

ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՎԱՍԻԼՅԱՆ ՆԱՐԻՆԵ ԳՈՒՐԳԵՆԻ

**ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՍԱՀՔԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՄԱՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ՍԱԼԵՐԻ
ԾՌՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ**

Ա.02.04.- « Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա » մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական
աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ - 2012

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН РА

ВАСИЛЯН НАРИНЕ ГУРГЕНОВНА

**ВЛИЯНИЕ УЧЕТА ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ В ЗАДАЧАХ ИЗГИБА
ПЛАСТИН**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук
по специальности 01.02.04- “Механика деформируемого
твёрдого тела”

ЕРЕВАН - 2012

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում

Գիտական ղեկավար՝ ֆ.մ.գ.թ., պրոֆեսոր Ս.Վ.Բելուբեկյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր Ս.Վ.Սարգսյան
ֆ.մ.գ.թ. Ս.Պ.Ստեփանյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Հայաստանի պետական Ճարտարագիտական
համալսարան(Պոլիտեխնիկ)

Պաշտպանությունը կայանալու է 2012 թ. ապրիլի 27 -ին ժ. 14.00-ին ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի
ինստիտուտում գործող 047 մասնագիտական խորհրդում
(Հասցեն՝ 375019 ք. Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող., 24բ) avsah@mechins.sci.am

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի
գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2012 թ. մարտի 26 -ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական

քարտուղար, ֆ.մ.գ.դ.



Ս.Վ.Սահակյան

Тема диссертации утверждена в Институте механики НАН РА

Научный руководитель: к.ф.-м.н., профессор

М.В.Белубекян

Официальные оппоненты: д.ф.-м.н., профессор С.В.Саркисян
к.ф.-м.н. С.П.Степанян

Ведущая организация: Государственный инженерный
университет Армении

Защита состоится 27 апреля 2012г., 14.00 часов на заседании специализированного
совета 047 в Институте механики НАН РА.

По адресу: 0019 г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б, avsah@mechins.sci.am

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА.
Автореферат разослан 26 марта 2012г.

Ученый секретарь
специализированного совета

д.ф.-м.н.



А.В.Саакян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Развитие современной науки с растущими потребностями в различных областях техники открывает большие аспекты применимости таких конструкций, как тонкостенные упругие пластинки. Эти же потребности, которые целенаправлены на рациональное использование материала и обеспечение прочности конструкции, выявили интерес к теориям, которые отклоняются от гипотез теории Кирхгофа. Для решения задач изгиба, прочности и колебаний пластин были предложены разные подходы.

Широкое распространение получили различные варианты уточненной теории анизотропных пластин, свободных от гипотезы недеформируемых нормалей классической теории. Большой интерес исследователей к построению новых уточненных теорий оболочек и пластин вызван тем, что точность расчета по классической теории не всегда приемлема при рассмотрении важных прикладных задач, охватывающих широкий класс проблем, связанных со специфическими особенностями механических свойств новых анизотропных материалов.

В настоящей диссертационной работе в качестве расчетной модели применяются уравнения и соотношения уточненной теории изгиба анизотропных пластинок на основе гипотез, предложенных С.А.Амбарцумяном и Рейснером-Генки-Миндлином, по варианту В.В.Васильева.

Цель работы. В диссертационной работе исследовано влияние учета поперечных сдвигов на напряженно-деформированное состояние пластинки при изгибе и уточнение граничных условий.

Цель настоящей работы состоит в следующем :

- 1) на основе уточненных теорий С.А.Амбарцумяна и Рейснера определить границы применимости и точности гипотезы Кирхгофа в задачах изгиба пластин под действием распределенной нормальной нагрузки и при конкретных случаях граничных условий,
- 2) предложить новый подход к прикладным задачам изгиба пластин, при различных способах нагружения и опирания по краям,
- 3) выявить новые эффекты, обусловленные учетом поперечных сдвигов,
- 4) удостовериться в точности расчетов путем сравнения с численными решениями, в частности методом конечных элементов.

Научная новизна. Предложены подходы по применению прикладных теорий тонких пластин (теория Кирхгофа, уточненные теории Амбарцумяна, Рейснера) к решению задач изгиба под действием разных нормальных нагрузок, приложенных к лицевой поверхности пластинки. Исследовано влияние уточнения граничных условий на напряженно-деформированное состояние пластин.

Практическая ценность работы. Рассмотренные в диссертационной работе вопросы проектирования тонкостенных элементов конструкций с применением численных методов, которые упрощают расчеты, представляют прикладную важность. Исследование различных задач изгиба пластин, подверженных действию равномерно распределенных нормальных нагрузок, может быть полезно для проектирования конструкций, элементами которых являются тонкие пластинки. Применение метода конечных элементов в различных задачах и практичнее, и современнее.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались:

- на международной конференции «Механика композитов и оптимальное проектирование», посвященной памяти доктора технических наук, профессора В.Ц.Гнуни(1936-2005), 25-28 сентября 2006г., Ереван (Армения);
- on the international conference «Topical problems of Continuum Mechanics» 24-28 September 2007, Tsakhkadzor, Armenia;
- South-Caucasian Summer School, Mathematical Modeling of Thin Structures, June 16-20, 2008, Tsakhkadzor, Armenia;
- On the seminars of prof. Alfred Schmidt «Zentrum für Technomathematik, FB3 Mathematik&Informatik», 2008, Bremen University (Germany);
- На международной школы-конференции молодых ученых “Механика 2009” 28 сентября-1 октября 2009г, Агавнадзор, Армения;
- на семинарах «Волновые процессы» Института механики НАН РА (Ереван, 2006-2011г.),
- на семинарах молодых ученых Института механики НАН Армении (Ереван, 2011г.).

Публикации. По теме диссертационной работы опубликованы 3 научные статьи и 1 тезис, список которых приводится в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы. Работа изложена на 112 страницах машинописного текста, включая 18 рисунков, 9 таблиц, а список литературы содержит 101 наименование.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приведены исторические подходы относящихся к тематике диссертационной работы, обоснована актуальность исследуемых задач и сформулирована цель обсуждаемых в ней вопросов. Дан краткий проблемно-ориентированный обзор основных работ и результатов, тесно примыкающих к исследуемой тематике, краткий обзор литературы и изложено краткое содержание диссертации.

При этом отмечены работы Л.А.Агаловяна, С.А.Амбарцумяна, Г.Е.Багдасаряна, М.В.Белубекяна, Э.В.Белубекяна, В.В.Васильева, Б.Ф.Власова, А.Е.Грина, В.Ц.Гнуни, А.Л.Гольденвейзера, З.Н.Данояна, С.А.Джилавяна, А.С.Калманока, Р.М.Киракосяна, Р.Д.Миндлина, Л.А.Мовсисяна, Ю.Н.Работнова, Э.Рейснера, В.С.Саркисяна, С.В.Саркисяна, С.О.Саркисяна, С.П.Степаняна, С.П. Тимошенко, А.А.Хачатряна и многих других авторов.

