ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ԱԼՎԱՋՅԱՆ ՇՈՒՇԱՆԻԿ ԻՍԿՅԱՆԴԱՐԻ

ՄԻԿՐՈՊՈԼՅԱՐ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՁՈՂԵՐԻ ՍՏԱՏԻԿԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՄԱՆ ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄՈԴԵԼՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄ և ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆ

Ա 02.04 "Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա" մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան 2012

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН РА

АЛВАДЖЯН ШУШАНИК ИСКЯНДАРОВНА

ПОСТРОЕНИЕ ПРИКЛАДНЫХ МОДЕЛЕЙ СТАТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ОРТОТРОПНЫХ СТЕРЖНЕЙ И ИХ СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 "Механика деформируемого твердого тела"

Ереван 2012

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում:

Գիտական ղեկավար՝ ՀՀ ԳԱԱ թղթ.- անդամ, Ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր Ս.Հ.Սարգսյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս, ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր Գ. Ե. Բաղդասարյան
ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր Ռ. Ս. Գևորգյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Հայաստանի պետական ճարտարագիտական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2012թ. դեկտեմբերի 21-ին՝ ժամը 14^{00}-ին ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում գործող Մեխանիկայի- 047 մասնագիտական խորհրդում (հասցեն՝ 0019 ք. Երևան, Մ. Բաղրամյան պող., 24/2) avsah@mechins.sci.am

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 19 նոյեմբերի 2012թ.

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար , ֆ.մ.գ.դ. Ա.Վ. Սահակյան

Тема диссертации утверждена в Институте механики НАН РА

Научный руководитель: член-корр. НАН РА, д.ф.м.н., профессор С.О.Саркисян

Официальные оппоненты: акад. НАН РА, д.ф.м.н., профессор Г.Е.Багдасарян
д.ф.м.н., профессор Р. С. Геворкян

Ведущая организация: Государственный инженерный университет Армении

Защита состоится 21-ого декабря 2012г. в 14^{00} часов на заседании Специализированного совета 047 в Институте механики НАН РА (адрес: 0019 г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24/2) avsah@mechins.sci.am

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА.

Автореферат разослан 19 ноября 2012г.

Ученый секретарь
Специализированного совета, д.ф.м.н. А.В. Саакян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Наблюдающееся в последние годы интенсивное внедрение новых материалов в современное машино- и приборостроение вызвало быстрый рост интереса к изучению зависимости их физико-механических свойств от внутренней структуры. Особенно актуальными они стали в последние два десятилетия в связи с развитием нанотехналогий, когда появились возможности управления структурой материала на уровне атомных или молекулярных масштабов. Для описания деформационных свойств материалов с различной внутренней структурой континуальными моделями, одним из основных теорий является микрополярная (моментная, несимметричная) теория упругости, основы которой заложены в монографии: E. Cosserat, F. Cosserat-1909. К дальнейшему развитию этой теории посвящены работы: А.А.Адамова, Э.Л.Аэро, Г.Е.Багдасаряна, А.Г.Багдоева, П.А.Белова, В.В.Болотина, А.Н.Булыгина, Г.Л.Бровко, Ю.М.Григорьева, Е.Ф.Грековой, В.А.Еремеева, В.И.Ерофеева, П.А.Жилина, Е.А.Ивановой, А.А.Ильюшина, В.В.Корепанова, А.М.Кривцова, Е.В.Кувшинского, М.А.Кулеша, И.А.Кунина, С.А.Лурье, Л.И.Маневича, В.П.Матвеенко, Н.Ф.Морозова, С.А.Назарова, И.С.Павлова, В.А.Пальмова, В.Е.Панина, Б.Е.Победри, А.И.Потапова, Г.Н.Савина, В.М.Садовского, Л.И.Седова, И.Ю.Смолина, П.В.Трусова, И.Н.Шардакова, H.Altenbach, R. de Borst, J.Dyszlewicz, A.C.Eringen, S.Forest, R.D.Gauther, D.Iesen, W.E.Jahsman, S.Kaliski, S.Koiter, R.S.Lakes, G.A.Maugin, A.V.Metrikine, R.D.Mindlin, D.Natroshvili, W.Nowacki, Ostoja-Strarzewski и др.

В связи с всесторонним применением упругих тонких стержней, пластин и оболочек в различных областях техники, в том числе и в нано-микро инженерии, актуально построение моделей микрополярных упругих тонких стержней, пластин и оболочек. Этой проблеме посвящены работы: Д.В.Бабича, Г.А.Геворкяна, П.А.Жилина, В.А.Пальмова, Л.И.Шкутина, H.Altenbach, A.C.Eringen, A.E.Green, P.M.Naghdi, E.Reissner и в дальнейшем в работах С.А.Амбарцумяна, М.В.Белубекяна, Г.Л.Бровко, Г.А.Ванина, В.А.Еремеева, Л.М.Зубова, Л.А.Мовсисяна, M.Birsan, W.Pietraszkiewicz, M.B.Rubin, P.A.Neff, F.Y.Wang и др.

В Национальной Академии наук Армении проблему о построении теории и изучение задач статики и динамики микрополярных упругих стержней, пластин и оболочек впервые поставил и изучил С.А.Амбарцумян.

Построение прикладных теорий упругих стержней, пластин и оболочек осуществляется тремя основными методами: методом гипотез; методом разложения по толщинной координате в степенные ряды или по полиномам Лежандра; асимптотическим методом.

Отметим, что общие прикладные модели стержней, пластин и оболочек по классической теории упругости, в том числе и уточненные, построены на основе известных гипотез Бернулли, Кирхгофа-Лява, Амбарцумяна, Рейсснера, Тимошенко.

Использование метода разложения по толщинной координате для построения моделей упругих стержней, пластин и оболочек берет свое начало в работах Cauchy, Poisson и далее развито в работах Н.А.Кильчевского, И.Т.Селезова, И.Н.Векуа и др. В микрополярной теории упругости для построения модели микрополярных пластин этот метод развивался в работе К.А.Жамакочян, С.О.Саркисяна и Л.И.Маневича (2012).

Асимптотические методы в теории упругих пластин и оболочек были разработаны в известных работах А.Л.Гольденвейзера, И.И.Воровича, K.O.Friedrichs, A.E.Green, E.Reissner и далее эти методы существенно были развиты в работах

Л.А.Агаловяна, В.Л.Бердичевского, М.И.Гусейн-Заде, Ю.Д.Каплунова, Л.Ю.Коссовича, С.А.Назарова, Е.В.Нольде, Н.Н.Рогачевой, С.О.Саркисяна, Ю.А.Устинова, P.G.Giarlet и др.

В теории упругих пластин и оболочек, когда имеются неклассические граничные условия, асимптотические методы развиты в работах Л.А.Агаловяна, его учеников и коллег: М.Л.Агаловяна, Р.С.Геворкяна, Л.Г.Гулгазарян, Л.С.Саркисян, А.М.Хачатряна и др.

Регулярные асимптотические методы в теории упругих анизотропных пластин и оболочек развиты в работах В.С.Саркисяна.

В работах А.Л.Гольденвейзера (1976), С.А.Амбарцумяна, Г.Е.Багдасаряна и М.В.Белубекяна (1978), С.О.Саркисяна (1992), соответственно в теории упругих оболочек, магнитоупругости тонких пластин и оболочек развит оригинальный метод, а именно, развит метод гипотез, имеющий асимптотическое подтверждение (т.е. сначала асимптотическим методом изучается решение трехмерной краевой задачи в тонких областях и далее с использованием качественной стороны поведения этого решения формулируются гипотезы).

Асимптотический метод в теории микрополярных тонких пластин впервые был использован в работе В.А.Дудникова и С.А.Назарова (1982).

Асимптотический метод в проблеме построения теорий микрополярных упругих стержней, пластин и оболочек существенно развит благодаря работам С.О.Саркисяна и его учеников А.А.Атояна, Г.С.Айрапетян, С.А.Варданян, Л.М.Маргарян, М.Н.Мутафян, Г.С.Никогосяна, А.А.Саркисян, А.Ж.Фарманян и др.

Основная проблема общей теории микрополярных упругих пластин и оболочек (стержней) заключается в приближенном, но адекватном сведении трехмерной (двумерной) задачи микрополярной теории упругости к двумерной (одномерной) краевой задаче. С этой точки зрения, а также, с точки зрения инженерного применения, весьма эффективен подход С.О.Саркисяна, суть которого состоит в следующем: имея введу качественные стороны результатов асимптотического метода интегрирования трехмерной (двумерной) статической краевой задачи микрополярной теории упругости в тонкой области пластинки или оболочки (прямоугольника), формулировать соответствующие гипотезы (достаточно общего характера), которые дают возможность из трехмерной (двумерной) теории перейти к двумерной (одномерной) теории микрополярных пластин или оболочек (стержней).

Актуально на основе этой идеи и подхода построение прикладных моделей статической деформации микрополярных упругих ортотропных однослойных и многослойных тонких стержней, пластин и оболочек.

Настоящая диссертационная работа посвящена построению математической модели микрополярных упругих ортотропных стержней на основе метода гипотез, который базируется на качественных сторонах решения сингулярно - возмущенной с малым параметром плоской краевой задачи теории микрополярной упругости в тонкой прямоугольной области, полученном при применении асимптотического метода интегрирования, а также, на основе построенной математической модели микрополярных ортотропных упругих стержней, изучению различных прикладных задач изгиба и статической устойчивости стержни и выявлению специфических свойств микрополярности материала стержня.

Целью диссертационной работы является:

- обобщение гипотез С.О.Саркисяна и построение математической модели микрополярных упругих ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений;
- построение частных моделей стесненного вращения и “с малой сдвиговой жесткостью” микрополярных упругих ортотропных стержней; моделей с учетом и без учета поперечных сдвиговых деформаций;
- установление уравнения баланса энергии и построение общего вариационного функционала для прикладной модели микрополярных упругих ортотропных стержней;
- асимптотическим методом изучение поведения решений двумерной краевой задачи микрополярной теории упругости в тонкой прямоугольной области. Построение внутреннего итерационного процесса и погранслоя; изучение свойств погранслойного решения; сращивание внутреннего и погранслойного итерационных процессов с целью разделения двумерных граничных условий на кромках прямоугольника между внутренним итерационным процессом и погранслоем; построение прикладной - асимптотической модели микрополярных упругих ортотропных стержней;
- обоснование гипотез принятых при построении прикладной модели микрополярных упругих ортотропных стержней;
- на основе построенных прикладных моделей микрополярных упругих ортотропных стержней изучение различных задач статической деформации стержней при различных условиях нагружения и условий закрепления;
- на основе численного анализа установление основных специфических свойств (с точки зрения жесткости и прочности) ортотропных стержней из микрополярных упругих материалов;
- поставление и изучение задачи о статической устойчивости центрально сжатого стержня из микрополчрного упругого ортотропного материала; установление специфических свойств касающихся устойчивого характера стержня из микрополярного упругого ортотропного материала.

