

ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՍԱՐԳՍՅԱՆ ԱՐՄԵՆՈՒՀԻ ՀԱԿՈՒԲԻ

ԲԱՐԱԿ ՍԱԼԵՐԻ ԵՎ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ
ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԸ ԱՌԱՉԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ
ՈՉՄԻՄԵՏՐԻԿ ՏԵՍՈՒԹՅԱՄԲ

Ա 02.04 “Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա”
մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների
թեկնածուի գիատկան աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՍԱԳԻՐ

Երևան 2011

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН РА

САРКИСЯН АРМЕНУИ АКОПОВНА

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТОНКИХ ПЛАСТИН И
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПО НЕСИММЕТРИЧНОЙ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-
математических наук по специальности 01.02.04 “Механика
деформируемого твердого тела”

Ереван 2011

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ մեխանիկայի ինստիտուտում:
Գիտական ղեկավար՝ ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ, Ֆ.մ.գ.դ,
պրոֆեսոր՝ Ս. Ն. Սարգսյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս, Ֆ.մ.գ.դ,
պրոֆեսոր՝ Գ. Ե. Բաղդասարյան
Ֆ.մ.գ.դ, պրոֆեսոր՝ Ռ. Ս. Գևորգյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Հայաստանի պետական
ճարտարագիտական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2011թ հունիսի 17-ին, ժամը 14⁰⁰-ին
Մեխանիկայի ինստիտուտում գործող 047 մասնագիտական խորհրդում
(հասցեն՝ 0019 ք. Երևան, Սարշալ Բաղրամյան պող., 24ք) avsah@mechins.sci.am

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի
գրադարանում:

Մեղմագիրն առաքված է 13 մայիսի 2011թ.

Մասնագիտական խորհրդի գիտական
քարտուղար, տ. գ. դ., պրոֆեսոր



Ռ. Ս. Գևորգյան

Тема диссертации утверждена в Институте механики НАН РА

Научный руководитель: Член корреспондент НАН РА,
д. ф. м. н., профессор С. О. Саркисян

Официальные оппоненты: академик НАН РА, д. ф. м. н.,
профессор Г. Е. Багдасарян

Ведущая организация: д. ф. м. н., профессор Р. С. Геворкян
Государственный инженерный университет Армении

Защита состоится 17-ого июня 2011 г. в 14⁰⁰ часов на заседании

Специализированного совета 047 в Институте механики.

По адресу: 0019 г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна 246. e-mail: avsah@mechins.sci.am

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА.

Автореферат разослан 13 мая 2011г.

Ученый секретарь
Специализированного совета
д.т.н. профессор



Р. М. Киракосян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящее время применением методов нанотехнологии стало возможным управление свойствами макроскопического объекта, т.е. формирование в нем принципиально новых практически полезных свойств, в том числе и механических, за счет направленного изменения его структуры. Структурная механика является научной основой развития указанного направления техники и технологии. В макромасштабах для описания деформационных свойств материалов с различной внутренней структурой одним из основных математических моделей является микрополярная (моментная, несимметричная) теория упругости. Начиная с монографии (Cosserat E. Cosserat F., 1909) механика микрополярной упругой среды получила значительное развитие благодаря работам: Э. Л. Аэро и Е. В. Кувшинского, П. А. Белова и С.А. Лурье, В.В. Болотина, Г. Л. Бровко, В.А. Еремеева и Л.М. Зубова, В. И. Ерофеева, Е.А. Ивановой, А.М. Кривцова и Н. Ф. Морозова, А.А. Ильюшина, И.А. Кунина, Н. Ф. Морозова, Б. Е. Победря и С.Е. Омарова, И. С. Павлова и А. И. Потапова, В.А. Пальмова, В. Е. Панина, Г. Н. Савина, И. Ю. Смолина, Dyszlewicz J., Eringen A.C., Forest S., Koiter W.T., Maugin G.A., Mindlin R.D., Nowacki W., Ostoja-Strazewski M. и др.

Модели микрополярной электромагнитоупругости построены в работах Г.Е. Багдасаряна и Д.Д. Асаняна, Е. Ф. Грековой и П.А. Жилина, Eringen A.C., Kaliski S. and Nowacki W., Maugin G.A. и др.

Глубокое изучение специфики о распространении волн и других динамических задач в микрополярных средах осуществлено в работах А.Г. Багдоева и Л.Г. Петросяна, М.В. Белубекяна и В.Ф. Манукяна, М.П. Варыгиной, О.В. Садовской и В.М. Садовского, В.И. Ерофеева, М.А. Кулеша, В.П. Матвеевко и И.Н. Шардакова, А.Е. Лялина, В.А. Пирожкова и Р.Д. Степанова, Г. Н. Савина, Georgiadis H.G. and E.G. Velgaki E.G., Nowacki W. и др.

Экспериментальные работы в микрополярной теории упругости развиты в работах А. А. Адамова, В.В. Корепанова, М.А. Кулеша, В.П. Матвеевко и И.Н. Шардакова, Gauthier R.D. and Jahsmann W. E., Lakes R.S. и др.

В связи со всесторонним применением упругих тонких балок, пластин и оболочек в различных областях техники, в том числе и в нано- микро инженерии, актуально построение математических моделей микрополярных тонких балок, пластин и оболочек.

Задачам построения моделей микрополярных упругих тонких оболочек и пластин посвящены работы С.А. Амбарцумяна, С.А. Амбарцумяна и М.В. Белубекяна, Г.Л. Бровко и О.А. Ивановой, Г.А. Ванина, Г.А. Геворкяна, В.А. Еремеева и Л.М. Зубова, П.А. Жилина, Л.А. Мовсисяна, М.У. Никабадзе, В.А. Пальмова, Л.И. Шкутина, Altenbach H., Altenbach H. and Eremeev V., Altenbach H. and Zhilin P. A., Birsan M., Eringen A.C., Green A.E. and Naghdi P.M., Hoffman O., Neff P.A., Reissner E., Rubin M.B., Wang F.V. и др.

В Национальной Академии наук Армении проблема о построении теории и изучение конкретных задач статики и динамики микрополярных упругих тонких оболочек и пластин впервые поставил и изучал С. А. Амбарцумян.

Отметим, что общие прикладные модели тонких балок, пластин и оболочек по классической теории упругости, в том числе и уточненные, построены на основе известных гипотез Бернулли, Кирхгофа-Лява, Амбарцумяна, Рейсснера, Тимошенко.

Для построения моделей тонких тел использовался также метод разложения по степеням толщинной координаты или по полиномам Лежандра. Это направление развито в работах Cauchy A. L., Poisson S. D., И.Н. Векуа, Кильчевского и др.

В теории упругих тонких пластин и оболочек асимптотические методы впервые были внедрены в работах А. Л. Гольденвейзера, И. И. Воровича, Friedrichs K., Green A. E., Reissner E. В дальнейшем асимптотические методы в теории тонких пластин и оболочек были существенно развиты благодаря работам Л. А. Агаловяна, В. Л. Бердичевского, М. И. Гусейн-Заде, Ю. Д. Каплунова, Л. Ю. Коссовича, С. А. Назарова, Н. Н. Рогачевой, С. О. Саркисяна, Ю. Н. Устинова, Giarlet P. G. и др.

В теории упругих тонких пластин и оболочек, когда имеются неклассические граничные условия, асимптотические методы развиты в работах Л. А. Агаловяна, его учеников и коллег: М. Л. Агаловяна, Р. С. Геворкяна, Л. Г. Гулгазарян, Л. С. Саркисян, А. А. Хачатряна и др.

Асимптотический метод в теории микрополярных тонких пластин впервые был принят в работе В. А. Дудникова и С. А. Назарова.

Асимптотические методы в теории микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек существенно развиты благодаря работам С. О. Саркисяна и его учеников А. А. Атояна, С. А. Варданян, М. Н. Мутафян, Г. С. Никогосяна, А. Ж. Фарманян и др.