В первой главе приведены основные уравнения и соотношения, а также граничные условия, используемые для исследования напряженно-деформированного состояния пластин. **В первом, втором и третьем параграфах** этой главы приведены основные уравнения и соотношения задачи изгиба прямоугольных пластин по классической теории Кирхгофа(К), по уточненным теориям Амбарцумяна(А) и Рейснера(Р), и по методу конечных элементов(МКЭ) соответственно. **В четвертом параграфе** этой главы подробно рассмотрены граничные условия по теориям (К) и (А): жесткая заделка, облегченная заделка, стесненный скользящий контакт, шарнирное закрепление, скользящий контакт, свободное опирание, стесненно свободный и свободный края.

Во второй главе рассматривается изгиб прямоугольной пластинки с распределенной нагрузкой на лицевой поверхности и граничными условиями свободного опирания, шарнирного закрепления и свободного края.

В первом параграфе второй главы рассматривается задача изгиба пластин толщиной $2h$, при синусоидальном распределении нагрузки на лицевой поверхности пластинки

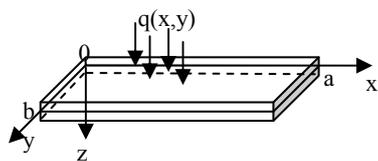


Рис. 1

$q(x, y) = q_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$, $q_0 = const$ (рис.1), по теориям (К) и (МКЭ). Применены граничные условия свободного опирания для всего контура пластинки. Задача изгиба решена по (МКЭ). Решение по теории Кирхгофа известно. На рис.2 приведена функция прогиба квадратной пластинки в графическом виде.

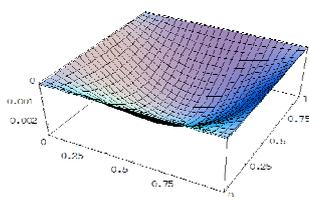


Рис.2. Прогиб пластинки

Для сравнения результатов по двум теориям приведены таблицы.

Из таблицы 1 видно, что значение прогиба в не узловых точках по теории (К) и по (МКЭ) разные, но близкие.

Таблица.1

Прогиб свободно опертой прямоугольной пластины под синусоидальной нагрузкой.

$w(0,0.25a) = \alpha q_0 a^4 / D$	(К)	(МКЭ)
α	0	0.00021808

где $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$ - жесткость пластины. Для перерезывающих сил

полученные результаты близки к результатам аналитических решений для узловых точек. Для остальных точек расхождение не превышает 1% (таблицы 2 и 3).

Таблица 2

Перерезывающая сила свободно опертой прямоугольной пластинки под синусоидальной нагрузкой.

$Q_x(0,0.25a) = \beta q_0 a / 2\pi$	(К)	(МКЭ)
β	-0.1146	-0.1142

Таблица 3

Перерезывающая сила свободно опертой прямоугольной пластинки под синусоидальной нагрузкой.

$Q_y(0,0.25a) = \gamma q_0 a / 2\pi$	(К)	(МКЭ)
γ	0.1146	0.1142

Во втором параграфе исследована задача изгиба пластин толщиной $2h$ под равномерной нагрузкой $q=const$, приложенной нормально к ее лицевой поверхности. Два противоположных края пластинки шарнирно закреплены, а два других свободны (рис.3).

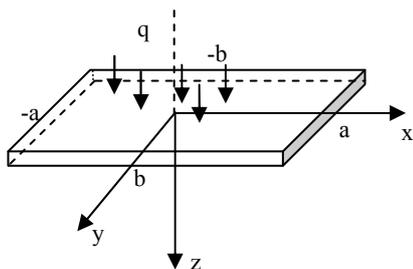


Рис. 3

$$D\Delta^2 w = q \quad (1)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = \pm b \quad (2)$$

$$M_x = 0, \quad \tilde{N}_x = 0; \quad \text{при } x = \pm a \quad (3)$$

В первой части исследована задача по теории Кирхгофа.

Решение уравнения (1), с граничными условиями (2)-(3) известно

$$w = w_0 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left[1 + \frac{\nu S_n}{(1-\nu)\delta_n} ch \lambda_n x + \frac{\nu sh \lambda_n a}{\delta_n} \lambda_n x sh \lambda_n x \right] \cos \lambda_n y \quad (4)$$

где ν -коэффициент Пуассона и

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2b}, w_0 = \frac{64q_0 b^4}{D\pi^5}, \alpha_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^5}, D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \quad (5)$$

$$S_n = (1+\nu) sh \lambda_n a - (1-\nu) \lambda_n a ch \lambda_n a,$$

$$\delta_n = (3+\nu) sh \lambda_n a ch \lambda_n a - (1-\nu) \lambda_n a. \quad (6)$$

Перерезывающие усилия имеют вид

$$N_y(a, b) = q_0 b \left[1 + \frac{16\nu}{(1-\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sh 2\lambda_n a - (1-\nu)\lambda_n a}{(2n-1)^2 \delta_n} \right] \quad (7)$$

Когда края пластинки отдаляются друг от друга, то отличие решения задачи от цилиндрического изгиба зависит от значение коэффициента Пуассона ν .

$$\frac{a}{b} \gg 1, \quad ch \lambda_n a, sh \lambda_n a \approx \frac{1}{2} e^{\lambda_n a}. \quad (8)$$

В приближении (8) получено

$$w(a, y) \approx w_0 \left[1 + \frac{\nu(1+\nu)}{(3+\nu)(1-\nu)} \right] \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \left(1 - \frac{y^2}{5b^2} \right). \quad (9)$$

$$N_y(a, b) \approx \frac{(1+3\nu)}{(1-\nu)} q_0 b \quad (10)$$

При $\nu=0$ полученное решение рассматриваемой пластинки совпадает с решением цилиндрического изгиба. Максимальное отличие получается при $\nu=0.5$.

Во второй части решена задача на основе уточненных теорий (А) и (Р), для которых получено выражение для прогиба

$$w(x, y) = \frac{q_0}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^4} \left\{ -\frac{\nu}{cth \lambda_n a} \left(\left(\lambda_n a cth \lambda_n a - \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) ch \lambda_n x - \lambda_n x sh \lambda_n x \right) \left\{ 3 + \nu + 4\lambda_n^2 \chi h^2 - \right. \right. \\ \left. \left. (1-\nu)\lambda_n a \left[cth \lambda_n a - \frac{1-2\nu}{1-\nu} th \lambda_n a \right] - 4h\lambda_n \sqrt{\chi(1+\lambda_n^2 h^2 \chi)} \frac{th \lambda_n a}{th p_n a} \right\}^{-1} + 1 + \frac{2\chi}{1-\nu} \lambda_n^2 h^2 \right\} \cos \lambda_n y \quad (11)$$

которое при $\chi=2/5$ соответствует решению по теории (А), а при $\chi=1/3$ – решению по теории (Р). В частности в приближении (8) получено выражение для прогиба и перерезывающей силы по теориям (А) и (Р)

$$w(a, y) \approx \frac{q_0}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^4} \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} \left\{ 3 + \nu + 4\lambda_n^2 \chi h^2 - \nu \lambda_n a - 4h\lambda_n \sqrt{\chi(1+\lambda_n^2 h^2 \chi)} cth p_n a \right\}^{-1} + 1 + \frac{2\chi h^2 \lambda_n^2}{1-\nu} \right] \cos \lambda_n y \quad (12)$$

$$N_y(a, b) = \frac{2q_0 b}{\pi} \left[1 - \frac{\nu \left(\frac{\pi \sqrt{\chi} h}{2b} - 1 \right)}{\pi \sqrt{\chi} \frac{h}{b} (3+\nu)} \left(1 + \frac{2\pi \sqrt{\chi} h}{(3+\nu)b} \right) \right]. \quad (13)$$