Научная новизна. В диссертационной работе

- на основе метода гипотез (обобщением гипотез С.О.Саркисяна) построена прикладная -одномерная модель микрополярных упругих ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений с полным учетом деформаций поперечных сдвигов;
- построены частные модели стесненного вращения и “с малой сдвиговой жесткостью” микрополярных упругих ортотропных стержней; модели с учетом и без учета поперечных сдвиговых деформаций;
- асимптотическим методом изучена краевая задача плоской микрополярной теории упругости для ортотропного материала в тонкой прямоугольной области; построена внутренняя задача и погранслой; установлены условия затухания погранслойного решения; изучена задача сращивания внутреннего и погранслойного решения; разделены двумерные граничные условия заданные на кромках прямоугольника между внутренней и погранслойной задачами;
- построена прикладная - асимптотическая (одномерная) модель микрополярных упругих ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений;

обоснованны гипотезы построения прикладной модели микрополярных упругих ортотропных стержней;

- изучены различные задачи изгиба микрополярных упругих ортотропных стержней (при различных видах нагружения и условий закрепления); получены точные решения изученных задач в виде определенных формул;
- на основе численного анализа выяснены основные специфические свойства деформационных характеристик микрополярного упругого ортотропного материала; установлены свойства о высоких жесткостных и прочностных свойствах микрополярного упругого ортотропного материала стержней;
- изучена задача статической устойчивости центрально сжатого стержня из микрополярного упругого ортотропного материала (граничные условия выражают условия шарнирного операния), получена формула для критической нагрузки; на основе численного анализа установлена эффективность микрополярного упругого ортотропного материала с точки зрения устойчивости конструкций.

Практическая ценность работы. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы при изучении вопросов прочности и устойчивости стержней из микрополярного упругого ортотропного материала; в экспериментах для определения физических констант микрополярно - упругих материалов.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на:

- Международной школе-конференции молодых ученых, Механика 2009 (Агавнадзор 2009, Армения)
- II международной конференции "Актуальные проблемы механики сплошной среды" (Дилижан 2010, Армения)
- научных конференциях профессорско-преподавательского состава Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна (Гюмри 2009, 2010, 2011, Армения)
- 51-й международной конференции "Актуальные проблемы прочности" (Харьков 2011, Украина)
- 13th International Conference of Mesomechanics (Vicenza 2011, Italy)
- Всероссийской школы-семинара "Математическое моделирование и биомеханика в современном университете" (Ростов-на-Дону 2012)
- Международной конференции "Актуальные проблемы механики сплошной среды", посвященной столетию академика НАН Армении Н. Х. Арутюняна (Цахкадзор 2012, Армения)
- семинаре "Механика тонкостенных систем" института механики НАН Армении (Ереван, 23 октября 2012)
- общем семинаре Института механики НАН Армении (Ереван, 8 ноября 2012)

Публикации. По теме диссертации опубликованы 8 научных работ, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 206 наименований. Общий объем работы составляет 102 страницы печатного текста, включая 21 таблицу и 2 рисунка.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулированы цели и задачи исследования, дан краткий обзор работ отечественных и зарубежных авторов, связанных с рассмотренными в диссертации вопросами. Изложена теоретическая и практическая ценность работы, дано краткое описание работы по главам.

Глава первая посвящена построению общей модели микрополярных ортотропных упругих стержней с независимыми полями перемещений и вращений на основе метода гипотез. Построены также частные модели: а) со стесненным вращением, б) “с малой сдвиговой жесткостью” микрополярных упругих ортотропных стержней, как с учетом, так и без учета поперечных сдвиговых деформаций.

В § 1.1 приведена постановка граничной задачи двухмерной микрополярной ортотропной теории с независимыми полями перемещений и вращений для прямоугольника постоянной высоты $2h$ и длины a $\left(0 \le x_1 \le a;\ -h \le x_2 \le h\right)$:

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}=0,\ \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}=0,\quad \frac{\partial\mu_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{23}}{\partial x_2}+\sigma_{12}-\sigma_{21}=0. \tag{1}$$

Физические соотношения

$$\sigma_{11}=A_{11}\varepsilon_{11}+A_{12}\varepsilon_{22},\quad \sigma_{22}=A_{12}\varepsilon_{11}+A_{22}\varepsilon_{22},$$

$$\sigma_{12}=A_{77}\varepsilon_{12}+A_{78}\varepsilon_{21},\quad \sigma_{21}=A_{78}\varepsilon_{12}+A_{88}\varepsilon_{21},$$

$$\mu_{13}=B_{66}\chi_{13},\qquad \mu_{23}=B_{44}\chi_{23}.$$

Либо в обратной форме

$$\varepsilon_{11}=\frac{A_{22}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sigma_{11}-\frac{A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sigma_{22},\ \varepsilon_{22}=-\frac{A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sigma_{11}+\frac{A_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sigma_{22},$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{A_{88}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sigma_{12}-\frac{A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sigma_{21},\ \varepsilon_{21}=-\frac{A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sigma_{12}+\frac{A_{77}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sigma_{21}, \tag{2}$$

$$\chi_{13}=\frac{1}{B_{66}}\mu_{13},\ \chi_{23}=\frac{1}{B_{44}}\mu_{23}.$$

Геометрические соотношения

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\ \varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2},\quad \varepsilon_{12}=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\omega_3,\ \varepsilon_{21}=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\omega_3,\quad \chi_{13}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_1},\ \chi_{23}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_2}. \tag{3}$$

Здесь, $\sigma_{11},\sigma_{12},\sigma_{21},\sigma_{22}$ - силовые напряжения; μ_{13}, μ_{23}- моментные напряжения, $\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{12},\varepsilon_{21}$-деформации; χ_{13}, χ_{23}- изгиб-кручения; u_1,u_2 - линейные перемещения, ω_3-независимый поворот точек прямоугольника вокруг оси x_3, A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{77}, A_{78}, A_{88}, B_{66}, B_{44}-упругие константы материала рассматриваемого ортотропного тела.

Будем рассматривать антисимметричную по x_2 задачу (т. е. задачу изгиба). Для этого, на лицевых линиях прямоугольника $x_2=\pm h$ считаются заданными силовые и моментные граничные условия следующего вида:

$$\sigma_{21}=\frac{1}{2}\left(X^+-X^-\right),\sigma_{22}=\pm\frac{1}{2}\left(Y^++Y^-\right),\ \mu_{23}=\pm\frac{1}{2}\left(M^++M^-\right). \tag{4}$$

На кромках $(x_1 = 0, x_1 = a)$ прямоугольника примем нижеследующие варианты граничных условий плоской задачи микрополярной теории упругости:

1) $\sigma_{11} = \varphi_1(x_2),\ \sigma_{12} = \varphi_2(x_2),\ \mu_{13} = \varphi_3(x_2)$, (задача 1) (5)

2) $\sigma_{11} = \varphi_1(x_2),\ \mathrm{u}_2 = 0,\ \mu_{13} = \varphi_3(x_2)$, (задача 2) (6)

3) $u_1 = 0,\quad u_2 = 0,\quad \omega_3 = 0$. (задача 3) (7)

Составлена таблица с помощью которой из микрополярного ортотроного случая материала автоматически можно перейти к микрополярному изотропному случаю. Основные уравнения плоской задачи микрополярной изотропной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений будут: для уравнений равновесия и геометрических соотношений получатся соответственно (1) и (3), а физические соотношения выражаются так:

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}), \qquad \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}), \\
\varepsilon_{12} = \frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{12} - \frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{21},\ \varepsilon_{21} = \frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{21} - \frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{12}, \\
\chi_{13} = \frac{1}{B}\mu_{13}, \qquad \chi_{23} = \frac{1}{B}\mu_{23}.
\end{gathered} \tag{8}
$$

где E -модуль Юнга, ν -коэффициент Пуассона, μ - классический модуль сдвига, α - микрополярный модуль сдвига, B -упругий модуль вращения.

Когда между упругими константами имеют место равенства $A_{77} = A_{88} = A_{78} = A$ (и $B_{44} = 0$, $B_{66} = 0$), из системы уравнений и граничных условий (1)-(7) микрополярной теории, получается система уравнений и граничных условий плоской задачи классической теории упругости для ортотропного материала:

уравнения равновесия

$$
\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} = 0,\ \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} = 0, \tag{9}
$$

физические соотношения

$$
\begin{gathered}
\sigma_{11} = A_{11}\varepsilon_{11} + A_{12}\varepsilon_{22},\ \sigma_{22} = A_{12}\varepsilon_{11} + A_{22}\varepsilon_{22}, \\
\sigma_{12} = \sigma_{21} = A\gamma_{12} = A\gamma_{21},
\end{gathered} \tag{10}
$$

геометрические соотношения

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1},\ \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \\
\gamma_{21} = \gamma_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.
\end{gathered} \tag{11}
$$

Показано, что двумерные уравнения (1)-(3) и граничные условия (4) и (5) (или (6), (7)) микрополярной ортотропной плоской теории упругости можно получить с помощью вариационного принципа типа Рейсснера, функционал которого имеет вид:

$$
I=\iint\limits_{(s)}\left(W(\varepsilon_{ij},\chi_{i3})-\sigma_{11}\left(\varepsilon_{11}-\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)-\sigma_{22}\left(\varepsilon_{22}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)-\sigma_{12}\left(\varepsilon_{12}-\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\omega_3\right)\right)-\right.
$$

$$
\left.-\sigma_{21}\left(\varepsilon_{21}-\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\omega_3\right)\right)-\mu_{13}\left(\chi_{13}-\frac{\partial \omega_3}{\partial x_1}\right)-\mu_{23}\left(\chi_{23}-\frac{\partial \omega_3}{\partial x_2}\right)\right)ds-\int\limits_0^a\left(Xu_1+Yu_2+\right. \tag{12}
$$

$$
\left.+M\omega_3\right)\Big|_{x_2=+h}dx_1+\int\limits_0^a\left(Xu_1-Yu_2-M\omega_3\right)\Big|_{x_2=-h}dx_1+\int\limits_{-h}^{h_1}\left(\varphi_1u_1+\varphi_3\omega_3\right)\Big|_{x_1=0}dx_2-\int\limits_{-h}^{h_1}\left(\varphi_1u_1+\varphi_3\omega_3\right)\Big|_{x_1=a}dx_2+
$$

$$
+\int\limits_{-h}^{h_2}\varphi_2u_2\Big|_{x_1=0}dx_2-\int\limits_{-h}^{h_2}\varphi_2u_2\Big|_{x_1=a}dx_2+\int\limits_{h_2}^{h}\left(\sigma_{12}\left(u_2-u_2^*\right)\right)\Big|_{x_1=0}dx_2+\int\limits_{h_1}^{h}\left(\sigma_{11}\left(u_1-u_1^*\right)+\mu_{13}\left(\omega_3-\omega_3^*\right)\right)\Big|_{x_1=0}dx_2-
$$

$$
-\int\limits_{h_1}^{h}\left(\sigma_{11}\left(u_1-u_1^*\right)+\mu_{13}\left(\omega_3-\omega_3^*\right)\right)\Big|_{x_1=a}dx_2-\int\limits_{h_2}^{h}\left(\sigma_{12}\left(u_2-u_2^*\right)\right)\Big|_{x_1=a}dx_2,
$$

где

$$
\frac{1}{2}\left(X^+-X^-\right)=X,\ \ \frac{1}{2}\left(Y^++Y^-\right)=Y,\ \ \frac{1}{2}\left(M^++M^-\right)=M. \tag{13}
$$

$$
W=\frac{A_{11}}{2}\varepsilon_{11}^2+A_{12}\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}+\frac{A_{22}}{2}\varepsilon_{22}^2+\frac{A_{77}}{2}\varepsilon_{12}^2+A_{78}\varepsilon_{12}\varepsilon_{21}+\frac{A_{88}}{2}\varepsilon_{21}^2+\frac{B_{66}}{2}\chi_{13}^2+\frac{B_{44}}{2}\chi_{23}^2. \tag{14}
$$

плотность потенциальной энергии деформации микрополярного упругого тела а $h_1,h_2\in[-h,h]$ и независимы друг от друга (в случае граничных условий (5), $h_1=h_2=h$; в случае - (6), $h_1=h,\ h_2=-h$; в случае - (7), $h_1=h_2=-h$).