Основная проблема общей теории микрополярных упругих тонких оболочек и пластин (балок) заключается в приближенном, но адекватном сведении трехмерной (двумерной) задачи микрополярной теории упругости к двумерной (одномерной) краевой задаче. С этой точки зрения эффективен подход С. О. Саркисяна, который состоит в следующем. Имея ввиду качественные стороны результата асимптотического метода интегрирования трехмерной (двумерной) статической краевой задачи микрополярной теории упругости в области тонкой оболочки или пластинки (прямоугольника), формулировать соответствующие гипотезы (достаточно общего характера), которые дают возможность из трехмерной (двумерной) теории перейти к двумерной (одномерной) теории микрополярных оболочек и пластин (балок).

Актуально построение на основе такой идеи и подхода прикладных динамических моделей микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек.

Настоящая диссертационная работа посвящена обоснованию гипотез С. О. Саркисяна для построения динамической модели микрополярных упругих тонких оболочек при помощи асимптотического метода; построению моделей динамического деформирования микрополярных упругих тонких пластин и балок на основе метода гипотез; изучению задач о распространении волн в микрополярном слое и полосе и этим путем также обоснованию прикладных моделей динамики микрополярных пластин и балок; изучению задачи о свободных и вынужденных колебаниях микрополярных упругих тонких балок, прямоугольных и круглых пластин, цилиндрических оболочек; на основе всестороннего численного анализа выявлению основных особенностей динамических характеристик балок, пластин и оболочек из микрополярно-упругих материалов.

Целью диссертационной работы является:

- изучение асимптотическим методом начально-краевой трехмерной задачи микрополярной теории упругости в области тонкой оболочки и обоснование гипотез построения прикладной теории микрополярных упругих тонких оболочек;

- построение методом гипотез моделей динамического деформирования микрополярных упругих тонких пластин;
- построение моделей методом гипотез динамического деформирования микрополярных упругих тонких балок;
- изучение задач о распространении волн в микрополярно-упругом бесконечном слое и полосе и этим путем обоснование моделей динамики микрополярных тонких пластин и балок;
- изучение задач о свободных и вынужденных колебаниях микрополярно-упругих тонких балок, прямоугольных и круглых пластин;
- изучение задач о свободных и вынужденных колебаниях микрополярно-упругих тонких цилиндрических оболочек;
- на основе численного анализа установление основных специфических свойств динамических характеристик тонких балок, пластин и оболочек из микрополярно-упругих материалов.

Научная новизна. В диссертационной работе

- асимптотическим методом изучена начально-краевая динамическая задача трехмерной микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений в области тонкой оболочки; построена внутренняя задача, погранслои по координате и по времени; изучена задача сращивания; обоснованы гипотезы построения прикладной теории микрополярно-упругих тонких оболочек;
- на основе метода гипотез построена модель динамического деформирования микрополярно-упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений;
- изучена задача о распространении волн в микрополярно-упругом бесконечном слое и обоснована прикладная модель динамики микрополярных пластин;
- на основе метода гипотез построена модель динамического изгиба микрополярно-упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений;
- изучена задача о распространении волн в микрополярно-упругой бесконечной полосе и обоснована прикладная модель динамики микрополярных балок;
- изучена задача о свободных колебаниях шарнирно-опертой микрополярно-упругой тонкой балки; определены собственные частоты и формы собственных колебаний;
- изучена задача о вынужденных колебаниях шарнирно-опертой микрополярно-упругой тонкой балки; определены амплитуды вынужденных колебаний и условия резонанса;
- на основе численного анализа установлены основные специфические свойства динамических характеристик, установлены условия ухода от резонансных состояний балок из микрополярно-упругого материала;
- изучены задачи о свободных колебаниях шарнирно-опертых микрополярно-упругих тонких прямоугольных и круглых пластин; определены собственные частоты и формы собственных колебаний;
- изучена задача о вынужденных колебаниях шарнирно-опертой микрополярно-упругой тонкой прямоугольной пластинки; определены амплитуды вынужденных колебаний и условия резонанса;

- на основе численного анализа установлены основные специфические свойства динамических характеристик, установлены условия ухода от резонансных состояний прямоугольных и круглых пластин из микрополярно-упругого материала;
- изучена задача о свободных колебаниях шарнирно-опертой микрополярно-упругой тонкой круговой цилиндрической оболочки в осесимметричной постановке; определены собственные частоты и формы собственных колебаний;
- изучена задача о вынужденных колебаниях шарнирно-опертой микрополярно-упругой тонкой круговой цилиндрической оболочки в осесимметричной постановке; определены амплитуды вынужденных колебаний и условия резонанса;
- на основе численного анализа установлены специфические свойства динамических характеристик, установлены условия ухода от резонансных состояний оболочек из микрополярно-упругого материала;

Практическая ценность работы. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы при изучении вопросов о колебаниях тонких балок, пластин и оболочек из микрополярно-упругих материалов; в экспериментах для определения физических констант микрополярно-упругих материалов.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на:

- VIII всероссийской научной конференции “Нелинейные колебания механических систем” (Нижний Новгород 2008)
- 79th Annual Meeting of the International Associate Applied Mathematics and Mechanics. Hosted by ZARM University of Bremen. GAMM 2008 (2008, Bremen, Germany)
- Межвузовской конференции, посвященной к 80-летию С. Н. Мергеляна. Ванадзор: Государственный педагогический институт им. О. Туманяна (Ванадзор 2008, Армения)
- Международном симпозиуме “Перспективные материалы и технологии” (Витебск, Белорусь 2009)
- Первой Всероссийской конференции “Проблемы механики и акустики сред с микро- и наноструктурой”; Наномех-2009 (Нижний Новгород 2009)
- Международной школы-конференции молодых ученых, Механика 2009 (Агавнадзор 2009, Армения)
- II международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды” (Дилижан 2010, Армения)
- научных конференциях профессорско-преподавательского состава Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна (Гюмри 2008, 2009, 2010 Армения)
- семинаре “Механика тонкостенных систем” института механики НАН Армении (Ереван, 22 апреля 2011)
- общем семинаре Института механики НАН Армении (Ереван, 5 мая 2011)

Публикации. По теме диссертации опубликованы 10 научных работ, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 172 наименований. Общий объем работы составляет 126 страниц печатного текста, включая 14 рисунков и 8 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулированы цели и задачи исследования, дан краткий обзор работ отечественных и зарубежных авторов, связанных с рассмотренными в диссертации вопросами. Изложена теоретическая и практическая ценность работы, дано краткое описание работы по главам.

Глава первая посвящена асимптотическому анализу трехмерной начально-граничной задачи несимметричной (микрополярной, моментной) теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений (НТУ с НППВ) в области тонкой оболочки.

В § 1.1. приведена постановка начально-граничной динамической задачи трехмерной НТУ с НППВ для оболочки постоянной толщины $2h$:

Уравнения движения

$$\nabla_m \sigma^{mn} = \rho \partial^2 V^n / \partial t^2, \quad \nabla_m \mu^{nm} + e^{nmk} \sigma_{mk} = J \partial^2 \omega^n / \partial t^2 \quad (1)$$

Соотношения упругости

$$\sigma_{mn} = (\mu + \alpha) \gamma_{mn} + (\mu - \alpha) \gamma_{nm} + \lambda \gamma_{kk} \delta_{nm}, \quad \mu_{mn} = (\gamma + \varepsilon) \chi_{mn} + (\gamma - \varepsilon) \chi_{nm} + \beta \chi_{kk} \delta_{nm} \quad (2)$$

Геометрические соотношения

$$\gamma_{mn} = \nabla_m V_n - e_{kmn} \omega^k, \quad \chi_{mn} = \nabla_m \omega_n \quad (3)$$

Здесь σ^{nm}, μ^{nm} - компоненты силового и моментного тензоров напряжений; γ_{mn}, χ_{mn} - компоненты тензора деформации и тензора изгиба- кручения; V_n - компоненты вектора перемещения, ω^n - компоненты вектора независимого поворота; $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ - упругие константы микрополярного материала оболочки, ρ - плотность материала, J - мера инерции при вращении; e^{nmk} - компоненты тензора Леви-Чивиты, δ_{nm} - символы Кристоффеля. Индексы m, n, k - принимают значения 1, 2, 3.

