դաշտի բացակայության դեպքում համընկնում է ամրակցված եզրով շերտի սեփական տատանումների խնդրի դիսպերսիոն հավասարման հետ: Երկրորդ խնդրում արտաքին երկայնական մագնիսական դաշտի ուղղությունը զուգահեռ է ալիքի տարածման ուղղությանը: Ստացված է դիսպերսիոն հավասարում ալիքի անչափ փուլային արագության նկատմամբ, որը նույնպես համընկնում է ամրակցված եզրով շերտի սեփական տատանումների խմդրի դիսպերսիոն հավասարման հետ: Հետազոտության արդյունքում պարզվել է, որ երկու դեպքում էլ մագնիսական դաշտի ազդեցությունն աննշան է ալիքի տարածման փուլային արագության վրա. շերտի համեմատական հաստության բոլոր արժեքների դեպքում, ինչով այս խնդիրը էապես տարբերվում է ազատ եզրերով շերտի մագնիսաառաձգական տատնումների խնդրից, որտեղ, բարակ սալերի համար, մագնիսական դաշտը էական ազդեցություն է ունենում փուլային արագության արժեքի վրա: Այս երևույթը բացատրվում է նրանով, որ ամրակցված եզրով շերտի խնդրում գոյություն չունեն Ռելեյի մակերևույթային ալիքներից փոքր արագություններ, այսինքն, չկան տատանման այնպիսի ցածր հաճախություններ, որոնք համեմատելի լինեն ազատ եզրերով շերտի տատանման հաճախությունների հետ:

Շրջանաձև գլանային թաղանթների անմոմենտ տեսության շրջանակներում լուծված է վերջավոր երկարության գլանային թաղանթի տեղայնացված տատանումների խնդիր, երբ թաղանթի մի կողմը կոշտ ամրակցված է իսկ մյուսը՝ ազատ է մեխանիկական լարումներից: Ստացված է դիսպերսիոն հավասարում ալիքի տարածման անչափ հաճախականության նկատմամբ: Թվային հետազոտության արդյունքում պարզվել է, որ անչափ հաճախականությունը փոքրանում է, հասնելով ասիմպտոտիկ արժեքի՝ թաղանթի հարաբերական երկարությունը մեծացնելիս: Ալիքային թվի մեծացման հետ հաճախությունը ավելի արագ է հասնում ասիմպտոտի: Ցույց է տրված, որ գոյություն ունեն թաղանթի հարաբերական երկարության այնպիսի մինիմալ արժեքներ, որոնցից ցածր տեղայնացված տատանումներ չեն առաջանում:

Շրջանաձև գլանային թաղանթի տեղայանցված տատանումների խնդրում դիտարկված է սահմանային դեպք, երբ գլանի շառավիղը անվերջի ձգտեցնելով ստանում ենք կոշտ հիմքի վրա դրված վերջավոր բարձրության շերտի հարթ լարվածային խնդիր: Արդյունքում ստացված է դիսպերսիոն հավասարում, որն իր տեսքով համընկնում է նույն եզրային պայմաններով շերտի հարթ դեֆորմացիոն խնդրի դիսպերսիոն հավասարման հետ: Բերված են շերտի հարաբերական բարձրության այն սահմանային արժեքները, որոնցից ցածր տեղայնացված տատանումներ չեն առաջանում:

CONCLUSION

ELASTIC AND MAGNETO-ELASTIC VIBRATION OF AN ISOTROPIC LAYER ON A RIGID SUBSTRATE

The 3D vibration problem of a thick layer on a rigid substrate is considered under Navier’s boundary conditions at its sides. In the exact statement based on the method of dynamic potentials the dispersion equation for the phase velocity and the corresponding displacement eigenfunctions are obtained. The same problem is also solved by means of Levinson’s method. It is shown that the Levinson’s method is accurate for this class of problems and that the dispersion equation and eigenfunctions derived from the both of methods are the same. A class of boundary value problems for which the method of Levinson is not acceptable is noticed.

In the framework of Levinson’s method, the vibration problem of an inhomogeneous plate on a rigid substrate is considered, when the coefficients characterizing the plate material, namely, the Lame coefficients and density of the material are the exponential functions of a plate thickness. The limiting values of the plate relative thickness, higher of which the dispersion equation has a unique solution are given. It was established that with increasing Poisson's ratio of the material, the relative thickness of the plate is increasing too. The dependence of the phase velocity of elastic plate vibrations from the inhomogeneity parameter is given.

It is shown that the value of the phase velocity for positive values of inhomogeneity parameter (when the values elastic moduli and density of the material on the free edge are less than the corresponding values at a fixed edge), greater than the corresponding value of the homogeneous plate Rayleigh surface wave velocity. On the other hand, for negative values of the inhomogeneity parameter (when the values of elastic moduli and density of the material on the free edge are greater than the corresponding values at a fixed edge), the value of the phase velocity is less than the corresponding value of the Rayleigh surface wave velocity.

In the framework of the theory of magnetoelasticity the 2D problem of magnetoelastic vibrations a perfect conductive elastic layer on a rigid substrate which is placed in an external longitudinal magnetic field is considered. The two cases of magnetic field directions are considered: 1)

The direction of the magnetic field is parallel to the magnetoelastic wave direction. 2) The direction of the magnetic field is perpendicular to the direction of the magnetoelastic wave. The corresponding dispersion equation, with respect to the magnetoelastic vibration frequency is obtained. It is shown that the magnetic field has a small effect on the phase velocity of the wave for all values of relative thickness. This circumstance is very different from the results of the problem of vibrations of plates with free edges, where the external magnetic field has a significant influence on the frequency of vibration of thin plate, while for the thick plate, this influence is not significant. The explanation of this fact, namely, the weak influence of the external magnetic field on the vibration frequency lies in the fact that in the problem of vibrations of the plate on a rigid substrate there are no waves which phase velocity lower than the velocity of Rayleigh surface waves, i.e. there are no low-frequency vibrations, whose frequency is comparable with the frequencies of flexural vibrations of plates.

Within the membrane theory of cylindrical shells, the problem of localized vibrations of a cylindrical shell of finite length is solved, when one end of the shell is rigidly clamped and the other is free from mechanical stresses. Numerical calculations showed that the dimensionless frequency decreases, reaching asymptote with increasing of the relative length of the shell. The asymptote is reached faster at higher wave numbers. The existence of a minimum value of relative length, below which the localized vibrations are absent, is established.

In the problem of localized vibrations of a cylindrical shell the limiting case is considered, when the problem under consideration is converted into a plane planar problem of free vibration of the finite height plate on a rigid substrate. The minimum values of the relative height of the plate, lower of which the localized vibrations do not arise are established.