На основе соотношений (2), (3) показано, что микрополярная ортотропная теория упругости со стесненным вращением будет иметь место, когда следующие комбинации упругих постоянных $\dfrac{A_{88}+A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}$ и $\dfrac{A_{77}+A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}$ имеют весьма малые значения (стремятся к нулю). Тогда получится основное условие теории стесненного вращения:

$$
2\omega_3=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\ . \tag{15}
$$

Основные уравнения плоской задачи микрополярной ортотропной теории упругости со стесненным вращением будут: уравнения равновесия – это система уравнений (1), физические соотношения будут:

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_{11}=\frac{A_{22}}{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2}\sigma_{11}-\frac{A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2}\sigma_{22},\quad \varepsilon_{22}=-\frac{A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2}\sigma_{11}+\frac{A_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2}\sigma_{22},\\
\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21}=\frac{A_{88}-A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^2}\sigma_{12}+\frac{A_{77}-A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^2}\sigma_{21},\quad \chi_{13}=\frac{1}{B_{66}}\mu_{13},\quad \chi_{23}=\frac{1}{B_{44}}\mu_{23};
\end{gathered} \tag{16}
$$

для геометрических соотношений получим:

$$
\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\ \varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2},\ \varepsilon_{12}+\varepsilon_{21}=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2},\ \omega_3=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right),\ \chi_{13}=\frac{\partial \omega_3}{\partial x_1},\ \chi_{23}=\frac{\partial \omega_3}{\partial x_2}. \tag{17}
$$

Другой частный случай, когда коэффициенты $A_{77}-A_{78},\ A_{78}-A_{88}$ являются бесконечно малыми, а $A_{77}+A_{78},\ A_{78}+A_{88}$ конечными величинами. В этом случае из двумерных уравнений (1)-(3) микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений будут отделяться “моментная” и “силовая” части задачи (т.е. получатся двумерные уравнения частной микрополярной теории “с малой сдвиговой жесткостью” для ортотропного материала):

“Моментная” часть задачи:

уравнение равновесия

$$\frac{\partial \mu_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{23}}{\partial x_2} = 0, \tag{18}$$

физические соотношения

$$\mu_{13} = B_{66}\chi_{13}, \quad \mu_{23} = B_{44}\chi_{23}, \tag{19}$$

геометрические соотношения

$$\chi_{13} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1}, \qquad \chi_{23} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2}, \tag{20}$$

граничные условия

$$\mu_{23} = \pm\frac{1}{2}\left(M^+ + M^-\right), \text{ при } x_2 = \pm h \tag{21}$$

$$\mu_{13} = \varphi_3(x_2), \text{при } x_1 = 0, x_1 = a \ \text{(в случаях граничных задач 1, 2)}, \tag{22}$$

$$\omega_3 = 0, \text{при } x_1 = 0, x_1 = a \ \text{(в случае задаче 3)}. \tag{23}$$

“Силовая” часть задачи:

уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0, \tag{24}$$

физические соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= A_{11}\varepsilon_{11} + A_{12}\varepsilon_{22}, \quad \sigma_{22} = A_{12}\varepsilon_{11} + A_{22}\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{12} &= A_{77}\varepsilon_{12} + A_{78}\varepsilon_{21}, \quad \sigma_{21} = A_{78}\varepsilon_{12} + A_{88}\varepsilon_{21}. \end{aligned} \tag{25}$$

геометрические соотношения

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \ \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \ \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \omega_3, \ \varepsilon_{21} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_3. \tag{26}$$

граничные условия

$$\sigma_{21} = \frac{1}{2}\left(X^+ - X^-\right), \qquad \sigma_{22} = \pm\frac{1}{2}\left(Y^+ + Y^-\right), \ \text{при } x_2 = \pm h, \tag{27}$$

$$\sigma_{11} = \varphi_1(x_2), \qquad \sigma_{12} = \varphi_2(x_2), \quad \text{при } x_1 = 0, x_1 = a \ \text{(в случае задаче 1)} \tag{28}$$

$$\sigma_{11} = \varphi_1(x_2), \ \ u_2 = 0, \ \text{при } x_1 = 0, x_1 = a \ \text{(в случае задаче 2)}, \tag{29}$$

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \text{при } x_1 = 0, x_1 = a \ \text{(в случае задаче 3)}. \tag{30}$$

Здесь следует отметить, что в том частном случае, когда граничная задача (18)-(23) “моментной” части имеет нулевое решение (в случае однородных граничных условий (21)-(23)), то все таки, “силовая” часть задачи (24)-(30) не будет совпадать с классической плоской теорией упругости для ортотропного материала.

В § 1.2 для построения прикладной модели микрополярных ортотропных упругих стержней с независимыми полями перемещений и вращений в основу принимаются следующие гипотезы (которые представляют собой для микрополярного изотропного случая гипотезы С.О.Саркисяна (2011) обобщенные на случай микрополярного ортотропного материала):

а) нормальный элемент, первоначально перпендикулярный к оси симметрии прямоугольника x_1, остается после деформации прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной оси, свободно вращается на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины. Вследствие этого имеет место линейный закон изменения перемещений u_1, u_2 и свободного поворота ω_3 по толщине прямоугольника следующего характера:

$$u_2 = w(x_1), \quad u_1 = x_2\psi(x_1), \tag{31}$$

$$\omega_3 = \Omega_3(x_1) \tag{32}$$

где w - прогиб стержня; Ω_3 - угол свободного поворота, а ψ - полный угол поворота нормального элемента.

Для перемещений гипотеза (31) представляет собой известную классическую гипотезу Тимошенко для упругих стержней (1921), поэтому гипотезу (31), (32) полностью, как в работе С.О.Саркисяна (2011), будем называть обобщенной кинематической гипотезой Тимошенко в случае микрополярных стержней.

б) при определении деформаций, изгиба - кручений, силовых и моментных напряжений, для силового напряжения σ_{21} сначала принимается

$$\sigma_{21} = \overset{0}{\sigma}_{21}(x_1). \tag{33}$$

После определения указанных величин, окончательное значение σ_{21} определяется как сумму значения (33) и результата интегрирования первого уравнения равновесия из (1), для которого требуется условие, что усредненное по высоте прямоугольника величина была равна нулю.

в) σ_{22} силовое напряжение пренебрегается относительно σ_{11} в первом уравнении из (2) для деформации ε_{11}.

Забегая вперед, отметим, что во второй главе диссертации при помощи асимптотического метода интегрирования граничной задачи (1)-(7) в тонком прямоугольнике, будут обоснованы принятые выше гипотезы.

В § 1.3 с помощью гипотез а) - в) найдены все величины двумерной задачи микрополярной ортотропной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений (компоненты тензоров деформаций и изгиба – кручений; компоненты тензоров силовых и моментных напряжений):

$$\varepsilon_{11} = x_2 K_{11}, \quad \varepsilon_{22} = 0, \quad \varepsilon_{12} = \Gamma_{12}, \quad \varepsilon_{21} = \Gamma_{21}, \quad \chi_{13} = k_{13}, \quad \chi_{23} = 0, \tag{34}$$

$$\sigma_{11} = x_2 \overset{1}{\sigma}_{11}(x_1), \quad \overset{1}{\sigma}_{11} = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} K_{11}, \quad \sigma_{12} = A_{77}\Gamma_{12} + A_{78}\Gamma_{21},$$

$$\sigma_{21} = \overset{0}{\sigma}_{21}(x_1) + \left(\frac{h^2}{6} - \frac{x_2^2}{2}\right)\frac{d\overset{1}{\sigma}_{11}(x_1)}{dx_1}, \qquad \sigma_{22} = x_2\frac{Y^+ + Y^-}{2h}, \tag{35}$$

$$\mu_{13} = B_{66}\kappa_{13}, \quad \mu_{23} = x_2\frac{M^+ + M^-}{2h}. \tag{36}$$

В § 1.4 рассматривается задача сведения двухмерной задачи несимметричной ортотропной теории упругости для тонкого прямоугольника к прикладной одномерной. Для этого вместо компонентов тензоров силовых и моментных напряжений вводится статически эквивалентные им интегральные по высоте прямоугольника характеристики - усилия (N_{12}, N_{21}) и моменты (M_{11}, L_{13}):

$$N_{12} = \int_{-h}^{h} \sigma_{12} dx_2, \qquad N_{21} = \int_{-h}^{h} \sigma_{21} dx_2,$$
$$M_{11} = \int_{-h}^{h} x_2 \sigma_{11} dx_2, \qquad L_{13} = \int_{-h}^{h} \mu_{13} dx_2. \tag{37}$$

Одномерные уравнения микрополярных ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений, в которых полностью учитываются поперечные сдвиговые деформации, будут:

уравнения равновесия

$$\frac{dN_{12}}{dx_1} = -(Y^+ + Y^-), N_{21} - \frac{dM_{11}}{dx_1} = h(X^+ - X^-),$$
$$\frac{dL_{13}}{dx_1} + N_{12} - N_{21} = -(M^+ + M^-), \tag{38}$$

соотношения упругости

$$M_{11} = D_{11} K_{11}, \qquad L_{13} = d_{66} k_{13},$$
$$N_{12} = c_{77}\Gamma_{12} + c_{78}\Gamma_{21}, \qquad N_{21} = c_{78}\Gamma_{12} + c_{88}\Gamma_{21}. \tag{39}$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{12} = \frac{dw}{dx_1} - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \psi + \Omega_3,$$
$$K_{11} = \frac{d\psi}{dx_1}, \qquad \kappa_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}, \tag{40}$$

где Γ_{12}, Γ_{21} -сдвиговые деформации; K_{11}, k_{13} - изгибание средней линии стержня от силовых и моментных напряжений соответственно; $D_{11}, c_{77}, c_{88}, c_{78}, d_{66}$ - жесткостные характеристики стержня:

$$D_{11} = \frac{2h^3}{3} \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}{}^2}{A_{22}}, \;\; c_{77} = 2hA_{77}, \;\; c_{88} = 2hA_{88}, \;\; c_{78} = 2hA_{78}, \;\; d_{66} = 2hB_{66}. \tag{41}$$

Граничные условия (“смягченные”) на торце стержня (на $x_1 = 0$ или $x_1 = a$) имеют вид:

$$M_{11} = M_{11}^* \text{ или } \psi = \psi^*, \; N_{12} = N_{12}^* \text{ или } w = w^*, \; L_{13} = L_{13}^* \text{ или } \Omega_3 = \Omega_3^*. \tag{42}$$

Система уравнений (38)-(40) и граничные условия (42) представляют собой прикладную модель статической изгибной деформации микрополярных упругих ортотропных стержней.