Найдены прогибы на краю пластинки для конкретного случая

$$q = q_0 \cos \lambda_1 y, \quad \frac{h^2}{b^2} \ll 1 \quad (14)$$

Для этого случая получены прогиб пластинки в середине свободного края (т. е. максимальный прогиб пластинки) и перерезывающее усилие в угловой точке пластины.

$$w(a,0) = \frac{16q_0 b^4}{\pi^4 D} \left[1 + \frac{\nu(1+\nu)}{(1-\nu)(3+\nu)} \left(1 + \frac{2\pi\sqrt{\chi} h}{b(3+\nu)} \right) \right], \quad (15)$$

$$N_y(a,b) = \frac{2q_0 b}{\pi} \left[1 - \frac{\nu \left(\frac{\pi\sqrt{\chi} h}{2b} - 1 \right)}{\pi\sqrt{\chi} \frac{h}{b} (3+\nu)} \left(1 + \frac{2\pi\sqrt{\chi} h}{(3+\nu)b} \right) \right]. \quad (16)$$

Прогиб в центре пластины, по теории Кирхгофа, учитывая (8) имеет вид

$$w(0,0) \approx \frac{64q_0 b^4}{\pi^5 D}. \quad (17)$$

По уточненной теории для прогиба пластины в ее центре получена приближенная формула

$$w(0,0) \approx \frac{q_0}{D} \frac{64b^4}{\pi^5} \left(1 + \frac{\pi^2 \chi h^2}{2(1-\nu)b^2} \right). \quad (18)$$

При принятом выше допущении (14) прогиб пластины в центре по уточненной теории имеет вид (17).

Получено, что максимальный прогиб пластинки по теории Кирхгофа для рассматриваемой задачи имеет точность порядка квадрата относительной толщины.

Получено, что выражение прогиба пластинки на свободном краю по уточненной теории после пренебрежения квадрата относительной толщины содержит еще и слагаемое содержащее множитель относительной толщины, что и дает уточнение этой задачи. Прогибы в центре пластинки рассчитанные по теории Кирхгофа и по уточненной теории совпадают для удлиненной пластинки.

В третьем параграфе второй главы решена задача изгиба пластин, когда два противоположных края пластинки шарнирно закреплены, а два других свободны для нагрузки интенсивностью $q_0 = const$, приложенной нормально к лицевой поверхности и равномерно распределенной по полоске параллельной краю пластины, симметрично относительно оси x (рис. 4).

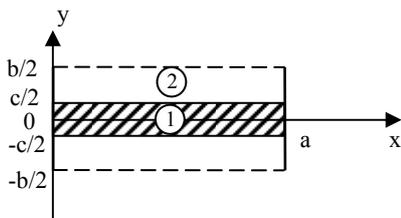


Рис. 4

$$q(x,y) = \begin{cases} 0 & \frac{c}{2} < y < \frac{b}{2} \quad \text{и} \quad -\frac{b}{2} < y < -\frac{c}{2} \\ q_0 = const & 0 \leq y < \left| \frac{c}{2} \right| \end{cases} \quad (19)$$

Исследуется пластинка постоянной толщиной $2h$. Прогиб пластины удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$D\Delta^2 w(x,y) = q(x,y) \quad (20)$$

Граничные условия имеют вид

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, a \quad (21)$$

$$M_x = 0, \quad \tilde{N}_x = 0; \quad \text{при } y = \pm b/2 \quad (22)$$

Из условий задачи следует, что функция прогиба симметрична относительно оси y и по этому решение может быть рассмотрено в области $0 \leq y \leq b/2$. Исследуемая область разделена на две части исходя из вида нагрузки: 1) $0 \leq y \leq c/2$, 2) $c/2 < y \leq b/2$. Решение задачи (20)-(21)-(22) имеет вид

$$w^{(1)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{q_0 a_n}{D \lambda_n^4} + A_n ch \lambda_n y + B_n yh \lambda_n y \right] \sin \lambda_n x \quad (23)$$

$$w^{(2)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ C_{1n} [(\delta_{2n} + y) ch \lambda_n y + \varepsilon_{1n} sh \lambda_n y] + C_{2n} [\varepsilon_{2n} ch \lambda_n y + (\delta_{1n} + y) sh \lambda_n y] \} \sin \lambda_n x \quad (24)$$

где

$$\varepsilon_{1n} = \frac{2 sh^2 \zeta_n + (1+\nu) ch^2 \zeta_n}{(1-\nu) \lambda_n}; \quad \varepsilon_{2n} = -\frac{2 ch^2 \zeta_n + (1+\nu) sh^2 \zeta_n}{(1-\nu) \lambda_n}; \quad (25)$$

$$\delta_{1n} = \frac{(3+\nu) sh \zeta_n ch \zeta_n - (1-\nu) \zeta_n}{(1-\nu) \lambda_n}; \quad \delta_{2n} = -\frac{(3+\nu) sh \zeta_n ch \zeta_n + (1-\nu) \zeta_n}{(1-\nu) \lambda_n}.$$

$\lambda_n = \pi n/a$, $\zeta_n = \lambda_n b/2$, а индексами «1» и «2» обозначены прогибы в указанных областях (рис. 4).

Неизвестные коэффициенты A_n, B_n, C_{1n}, C_{2n} найдены из условий непрерывности на линии $y = c/2$: должны быть непрерывны прогиб пластинки, угол поворота вокруг оси x , момент и обобщенная перерезывающая сила.

Исследованно решение задачи в точках $(a/2, 0)$ и $(a/2, b/2)$, для которых прогиб пластинки получен в следующем виде

$$w\left(\frac{a}{2}, 0\right) = \frac{q_0}{4D(1-\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^4 \delta_{1n}} \left[(\beta_n - 4\zeta_n)(1-\nu)^2 ch \beta_n + \beta_n(1-\nu)(3+\nu) ch(\beta_n - 2\zeta_n) - 2\left((3 - \beta_n \zeta_n(1-\nu))^2 + \zeta_n^2(1-\nu)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \nu^2 \right) sh \beta_n + (1-\nu)(2\zeta_n(1-\nu) + (3+\nu) sh(\beta_n - 2\zeta_n) + (3+\nu) sh 2\zeta_n) \right] \sin \frac{\pi n}{2}; \quad (26)$$

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \frac{q_0}{D(1-\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^4 \delta_{1n}} \left[\beta_n(1-\nu) ch \beta_n ch \zeta_n - (3-\nu) sh \beta_n ch \zeta_n - \zeta_n(1-\nu) sh \beta_n sh \zeta_n \right] \sin \frac{\pi n}{2}. \quad (27)$$

где $\beta_n = \frac{\lambda_n c}{2}$.

Поскольку полученные соотношения сложны, исследованы три конкретных случая для различных размеров ширины пластины и ширины полосы приложенной силы.