Далее уравнения (1)-(3) рассматриваются в криволинейной системе координат α_n , принятой в теории оболочек ($H_i = A_i(1 + \alpha_3/R_i)$, $H_3 = 1$, $i = 1, 2$ коэффициенты Ламе, R_i - главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки).

Для граничных условий на лицевых поверхностях оболочки приняты граничные условия первой граничной задачи НТУ с НППВ:

$$\sigma_{3n} = p_n^\pm, \quad \mu_{3n} = m_n^\pm \quad \text{при} \quad \alpha_3 = \pm h \quad (4)$$

Граничные условия на поверхности края оболочки $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ в общем случае представляют граничные условия смешанной граничной задачи НТУ с НППВ:

$$\sigma_{mn} n_m = p_n^*, \quad \mu_{mn} n_m = m_n^* \quad \text{на} \quad \Sigma_1, \quad V_n = V_n^*, \quad \omega_n = \omega_n^* \quad \text{на} \quad \Sigma_2 \quad (5)$$

где p_n^*, m_n^* - компоненты заданных внешних усилий и моментов на Σ_1 ; V_n^*, ω_n^* - заданные компоненты векторов перемещений и независимого поворота на Σ_2 .

Начальные условия при $t = 0$:

$$V_n = f_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \partial V_n / \partial t = F_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \omega_n = \varphi_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \partial \omega_n / \partial t = \Phi_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad (6)$$

где $f_n, F_n, \varphi_n, \Phi_n$ - заданные функции в области трехмерной оболочки.

В § 1.2. рассматривается задача сведения трехмерной динамической задачи несимметричной теории упругости для тонкой оболочки к двумерной на основе асимптотического метода А. Л. Гольденвейзера с пограничным слоем, включая вопрос об удовлетворении трехмерных граничных и начальных условий. Этот асимптотический метод в несимметричной теории упругости развит в работах С. О. Саркисяна и его учеников.

Для построения внутренней задачи (с которой будет связана прикладная теория микрополярных упругих тонких оболочек) в системе основных уравнений НТУ НППВ (1)-(3) осуществлен переход к безразмерным координатам, безразмерной времени и к безразмерным величинам по формулам

$$\alpha_i = R\lambda^{-p}\xi_i, \alpha_3 = R\lambda^{-1}\zeta, t = \lambda^o \tau h/c_0 \quad (7)$$

$$V_n/R = \bar{V}_n, \sigma_{mn}/\rho c_0^2 = \bar{\sigma}_{mn}, \mu_{mn}/R\rho c_0^2 = \bar{\mu}_{mn}, J/\rho h^2 = \lambda^k \bar{J}, R_i/R = \bar{R}_i, i, j = 1, 2, i \neq j$$

Вводятся также безразмерные физические параметры

$$\mu/\rho c_0^2, \alpha/\rho c_0^2, \beta/R^2 \rho c_0^2, \gamma/R^2 \rho c_0^2, \varepsilon/R^2 \rho c_0^2 \quad (8)$$

Здесь R - характерный радиус кривизны срединной поверхности оболочки, c_0 - некоторая характерная скорость, величина ω - характеризует изменяемость напряженно-деформированного состояния (НДС) во времени; величина p/l - характеризует изменяемость НДС по координатам; p, l - целые числа, $l > p \geq 0$; λ - большой постоянный безразмерный геометрический параметр, определяемый формулой $h = R\lambda^{-l}$.

Числа ω и k выбираются таким образом, чтобы в асимптотических приближениях получились непротиворечивые уравнения и чтоб инерционные члены входили в систему уравнений исходного приближения.

Наша цель состоит в том, чтобы приближенно свести трехмерные (с независимыми переменными $\xi_1, \xi_2, \zeta, \tau$) уравнения (1)-(3) к двумерным (с независимыми переменными ξ_1, ξ_2, τ) уравнениям. Эта операция выполняется так, чтобы в коэффициентах получаемых уравнений был виден характер их зависимости от большого геометрического параметра λ и переменной ζ .

Этот процесс асимптотического интегрирования уравнений несимметричной теории упругости выполнен в случае, когда для безразмерных физических параметров (8) имеют место условия: $\mu/\rho c_0^2 \sim 1, \alpha/\rho c_0^2 \sim 1, \beta/R^2 \rho c_0^2 \sim 1, \gamma/R^2 \rho c_0^2 \sim 1, \varepsilon/R^2 \rho c_0^2 \sim 1$. Ограничиваясь асимптотической точностью $O(\lambda^{p-l})$ (при которой для изменяемости процесса по времени ω и величины k , получаются определенные значения: $\omega = l - p, k = 2l$), для перемещений, свободных поворотов, силовых и моментных напряжений в окончательном итоге получают следующие формулы асимптотического разложения:

$$\begin{aligned} V_i &= R\lambda^{-p}(V_i^0 + \lambda^{-l+c}\zeta V_i^1) & \omega_i &= \lambda^{l-p-c}(\omega_i^0 + \lambda^{-l+c}\zeta\omega_i^1) \\ V_3 &= R\lambda^{l-2p+c}(V_3^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta V_3^1) & \omega_3 &= \lambda^{l-2p}(\omega_3^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta\omega_3^1) \\ \sigma_{ii} &= \rho c_0^2 \lambda^l (\sigma_{ii}^0 + \lambda^{-l+c}\zeta\sigma_{ii}^1) & \mu_{ii} &= R\rho c_0^2 \lambda^{-c} (\mu_{ii}^0 + \lambda^{-l+c}\zeta\mu_{ii}^1) \\ \sigma_{ij} &= \rho c_0^2 \lambda^l (\sigma_{ij}^0 + \lambda^{-l+c}\zeta\sigma_{ij}^1) & \mu_{ij} &= R\rho c_0^2 \lambda^{-c} (\mu_{ij}^0 + \lambda^{-l+c}\zeta\mu_{ij}^1) \\ \sigma_{i3} &= \rho c_0^2 \lambda^{-p+c} (\sigma_{i3}^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta\sigma_{i3}^1) (i \leftrightarrow 3) & \mu_{i3} &= R\rho c_0^2 \lambda^{-p} (\mu_{i3}^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta\mu_{i3}^1) (i \leftrightarrow 3) \\ \sigma_{33} &= \rho c_0^2 \lambda^l (\sigma_{33}^0 + \zeta\sigma_{33}^1 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta^2\sigma_{33}^2) & \mu_{33} &= R\rho c_0^2 \lambda^0 (\mu_{33}^0 + \zeta\mu_{33}^1 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta^2\mu_{33}^2) \end{aligned} \quad (9)$$

здесь $c = 2p - l$ при $l \leq 2p, c = l - 2p$ при $2p \leq l \leq 4p, c = 2p$ при $l \geq 4p$.

Относительно величин σ_{3i}, μ_{33} имеем две возможности:

а) ограничиваться выше приведенными асимптотическими формулами.

На основе внутренней задачи (используя также усредненные по толщине оболочки понятия усилий, моментов от моментных напряжений), в случае а) получается микрополярная наиболее упрощенная модель тонких оболочек, в которой не учитываются влияния усредненных моментов M_{ii}, M_{ij} от силовых напряжений:

Уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_i} \frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (T_{ii} - T_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (S_{ji} + S_{ij}) &= 2\rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - (p_i^+ - p_i^-) \\ \frac{1}{A_i} \frac{\partial L_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (L_{ii} - L_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial L_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (L_{ji} + L_{ij}) + \\ &+ (-1)^j (N_{j3} - N_{3j}) = 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial t^2} - (m_i^+ - m_i^-) \\ -\frac{T_{11}}{R_1} - \frac{T_{22}}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial (A_2 N_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 N_{23})}{\partial \alpha_2} \right] &= 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (p_3^+ - p_3^-) \\ -\frac{L_{11}}{R_1} - \frac{L_{22}}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial (A_2 L_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 L_{23})}{\partial \alpha_2} \right] + (S_{12} - S_{21}) &= 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} - (m_3^+ - m_3^-) \end{aligned} \quad (10)$$