Имея в виду принятые гипотезы а), б), в), формулы для перемещений, деформаций, изгибов – кручений, силовых и моментных напряжений ((31), (32), (34)-(36)), на основе функционала (12) для плоской задачи построен функционал типа Рейсснера для прикладной-одномерной модели (38)-(42) микрополярных упругих ортотропных стержней:

$$I_0=\int_0^a\left(W-M_{11}\left(K_{11}-\frac{d\psi}{dx_1}\right)-N_{12}\left[\Gamma_{12}-\left(\frac{dw}{dx_1}-\Omega_3\right)\right]-N_{21}\left[\Gamma_{21}-\left(\psi+\Omega_3\right)\right]-\right.$$

$$\left.-L_{13}\left(k_{13}-\frac{d\Omega_3}{dx_1}\right)\right)dx_1-\int_0^a\left((X^+-X^-)h\psi+(Y^++Y^-)w+(M^++M^-)\Omega_3\right)dx_1+$$

$$+\int_{-h}^{h_1}\left(\varphi_1x_2\psi+\varphi_3\Omega_3\right)\Big|_{x_1=0}dx_2+\int_{-h}^{h_2}\varphi_2w\Big|_{x_1=0}dx_2-\int_{-h}^{h_1}\left(\varphi_1x_2\psi+\varphi_3\Omega_3\right)\Big|_{x_1=a}dx_2-\int_{-h}^{h_2}\varphi_2w\Big|_{x_1=a}dx+ \quad (43)$$

$$+\int_{h_1}^{h}\left(x_2^2\frac{3M_{11}}{2h^3}\left(\psi-\psi^*\right)+\frac{L_{13}}{2h}\left(\Omega_3-\Omega_3^*\right)\right)\Big|_{x_1=0}dx_2+\int_{h_2}^{h}\left(\frac{N_{12}}{2h}\left(w-w^*\right)\right)\Big|_{x_1=0}dx_2-$$

$$-\int_{h_1}^{h}\left(x_2^2\frac{3M_{11}}{2h^3}\left(\psi-\psi^*\right)+\frac{L_{13}}{2h}\left(\Omega_3-\Omega_3^*\right)\right)\Big|_{x_1=a}dx_2-\int_{h_2}^{h}\left(\frac{N_{12}}{2h}\left(w-w^*\right)\right)\Big|_{x_1=a}dx_2,$$

где W - плотность потенциальной энергии деформации, которая выражается так:

$$W=\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}{A_{22}}\frac{h^3}{3}K_{11}^2+A_{77}h\Gamma_{12}^2+2A_{78}h\Gamma_{12}\Gamma_{21}+A_{88}h\Gamma_{21}^2+B_{66}hk_{13}^2,$$

(при $h_1=h_2=h$, получаются граничные условия для загруженного края; при $h_1=h_2=-h$- граничные условия для защемленного края; при $h_1=h,\ h_2=-h$- граничные условия для шарнирно-опертого края).

<u>В § 1.5</u> построены частные модели (38)-(41) микрополярных ортотропных стержней. В итоге получены: а) модель с независимыми полями перемещений и вращений для микрополярных упругих изотропных стержней:

уравнения равновесия- это (38), геометрические соотношения- это (40),

соотношения упругости:

$$M_{11}=\frac{2Eh^3}{3}K_{11},\qquad L_{13}=2hBk_{13},$$
$$N_{12}=2h\left((\mu+\alpha)\Gamma_{12}+(\mu-\alpha)\Gamma_{21}\right),\ N_{21}=2h\left((\mu-\alpha)\Gamma_{12}+(\mu+\alpha)\Gamma_{21}\right). \quad (44)$$

б) модель микрополярных ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений также без учета поперечных сдвигов (т. е. на основе обобщенных на микрополярный случай кинематических гипотез Бернулли):

уравнения равновесия- это (38), соотношения упругости - это (39),

геометрические соотношения:

$$\Gamma_{12}=\frac{dw}{dx_1}-\Omega_3,\ \ \Gamma_{21}=-\frac{dw}{dx_1}+\Omega_3, K_{11}=-\frac{d^2w}{dx_1^2},\ \ \kappa_{13}=\frac{d\Omega_3}{dx_1}. \quad (45)$$

в) модель микрополярных ортотропных стержней со стесненным вращением с учетом и без учета поперечных сдвигов:

основные уравнения (в случае, когда учтены поперечные сдвиги):

уравнения равновесия:

$$\frac{dN_{12}}{dx_1}=-(Y^++Y^-),\quad N_{21}-\frac{dM_{11}}{dx_1}=h(X^+-X^-),\quad \frac{dL_{13}}{dx_1}+N_{12}-N_{21}=-(M^++M^-). \quad (46)$$

физические соотношения:

$$N_{12} + N_{21} = \frac{1}{2}\left(c_{77} + c_{88} + 2c_{78}\right)\left(\Gamma_{12} + \Gamma_{21}\right), \quad M_{11} = D_{11}K_{11}, \quad L_{13} = d_{66}\kappa_{13}. \tag{47}$$

геометрические соотношения:

$$\Gamma_{12} + \Gamma_{21} = \frac{dw}{dx_1} + \psi, \quad K_{11} = \frac{d\psi}{dx_1}, \quad \kappa_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}, \quad \Omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx_1} - \psi\right). \tag{48}$$

Основные уравнения (в случае без учета поперечных сдвигов):

уравнения равновесия:

$$\frac{dN_{12}}{dx_1} = -(Y^+ + Y^-), \quad \frac{d\left(L_{13} - M_{11}\right)}{dx_1} + N_{12} = h(X^+ - X^-) - (M^+ + M^-). \tag{49}$$

физические соотношения:

$$M_{11} = D_{11}K_{11}, \quad L_{13} = d_{66}k_{13}. \tag{50}$$

геометрические соотношения:

$$K_{11} = -\frac{d^2 w}{dx_1^2}, \quad \kappa_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}, \quad \Omega_3 = \frac{dw}{dx_1}. \tag{51}$$

г) модель микрополярных ортотропных стержней “с малой сдвиговой жесткостью” с учетом и без учета поперечных сдвигов:

“Моментная часть” задачи:

$$\frac{dL_{13}}{dx_1} = -(M^+ + M^-), \; L_{13} = d_{66}\kappa_{13}, \quad \kappa_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}. \tag{52}$$

“Силовая часть” задачи (в случае, когда учтены поперечные сдвиги):

$$\frac{dN_{12}}{dx_1} = -(Y^+ + Y^-), \; N_{21} - \frac{dM_{11}}{dx_1} = h(X^+ - X^-),$$

$$N_{12} = c_{77}\Gamma_{12} + c_{78}\Gamma_{21}, \quad N_{21} = c_{88}\Gamma_{21} + c_{78}\Gamma_{12}, \; M_{11} = D_{11}K_{11}, \tag{53}$$

$$\Gamma_{12} = \frac{dw}{dx_1} - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \psi + \Omega_3, \quad K_{11} = \frac{d\psi}{dx_1}.$$

“Силовая часть” задачи (в случае без учета поперечных сдвигов):

$$\frac{dN_{12}}{dx_1} = -(Y^+ + Y^-), \; N_{21} - \frac{dM_{11}}{dx_1} = h(X^+ - X^-),$$

$$N_{12} - N_{21} = \left(c_{77} - c_{78}\right)\Gamma_{12} + \left(c_{78} - c_{88}\right)\Gamma_{21}, \quad M_{11} = D_{11}K_{11}, \tag{54}$$

$$K_{11} = -\frac{d^2 w}{dx_1^2}, \; \Gamma_{12} = -\Gamma_{21}.$$

д) классическая модель ортотропных стержней с учетом и без учета поперечных сдвигов:

основные уравнения (в случае, когда учтены поперечные сдвиги):

уравнения равновесия:

$$\frac{dM_{11}}{dx_1} - N_{12} = -h\left(X^+ - X^-\right), \quad \frac{dN_{12}}{dx_1} = -(Y^+ + Y^-). \tag{55}$$

соотношения упругости:

$$M_{11} = D_{11}K_{11}, \quad N_{12} = N_{21} = 2hA\left(\Gamma_{12} + \Gamma_{21}\right). \tag{56}$$

геометрические соотношения:

$$K_{11} = \frac{d\psi(x_1)}{dx_1}, \quad \Gamma_{12} + \Gamma_{21} = \frac{dw(x_1)}{dx_1} + \psi(x_1). \qquad (57)$$

Основные уравнения (в случае без учета поперечных сдвигов):

уравнение равновесия:

$$\frac{d^2 M_{11}}{dx_1^2} = -h\frac{d(X^+ - X^-)}{dx_1} - (Y^+ + Y^-), \qquad (58)$$

соотношение упругости:

$$M_{11} = D_{11}K_{11},$$

(59)

геометрическое соотношение:

$$K_{11} = -\frac{d^2 w(x_1)}{dx_1^2}. \qquad (60)$$

Глава вторая диссертационной работы посвящена асимптотическому анализу двумерной граничной задачи микрополярной ортотропной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений в области тонкого прямоугольника. Построены внутренний итерационный процесс и погранслой. В результате сращивания внутренней задачи с пограничным слоем получены граничные условия для одномерных уравнений внутреннего итерационного процесса, а также, граничные условия для погранслойных задач. На основе результатов исходного приближения внутренней задачи асимптотического метода, построена прикладная - асимптотическая (одномерная) модель микрополярных упругих ортотропных стержней.

В § 2.1 в основу рассуждений положено свойство напряженно-деформированного состояния (НДС) статической деформации тонкого тела, которое выражается структурной формулой:

$$(НДС)_{полное} = (НДС)_{внутреннее} + (НДС)_{краевое}, \qquad (61)$$

где краевое напряженно-деформированное состояние тонкого прямоугольника возникает вблизи боковых граней прямоугольника $x_1 = 0, x_1 = a$ и быстро (экспоненциально) затухает при удалении от них вглубь двумерной области прямоугольника. Внутреннее напряженно-деформированное состояния, который захватывает весь область прямоугольника, в каждом асимптотическом приближении будет описываться дифференциальными уравнениями меньшей размерности (в данном случае обыкновенными дифференциальными уравнениями).

В § 2.2 для построения внутреннего итерационного процесса (с которой будет связана прикладная теория микрополярных ортотропных упругих стержней) в двумерных уравнениях (1)-(3) плоской задачи несимметричной теории упругости ортотропного тела осуществлен переход к безразмерным координатам и к безразмерным величинам по формулам:

$$\xi = \frac{x_1}{a}, \; \zeta = \frac{x_2}{h},$$

$$\bar{u}_i = \frac{u_i}{a}, \; \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{A_{11}}, \; \bar{\mu}_{i3} = \frac{\mu_{i3}}{aA_{11}}. \qquad (62)$$

Следуя И.И.Воровичу (1975) необходимо ввести полную совокупность безразмерных параметров, которые определяют поставленную задачу. Их можно разбить на три группы:

1) безразмерные параметры, которые определяют геометрию области (в данном случае геометрию задачи определяет основной безразмерный малый параметр $\delta = h/a << 1$);

2) безразмерные параметры, характеризующие упругие свойства микрополярного ортотропного материала. К этим безразмерным параметрам можно прийти естественным образом, следующим способом:

$$\frac{A_{22}A_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2},\frac{A_{12}A_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2},\frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2},\frac{A_{88}A_{11}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2},\frac{A_{78}A_{11}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2},\frac{A_{77}A_{11}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2},\frac{a^2A_{11}}{B_{66}},\frac{a^2A_{11}}{B_{44}}. \quad (63)$$

В изотропном случае получаются две безразмерные физические параметры: $\mu/\alpha,\ a^2\mu/B$;

3) параметры, характеризующие изменяемости внешней нагрузки.

Отметим, что при построении асимптотических разложений, как безразмерные физические параметры (63), так и параметры, характеризующие изменяемость внешней нагрузки, следует представлять в асимптотических порядках от основного малого безразмерного геометрического параметра δ.