1. $\zeta_n \gg 1$

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = -\frac{q_0}{D(3+\nu)(1-\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^4} \left[\frac{(3-\nu) sh \beta_n - \beta_n(1-\nu) ch \beta_n}{sh \zeta_n} \right] \sin \frac{\pi n}{2} = \\ = -\frac{q_0}{D(3+\nu)(1-\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} a_{2k-1}}{\lambda_{2k-1}^4} \left[\frac{(3-\nu) sh \beta_{2k-1} - \beta_{2k-1}(1-\nu) ch \beta_{2k-1}}{sh \zeta_{2k-1}} \right] \quad (28)$$

2. $\zeta_n \gg 1$ и $\beta_n \gg 1$

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = -\frac{q_0}{D(3+\nu)(1-\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} a_{2k-1}}{\lambda_{2k-1}^4} \left[\frac{(3-\nu)sh\beta_{2k-1} - \beta_{2k-1}(1-\nu)ch\beta_{2k-1}}{sh\zeta_{2k-1}} \right] \quad (29)$$

3. $\zeta_1 \ll 1$ и $\beta_1 \ll 1$

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \frac{q_0 a_1}{2D\lambda_1^4(1-\nu^2)} \left(\frac{2\beta_1}{\zeta_1} + (1-\nu)\beta_1 \right) \quad (30)$$

Задача решена по теории Кирхгофа.

В **последнем параграфе** второй главы исследуется задача изгиба пластин под действием произвольной нормальной нагрузки (рис. 5).

Задача решена по теории Кирхгофа для граничных условий шарнирного закрепления при $x = 0, a$ (21) и свободного края при $y = \pm b/2$ (22).

В первой части найдены решения прогибов пластинки независимо от вида нагрузки

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2D\lambda_n^3} \int_0^y q_n(t) [sh\lambda_n(t-y) - \lambda_n(t-y)ch\lambda_n(t-y)] dt + A_n ch\lambda_n y + B_n y sh\lambda_n y \right] \sin \lambda_n x \quad (31)$$

где A_n и B_n коэффициенты найдены из условий (22).

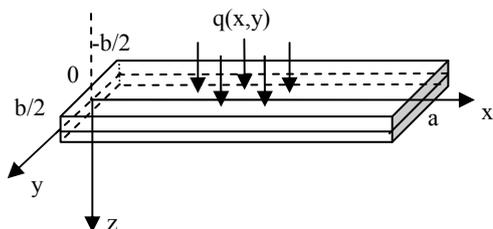


Рис. 5

Во второй части исследованы частные случаи:

- 1) нагрузка равномерно распределена по всей поверхности,
- 2) исследуется случай распределении нагрузки, когда она распределена не по всей области, а по полоске, как и в задаче третьего параграфа этой главы.

Для последнего случая, чтобы сравнить с результатами предыдущего параграфа исследовано значение прогиба в определенных точках пластинки: $(a/2; 0)$ и $(a/2; b/2)$.

Приведены таблицы прогибов для определенных параметров пластинки и для выше упомянутых частных случаев распределения нагрузки, рассчитанных с помощью программы Comsol (Таблица 4 и 5).

Таблица 4

Прогиб прямоугольной пластинки шарнирно закрепленной по двум сторонам и свободным по двум другим, под равномерной нагрузкой ($E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $h = 0.05 \text{ м}$, $q_0 = 2 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0.3$).

	a=2, b=1 (144 элем.)	a=2, b=1 (316 элем.)	a=1, b=10, 280(элем.)
Аналитическое решение (4)	0.0197721	0.0197721	0.00142188
COMSOL	0.0191294	0.01918683	0.001132965

Таблица 5

Прогиб прямоугольной пластинки шарнирно закрепленной по двум сторонам и свободным по двум другим, под равномерной нагрузкой действующей на полоске с шириной "с"
($a = 1 \text{ м}$, $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $h = 0.05 \text{ м}$, $q_0 = 2 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0.3$).

	c=0.25, b=10	c=0.25, b=20	c=0.5, b=10	c=0.5, b=20	c=0.75, b=10	c=0.75, b=20
Аналитическое решение (26)	0.0271593	0.0271593	0.0516711	0.0516711	0.0724065	0.0724065

COMSOL	0.028096909	0.028043343	0.05231867	0.05236702	0.07317729	0.07307878
--------	-------------	-------------	------------	------------	------------	------------

В третьем главе рассмотрены напряженно-деформированные состояния изгибаемой пластинки.

В первом параграфе рассмотрена изотропная пластинка постоянной толщиной $2h$ шарнирно закрепленной по двум противоположным сторонам и свободным по двум другим. Оси x и y расположены в срединной плоскости пластины, а ось z нормально к этой плоскости так, что $-h \leq z \leq h$. Размеры пластины и система координат видны на *рис.5*. Приведены численные результаты решения задачи по теории (К), по уточненным теориями (А) и (Р) и по (МКЭ) (с помощью программы ANSYS). Задача изгиба пластин по теории (К) имеет вид (20)-(21)-(22), где $q(x, y) = const$.

Получено решение в следующем виде

$$w(x, y) = \frac{q_0 a^4}{D} \left(\frac{x^4 - 2ax^3 + a^3x}{24a^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ch(\lambda_n y)}{a^4 \lambda_n^4 ch(\lambda_n b/2)} (A_n + B_n y \lambda_n th(\lambda_n y)) \sin(\lambda_n x) \right) \quad (32)$$

где $\lambda_n = \pi n/a$, $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$, а A_n и B_n найдены из условия свободного края.

Уравнения задачи по теориям (А) и (Р) имеет вид

$$\Delta\Phi = -\frac{3}{4h}q, \quad \Delta\Psi - \frac{1}{\chi h^2}\Psi = 0, \quad -D\Delta w + \frac{8\chi h^3}{3(1-\nu)}\Delta\Phi - \frac{4h}{3}\Phi = 0, \quad (33)$$

с граничными условиями шарнирного закрепления

$$w = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{2\chi}{G} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} \right) = 0, \quad \text{при } x = 0, a. \quad (34)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x} = 0.$$

и свободного края

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{2\chi}{G} \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + (1-\nu) \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} \right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\chi}{G} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} \right) \right] = 0,$$

$$\text{при } y = \pm b/2 \quad (35)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x} = 0.$$

Установлено решение задачи (33)-(34)-(35)

$$\Phi(x, y) = q_0 a \sum_{n=1}^N \left(\frac{3a_n}{4ha\lambda_n^2} + D_n \frac{ch(\lambda_n y)}{ch(\lambda_n b/2)} \right) \sin(\lambda_n x)$$

$$w(x, y) = \frac{q_0 a^4}{D} \sum_{n=1}^N \left(\frac{a_n}{a^4 \lambda_n^4} \left(1 + \frac{2\lambda_n^2 h^2}{1-\nu} \right) + A_n \frac{ch(\lambda_n y)}{ch(\lambda_n b/2)} + D_n \frac{2hy sh(\lambda_n y)}{3a^3 \lambda_n ch(a\lambda_n)} \right) \sin(\lambda_n x)$$

$$\Psi(x, y) = q_0 a \sum_{n=1}^N F_n \frac{sh(p_n y)}{ch(p_n b/2)} \cos(\lambda_n x) \quad (36)$$