Соотношения упругости

$$\begin{aligned} T_{ii} &= 2Eh/(1-\nu^2)[\Gamma_{ii} + \nu\Gamma_{jj}], \quad S_{ij} = 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{ij} + (\mu - \alpha)\Gamma_{ji}], \quad L_{ij} = 2h[(\gamma + \varepsilon)\kappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon)\kappa_{ji}] \\ L_{ii} &= 2h \left[\frac{4\gamma(\beta + \gamma)}{\beta + 2\gamma} \kappa_{ii} + \frac{2\gamma\beta}{\beta + 2\gamma} \kappa_{jj} + \frac{\beta}{\beta + 2\gamma} \frac{m_3^+ + m_3^-}{2} \right], \quad N_{i3} = 2h \frac{4\mu\alpha}{\mu + \alpha} \Gamma_{i3} + \frac{\mu - \alpha}{\mu + \alpha} N_{3i} \\ L_{i3} &= 2h \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \kappa_{i3} + \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} L_{3i}, \quad \text{где } N_{3i} = h(p_i^+ + p_i^-), \quad L_{3i} = h(m_i^+ + m_i^-) \end{aligned} \quad (11)$$

Геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \Gamma_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j + \frac{w}{R_i}, \quad \Gamma_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_i - (-1)^j \Omega_3, \quad \vartheta_i = -\frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} + \frac{u_i}{R_i}, \quad \Gamma_{i3} = -\vartheta_i + (-1)^j \Omega_j \\ \kappa_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_j + \frac{\Omega_3}{R_i}, \quad \kappa_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_i, \quad \kappa_{i3} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_i} - \frac{\Omega_i}{R_i} \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь u_i, w - тангенциальные перемещения и прогиб точек срединной поверхности оболочки; Ω_i, Ω_3 - независимые повороты точек срединной поверхности оболочки; i - интенсивность свободного поворота ω_3 вдоль оси α_3 ; T_{ii}, S_{ij} - тангенциальные усилия, N_{i3}, N_{3i} - перерезывающие усилия, L_{ii}, L_{ij}, L_{i3} - моменты от соответствующих моментных напряжений $\mu_{ii}, \mu_{ij}, \mu_{i3}$.

б) по сравнению с предыдущим случаем а), развиваемый асимптотический подход позволяет, придерживаясь в рамках величин исходного приближения и оставляя неизменными перерезывающие усилия N_{3i} и усредненный момент L_{33} , получить некоторые уточнения силовых касательных напряжений σ_{3i} и моментного напряжения μ_{33} . В результате, становится возможным получение уравнений для кинетических

моментов M_{ii}, M_{ij} и гипермоментов Λ_{i3} , при этом получая также полноценные физические соотношения.

Таким образом, можно построить уточненную модель (по сравнению с предыдущим случаем) динамики микрополярно-упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений, при которой полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации. Эта модель на основе метода гипотез построена в работе С. О. Саркисяна: Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек// Доклады АН России. 2011. Т. 436. № 2. С. 195-198.

Уравнения движения

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A_j} \frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (T_{ii} - T_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (S_{ji} + S_{ij}) + \frac{N_{i3}}{R_i} = 2\rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - (p_i^+ - p_i^-) \\ & \frac{1}{A_i} \frac{\partial M_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (M_{ii} - M_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial M_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (M_{ji} + M_{ij}) - N_{3i} = \frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} - h(p_i^+ + p_i^-) \\ & - \frac{T_{11}}{R_1} - \frac{T_{22}}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial(A_2 N_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 N_{23})}{\partial \alpha_2} \right] = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (p_3^+ - p_3^-) \quad (13) \\ & \frac{1}{A_i} \frac{\partial L_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (L_{ii} - L_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial L_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (L_{ji} + L_{ij}) + \frac{L_{i3}}{R_i} + (-1)^j (N_{j3} - N_{3j}) = 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial t^2} - (m_i^+ - m_i^-) \\ & - \frac{L_{11}}{R_1} - \frac{L_{22}}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial(A_2 L_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 L_{23})}{\partial \alpha_2} \right] + (S_{12} - S_{21}) = 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} - (m_3^+ - m_3^-) \\ & L_{33} - \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial(A_2 \Lambda_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 \Lambda_{23})}{\partial \alpha_2} \right] - (M_{12} - M_{21}) + \frac{2Jh^3}{3} \frac{\partial^2 t}{\partial t^2} = h(m_3^+ + m_3^-) \end{aligned}$$

Физические соотношения

$$\begin{aligned} & T_{ii} = 2EH/(1-\nu^2)[\Gamma_{ii} + \nu\Gamma_{jj}], \quad S_{ij} = 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{ij} + (\mu - \alpha)\Gamma_{ji}], \quad L_{ij} = 2h[(\gamma + \varepsilon)\kappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon)\kappa_{ji}] \\ & M_{ii} = 2Eh^3/[3(1-\nu^2)][K_{ii} + \nu K_{jj}], \quad M_{ij} = 2h^3/3[(\mu + \alpha)K_{ij} + (\mu - \alpha)K_{ji}] \\ & N_{i3} = 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{i3} + (\mu - \alpha)\Gamma_{3i}], \quad N_{3i} = 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{3i} + (\mu - \alpha)\Gamma_{i3}] \quad (14) \\ & L_{ii} = 2h[(\beta + 2\gamma)\kappa_{ii} + \beta(\kappa_{jj} + \iota)], \quad L_{33} = 2h[(\beta + 2\gamma)\iota + \beta(\kappa_{11} + \kappa_{22})] \\ & L_{i3} = 2h \left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \kappa_{i3} + \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{m_i^+ + m_i^-}{2} \right], \quad \Lambda_{i3} = \frac{2h^3}{3} \left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{i3} + \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{m_i^+ - m_i^-}{2h} \right] \end{aligned}$$

Геометрические соотношения

$$\begin{aligned} & \Gamma_{ii} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j + \frac{w}{R_i}, \quad \Gamma_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_i - (-1)^j \Omega_j, \quad \Gamma_{i3} = -\vartheta_i + (-1)^j \Omega_j, \quad \Gamma_{3i} = \psi_i - (-1)^j \Omega_j \\ & K_{ii} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \psi_j, \quad K_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \psi_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \psi_i - (-1)^j \iota, \quad \vartheta_i = -\frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} + \frac{u_i}{R_i} \quad (15) \\ & \kappa_{ii} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_j + \frac{\Omega_3}{R_i}, \quad \kappa_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_i, \quad \kappa_{i3} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_i} - \frac{\Omega_i}{R_i}, \quad l_{i3} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \iota}{\partial \alpha_i} \end{aligned}$$

Отметим, что в указанной работе С. О. Саркисяна в основе построения модели приняты следующие гипотезы:

1. в процессе деформации первоначально прямолинейные и нормальные к срединной поверхности волокна свободно поворачиваются в пространстве как жесткое целое на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины и не оставаясь перпендикулярным к

деформированной срединной поверхности. Кроме этого, тангенциальные компоненты вектора вращения постоянные по толщине оболочки функции, а нормальный поворот по высоте оболочки изменяется линейно:

$$V_i = u_i(\alpha_1, \alpha_2, t) + \alpha_3 \psi_i(\alpha_1, \alpha_2, t), \quad \omega_3 = \Omega_3(\alpha_1, \alpha_2, t) + \alpha_3 \iota(\alpha_1, \alpha_2, t) \quad (16)$$

$$V_3 = w(\alpha_1, \alpha_2, t), \quad \omega_i = \Omega_i(\alpha_1, \alpha_2, t) \quad (17)$$

2. силовое напряжение σ_{33} в обобщенном законе Гука можно пренебрегать относительно силовых напряжений σ_{ii} ;

3. при определении деформаций, изгиба - кручений, силовых и моментных напряжений, для силовых напряжений σ_{3i} и моментного напряжения μ_{33} сначала принимается

$$\sigma_{3i} = \sigma_{3i}^0(\alpha_1, \alpha_2, t), \quad \mu_{33} = \mu_{33}^0(\alpha_1, \alpha_2, t) \quad (18)$$

После вычисления указанных величин, значения σ_{3i} и μ_{33} окончательно определяются прибавлением к значениям (18) слагаемые, получаемые интегрированием соответствующих уравнений движения из (1), требуя условия, чтобы усредненные по толщине оболочки их величины были равны нулю;

4. величинами α_3/R_i по сравнению с единицей можно пренебрегать.