Наша цель состоит в том, чтобы свести двухмерные уравнения (1)-(3) (с независимыми переменными ξ,ζ) к одномерным уравнениям (с независимым переменным ξ). Это операция выполняется так, чтобы в коэффициентах получаемых уравнений был виден характер их зависимости от малого геометрического параметра δ и переменной ζ.

Решение внутренней задачи представлена в форме:

$$Q = \delta^{-q}\sum_{s=0}^{S}\delta^s Q^{(s)}, \quad (64)$$

где s – номер асимптотического приближения, Q -любое из напряжений (силовых и моментных), перемещений и независимого поворота, q -натуральное число, разное для разных величин, которое определяется из условии непротиворечивости рекуррентной системы уравнений.

Как показывает ход асимптотического метода изучения задачи, для получения прикладной асимптотической одномерной модели с независимыми полями перемещений и вращений микрополярных ортотропных стержней, как основной случай, для физических безразмерных параметров (63) в асимптотических порядках (по малому параметру δ) принимаются следующие значения:

$$\frac{A_{22}A_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}=O(\delta^0),\quad \frac{A_{12}A_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}=O(\delta^0),\quad \frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}=O(\delta^0),\quad \frac{A_{88}A_{11}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}=O(\delta^0),$$

$$\frac{A_{78}A_{11}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}=O(\delta^0),\quad \frac{A_{77}A_{11}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}=O(\delta^0),\quad \frac{a^2A_{11}}{B_{66}}=O(\delta^0),\quad \frac{a^2A_{11}}{B_{44}}=O(\delta^0),$$

для изотропного случая $\alpha/\mu = O(\delta^0),\ a^2\mu/B = O(\delta^0)$.

В этом случае для q получены следующие значения:

$$q = \begin{cases} 0, & \bar\sigma_{11},\bar\sigma_{22},\bar u_1,\bar\mu_{23}, \\ 1, & \bar\sigma_{21},\bar\sigma_{12},\bar u_2,\bar\mu_{13},\omega_3. \end{cases} \quad (65)$$

В результате получаются выражения для компонентов вектора перемещения, вектора независимого поворота, компонентов тензоров деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений. Например при $s=0$:

$$w=a\delta^{-1}\overset{0}{u}{}_2^{(0)}(\xi),\ \ u_1=x_2\psi(x_1),\quad \psi(x_1)=\delta^{-1}\psi^{(0)}(\xi),\quad \Omega_3=\delta^{-1}\omega_3^{(0)},$$

$$\sigma_{21}=A_{11}\delta^{-1}\left\{\overset{0}{\sigma}{}_{21}^{(0)}(\xi)+\delta^2\left(\frac{1}{6}-\frac{\zeta^2}{2}\right)\frac{d\overset{1}{\sigma}{}_{11}^{(0)}(\xi)}{d\xi}\right\},$$

$$\sigma_{12}=A_{11}\delta^{-1}\overset{0}{\sigma}{}_{12}^{(0)},\sigma_{22}=A_{11}\bar{\sigma}_{22}^{(0)},\ \sigma_{11}=A_{11}\bar{\sigma}_{11}^{(0)},$$

$$\mu_{13}=A_{11}a\delta^{-1}\bar{\mu}_{13}^{(0)},\ \ \mu_{23}=A_{11}a\bar{\mu}_{23}^{(0)}. \qquad (66)$$

Здесь w - перемещение точек средней линии прямоугольника, u_1 - перемещение точек прямоугольника по направлению x_1, Ω_3 - поворот этих точек вокруг оси x_3.

На основе исходного приближение внутреннего итерационного процесса (используя также усредненные по высоте прямоугольника понятий усилия и моментов (37)) получается основная система уравнений (одномерных) для микрополярных ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений:

уравнения равновесия

$$\frac{dN_{12}}{dx_1}=-(Y^++Y^-),\quad N_{21}-\frac{dM_{11}}{dx_1}=h(X^+-X^-),\quad \frac{dL_{13}}{dx_1}+N_{12}-N_{21}=-(M^++M^-). \qquad (67)$$

соотношения упругости

$$N_{12}=c_{77}\Gamma_{12}+c_{78}\Gamma_{21},\qquad N_{21}=c_{88}\Gamma_{21}+c_{78}\Gamma_{12},$$

$$M_{11}=D_{11}K_{11}+\frac{h^2}{3}\frac{A_{12}}{A_{22}}\left(Y^++Y^-\right),\qquad L_{13}=d_{66}k_{13}. \qquad (68)$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{12}=\frac{dw}{dx_1}-\Omega_3,\quad \Gamma_{21}=\psi+\Omega_3,\quad K_{11}=\frac{d\psi}{dx_1},\ \ \kappa_{13}=\frac{d\Omega_3}{dx_1}. \qquad (69)$$

В §2.3 изучается погранслойная задача около боковых краев прямоугольника $x_1=0, x_1=a$.

Вводится замена независимых переменных по формулам:

$$t=x_1/h,\qquad \zeta=x_2/h. \qquad (70)$$

Решение преобразованной таким образом системы представится в виде асимптотического разложения:

$$\bar{\sigma}_{ij}=\delta^{\chi}\sum_{s=0}^{S}\delta^s\bar{\sigma}_{ij}^{(s)},\bar{u}_i=\delta^{\chi+1}\sum_{s=0}^{S}\delta^s\bar{\mathrm{u}}_i^{(s)},\bar{\mu}_{i3}=\delta^{\chi}\sum_{s=0}^{S}\delta^s\bar{\mu}_{i3}^{(s)}\ \left(i,j=1,2\right),\omega_3=\delta^{\chi+1}\sum_{s=0}^{S}\delta^s\omega_3^{(s)} \qquad (71)$$

где χ целое число, характеризует интенсивность пограничного слоя и должен быть подобран так, чтобы стало возможным удовлетворение двумерных граничных условий (5)-(7) плоской микрополярной теории упругости на кромках прямоугольника $x_1=0, x_1=a$. Решение (71) должен удовлетворить однородным граничным условиям на лицевых сторонах прямоугольника $\zeta=\pm1$: $\bar{\sigma}_{21}=\bar{\sigma}_{22}=0$, $\bar{\mu}_{23}=0$.

Погранслойная задача расщепляется на две системы уравнений (для края $x_1=0$):

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \overline{\sigma}_{11}^{(s)}}{\partial t}+\dfrac{\partial \overline{\sigma}_{21}^{(s)}}{\partial \zeta}=0, \qquad \dfrac{\partial \overline{\sigma}_{12}^{(s)}}{\partial t}+\dfrac{\partial \overline{\sigma}_{22}^{(s)}}{\partial \zeta}=0,\\
\dfrac{\partial \overline{\mathrm{u}}_{1}^{(s)}}{\partial t}=\dfrac{A_{11}A_{22}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\overline{\sigma}_{11}^{(s)}-\dfrac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\overline{\sigma}_{22}^{(s)},\\
\dfrac{\partial \overline{\mathrm{u}}_{1}^{(s)}}{\partial \zeta}=-\dfrac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\overline{\sigma}_{12}^{(s)}+\dfrac{A_{11}A_{77}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\overline{\sigma}_{21}^{(s)}-\omega_3^{(s-1)},\\
\dfrac{\partial \overline{\mathrm{u}}_{2}^{(s)}}{\partial \zeta}=-\dfrac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\overline{\sigma}_{11}^{(s)}+\dfrac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\overline{\sigma}_{22}^{(s)},\\
\dfrac{\partial \overline{\mathrm{u}}_{2}^{(s)}}{\partial t}=\dfrac{A_{11}A_{88}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\overline{\sigma}_{12}^{(s)}-\dfrac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\overline{\sigma}_{21}^{(s)}+\omega_3^{(s-1)};
\end{cases}
\tag{72}
$$

$$
\frac{\partial \overline{\mu}_{13}^{(s)}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{\mu}_{23}^{(s)}}{\partial \zeta}=\overline{\sigma}_{21}^{(s-1)}-\overline{\sigma}_{12}^{(s-1)}, \quad \frac{\partial \omega_3^{(s)}}{\partial t}=\frac{a^2A_{11}}{B_{66}}\overline{\mu}_{13}^{(s)}, \qquad \frac{\partial \omega_3^{(s)}}{\partial \zeta}=\frac{a^2A_{11}}{B_{44}}\overline{\mu}_{23}^{(s)},
\tag{73}
$$

которые при исходном приближении ($s=0$) независимы друг от друга.

Потребовав, чтобы решения погранслойных задач (72), (73) имели затухающий характер при $t\to\infty$, получим, что такие решения обладают следующими важными свойствами:

$$
\begin{gathered}
\int_{-1}^{1}\overline{\sigma}_{12}^{(s)}(t=0)d\zeta=0, \int_{-1}^{1}\overline{\mu}_{13}^{(s)}(t=0)d\zeta=\int_{-1}^{1}d\zeta\int_{0}^{\infty}\left(\overline{\sigma}_{12}^{(s-1)}-\overline{\sigma}_{21}^{(s-1)}\right)dt,\\
\int_{-1}^{1}\omega_3^{(s)}(t=0)d\zeta=\frac{a^2A_{11}}{B_{66}}\int_{0}^{\infty}tdt\int_{-1}^{1}\left(\overline{\sigma}_{21}^{(s-1)}-\overline{\sigma}_{12}^{(s-1)}\right)d\zeta,\\
\int_{-1}^{1}\zeta\overline{\sigma}_{11}^{(s)}(t=0)d\zeta+\frac{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}{A_{78}A_{11}}\int_{-1}^{1}\overline{\mathrm{u}}_{2}^{(s)}(t=0)d\zeta=-\frac{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}{A_{78}A_{11}}\int_{-1}^{1}d\zeta\int_{0}^{\infty}\omega_3^{(s-1)}dt
\end{gathered}
\tag{74}
$$

Эти условия будут играть определенную роль при сращивании асимптотических разложений внутреннего итерационного процесса и погранслоя, когда необходимо разделить общие граничные условия (5)-(7) плоской задачи, между внутренним и погранслойным итерационными процессами.

Если известно решение вблизи торца прямоугольника $x_1=0$, пограничный слой вблизи противоположного торца $x_1=a$ можно получить формальной заменой t на $t_1=(a-x_1)/h.$

Таким образом, построены два типа решений: решение внутренней задачи и решение для пограничной задачи. Их сумма

$$
I=Q+R_p^{(1)}+R_p^{(2)}
\tag{75}
$$

является решением исходной сингулярно - возмущенной краевой задачи несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений в тонкой прямоугольной области. Здесь Q - решение внутренней задачи, $R_p^{(1)},R_p^{(2)}$ -

решения задач пограничных слоев, построенные соответственно вблизи торцов $x_1 = 0$ и $x_1 = a$.

В диссертации при $s = 0$, методом разделения переменных, построены общие решения системы уравнений погранслойных задач (72) и (73).

<u>В § 2.4</u> изучена проблема разделения двумерных граничных условий микрополярной ортотропной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений на кромках прямоугольника $x_1 = 0, x_1 = a$.