где $p_n = \sqrt{5/2h^2 + \lambda_n^2}$. A_n, D_n, F_n неизвестные коэффициенты, найденные из удовлетворения граничных условий свободного края (35). В отличие от теории Кирхгофа, в уточненной теории на краях задаются три граничных условия, как и предлагал Пуассон. На рис.6 приведены графики интенсивностей крутящих моментов M_{xy} (на стороне $x=0$), M_{yx} (на стороне $y=-b/2$), и перерезывающих сил Q_x (на крае $x=0$) рассчитанных по теории (К) (а, б, в) и по теории(А) для пластин толщиной $h/a=0.1$ (г, д, е) и $h/a=0,01$ (ж, з, и). Интенсивности крутящих моментов M_{xy} и M_{yx} в углах пластины, рассчитанных по теории Кирхгофа, на шарнирно закрепленных и свободных краях одинаковы и равны $0.024 q_0 a^2$. Крутящие пары в углах пластины, согласно интерпретации Томсона и Тэта, создают сосредоточенные силы по величине равные M_{xy} и M_{yx} . Совместно с распределёнными реакциями от обобщенных перерезывающих сил они уравнивают заданную нагрузку в уравнении (20).

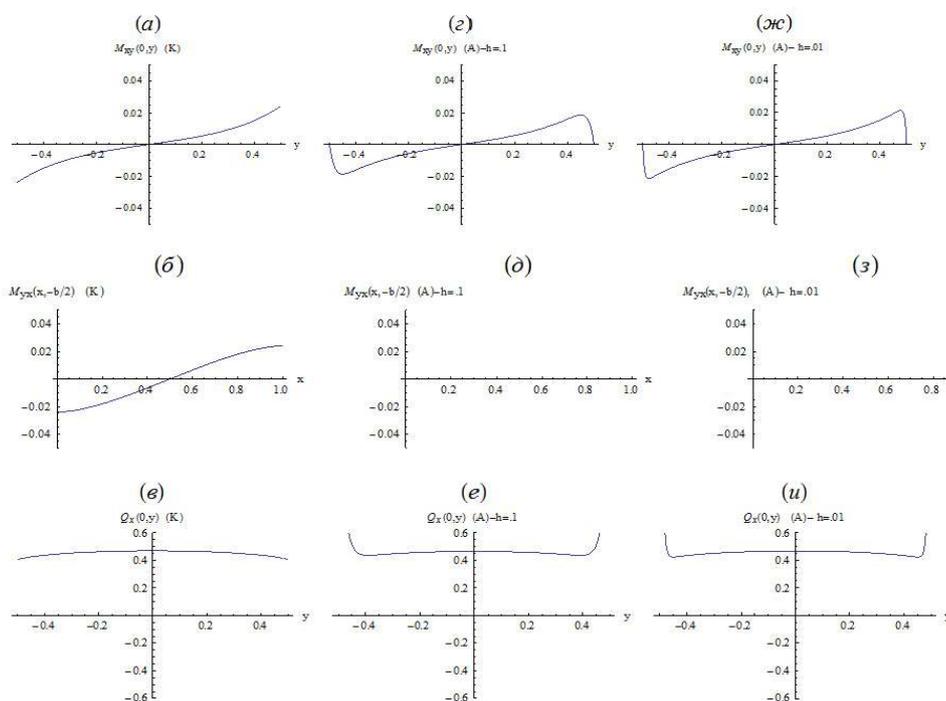


Рис. 6

В отличие от теории Кирхгофа величина крутящих моментов, рассчитанная по уточнённой теории, равна нулю на свободных сторонах и в углах пластины(рис.6 г, д, ж, з). Интенсивности перерезывающих сил рассчитанных по теории Кирхгофа и по уточнённой теории отличаются только в окрестности углов пластины на длине равной толщине пластины h (рис.6 в, е, и). С уменьшением толщины пластины величина интенсивности перерезывающих сил в углах линейно возрастает.

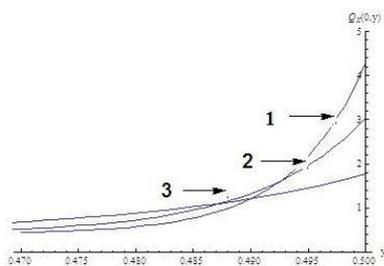


Рис.7

На рис.7 показаны графики перерезывающих сил в углу для пластин толщиной $h/a=0.01, 0.015$ и 0.03 кривые 1, 2, 3 соответственно. В углах значение перерезывающих сил рассчитанных по уточнённой теории поднимаются вверх и интеграл этой функции равна интенсивности крутящих моментов.

Силы, действующие на этих участках длиной h , расположенных на концах шарнирно опёртых сторон пластины, равны

$$F = \int_{b/2-h}^{b/2} Q_x(0, y) dy. \quad (37)$$

В таблице 6 приведены значения сил F для пластин различных толщин.

Приведены таблицы, где видно, что для пластинки с малой толщиной, сила, действующая на примыкающей к углу участок шарнирно опёртого края пластины, не зависит от толщины пластины, мало отличается от крутящего момента в углах пластины и фактически является сосредоточенной силой. Однако в уточнённой теории эта сила действует только на шарнирно опёртой стороне, поскольку на свободной стороне крутящие моменты равны нулю. В теории Кирхгофа, поскольку невозможно приравнять крутящие моменты на свободных сторонах нулю, величина сосредоточенных сил в углах два раза больше крутящего момента.

Таблица 6

Значения сил F для пластин с различными толщинами.

h/a	0.01	0.001	0.0001	0.00001
F/qab	0.0274	0.0235	0.0231	0.023

Таблица 7

Прогиб прямоугольной пластинки в единицах $q_0 a^4/D$ шарнирно закрепленной на двух сторонах и свободной на двух других, под равномерной нормальной нагрузкой q_0 .

Координаты точек	ANSYS(17 эл.)	ANSYS(44 эл.)	ANSYS(88 эл.)	Решение по (32)	Решение по уточненной теории
$(0, b/2)$	0	0	0	0	0
$(a/2, b/2)$	0.0114636	0.0139628	0.0147333	0.01509	0.0168975
$(a, b/2)$	0	0	0	0	0
$(a/2, -b/2)$	0.0114636	0.0139628	0.0147333	0.01509	0.0168975
$(a/2, 0)$	0.0104555	0.012381	0.0129071	0.01309	0.0145393

В таблице 7 показаны результаты расчетов прогибов. В диссертационной работе приведены и таблицы перерезывающей силы для прямоугольной пластинки шарнирно закрепленной по двум сторонам и свободный по двум другим, под равномерно нормальной нагрузкой.

Во втором параграфе исследовано напряженно-деформированное состояние полубесконечной пластинки-полосы постоянной толщины $2h$, занимающей область $0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq b$, (рис.8), в окрестности закрепленного края. На пластинку действует распределенная нормальная нагрузка интенсивностью $q(y)$.