Как убедимся принятые С. О. Саркисяном кинематические гипотезы и качественные стороны результата асимптотического метода, совпадают. Отметим, что для полного совпадения результатов метода гипотез и асимптотического метода следует в физических соотношениях (14), для усилий T_{ii} и моментов M_{ii} учесть соответственно

$$\text{слагаемые: } -\frac{v}{1-v} h(p_3^+ + p_3^-), \quad -\frac{v}{1-v} \frac{h^2}{3} (p_3^+ - p_3^-).$$

Отметим, что кинематические гипотезы относительно перемещений, это известные гипотезы Тимошенко в классической уточненной теории упругих оболочек, поэтому гипотезы 1) в целом, названы С. О. Саркисяном как обобщенные кинематические гипотезы Тимошенко в микрополярной теории оболочек.

Далее, на основе гипотезы 3), полученные формулы для силовых касательных напряжений σ_{3i} и нормального моментного напряжения μ_{33} совпадают с соответствующими формулами, полученными на основе асимптотического метода.

Важно отметить, что в отличие от кинематических гипотез, статические гипотезы 3) не имеют своих аналогов в классической теории оболочек типа Тимошенко.

Отметим, что если в модели (13)-(15) микрополярных оболочек условно поставить $\alpha = 0$, в результате от этой модели будет отделяться классическая модель упругих оболочек типа Тимошенко (с незначительным отличием, связанное с гипотезой 3)).

В § 1.3. изучаются погранслоинная задача по координате около боковой поверхности оболочки Σ и погранслоинная задача по времени около границы $t = 0$.

Сначала рассматривается построение погранслоя около боковой поверхности оболочки, считая, что эта поверхность задается уравнением $\alpha_1 = \alpha_{10}$.

Вводится замена независимых переменных (координат и времени) по формулам:

$$\alpha_1 - \alpha_{10} = R\lambda^{-l}\xi_1, \quad \alpha_2 = R\lambda^{-p}\xi_2, \quad \alpha_3 = R\lambda^{-l}\zeta, \quad t = \lambda^o \tau h/c_0 \quad (19)$$

где величины R, λ, l, p, ω имеют тот же смысл, что и при изучении внутренней задачи.

Полученное таким образом из системы уравнений (1)-(3) решение пограничной задачи должен удовлетворить однородным граничным условиям на лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3 = \pm h : \sigma_{3n} = 0, \mu_{3n} = 0$.

В краевой зоне необходимо искать такое упругое микрополярное состояние, изменяемость во времени которого совпадает с изменяемостью во времени для внутренней задачи.

На уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-1})$ погранслоинная задача расщепляется на четыре независимые системы уравнений:

Силавая плоская задача

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial P_{11}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial P_{31}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial P_{13}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial P_{33}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial U_1}{\partial \xi_1} = \frac{1}{E} [P_{11} - \nu(P_{22} + P_{33})], \quad \frac{\partial U_3}{\partial \zeta} = \frac{1}{E} [P_{33} - \nu(P_{11} + P_{22})] \\ P_{22} - \nu(P_{11} + P_{33}) = 0, \quad \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial U_3}{\partial \xi_1} = \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} P_{13} - \frac{\bar{\mu} - \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} P_{31} = 0, \quad \frac{\partial U_1}{\partial \zeta} = \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} P_{31} - \frac{\bar{\mu} - \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} P_{13} \end{aligned} \quad (20)$$

Силавая антиплоская задача

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial P_{12}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial P_{32}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial U_2}{\partial \xi_1} = \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} P_{12} - \frac{\bar{\mu} - \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} P_{21}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial \zeta} = \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} P_{32} - \frac{\bar{\mu} - \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} P_{23} \\ (\bar{\mu} + \bar{\alpha})P_{21} - (\bar{\mu} - \bar{\alpha})P_{12} = 0, \quad (\bar{\mu} + \bar{\alpha})P_{23} - (\bar{\mu} - \bar{\alpha})P_{32} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Моментная плоская задача

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial Q_{12}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial Q_{32}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial \varpi_2}{\partial \xi_1} = \frac{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} Q_{12} - \frac{\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} Q_{21}, \quad \frac{\partial \varpi_2}{\partial \zeta} = \frac{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} Q_{32} - \frac{\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} Q_{23} \\ (\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon})Q_{21} - (\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon})Q_{12} = 0, \quad (\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon})Q_{23} - (\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon})Q_{32} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Моментная антиплоская задача

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial Q_{11}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial Q_{31}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial Q_{13}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial Q_{33}}{\partial \zeta} = 0, \quad 2(\bar{\beta} + \bar{\gamma})Q_{22} - \bar{\beta}(Q_{11} + Q_{33}) = 0 \\ \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial \varpi_1}{\partial \xi_1} = \frac{\bar{\beta} + \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}(3\bar{\beta} + 2\bar{\gamma})} \left[Q_{11} - \frac{\bar{\beta}}{2(\bar{\beta} + \bar{\gamma})} (Q_{22} + Q_{33}) \right], \quad \frac{\partial \varpi_1}{\partial \zeta} = \frac{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} Q_{31} - \frac{\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} Q_{13} \\ \frac{\partial \varpi_3}{\partial \zeta} = \frac{\bar{\beta} + \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}(3\bar{\beta} + 2\bar{\gamma})} \left[Q_{33} - \frac{\bar{\beta}}{2(\bar{\beta} + \bar{\gamma})} (Q_{11} + Q_{22}) \right], \quad \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial \varpi_3}{\partial \xi_1} = \frac{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} Q_{13} - \frac{\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} Q_{31}, \quad \text{здесь } A_{10} = A_1|_{\xi_1=0}. \end{aligned} \quad (23)$$

Полученные уравнения погранслоя (который имеет квазистатический характер) в декартовых координатах (ξ'_1, ζ) ($\xi'_1 = A_{10}\xi_1$) с асимптотической точностью $O(\lambda^{p-1})$ описывают НДС плоской и антиплоской силовой и моментной не взаимосвязанных задач микрополярной теории упругости, имеющих место в полуполосе: $\{0 \leq \xi'_1 < \infty, -1 \leq \zeta \leq 1\}$.

Потребовав, чтобы решения погранслоинных задач (20)-(23) имели затухающий характер при $\xi_1 \rightarrow +\infty$, получим, что такие решения обладают следующими существенными свойствами:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_{1n}|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^1 Q_{1n}|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^1 U_2|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^1 \varpi_2|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^1 \frac{\partial \varpi_3}{\partial \zeta}|_{\xi_1=0} d\zeta - \frac{\bar{\beta} + 2\bar{\gamma}}{4\bar{\gamma}(\bar{\beta} + \bar{\gamma})} \int_{-1}^1 Q_{33}|_{\xi_1=0} d\zeta = 0 \\ \int_{-1}^1 U_1|_{\xi_1=0} d\zeta - \frac{\bar{\lambda}}{4\bar{\mu}(\bar{\lambda} + \bar{\mu})} \int_{-1}^1 \zeta P_{13}|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^1 \varpi_1|_{\xi_1=0} d\zeta - \frac{\bar{\beta}}{4\bar{\gamma}(\bar{\beta} + \bar{\gamma})} \int_{-1}^1 \zeta Q_{13}|_{\xi_1=0} d\zeta = 0 \\ \int_{-1}^1 U_3|_{\xi_1=0} d\zeta + \frac{\bar{\mu} - \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} \int_{-1}^1 \zeta P_{11}|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^1 \varpi_3|_{\xi_1=0} d\zeta + \frac{\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} \int_{-1}^1 \zeta Q_{11}|_{\xi_1=0} d\zeta = 0 \\ \int_{-1}^1 \frac{\partial U_1}{\partial \zeta}|_{\xi_1=0} d\zeta - \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} \int_{-1}^1 P_{31}|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^1 \frac{\partial U_2}{\partial \zeta}|_{\xi_1=0} d\zeta - \frac{1}{\bar{\mu} + \bar{\alpha}} \int_{-1}^1 P_{32}|_{\xi_1=0} d\zeta = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Из приведенных соотношений можем сделать следующий вывод: когда силовые и моментные напряжения в пограничной зоне самоуравновешены, этим свойством обладают также перемещения и независимые повороты. Далее эти условия будут использованы при сращивании внутренних и погранслоиных асимптотических разложений.