Сращивание внутреннего итерационного процесса и погранслоя осуществлено при трех граничных задачах (5)-(7), т. е. при первой (загруженный край прямоугольника), второй (смешенного характера, результаты которого можно трактовать как граничные условия шарнирного опирания) и третей (защемленный край прямоугольника) граничных задачах. В результате сращивания получены граничные условия для одномерных уравнений микрополярных ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений построенной на основе исходного приближения внутреннего итерационного процесса, которые в случаях задач 1, 2 и 3 имеют соответственно следующие виды:

$$N_{12}\big|_{x_1=0} = \int_{-h}^{h} \varphi_2(x_2)dx_2, \quad L_{13}\big|_{x_1=0} = \int_{-h}^{h} \varphi_3(x_2)dx_2, \quad M_{11}\big|_{x_1=0} = \int_{-h}^{h} x_2\varphi_1(x_2)dx_3 \,. \tag{76}$$

$$M_{11} = \int_{-h}^{h} x_2\varphi_1(x_2)dx_2, \quad \mathrm{w} = 0, \qquad L_{13} = \int_{-h}^{h} \varphi_3(x_2)dx_2 \,. \tag{77}$$

$$\psi = 0, \quad \mathrm{w} = 0, \qquad \Omega_3 = 0. \tag{78}$$

<u>В § 2.5</u> подведя итог асимптотического интегрирования граничной задачи (1)-(7), можно констатировать, что построена прикладная-асимптотическая модель (одномерная) изгиба микрополярных ортотропных упругих стержней с независимыми полями перемещений и вращений. Эта модель представляет собой систему основных уравнений (67) - (69) и граничных условий (76), либо (77), либо (78).

Сравнивая основные уравнения и граничные условия прикладной - асимптотической модели микрополярных ортотропных упругих стержней ((67) - (69) и граничных условий (76), либо (77), либо (78)) с основными уравнениями и граничными условиями той же модели построенной на основе метода гипотез (основные уравнения (38)-(40) и граничные условия (42)), видно, что, разница лишь в выражении момента M_{11}. Речь идет о величине $\frac{h^2}{3}\frac{A_{12}}{A_{22}}\left(Y^+ + Y^-\right)$, которая присутствует в формуле (68) и которая отсутствует в аналогичной формуле (39). Это результат того, что в формуле обобщенного закона Гука для величин ε_{11} по асимптотическому методу силовое напряжение σ_{22} не пренебрегается относительно силового напряжения σ_{11}, но по методу гипотез, как в классической теории стержней, такое пренебрегание оправдано.

Таким образом, можно констатировать, что построенная на основе метода гипотез прикладная модель микрополярных упругих ортотропных стержней - асимптотически точная модель.

<u>Глава третья</u> диссертационной работы посвящена к изучению частных задач, а именно к задачам изгиба микрополярных ортотропных упругих стержней (при разных граничных условиях и при разных загружениях) и к задаче статической устойчивости центрально сжатого микрополярного ортотропного упругого стержня. Выявлены эффекты, на наш взгляд весьма важные, присущие только микрополярным материалам.

<u>В § 3.1</u> рассмотрена задача изгиба шарнирно-опертого микрополярного ортотропного упругого стержня под распределенной силовой нагрузкой интенсивности $q = q_0 \sin\frac{\pi x_1}{a}$.

В пункте А) § 3.1 задача решена для стержня с независимыми полями перемещений и вращений по двум микрополярным моделям: по модели, основанной на обобщенные на микрополярный случай кинематические гипотезы Тимошенко ((38)-(41)) и по модели, основанной на микрополярный случай обобщенных кинематических гипотез Бернулли ((38), (39), (45)). Решения этих задач получены в виде конкретных формул. Получены также конкретные формулы для максимальных значений прогиба w и силового напряжения σ_{11}.

Результаты численных вычислений приведены в таблицах 1 и 2.

Физические параметры материала стержни: $A_{77} = 2\cdot 10^9$ Па, $A_{88} = 4\cdot 10^9$ Па, $A_{78} = 8\cdot 10^8$ Па, $\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} = 5{,}292\cdot 10^9$ Па, $A = 1{,}9\cdot 10^9$ Па, $B_{66} = 2640H$, q_0=50 Па, $\delta = 1/40$.

Таблица 1. Ортотропный матриал						
N	размеры стержни		Микрополярная модель построенный на основе обобщенных гипотез Тимошенко		Классическая модель типа Тимошенко	
	a, мм	*h*, мм	$\sigma_{11}^{мах.мик.}$ кПа	$w_{мах}^{мик.}$ мм	$\sigma_{11}^{мах класс}$ кПа	$w_{мах}^{класс}$ мм
1.	8	0,2	0,659	4,75⊙ 10^{-6}	24,317	1,498⊙ 10^{-4}
2.	20	0,5	3,496	5,541⊙ 10^{-5}	24,317	3,746⊙ 10^{-4}
3.	50	1,25	12,417	4,807⊙ 10^{-4}	24,317	9,365⊙ 10^{-4}
4.	80	2	17,689	1,093⊙ 10^{-3}	24,317	1,498⊙ 10^{-3}

Таблица 2. Ортотропный материал						
N	размеры стержни		Микрополярная модель построенный на основе обобщенных гипотез Бернулли		Классическая модель типа Бернулли	
	a, мм	*h*, мм	$\sigma_{11}^{мах.мик.}$ кПа	$w_{мах}^{мик.}$ мм	$\sigma_{11}^{мах класс}$ кПа	$w_{мах}^{класс}$ мм
1.	8	0,2	0,689	4,227⊙ 10^{-6}	24,317	1,489⊙ 10^{-4}
2.	20	0,5	3,525	5,399⊙ 10^{-5}	24,317	3,725⊙ 10^{-4}
3.	50	1,25	12,435	4,762⊙ 10^{-4}	24,317	9,312⊙ 10^{-4}
4.	80	2	17,701	1,084⊙ 10^{-3}	24,317	1,489⊙ 10^{-3}

Из приведенных данных таблиц 1 и 2 видно, что микрополярный ортотропный упругий материал стержня (по микрополярной теории с независимыми полями перемещений и вращений, как с учетом поперечных сдвигов, так и без учета поперечных сдвигов) проявляет очень высокие прочностные и жесткостные характеристики. Отметим также, что в рассмотренной задаче учет поперечных сдвигов и без учета поперечных сдвигов, результаты мало отличаются друг от друга.

В пункте Б) § 3.1 поставленная задача решена для стержня со стесненным вращением, при которой полностью учитываются поперечные сдвиговые деформации ((46)-(48)). Задача решена также для случая, когда не учтены поперечные сдвиги ((49)-(51)). Получены точные решения указанных задач. В обоих случаях получены конкретные формулы также для максимальных значений прогиба w и силового напряжения σ_{11}.

Результаты численных вычислений приведены в таблицах 3 и 4.

Физические параметры материала стержни: $A_{77} = 102 \cdot 10^9$ Па, $A_{88} = 105 \cdot 10^9$ Па, $A_{78} = -98 \cdot 10^9$ Па, $B_{66} = 1000H$, $\dfrac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} = 5{,}2 \cdot 10^9$ Па, $A = 2{,}75 \cdot 10^9$ Па, q_0=50 Па, $\delta = 1/40$.

Таблица 3. Ортотропный материал						
N	размеры стержни		Микрополярная модель построенный на основе обобщенных гипотез Тимошенко		Классическая модель типа Тимошенко	
	a, мм	h, мм	$\sigma_{11}^{мах.мик.}$ кПа	$w_{мах}^{мик.}$ мм	$\sigma_{11}^{махкласс}$ кПа	$w_{мах}^{класс}$ мм
1.	8	0,2	1,553	$9{,}99\odot 10^{-6}$	24,317	$1{,}52\odot 10^{-4}$
2.	20	0,5	7,33	$1{,}15\odot 10^{-4}$	24,317	$3{,}81\odot 10^{-4}$
3.	50	1,25	17,747	$6{,}95\odot 10^{-4}$	24,317	$9{,}51\odot 10^{-4}$
4.	80	2	21,246	$1{,}33\odot 10^{-3}$	24,317	$1.52\odot 10^{-3}$

Таблица 4. Ортотропный материал						
N	размеры стержни		Микрополярная модель построенный на основе обобщенных гипотез Бернулли		Классическая модель типа Бернулли	
	a, мм	h, мм	$\sigma_{11}^{мах.мик.}$ кПа	$w_{мах}^{мик.}$ мм	$\sigma_{11}^{махкласс}$ кПа	$w_{мах}^{класс}$ мм
1.	8	0,2	1,577	$9{,}83\odot 10^{-6}$	24,317	$1{,}52\odot 10^{-4}$
2.	20	0,5	7,352	$1{,}15\odot 10^{-4}$	24,317	$3{,}79\odot 10^{-4}$
3.	50	1,25	17,759	$6{,}92\odot 10^{-4}$	24,317	$9{,}48\odot 10^{-4}$
4.	80	2	21,252	$1{,}33\odot 10^{-3}$	24,317	$1{,}52\odot 10^{-3}$

По модели со стесненным вращением также микрополярность материала стержня показывает довольно высокие прочностные и жесткостные свойства. По этой модели результаты вычислений с учетом и без учета поперечных сдвигов близки друг с другом.

В пункте В) § 3.1 поставленная задача решена для стержня “с малой сдвиговой жесткостью”, при которой полностью учитываются поперечные сдвиговые деформации ((52), (53)). Задача решена также для случая, когда не учтены поперечные сдвиги ((52), (54)). Получены точные решения указанных задач. В обоих случаях получены также конкретные формулы для максимальных значений прогиба w и силового напряжения σ_{11}.

Результаты численных вычислений приведены в таблицах 5 и 6.

Физические параметры материала стержни: $A_{77} = 3{,}6 \cdot 10^6$ Па, $A_{88} = 3{,}8 \cdot 10^6$ Па, $A_{78} = 0{,}4 \cdot 10^6$ Па, $\dfrac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} = 5{,}2 \cdot 10^6$ Па, $A = 2{,}05 \cdot 10^6$ Па, $B_{66} = 6000$ Н, q_0=50 Па.

Таблица 5

Относительная толщина стержня $\delta = \dfrac{h}{a}$	$\dfrac{\sigma_{11}^{мах.мик.}}{\sigma_{11}^{мах.класс}}$	$\dfrac{w_{мах}^{мик.}}{w_{мах}^{класс}}$
1/40	0,00032	0,0030
1/100	0,000051	0,00048

Таблица 6

Относительная толщина стержня $\delta = \dfrac{h}{a}$	$\dfrac{\sigma_{11}^{мах.мик.}}{\sigma_{11}^{мах.класс}}$	$\dfrac{w_{мах}^{мик.}}{w_{мах}^{класс}}$
1/40	0,0016	0,0016
1/100	0,00026	0,00026

По модели “с малой сдвиговой жесткостью” также микрополярность материала стержня показывает довольно высокие прочностные и жесткостные свойства. Основная особенность модели “с малой сдвиговой жесткостью” является тот факт, что $\dfrac{\sigma_{11}^{мах.мик.}}{\sigma_{11}^{мах.класс}}$, а так же $\dfrac{w_{мах}^{мик.}}{w_{мах}^{класс}}$,отношения зависят только от $\delta = \dfrac{h}{a}$ и не зависят от h и a по отдельности.

<u>**В § 3.2**</u> изучаются следующие задачи: изгиб микрополярного ортотропного упругого одним концом защемленного стержня под действием силой приложенной на другом конце и изгиб микрополярного ортотропного упругого стержня, когда оба концы стержня защемлены и стержень загружен равномерно – распределенной нагрузкой. В каждом задаче рассмотрены три разные модели микрополярных ортотропных стержней: с независимыми полями перемещений и вращений, со стесненным вращением и “с малой сдвиговой жесткостью” (модели которых построены как с учетом поперечных сдвигов, так и без учета поперечных сдвигов). Сделаны численные анализы, которые опять показывают высокую жесткость и прочность микрополярного материала.