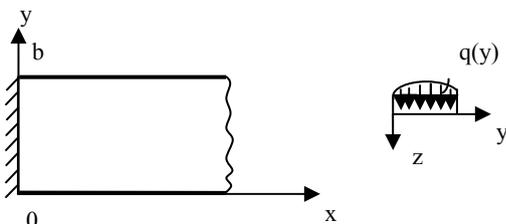


Рис. 8. Полубесконечная пластинка-полоска

Задача рассмотрена на основе теории (А). Исследуются два варианта граничных условий для закреплений края: жесткая заделка и облегченная заделка, которые по трехмерной постановке будут соответственно

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0, \quad (38)$$

$$u_1 = u_3 = 0, \sigma_{12} = 0. \quad (39)$$

Как известно оба варианта в теории Кирхгофа приводятся к одинаковым граничным условиям жесткого закрепления

$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}=0. \quad (40)$$

Это известная задача Надаи в диссертационной работе решена по уточненной теории. Для уточненной теории граничные условия будут иметь следующий вид:

$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{4}{5G} \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad (41)$$

$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{4}{5G} \varphi_1 = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0, \quad \text{при } x = 0 \quad (42)$$

Теория (А), учитывающая поперечные сдвиговые деформации, позволяет выявить различие в граничных условиях жесткой заделки и облегченной заделки.

Для исследования напряженно-деформированного состояния в окрестности закрепленной кромки пластинки применяется подход Надаи, согласно которому, для достаточно удлиненных пластин, можно пренебречь влиянием граничных условий на закрепленной кромке.

Получено искомое решение задачи для граничных условий жесткой заделки (41)

$$w = \frac{q_0}{D \lambda_1^4} \left[(1 + \zeta_1)(1 - e^{-\lambda_1 x}) - R_1 \lambda_1 x e^{-\lambda_1 x} \right] \sin \lambda_1 y,$$

$$\varphi_1 = \frac{3q_0}{2\lambda_1 h} \left\{ R_1 e^{-\lambda_1 x} - \frac{1}{2} \lambda_1 \eta_1^{-1} [1 + 2(1 - \lambda_1 \eta_1^{-1}) \zeta_1]^{-1} e^{-\eta_1 x} \right\} \sin \lambda_1 y, \quad (43)$$

$$\varphi_2 = \frac{3q_0}{4h \lambda_1} \left\{ 1 + [1 + 2(1 - \lambda_1 \eta_1^{-1}) \zeta_1]^{-1} e^{-\eta_1 x} - 2R_1 e^{-\lambda_1 x} \right\} \cos \lambda_1 y.$$

и облегченной заделки (42)

$$w = \frac{q_0}{D \lambda_1^4} (1 + \zeta_1) \left[1 - \left(1 + \frac{\lambda_1 x}{1 + 2\zeta_1} \right) e^{-\lambda_1 x} \right] \sin \lambda_1 y,$$

$$\varphi_1 = \frac{3q_0}{2\lambda_1 h} \frac{1 + \zeta_1}{1 + 2\zeta_1} e^{-\lambda_1 x} \sin \lambda_1 y, \quad (44)$$

$$\varphi_2 = \frac{3q_0}{4\lambda_1 h} \left(1 - 2 \frac{1 + \zeta_1}{1 + 2\zeta_1} e^{-\lambda_1 x} \right) \cos \lambda_1 y$$

С помощью (43) и (44) можно определить все характерные величины задачи. Выражение для прогиба w будет совпадать с теорией Кирхгофа, с точностью $\zeta_1 \ll 1$ для обоих случаев закрепления края. С этой же точностью совпадают также выражения для изгибающего момента.

Для случая жесткой заделки получено максимальное значение перерезывающей силы $\left(N_1 = \frac{4h}{3} \varphi_1 \right)$, с точностью $\zeta_1 \ll 1$,

$$\max N_1 = N_1(0, b/2) \approx \frac{2q_0}{\lambda_1} \left(1 - \frac{\lambda_1 h}{\sqrt{10}} \right), \quad (45)$$

что дает уже отличие от теории Кирхгофа порядка h/b . Для перерезывающей силы $\left(N_2 = \frac{4h}{3} \varphi_2 \right)$ в

угловых точках получено

$$N_2(0,0) = N_2(0,b) = 0 \quad (46)$$

что дает существенное отличие по сравнению с соответствующими выражениями по теории Кирхгофа.

Выражения для перерезывающей силы в случае облегченной заделки имеют вид

$$\max N_1 = N_1(0, b/2) = \frac{2q_0 b}{\pi} \frac{1 + \zeta_1}{1 + 2\zeta_1}, \quad (47)$$

$$N_2(0, b) = -N_2(0, 0) = \frac{q_0 b}{\pi(1 + 2\zeta_1)} \quad (48)$$

Выражение (47), (48) также при $\zeta_1 \ll 1$ совпадают с результатами Надаи.

Приведенные сравнения показывают, что для граничных условиях облегченной заделки результаты классической теории совпадают с результатами уточненной теории, если пренебречь влияние квадрата относительной толщины. Для случая жесткой заделки при пренебрежении членом квадрата относительной толщины получаем отличие порядка относительной толщины, что и дает уточнение задачи Надаи для граничных условий жесткой заделки.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

В диссертационной работе исследовано напряженно-деформированное состояние пластин при действии распределенной нагрузки.

1. Решена задача изгиба пластин при синусоидальном давлении с граничными условиями свободного опирания для всего контура пластинки по теории Кирхгофа и по методу конечных элементов. Приведены графики для прогиба и перерезывающих сил. Показано, что в узловых точках результаты совпадают. Для остальных точек расхождение не превышает 1%. При увеличении числа разбиения пластины, решение задачи изгиба пластин (МКЭ) приближается к аналитическому решению.

2. Исследована задача изгиба пластин под действием равномерно распределенной нормальной нагрузки, когда два противоположных края пластинки шарнирно закреплены, а два других свободны, по теории Кирхгофа и по уточненной теории.

- Установлено, что в отличие от большинства задач, для которых точность имеет порядок квадрата относительной толщины, максимальный прогиб пластинки по уточненной теории для рассматриваемой задачи имеет точность порядка относительной толщины. Перемещение в центре пластинки имеет точность квадрата относительной толщины.
 - У пластин малой толщины, сила, действующая на примыкающей к угловому участку шарнирно опёртого края пластины, не зависит от толщины, мало отличается от интенсивности крутящего момента в углах и фактически является сосредоточенной силой. Однако в уточнённой теории эта сила действует только на шарнирно опёртой стороне, поскольку на свободной стороне крутящие моменты равны нулю.
 - Получено решение задачи изгиба пластин по программе ANSYS, которое решает по теории Кирхгофа и сравнивается решение задачи с решением по уточненной теории, но разница мала (при уточненной теории совпадение 87-89%, при теории Кирхгофа — 98.6-99.7%).
3. По теории Кирхгофа решена задача изгиба пластин, когда два противоположных края пластинки шарнирно закреплены, а два других свободны для произвольной нормальной нагрузки. Рассмотрены частные случаи: 1) равномерная нагрузка распределена по всей области, 2) равномерная нагрузка распределена не по всей области, а по полоске параллельной свободному краю пластины и симметрично относительно оси x . Исследовано значение прогиба в определенных точках пластинки. Приведены таблицы с решением этих задач с помощью программы Comsol (которая работает по уточненной теории). Сравнение полученных решений указывает на достоверность полученных результатов.