Рассматривая вопрос о сращивании внутреннего НДС с пограничным, можно формально записать:

$$(НДС) = (НДС)_{вн} + \lambda^r \cdot (НДС)_{кр}^a + \lambda^\theta \cdot (НДС)_{кр}^n \quad (25)$$

Числа r, θ являются показателями интенсивностями микрополярных погранслоев. Числа r и θ выбираются таким образом, чтобы стало возможным удовлетворение трехмерных граничных условий на поверхности края оболочки Σ .

Конкретно рассмотрен случай, когда на поверхности края оболочки заданы силовые и моментные напряжения ($\Sigma_1 \equiv \Sigma$, $\Sigma_2 \equiv 0$). В этом случае в символическом выражении (25), определены соответствующим образом значения r и θ ($r = \theta = l - p - c$) и с использованием условий затухания (24) пограничных решений, в случае упрощенной модели (10)-(12) получены усредненные граничные условия для $T_{11}, S_{12}, N_{13}, L_{11}, L_{12}, L_{13}$. А в случае уточненной модели (13)-(15) микрополярных оболочек эти условия дополняются граничными условиями для $M_{11}, M_{12}, \Lambda_{12}$.

Аналогичным образом получены усредненные граничные условия для указанных моделей микрополярных оболочек, когда точки поверхности края закреплены ($\Sigma_1 \equiv 0$, $\Sigma_2 \equiv \Sigma$) и, когда заданные трехмерные граничные условия имеют вид шарнирного опирания.

В § 1.3. построен и изучен также временной погранслои около границы $t = 0$. Для этого дополнительного НДС считается, что изменяемость процесса по координатам будет такое же как для внутренней задачи, одновременно имеющее большую изменяемость во времени.

В рамках точности $O(\lambda^{p-1})$ из основной системы уравнений (1)-(3) трехмерной НТУ с НППВ получаются отдельные одномерные (по толщинной координате) дифференциальные уравнения гиперболического типа для компонентов векторов перемещения и независимого поворота. Так как указанные уравнения различаются друг от друга только коэффициентами, следовательно, удобно было рассматривать эту начально-краевую задачу в общих обозначениях:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{\tilde{a}^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\pm 1} = 0, \quad u \Big|_{\tau=0} = f^*(\zeta), \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = F^*(\zeta) \quad (26)$$

При этом одновременно должны иметь место условия:

$$\frac{\partial f^*(\zeta)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\pm 1} = 0, \quad \frac{\partial F^*(\zeta)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\pm 1} = 0 \quad (27)$$

Общее решение начально-граничной задачи (26) (на основе метода разделения переменных) можно представить в следующем виде:

$$u = u^0 + u^1 \tau + u' \quad (28)$$

Отметим, что слагаемое u' осциллирующая во времени часть решения. Чтобы решение (28) полностью было осциллирующее во времени, должны выполняться так называемые условия осцилляции:

$$u^0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f^*(\zeta) d\zeta = 0, \quad u^1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F^*(\zeta) d\zeta = 0 \quad (29)$$

Условия (27) и (29) являются условиями сшивания внутренней задачи и задачи временного погранслоя. Выполняя сращивание указанных задач, получим соответствующие начальные условия двумерных моделей ((10)-(12) и (13)-(15)) микрополярных оболочек.

В § 1.4. из общих уравнений прикладной модели (13)-(15) микрополярных оболочек, просто пренебрегая поперечные сдвиги, т.е. считая $\Gamma_{i3} + \Gamma_{3i} = 0$, или, что одно и то же принимая $\psi_i = \vartheta_i$, где $\vartheta_i = -1/A_i \cdot \partial w / \partial \alpha_i + u_i/R_i$, получается модель микрополярных упругих тонких оболочек на основе обобщенных на микрополярный случай гипотез Кирхгофа-Лява: $V_i = u_i(\alpha_1, \alpha_2, t) + \alpha_3 \vartheta_i(\alpha_1, \alpha_2, t)$, $V_3 = w(\alpha_1, \alpha_2, t)$, $\omega_i = \Omega_i(\alpha_1, \alpha_2, t)$, $\omega_3 = \Omega_3(\alpha_1, \alpha_2, t) + \alpha_3 t(\alpha_1, \alpha_2, t)$. Остальные гипотезы остаются неизменными.

Глава вторая диссертационной работы посвящена к построению моделей динамики микрополярных упругих тонких пластин и балок с независимыми полями перемещений и вращений на основе метода гипотез. В этой же главе на основе рассмотрения волновых задач в микрополярно-упругом слое и полосе, при помощи сравнения результатов точных решений задач с решениями, полученными на основе прикладных моделей, обосновываются (этим путем также) прикладные модели динамики микрополярных пластин и балок.

В § 2.1. приведена постановка начально-граничной задачи трехмерной НТУ с НППВ для пластинки постоянной толщины $2h$. Рассматривается задача изгиба (т.е. обратно-симметричная по α_3 задача), для которой граничные условия выражаются так:

$$\begin{aligned} \sigma_{3i} &= (p_i^+ + p_i^-)/2 = \tilde{p}_i, \quad \sigma_{33} = \pm(p_3^+ - p_3^-)/2 = \pm \tilde{p}_3 \\ \mu_{3i} &= \pm(m_i^+ - m_i^-)/2 = \pm \tilde{m}_i, \quad \mu_{33} = (m_3^+ + m_3^-)/2 = \tilde{m}_3 \end{aligned} \quad \text{при } \alpha_3 = \pm h \quad (30)$$

В § 2.2. для построения прикладной модели динамики микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений в основу принимаются гипотезы С. О. Саркисяна, которые в теории микрополярных оболочек были сформулированы в § 1.2 главы 1. Для случая пластинки математическая запись кинематических гипотез (16),(17) (в случае изгиба пластинки) принимает вид:

$$V_i = \alpha_3 \psi_i(\alpha_1, \alpha_2, t), \quad V_3 = w(\alpha_1, \alpha_2, t), \quad \omega_i = \Omega_i(\alpha_1, \alpha_2, t), \quad \omega_3 = \alpha_3 t(\alpha_1, \alpha_2, t) \quad (31)$$

Остальные гипотезы остаются неизменными.

Основная система уравнений модели динамического изгиба микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений выражается следующим образом:

Уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial(A_2 N_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 N_{23})}{\partial \alpha_2} \right] &= 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\tilde{p}_3 \\ N_{3i} - \left(\frac{1}{A_i} \frac{\partial M_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (M_{ii} - M_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial M_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (M_{ji} + M_{ij}) \right) &+ \frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} = 2h\tilde{p}_i \\ L_{33} - \left[\frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial(A_2 \Lambda_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 \Lambda_{23})}{\partial \alpha_2} \right] + (M_{12} - M_{21}) \right] &+ \frac{2Jh^3}{3} \frac{\partial^2 t}{\partial t^2} = 2h\tilde{m}_3 \\ \frac{1}{A_i} \frac{\partial L_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (L_{ii} - L_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial L_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (L_{ji} + L_{ij}) &+ (-)^j (N_{j3} - N_{3j}) = 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial t^2} - 2\tilde{m}_i \end{aligned} \quad (32)$$

Физические соотношения

$$\begin{aligned}
 N_{i3} &= 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{i3} + (\mu - \alpha)\Gamma_{3i}], \quad N_{3i} = 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{3i} + (\mu - \alpha)\Gamma_{i3}] \\
 M_{ii} &= 2Eh^3/[3(1 - \nu^2)](K_{ii} + \nu K_{jj}), \quad M_{ij} = 2h^3/3[(\mu + \alpha)K_{ij} + (\mu - \alpha)K_{ji}] \\
 L_{ij} &= 2h[(\gamma + \varepsilon)\kappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon)\kappa_{ji}], \quad L_{33} = 2h[(\beta + 2\gamma)\iota + \beta(\kappa_{11} + \kappa_{22})] \\
 L_{ii} &= 2h\left[\frac{4\gamma(\beta + \gamma)}{\beta + 2\gamma}\kappa_{ii} + \frac{2\beta\gamma}{\beta + 2\gamma}\kappa_{jj}\right] + \frac{\beta}{\beta + 2\gamma}L_{33}, \quad \Lambda_{i3} = \frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon}l_{i3} + \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}\frac{\tilde{m}_i}{h}\right]
 \end{aligned} \tag{33}$$

Геометрические соотношения

$$\begin{aligned}
 K_{ii} &= \frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_j, \quad K_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_j}{\partial\alpha_i} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_i - (-1)^j\iota, \quad \Gamma_{i3} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i} + (-1)^j\Omega_j \\
 \Gamma_{3i} &= \psi_i - (-1)^j\Omega_j, \quad \kappa_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_j, \quad \kappa_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i, \quad l_{i3} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_i}
 \end{aligned} \tag{34}$$

К основной системе уравнений (32)-(34) микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений необходимо присоединить “смягченные” граничные и начальные условия.