Следует заметить, что когда рассматривается задача об изгибе микрополярного ортотропного упругого одним концом защемленного стержня с независимыми полями перемещений и вращений под действием силой приложенной на другом конце, то результаты по модели, при которой не учитываются поперечные сдвиги (таблица 8), довольно резко отличаются от данных таблицы 7, т. е. когда учитываются поперечные сдвиги (несмотря на то, что в классическом случае, результаты таблиц 7 и 8 весьма близки). Следовательно, для рассмотренной задачи большое значение имеют поперечные сдвиги, и необходимо принимать модель микрополярного стержня, при которой полностью учитываются поперечные сдвиги.

Физические параметры материала стержни: $\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}{A_{22}}=5{,}292\cdot10^9$ Па, $A_{77}=2\cdot10^9$ Па, $A_{88}=4\cdot10^9$ Па, $A_{78}=8\cdot10^8$ Па, $A=1{,}9\cdot10^9$ Па, $B_{66}=2640H$, S=50 Па⊙м, $\delta=1/40$.

Таблица 7. Ортотропный материал						
N	размеры стержни		Микрополярная модель построенный на основе обобщенных гипотез Тимошенко		Классическая модель типа Тимошенко	
	a, мм	h, мм	$\sigma_{11}^{мах.мик.}$ кПа	$w_{мах}^{мик.}$ мм	$\sigma_{11}^{мах класс}$ кПа	$w_{мах}^{класс}$ мм
1.	8	0,2	$4{,}86\odot10^2$	0,008	$1{,}5\odot10^4$	0,303
2.	20	0,5	$8{,}84\odot10^2$	0,044	$6\odot10^3$	0,303
3.	50	1,25	$1{,}22\odot10^3$	0,155	$2{,}4\odot10^3$	0,303
4.	80	2	$1{,}09\odot10^3$	0,221	$1{,}5\odot10^3$	0,303

Таблица 8. Ортотропный материал						
N	размеры стержни		Микрополярная модель построенный на основе обобщенных гипотез Бернулли		Классическая модель типа Бернулли	
	a, мм	h, мм	$\sigma_{11}^{мах.мик.}$ кПа	$w_{мах}^{мик.}$ мм	$\sigma_{11}^{мах класс}$ кПа	$w_{мах}^{класс}$ мм
1.	8	0,2	$2{,}33\odot10^3$	0,03	$1{,}5\odot10^4$	0,302
2.	20	0,5	$3{,}99\odot10^3$	0,19	$6\odot10^3$	0,302
3.	50	1,25	$9{,}28\odot10^3$	1,16	$2{,}4\odot10^3$	0,302
4.	80	2	$1{,}47\odot10^4$	2,96	$1{,}5\odot10^3$	0,302

<u>В § 3.3</u> изучается задача статической устойчивости центрально сжатого силой P микрополярного ортотропного упругого шарнирно опертого стержня для определения критической нагрузки. Применяя метод Эйлера к решению задачи и рассматривая равновесие элемента стержня в отклоненном состоянии, получим основные уравнения статической устойчивости центрально сжатого микрополярного ортотропного стержня с независимыми полями перемещений и вращений:

уравнения равновесия:

$$\frac{dN_{12}}{dx_1}=P\frac{d^2w}{dx_1^2},\qquad N_{21}-\frac{dM_{11}}{dx_1}=0,\qquad \frac{dL_{13}}{dx_1}+N_{12}-N_{21}=0, \tag{79}$$

соотношения упругости:

$$N_{12} = 2h\left[A_{77}\Gamma_{12} + A_{78}\Gamma_{21}\right], \quad N_{21} = 2h\left[A_{78}\Gamma_{12} + A_{88}\Gamma_{21}\right],$$

$$M_{11} = \frac{2h^3}{3}\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}K_{11}, \quad L_{13} = 2B_{66}h\kappa_{13} \tag{80}$$

геометрические соотношения:

$$\Gamma_{12} = \frac{dw}{dx_1} - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \psi + \Omega_3, \quad K_{11} = \frac{d\psi}{dx_1}, \quad k_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}. \tag{81}$$

Граничные условия шарнирного опирания имеют следующий вид:

$$w\Big|_{\substack{x_1=0\\x_1=a}} = 0, \quad \frac{d\psi}{dx_1}\Big|_{\substack{x_1=0\\x_1=a}} = 0, \quad \frac{d\Omega_3}{dx_1}\Big|_{\substack{x_1=0\\x_1=a}} = 0. \tag{82}$$

Систему уравнений (79)-(81) можно привести к системе уравнений относительно w, ψ и Ω_3:

$$\left(A_{77} - \frac{P}{2h}\right)\frac{d^2w}{dx_1^2} + A_{78}\frac{d\psi}{dx_1} + \left(A_{78} - A_{77}\right)\frac{d\Omega_3}{dx_1} = 0,$$

$$A_{78}\frac{dw}{dx_1} + A_{88}\psi - \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}\frac{h^2}{3}\frac{d^2\psi}{dx_1^2} + \left(A_{88} - A_{78}\right)\Omega_3 = 0, \tag{83}$$

$$\left(A_{77} - A_{78}\right)\frac{dw}{dx_1} + \left(A_{78} - A_{88}\right)\psi + \left(2A_{78} - A_{77} - A_{88}\right)\Omega_3 + B_{66}\frac{d^2\Omega_3}{dx_1^2} = 0.$$

Решение систем уравнений (83) в случае граничных условий (82) будем искать в виде:

$$w = w_0 \cdot \sin\frac{\pi x_1}{a}, \quad \psi = \psi_0 \cos\frac{\pi x_1}{a}, \quad \Omega_3 = \Omega_3^0 \cos\frac{\pi x_1}{a}. \tag{84}$$

Несложно заметить, что решение (84) автоматически удовлетворяет граничным условиям (82). Поставляя (84) в систему (83) и потребовав, чтобы полученная система имела не нулевое решение в результате приходим к следующей формуле для критического усилия P_{kp}:

$$P_{kp}^{мик} = 2h\frac{\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}\frac{h^2}{3}\frac{\pi^2}{a^2}\left(A_{77}A_{88} - A_{78}^2 + A_{77}B_{66}\frac{\pi^2}{a^2}\right) + \left(A_{77}A_{88} - A_{78}^2\right)B_{66}\frac{\pi^2}{a^2}}{\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}\frac{h^2}{3}\frac{\pi^2}{a^2}\left(A_{77} + A_{88} - 2A_{78} + B_{66}\frac{\pi^2}{a^2}\right) + A_{77}A_{88} - A_{78}^2 + A_{88}B_{66}\frac{\pi^2}{a^2}}, \tag{85}$$

По классической теории упругости для ортотропного материала ($B_{66} = 0, A_{77} = = A_{88} = A_{78} = A$), с учетом поперечных сдвигов для критического усилия P_{kp} имеем:

$$P_{kp}^{кл} = \frac{\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}\frac{2h^3}{3}\frac{\pi^2}{a^2}}{1 + \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}\frac{2h^3}{3}\frac{\pi^2}{a^2}\frac{1}{2hA}}. \tag{86}$$

Поставленная задача изучена также по микрополярной модели с независимыми полями перемещений и вращений, но на этот раз без учета поперечных сдвигов. Для критического усилия получим:

$$P_{kp}^{мик} = 2h\frac{\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}{A_{22}}\frac{h^2}{3}\frac{\pi^2}{a^2}\left(A_{77}+A_{88}-2A_{78}+B_{66}\frac{\pi^2}{a^2}\right)+\left(A_{77}+A_{88}-2A_{78}\right)B_{66}\frac{\pi^2}{a^2}}{A_{77}+A_{88}-2A_{78}+B_{66}\frac{\pi^2}{a^2}}, \quad (87)$$

По классической теории для критического усилия P_{kp} имеем:

$$P_{kp}^{кл} = \frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}{A_{22}}\frac{2h^3}{3}\frac{\pi^2}{a^2}. \quad (88)$$

Численные результаты приведены в таблицах 9, 10.

Физические параметры материала стержни: $\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}{A_{22}} = 5{,}2\cdot 10^6$ Па, $A_{77} = 3{,}6\cdot 10^6$ Па, $A_{88} = 3{,}8\cdot 10^6$ Па, $A_{78} = 0{,}4\cdot 10^6$ Па, $B_{66} = 300H$, $A = 2{,}05\cdot 10^6$ Па, $\delta = 1/40$.

Таблица 9. Ортотропный материал

N	размеры стержни		Микрополярная модель построенный на основе обобщенных гипотез Тимошенко	Классическая модель типа Тимошенко
	a, м	h, м	$P_{кр}$ Па	$P_{кр}$ Па
1.	0,008	0,0002	1321,65	4,25
2.	0,02	0,0005	2404,59	10,64
3.	0,05	0,00125	2237,46	26,59
4.	0,08	0,002	1671,86	42,55

Таблица 10. Ортотропный материал

N	размеры стержни		Микрополярная модель построенный на основе обобщенных гипотез Бернулли	Классическая модель типа Бернулли
	a, м	h, м	$P_{кр}$ Па	$P_{кр}$ Па
1.	0,008	0,0002	2314,67	4,28
2.	0,02	0,0005	3499,75	10,69
3.	0,05	0,00125	2537,13	26,73
4.	0,08	0,002	1772	42,77

На основе результатов вычислений показан, что при общих равных условиях, микрополярная ортотропная стержень проявляет большую устойчивость, чем когда материал стержня классически ортотропный. Из сравнения таблиц 9, 10 видно, что результаты по модели, при которой не учитываются поперечные сдвиги (таблица 10), для малых размерах $a,\ h$ стержня довольно резко отличаются от данных таблицы 9, т. е. когда учитываются поперечные сдвиги (несмотря на то, что в классическом случае, результаты таблиц 9 и 10 весьма близки). Следовательно, при малых размерах $a,\ h$ стержня большое значение имеют поперечные сдвиги, и необходимо принимать модель микрополярного стержня, при которой полностью учитываются поперечные сдвиги.

В заключении представлены основные результаты диссертационной работы.

В диссертационной работе развивается подход С.О.Саркисяна о симбиозе метода гипотез и метода асимптотического интегрирования плоской (либо пространственной) граничной задачи микрополярной теории упругости в тонких областях, с целью построения математической модели статики микрополярных ортотропных упругих стержней. На основе построенной модели изучены различные задачи изгибной деформации микрополярных упругих ортотропных стержней. Дана постановка и изучена задача о статической устойчивости микрополярных упругих ортотропных стержней. На основе численного анализа изученных задач выясняются специфические свойства микрополярного материала стержня.