4. Исследовано напряженно-деформированное состояние полубесконечной пластинки–полосы в окрестности закрепленного края под действием распределенной нагрузки. Рассмотрена задача на основе уточненной теории. Рассмотрены два вида граничных условий для закрепления края: жесткая заделка и облегченная заделка. Оба указанных варианта в теории Кирхгофа приводят к одинаковым граничным условиям жесткого закрепления. Приведены сравнения, которые показывают, что результаты задачи Надаи совпадают с результатами, полученными по уточненной теории при граничных условиях облегченной заделки, с точностью пренебрежения квадратом относительной толщины, а для случая жесткой заделки при пренебрежении квадрата относительной толщины получаем отличие порядка относительной толщины.

Список научных работ по теме диссертации

1. Василян Н.Г. Применение метода конечных элементов в задаче изгиба пластинки. Международная Конференция «Механика Композитов и Оптимальное Проектирование» посвященная памяти доктора технических наук, профессора В.Ц. Гнуни(1936-2005), Программа и тезисы докладов. 25-28 сентября 2006, Ереван, Армения, с.32.
2. Саноян Ю.Г., Василян Н.Г. Исследование перерезывающих сил в задачах изгиба пластин шарнирно закрепленных по двум противоположным сторонам и свободных по двум другим. //Актуальные проблемы механики сплошной среды, труды международной конференции, посвященной 95-летию академика НАН Армении Н.Х.Арутюняна 25-28 сентября 2007, Цахкадзор, Армения. с.364-367
3. Василян Н.Г. Задача изгиба пластин с равномерно-нормальной нагрузкой, когда два противоположных края пластинки шарнирно закреплены, а два других свободны. Изв. НАН Армении, Механика. 2007, т. 60. N4, с.37-42.
4. Антонян С.С., Белубекян М.В., Василян Н.Г. Исследование напряженно-деформированного состояния изгибаемой пластинки в окрестности закрепленного края. Сборник трудов международной школы-конференции молодых ученых. Механика 2009. 27 сентября - 1 октября, Агхавнадзор, Армения. с. 152-155.

ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԱՐԴՅՈՒՆՔՆԵՐԸ

Ատենախոսության մեջ հետազոտված է լայնական սահքերի հաշվառման ազդեցությունը սալերի լարվածադեֆորմացիոն վիճակի և եզրային պայմանների վրա ծոման խնդիրներում: Առաջարկված են տարբեր նորմալ բեռների ազդեցության տակ սալերի ծոման խնդիրների լուծման տարբեր մոտեցումներ (Գ.Ռ.Կիրիսոֆի տեսություն, Ս.Ա.Համբարձումյանի, Է.Ռեյսների ճշգրտված տեսություններ): Խնդիրների լուծման արդյունքները համեմատված են թվային լուծումների հետ, մասնավորապես՝ վերջավոր էլեմենտների մեթոդով (ՎԷՄ) ստացված արդյունքների հետ համոզվելու համար ստացված արդյունքների ճշտության մեջ:

Ատենախոսությունը բաղկացած է նախաբանից, երեք գլխից, եզրակացությունից և գրականությունից:

Առաջին գլխի առաջին, երկրորդ և երրորդ պարագրաֆներում բերված են ուղղանկյուն սալի ծոման խնդրի լուծման համար անհրաժեշտ հիմնական հավասարումներն ու առնչությունները ըստ Կիրիսոֆի(Կ) տեսության, ըստ Համբարձումյանի(Հ), Ռեյսների(Ռ) ճշգրտված տեսությունների և ըստ վերջավոր էլեմենտների մեթոդի: Այս գլխի **չորրորդ պարագրաֆում** բերված են եզրային պայմանները՝ ըստ (Կ) և (Հ) տեսության, որոնք կիրառվել են ատենախոսության մեջ դիտարկված խնդիրներում:

Երկրորդ գլխի առաջին պարագրաֆում դիտարկված է սինուսիդային բաշխված բեռի ազդեցության տակ չորս եզրն ազատ հենված $2h$ հաստությամբ սալի ծոման խնդիրը ինչպես Կիրիսոֆի տեսությամբ, այնպես էլ՝ ըստ վերջավոր էլեմենտների մեթոդի: Բերված են ճկվածքի և կտրոդ ուժերի գրաֆիկները: Ցույց է տրված, որ հանգուցային կետերում արդյունքները համընկնում են: Մնացած կետերում տարբերությունները չեն գերազանցում 1%: Ավելի շատ մասերի տրոհելու դեպքում կստանանք անալիտիկ լուծմանն ավելի մոտ արդյունքներ:

Երկրորդ գլխի երկրորդ պարագրաֆում ուսումնասիրված է հավասարաչափ բաշխված բեռի ազդեցության տակ սալի ծոման խնդիրը, երբ սալի երկու հանդիպակաց կողմերը հողակապորեն ամրացված են, իսկ մյուս երկուսը ազատ են (Կիրիսոֆի տեսությամբ և ճշգրտված տեսությամբ): Ստացված է, որ երբ սալի հողակապորեն ամրացված եզրերն իրարից հեռանում են, խնդրի լուծման տարբերությունը գլանային ծոման լուծումից պայմանավորված է լինում ν Պուասոնի գործակցով. $\nu=0$ դեպքում լուծումը համընկնում է գլանային ծոման լուծման հետ և մեծագույն տարբերությունը ստացվում է $\nu=0.5$ դեպքում: Ստացված է նաև, որ սալի ճկվածքի մեծագույն արժեքը հաշված ճշգրտված տեսությամբ, ունի հարաբերական հաստության կարգի ճշտություն՝ ի տարբերություն բազմաթիվ խնդիրների, որոնցում ճշտությունը հարաբերական հաստության քառակուսու կարգի է: Սալի կենտրոնում տեղափոխությունը ունի հարաբերական հաստության քառակուսու ճշտություն:

Երկրորդ գլխի երրորդ պարագրաֆում ուսումնասիրված է երկու եզրը հողակապորեն ամրացված, երկու եզրն ազատ սալի ծոման խնդիրը՝ բաշխված բեռի ազդեցության տակ, երբ բեռն ազդում է x -երի առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ, ազատ եզրին զուգահեռ շերտով: Խնդիրը լուծված է Կիրիսոֆի տեսությամբ: Հաշվված են ճկվածքի արժեքները ազատ եզրի միջնակետում (մաքսիմալ ճկվածքը) և անկյունային կետում: Կատարված են մոտավորություններ սալի կողմերի և ուժի ազդման տիրույթի լայնության փոխհարաբերության նկատմամբ:

Եվ երկրորդ գլխի վերջին՝չորրորդ պարագրաֆում Կիրիսոֆի տեսությամբ լուծված է կամայական բեռի ազդեցության տակ սալի ծոման խնդիրը, երբ սալի երկու հանդիպակաց կողմերը հողակապորեն ամրացված են, մյուս երկուսը՝ ազատ: Խնդիրը լուծելուց հետո դիտարկված են մասնավոր դեպքեր. 1)բեռը հավասարաչափ է բաշխված ամբողջ