Граничные условия на граничном контуре Γ срединной поверхности пластинки, считая, что он совпадает с координатной линией $\alpha_i = const$, выражаются так:

$$M_{11} = M_{11}^* \text{ или } K_{11} = K_{11}^*, \quad M_{12} = M_{12}^* \text{ или } K_{12} = K_{12}^*, \quad N_{13} = N_{13}^* \text{ или } w = w^* \tag{35}$$

$$L_{11} = L_{11}^* \text{ или } \kappa_{11} = \kappa_{11}^*, \quad L_{12} = L_{12}^* \text{ или } \kappa_{12} = \kappa_{12}^*, \quad \Lambda_{13} = \Lambda_{13}^* \text{ или } l_{13} = l_{13}^*$$

Начальные условия необходимо формулировать относительно $w, \partial w/\partial t, \psi_i, \partial\psi_i/\partial t, \Omega_i, \partial\Omega_i/\partial t, \iota, \partial\iota/\partial t$.

Если в уравнениях (32)-(34) пренебрегать моменты M_{ii}, M_{ij} и гипермоменты Λ_{i3} , а также ими обусловленные инерционные члены $\partial^2\psi_i/\partial t^2$ и $\partial^2\iota/\partial t^2$, то в результате получим упрощенную модель микрополярных пластин:

Уравнения движения

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial N_{13}}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}N_{13} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial N_{23}}{\partial\alpha_2} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}N_{23} = 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\tilde{p}_3 \tag{36}$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial L_{ii}}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}(L_{ii} - L_{jj}) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial L_{ji}}{\partial\alpha_j} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}(L_{ji} + L_{ij}) + (-1)^j(N_{j3} - N_{3j}) = 2Jh\frac{\partial^2\Omega_i}{\partial t^2} - 2\tilde{m}_i$$

Физические соотношения

$$N_{i3} = 2h \cdot 4\mu\alpha/(\mu + \alpha)\Gamma_{i3} + (\mu - \alpha)/(\mu + \alpha)N_{3i}, \quad N_{3i} = 2h\tilde{p}_i, \quad L_{ij} = 2h[(\gamma + \varepsilon)\kappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon)\kappa_{ji}]$$

$$L_{ii} = 2h\left[\frac{4\gamma(\beta + \gamma)}{\beta + 2\gamma}\kappa_{ii} + \frac{2\beta\gamma}{\beta + 2\gamma}\kappa_{jj}\right] + \frac{\beta}{\beta + 2\gamma}L_{33}, \quad L_{33} = 2h\tilde{m}_3 \tag{37}$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{i3} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i} + (-1)^j\Omega_j, \quad \kappa_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_j, \quad \kappa_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i \tag{38}$$

Если в системе уравнений (32)-(34) пренебрегать поперечные сдвиги, т.е. если считать $\Gamma_{i3} + \Gamma_{3i} = 0$ или $\psi_i = -1/A_i \cdot \partial w/\partial\alpha_i$, получим модель микрополярных упругих пластин с независимыми полями перемещений и вращений, когда вместо обобщенных кинематических гипотез Тимошенко принята обобщенная на микрополярный случай гипотезы Кирхгофа.

В § 2.3. рассматривается микрополярный упругий слой толщиной $2h$, заключенный между плоскостями $x_3 = \pm h$, свободными от силовых и моментных напряжений. Предполагается, что в этом слое распространяется периодическая волна с фазовой скоростью c .

Математически эта трехмерная задача формулируется следующим образом. Ищется решение трехмерных волновых уравнений

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2 - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi = 0, & \left[\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\nabla^2 - v_0^2 - \frac{1}{c_4^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) + \eta_0^2 \nabla^2 \right] \phi_n = 0 \\ \left(\nabla^2 - v_1^2 - \frac{1}{c_3^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) O = 0, & \left[\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\nabla^2 - v_0^2 - \frac{1}{c_4^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) + \eta_0^2 \nabla^2 \right] o_n = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

в предположении, что

$$\Phi = \Phi^*(x_3) e^{i(\xi x_1 + \eta x_2 - p t)}, \phi_n = \phi_n^*(x_3) e^{i(\xi x_1 + \eta x_2 - p t)}, O = O^*(x_3) e^{i(\xi x_1 + \eta x_2 - p t)}, o_n = o_n^*(x_3) e^{i(\xi x_1 + \eta x_2 - p t)} \quad (40)$$

Здесь следует иметь в виду, что

$$\vec{V} = \text{grad} \Phi + \text{rot} \vec{\phi}, \quad \vec{\omega} = \text{grad} O + \text{rot} \vec{o} \quad (41)$$

причем $\text{div} \vec{\phi} = 0$, $\text{div} \vec{o} = 0$, $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $c_2 = \sqrt{(\mu + \alpha)/\rho}$, $c_3 = \sqrt{(\beta + 2\gamma)/J}$, $c_4 = \sqrt{(\gamma + \varepsilon)/J}$
 $v_0 = \sqrt{4\alpha/(\gamma + \varepsilon)}$, $v_1 = \sqrt{4\alpha/(\beta + 2\gamma)}$, $\eta_0 = 2\alpha/\sqrt{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)}$.

Если подставить (40) в (39), получим обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $\Phi^*(x_3)$, $\phi_n^*(x_3)$, $O^*(x_3)$, $o_n^*(x_3)$. Рассматривается задача изгиба.

Определяя общие решения для функций $\Phi^*(x_3)$, $\phi_n^*(x_3)$, $O^*(x_3)$, $o_n^*(x_3)$, на основе формул (41) определяются компоненты вектора перемещения и компоненты вектора независимого поворота, и далее, деформации, изгибы-кручения, силовые и моментные напряжения. Удовлетворяя условиям отсутствия силовых и моментных напряжений на граничных плоскостях $x_3 = \pm h$ слоя, относительно постоянных интегрирования получается алгебраическая однородная система линейных уравнений. Приравнение определителя этой системы уравнений нулю приводит к характеристическому уравнению (трансцендентное уравнение):

$$\begin{aligned} F_1 \text{th}(kh) \text{th}(k_2 h)^2 + F_2 \text{th}(kh) \text{th}(k_1 h) \text{th}(k_2 h) + F_3 \text{th}(k_1 h) \text{th}(k_2 h)^2 + \\ + F_4 \text{th}(kh) \text{th}(k_1 h)^2 + F_5 \text{th}(k_1 h)^2 \text{th}(k_2 h) + F_6 \text{th}(kh) \text{th}(k_2 h) \text{th}(Kh) + \\ + F_7 \text{th}(kh) \text{th}(k_1 h) \text{th}(Kh) + F_8 \text{th}(k_1 h) \text{th}(k_2 h) \text{th}(Kh) = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

где $k = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - p^2/c_1^2}$, $K = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + v_1^2 - p^2/c_3^2}$

$$k_{1,2}^2 = (\xi^2 + \eta^2) + \frac{1}{2} \left[v_0^2 - \eta_0^2 - \frac{p^2}{c_2^2} - \frac{p^2}{c_4^2} \pm \sqrt{\left(v_0^2 - \eta_0^2 - \frac{p^2}{c_2^2} - \frac{p^2}{c_4^2} \right)^2 + 4 \frac{p^2}{c_2^2} \left(v_0^2 - \frac{p^2}{c_4^2} \right)} \right]$$

(выражения F_s ($s=1,2,3,4,5,6,7,8$), в виду громоздкости, здесь не приводятся).