В работе, в частности, получены следующие новые результаты:

- Обобщаются на ортотропный случай гипотез С.О.Саркисяна в построении математической модели микрополярных упругих изотропных стержней [5, 8].
- Построена на основе принятых гипотез математическая модель микрополярных упругих ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений, при которой полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации [5, 7, 8].
- Построена модель микрополярных упругих ортотропных стержней без учета поперечных сдвиговых деформаций с независимыми полями перемещений и вращений [5, 7, 8].
- Получены частные модели со стесненным вращением и “с малой сдвиговой жесткостью” микрополярных упругих ортотропных стержней, как с полным учетом поперечных сдвиговых деформаций, так и без их учета [5, 7, 8].
- В тонкой прямоугольной области изучены асимптотические свойства решения краевых задач плоской микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений, для ортотропного материала. Построен внутренний итерационный процесс и микрополярный погранслой. Изучена задача сращивания внутренней и погранслойной задач, определены граничные условия на кромках прямоугольника, как для внутренней задачи, так и для погранслойных задач. На основе внутреннего итерационного процесса в исходном асимптотическом приближении построена одномерная модель (асимптотическая модель) микрополярных упругих ортотропных стержней [4].
- Обосновываются принятые гипотезы построения одномерной прикладной модели статики микрополярных упругих ортотропных стержней [4].
- Изучаются задачи статического изгиба микрополярного упругого ортотропного стержня при различных граничных условиях и условиях нагружения. Для всех рассмотренных задач получены точные решения и на их основе получены численные результаты [3, 6, 7].
- Основной вывод из анализа численных результатов об изгибе микрополярного упругого ортотропного стержня, это установление эффективных свойств микрополярного материала, конкретно, микрополярность дает материалу повышенные жесткостные и прочностные свойства по сравнению с классическим случаем [3, 6, 7].
- Изучена задача статической устойчивости центрально сжатой микрополярного упругого ортотропного стержня. На основе метода Эйлера определена критическая нагрузка, которая сравнивается со значением соответствующей классической величины. Устанавливается вывод о том, что при общих равных условиях микрополярность материала обеспечивает большую устойчивость, чем в классическом случае.

- Построенная модель микрополярных упругих ортотропных стержней дает возможность обобщение модели для изучения задач строительной механики микрополярных стержневых систем.

Перечень публикаций по теме диссертации

1. Алваджян Ш.И. Построение математической модели статической задачи микрополярных упругих ортотропных стержней// Сборник трудов международной школы-конференции молодых ученых "Механика". 28 сентября - 1 октября, 2009. Агавнадзор, Армения. Ереван: Изд.-во ЕГУАС, 2009. С. 129-134.
2. Алваджян Ш.И. Построение уравнений и граничных условий статической задачи изгиба микрополярных упругих ортотропных стержней асимптотическим методом// Сборник научных трудов международной конференции "Актуальные проблемы механики сплошной среды". 4-8 октября, 2010. Дилижан, Армения. Ереван: Изд.-во ЕГУАС, 2010. Том 1. С. 71-75.
3. Алваджян Ш.И. Некоторые задачи определения напряженного деформированного состояния микрополярных ортотропных упругих тонких стержней// Материалы республиканской научной конференции. 28-29 ноября, 2011. Гюмри, Армения. Гюмри: Изд.-во “Эльдорадо” 2012. С. 12-16.
4. Алваджян Ш.И. Асимптотическое обоснование математической модели микрополярных упругих ортотропных тонких стержней // Сборник научных трудов международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, посвященной столетию академика НАН Армении Н. Х. Арутюняна. 08-12 октября, 2012. Цахкадзор, Армения. Ереван: Изд-во ЕГУАС. 2012. Том 1. С. 62-66.
5. Алваджян Ш.И., Саркисян С.О. Прикладные модели статической деформации анизотропных микрополярных упругих тонких стержней// Известия НАН Армении. Механика. 2011. Т. 64. N 4. С. 39-62.
6. Алваджян Ш.И., Саркисян С.О. Определение напряженно-деформированного состояния у микрополярных ортотропных упругих тонких стержней// Тезисы докладов VII всероссийской школы-семинара “Математическое моделирование и биомеханика в современном университете”. 28 мая-1 июня, 2012. Ростов-на-Дону: Изд.-во Южного федерального университета, 2012. С.10.
7. Саркисян С.О., Алваджян Ш.И. Модели статической деформации анизотропных микрополярных упругих тонких стержней и особенности их прочностных и жесткостных характеристик// Материалы 51-й международной конференции “Актуальные проблемы прочности” 16-20 мая, 2011. Харьков, Украина. Харьков: Изд.-во ННЦ ХФТИ. 2011. С. 196-204.
8. Sargsyan S.H., Alvajyan Sh.I., Hayrapetyan G.S., Margaryan L.M. Mathematical models of micropolar elastic thin bars and plates// Mesomechanics 2011. Book of Abstracts of 13th International Conference of Mesomechanics. Vicenza, Italy. 6- 8 July, 2011.Vicenza. P. 60-63.

Ամփոփում

Ատենախոսական աշխատանքում զարգացվում է Ս. Հ. Սարգսյանի մոտեցումը բարակ տիրույթներում միկրոպոլյար առաձգականության տեսության հարթ եզրային խնդրի ասիմպտոտիկ ինտեգրման մեթոդի և վարկածների մեթոդի համատեղելիության վերաբերյալ՝ միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական ձողերի ստատիկական մաթեմատիկական մոդելների կառուցման նպատակով: Կառուցված մոդելի հիման վրա դիտարկված են միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական ձողերի ծռման դեֆորմացիայի տարբեր խնդիրներ: Տրված է միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական ձողերի ստատիկ կայունության խնդրի դրվածքը և այն քննարկված է: Դիտարկված խնդիրների թվային անալիզի հիման վրա ցույց է տրված ձողի միկրոպոլյար նյութի յուրահատուկ հատկությունները:

Աշխատանքում, մասնավորաբար, ստացվել են հետևյալ արդյունքները.

- Օրթոտրոպ դեպքի համար ընդհանրացված են միկրոպոլյար իզոտրոպ առաձգական ձողերի մաթեմատիկական մոդելների կառուցման հիմքում ընկած Ս. Հ. Սարգսյանի վարկածները [5, 8]:
- Ընդունված վարկածների հիման վրա կառուցված է անկախ պտույտներով և տեղափոխություններով միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական ձողերի մաթեմատիկական մոդելը, որի դեպքում լիովին հաշվի են առնված լայնական սահքային դեֆորմացիաները [5, 7, 8]:
- Կառուցված է անկախ պտույտներով և տեղափոխություններով միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական ձողերի մաթեմատիկական մոդելը, երբ հաշվի չեն առնված լայնական սահքային դեֆորմացիաները [5, 7, 8]:
- Ստացված են միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական ձողերի կաշկանդված պտույտներով և <<փոքր սահքային կոշտությամբ>> մասնավոր մոդելները՝ ինչպես լայնական սահքային դեֆորմացիաների հաշվառմամբ, այնպես էլ առանց դրանց արժևորման [5, 7, 8]:
- Բարակ ուղղանկյուն տիրույթում օրթոտրոպ նյութի համար դիտարկված են անկախ պտույտներով և տեղափոխություններով հարթ միկրոպոլյար առաձգականության տեսության եզրային խնդիրների լուծումների ասիմպտոտիկ հատկությունները: Կառուցված են ներքին իտերացիոն պրոցեսը և սահմանային շերտը: Ուսումնասիրված է ներքին և սահմանային շերտի ասիմպտոտիկ վերլուծությունների համակցման խնդիրը, ուղղանկյան եզրերի վրա որոշված են եզրային պայմանները՝ ինչպես ներքին խնդրի, այնպես էլ սահմանային շերտի համար: Նախնական ասիմպտոտիկ մոտարկման դեպքում, ներքին իտերացիոն պրոցեսի հիման վրա կառուցված է միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական բարակ ձողերի միաչափ ասիմպտոտիկ մոդելը [4]:
- Հիմնավորված են միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական ձողերի ստատիկական կիրառական մոդելի կառուցման համար ընդունված վարկածները [4]:
- Ուսումնասիրված են միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական ձողերի ստատիկական ծռման խնդիրները՝ տարբեր եզրային պայմանների և բեռնավորման պայմանների դեպքում: Բոլոր դիտարկված խնդիրների համար

ստացված են ճշգրիտ լուծումները և դրանց հիման վրա ստացված են թվային արդյունքները [3, 6, 7]:

- Միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական ձողի ծռման վերաբերյալ թվային վերլուծության արդյունքներից հաստատված է միկրոպոլյար նյութի արդյունավետ հատկությունները, ավելի կոնկրետ՝ միկրոպոլյարությունը նյութին տալիս է ավելի մեծ կոշտության և ամրության հատկություններ՝ համեմատած դասական դեպքի հետ [3, 6, 7]:
- Ուսումնասիրված է միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական կենտրոնական սեղմված ձողի ստատիկական կայունության խնդիրը: Էյլերի մեթոդի հիման վրա որոշված է կրիտիկական բեռնվածությունը, որը համեմատված է համապատասխան դասական մեծության հետ: Կատարված է հետևություն այն մասին, որ ընդհանուր, հավասար պայմանների դեպքում նյութի միկրոպոլյարությունն ապահովում է ավելի մեծ կայունություն, քան դասական դեպքում:
- Միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական ձողերի կառուցված մոդելը հնարավորություն է տալիս մոդելն ընդհանրացնել միկրոպոլյար ձողային համակարգի շինարարական մեխանիկայի խնդիրների ուսումնասիրման համար:

Abstract

In dissertation work S.H.Sargsyan's approach of symbiosis of hypotheses method and method of asymptotic integration of the plane (or space) boundary-value problem of micropolar theory elasticity in thin domains is developed, in order to construct mathematical model of statics of micropolar elastic orthotropic thin bars. On the basis of the constructed model various problems of bending deformation of micropolar elastic orthotropic thin bars are studied. Problem of static stability of micropolar orthotropic elastic thin bars is formulated and studied. On the basis of numerical analysis specific properties of the bar micropolar material are revealed.

In this work, particularly, the following new results are established:

- S. H. Sargsyan's hypotheses for the construction of the mathematical model of micropolar elastic isotropic bars are generalized for orthotropic case [5, 8].
- Mathematical model of micropolar elastic orthotropic bars with free fields of displacements and rotations is constructed on the basis of accepted hypotheses, where transverse shears and related deformations are completely taken into account [5, 7, 8].
- Mathematical model of micropolar elastic orthotropic bars with free fields of displacements and rotations is constructed, where transverse shear deformations are neglected [5, 7, 8].
- Private models of micropolar elastic orthotropic bars with constrained rotation and "small shear rigidity" are obtained both with and without consideration of shear deformations [5, 7, 8].
- Asymptotic properties of solutions of boundary value problems of plane micropolar theory of elasticity with free fields of displacements and rotations are studied in a small rectangular area for orthotropic material. Internal iteration process and micropolar boundary layer are constructed. Problem of jointing of internal problem and boundary layers is studied, boundary conditions for internal problem and boundary layers are obtained. On the basis of internal interaction process in initial asymptotic approximation one dimensional model (asymptotic model) of micropolar elastic orthotropic thin bars is constructed [4].
- Accepted hypotheses of construction of one-dimensional applied model of statics of micropolar elastic orthotropic bars are substantiated [4].
- Problems of static bending of micropolar elastic orthotropic bars are studied in case of different boundary and load conditions. Exact solutions for all problems are obtained and on the basis of the mentioned solutions numerical analysis is done [3, 6, 7].
- The main conclusion from the analysis of numerical results of the bending of micropolar elastic orthotropic bars is the establishment of effective properties of micropolar material, specifically, micropolarity gives the material increased stiffness and strength properties in comparison with the classical case [3, 6, 7].
- Problem of static stability of centrally compressed micropolar elastic orthotropic bars is studied. Based on Euler's method critical load is determined, which is compared with the corresponding classical values. The following conclusion is set: in case of general equal conditions micropolarity of the material provides greater stability than in classical case.
- The constructed model of micropolar elastic orthotropic bars allows to generalize the model for studying the problems of structural mechanics of micropolar bars' systems.