մակերևույթով, 2)բեռը հավասարաչափ է բաշխված ոչ թե ամբողջ մակերևույթով, այլ x -երի առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ և ազատ եզրին զուգահեռ շերտով: Ուսումնասիրված է ճկվածքի արժեքը սալի որոշակի կետերում, և համեմատված են արդյունքների հետ, երբ բեռն իսկզբանե դիտարկված է վերը նշված դեպքերում: Բերված են նաև աղյուսակներ տվյալ խնդրի լուծման արդյունքներով, ըստ Comsol ծրագրի, որն աշխատում է ճշգրտված տեսությամբ, ըստ որի՝ ստացված լուծումները ձգտում են անալիտիկ տեսությամբ ստացված արդյունքներին, ինչը և ցույց է տալիս, որ ստացված արդյունքները ճիշտ են:

Երրորդ գլխի առաջին պարագրաֆում դիտարկված է հավասարաչափ բաշխված բեռի ազդեցության տակ երկու եզրն հողակապորեն ամրացված, մյուս երկուսն ազատ սալի ծոման խնդիրը: Խնդիրն լուծված է ճշգրտված տեսությամբ՝ հիմք ընդունելով (Հ) և (Ռ) տեսությունները:

- Ստացված է, որ բարակ սալերի համար, ըստ Կիրխոֆի տեսության, հողակապորեն ամրացված եզրին մոտ կետերում ազդող ուժը քիչ է տարբերվում այդ տեղամասում պտտման մոմենտի ինտենսիվությունից և փաստորեն հանդիսանում է կենտրոնացված ուժ: Մինչդեռ ճշգրտված տեսությունում այդ ուժը ազդում է միայն հողակապորեն ամրացված եզրի վրա, քանի որ ազատ եզրի վրա պտտման մոմենտները հավասար են զրոյի:
- Ստացված է սալի ծոման խնդրի լուծումը ANSYS ծրագրով, որը լուծում է խնդիրը համաձայն (Կ) տեսության, և համեմատված է ճշգրտված տեսությամբ ստացված արդյունքների հետ: Տարբերությունները քիչ են. ճշգրտված տեսության դեպքում համընկնումը 87-89% է, Կիրխոֆի տեսության դեպքում՝ 98.6-99.7%:

Եվ վերջապես **երրորդ գլխի երկրորդ պարագրաֆում** ուսումնասիրված է բաշխված բեռի ազդեցության տակ կիսանվերջ սալ-շերտի լարվածադեֆորմացիոն վիճակը ամրացված եզրի շրջակայքում՝ ըստ ճշգրտված տեսության: Դիտարկված են երկու եզրային պայմաններ՝ կոշտ և թեթև ամրացված եզրեր: Երկուսն էլ Կիրխոֆի տեսությամբ բերվում են մեկ եզրային պայմանի, իսկ ճշգրտված տեսությամբ երկու տարբեր եզրային պայմաններ են: Բերված են համեմատություններ, համաձայն որոնց՝ դասական տեսությամբ և ճշգրտված տեսությամբ ստացված լուծումները համընկնում են թեթև ամրացված եզրի դեպքում սալի հարաբերական հաստության քառակուսու անտեսման ճշտությամբ: Կոշտ ամրացման ժամանակ սալի հարաբերական հաստության քառակուսու անտեսման դեպքում դեռ մնում է հարաբերական հաստություն պարունակող անդամ, որն էլ տալիս է խնդրի ճշգրտված տեսությամբ լուծելու առավելությունը:

DISSERTATION RESULTS

In the dissertation it has been examined the stress-deformation state of the plate bending problems taking into account shear stresses. The various approaches for solving the plate's bending problems for different distributed normal loads such as Kirchhoff's theory, Ambartsumian and Reissner's improved theories have been offered. Results were compared with numerical solutions, especially with the results received by the method of finite elements, to be sure of accuracy of the received results.

Dissertation consists from the introduction, three chapters, conclusion and the references.

In the **first, second and third paragraphs of the first chapter** there have been given basic equations and relations for the solution of plate's bending problems by (K) theory, by improved theory of (H) and (R) and by finite element method (FEM), accordingly. In the **fourth paragraph** of this chapter there were given boundary conditions by (K) and (H) theories, which have been applied to the problems observed in the dissertation.

In the **first paragraph of the second chapter** there has been investigated plate bending problem under the sinusoidal distributed normal load, when forth edges of the plate are simply supported by (K) theory and by (FEM) has been investigated. Graphics of the deflections and cutting forces have been shown. There was pointed that the results are coincide in nodal points. In the other points the difference do not exceed of 1%. If the plate splitting increases the solution of the problem will approach to the analytical solution.

In the **second paragraph** of this chapter the plate bending problem of uniformly distributed normal load, when two opposite edges of the plate are joint and the others are free by (K) theory and by improved theory has been investigated. There was obtained that when plate's joint edges move away from each other the difference between this problem solution and cylindrical bending problem solution depends on Poisson's coefficient ν : if $\nu=0$ the solutions coincide and the greatest difference will be in case $\nu=0,5$.

It has been received that the maximum deflection of the plate calculated by improved theory has an accuracy of the relative thickness order in the contrast of many problems, for which the accuracy have an order of a square of the relative thickness.

The deflection in the center of the plate has an accuracy square of the relative thickness.

In **third paragraph of the second chapter** the plate bending problem when two opposite edges of the plate are joint and the others are free under the load, which is distributed on the layer, which is parallel to the free edge and symmetric to the x axis has been investigated. The problem was solved by (K). It has been calculated the value of the deflection in the center of free edge of the plate (maximal deflection) and in the corner point. The approaches of edges of the plate and width of the force acting layer has been made.

And in the **fourth paragraph of the second chapter** the plate bending problem by the (K) theory under the arbitrary distributed load, when two edges of plate are joint and the other two are free it has been solved. Two particular cases were considered: 1) uniformly normal load is distributed on all area, 2) uniformly normal load is distributed not on all area of the plate, but on the layer which is parallel to the free edge and symmetric to the axis x. It has been investigated the value of the deflection in the certain

points of the plate and the solutions are compared with the solutions when load is taken in above mentioned forms. For the solutions of these problems there were given tables by Comsol program, which works by improved theory. The comparison of the solutions indicates the reliability of the results.

In the **first paragraph of third chapter** plate bending problem under the uniformly normal load, when two edges of plate are joint and the others are free has been investigated. The problem was solved by the improved theory, based on the (H) and (R) theories.

- It has been received, that for the thin plate the force act on the points near the joint edge of the plate, doesn't differ much from the intensity of the twisting moment in corners and actually can be considered as a concentrated force. However, by improved theory, this force acts only on the joint edge, as on the free edge the twisting moments are equal to zero.
- It has been obtained the solution of the plate bending problem by ANSYS program (which solves the problem by (K.) theory) and the solution was compared with the solution by the improved theory. The differences are insignificant: in the case of improved theory the coincidence is 87-89%, and of (K) theory is 98.6-99.7%.

And in the **second paragraph of third chapter** the stress-deformation estate of semi-infinite plate-layer bending problem, under the distributed load on around fixed edge by the improved theory has been investigated. Two types of boundary conditions for fixed edge are considered: rigid fixing and light fixing. Both specified variants in (K) theory lead to identical boundary conditions – rigid fixation. There have been given comparisons, which show that results of the problem of Nadai coincide with the results received from the improved theory for boundary conditions of light fixation, when the accuracy is the order of neglected a square of relative thickness. For the case of the rigid fixation by neglecting a square of relative thickness we receive difference of an order of relative thickness.