Рассмотрен предельный случай, когда длина волны очень велика по сравнению с толщиной слоя $2h$. В этом случае аргументы гиперболических тангенсов $kh, k_1 h, k_2 h, Kh$ являются малыми величинами, при конечном значении c .

Подставленная в начале этого параграфа задача решена также на основе прикладных моделей микрополярных платин (упрощенной- (36)-(38) и полно-уточненной- (32)-(34)). Показано, что если в разложении гиперболического тангенса взять первый член, тогда полученное из (42) характеристическое уравнение полностью совпадает с

соответствующим уравнением, полученным на основе упрощенной модели микрополярных пластин. А если в разложении гиперболического тангенса ограничиться первыми двумя членами, то полученное характеристическое уравнение будет идентично характеристическому уравнению, получаемой на основе полно-уточненной модели микрополярных пластин (32)-(34).

На основе полученных результатов можно заключить, что прикладные двумерные модели микрополярных пластин, построенные применением асимптотического подхода, а также, основанное на этом подходе, метода гипотез, в сущности, адекватным образом заменяют трехмерную проблему.

В § 2.4. приведена постановка плоской динамической задачи (в области прямоугольника $0 \leq x_1 \leq a, -h \leq x_3 \leq h$) микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений:

Уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = \rho \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = \rho \frac{\partial^2 V_3}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \mu_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{32}}{\partial x_3} - (\sigma_{13} - \sigma_{31}) = J \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial t^2} \quad (43)$$

Физико-геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{\partial V_1}{\partial x_1} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{33}), & \gamma_{13} &= \frac{\partial V_3}{\partial x_1} + \omega_2 = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{13} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{31}, & \chi_{32} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3} = \frac{1}{B} \mu_{32}, \\ \gamma_{33} &= \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = \frac{1}{E} (\sigma_{33} - \nu \sigma_{11}), & \gamma_{31} &= \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \omega_2 = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{31} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{13}, & \chi_{12} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} = \frac{1}{B} \mu_{12} \end{aligned} \quad (44)$$

На лицевых линиях прямоугольника $x_3 = \pm h$ считаются заданными силовые и моментные граничные условия:

$$\sigma_{31} = \tilde{p}_1, \quad \sigma_{33} = \pm \tilde{p}_3, \quad \mu_{32} = \pm \tilde{m}_2 \quad (45)$$

Считается, что на кромках прямоугольника $x_1 = 0, x_1 = a$ либо заданы силовые и моментные напряжения, либо точки этих кромок зашпелены, либо заданы двумерные граничные условия типа шарнирного опирания.

Начальные условия, при $t = 0$, задаются для $V_1, \partial V_1 / \partial t, V_3, \partial V_3 / \partial t, \omega_2, \partial \omega_2 / \partial t$.

Гипотезы для построения прикладной динамической модели (одномерной) микрополярной упругой тонкой балки с независимыми полями перемещений и вращений формулируются аналогичным образом как при построении моделей оболочек и пластин.

Основная система динамических уравнений изгибной деформации микрополярных упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений выражается следующим образом:

Уравнения движения

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\tilde{p}_3, \quad N_{31} - \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = 2h\tilde{p}_1, \quad \frac{\partial L_{12}}{\partial x_1} + N_{31} - N_{13} = 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2} - 2\tilde{m}_2 \quad (46)$$

Физические соотношения

$$\begin{aligned} N_{13} &= 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{13} + (\mu - \alpha)\Gamma_{31}], & N_{31} &= 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{31} + (\mu - \alpha)\Gamma_{13}] \\ M_{11} &= 2/3 E h^3 K_{11}, & L_{12} &= 2B h \kappa_{12} \end{aligned} \quad (47)$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{13} = \partial w / \partial x_1 + \Omega_2, \quad \Gamma_{31} = \psi_1 - \Omega_2, \quad K_{11} = \partial \psi_1 / \partial x_1, \quad \kappa_{12} = \partial \Omega_2 / \partial x_1 \quad (48)$$

В модели (46)-(48) микрополярных балок с независимыми полями перемещений и вращений полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

Если во втором уравнении движения из (46) пренебрегать изгибающий момент M_{11} и связанная с ним инерция вращения $\partial^2\psi_1/\partial t^2$, то получается довольно простая модель микрополярно-упругих балок со свободным вращением:

Уравнения движения

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\tilde{p}_3, \quad \frac{\partial L_{12}}{\partial x_1} + N_{31} - N_{13} = 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2} - 2\tilde{m}_2 \quad (49)$$

Физико-геометрические соотношения

$$N_{13} = 2h \frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha} \Gamma_{13} + \frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha} N_{31}, \quad N_{31} = 2h\tilde{p}_1, \quad L_{12} = 2Bh\kappa_{12}, \quad \Gamma_{13} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \Omega_2, \quad \kappa_{12} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \quad (50)$$

Если в модели микрополярных балок (46)-(48) пренебрегать поперечные сдвиги, т.е. если принять $\psi_1 = -\partial w/\partial x_1$, тогда получается модель микрополярных балок, когда нормальный элемент поворачивается, оставаясь перпендикулярным к деформированной оси балки. Таким образом, построена основная система динамического изгиба микрополярных упругих балок с независимыми полями перемещений и вращений на основе обобщенных на микрополярный случай гипотез Бернулли.

В § 2.5. рассматривается микрополярно-упругая полоса толщиной $2h$, заключенный между прямыми линиями $x_3 = \pm h$, свободными от силовых и моментных напряжений. Предполагается, что в этой полосе распространяется плоская периодическая волна с фазовой скоростью c .

Математически эта задача формулируется следующим образом. Ищется решение двумерных волновых уравнений (относительно координат x_1, x_3):

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi - \frac{2\alpha}{\mu+\alpha} \omega_2 = 0, \quad \left(\nabla^2 - v_0^2 - \frac{1}{c_4^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \omega_2 + \frac{2\alpha}{B} \nabla^2 \Psi = 0 \quad (51)$$

в предположении, что

$$\Phi = \Phi^*(x_3) e^{i(\xi x_1 - p t)}, \quad \Psi = \Psi^*(x_3) e^{i(\xi x_1 - p t)}, \quad \omega_2 = \omega_2^*(x_3) e^{i(\xi x_1 - p t)} \quad (52)$$

Здесь следует иметь в виду, что

$$V_1 = \partial \Phi / \partial x_1 + \partial \Psi / \partial x_3, \quad V_3 = \partial \Phi / \partial x_3 - \partial \Psi / \partial x_1 \quad (53)$$

причем

$$c_1 = \sqrt{4\mu(\lambda + \mu)/[\rho(\lambda + 2\mu)]}, \quad c_2 = \sqrt{(\mu + \alpha)/\rho}, \quad c_4 = \sqrt{B/J}, \quad v_0 = \sqrt{4\alpha/B}, \quad \nabla^2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_3^2.$$

Если подставить (52) в (51), получим обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $\Phi^*(x_3)$, $\Psi^*(x_3)$, $\omega_2^*(x_3)$. Рассматривается задача изгиба.

Определяя общие решения для функций $\Phi^*(x_3)$, $\Psi^*(x_3)$, $\omega_2^*(x_3)$, на основе формул (53) определяются перемещения и независимый поворот, и далее, деформации, изгибы-кручения, силовые и моментные напряжения. Удовлетворяя условиям отсутствия силовых и моментных напряжений на граничных линиях $x_3 = \pm h$ полосы, относительно постоянных интегрирования получается алгебраическая однородная система линейных уравнений. Приравнивание определителя этой системы уравнений нулю приводит к характеристическому уравнению (трансцендентное уравнение):

$$a' \left(\frac{\tilde{T}_2 k_2}{ih(k_1 h)} - \frac{\tilde{T}_1 k_1}{ih(k_2 h)} \right) ih(kh) = 4\mu^2 \xi^2 k_1 k_2 k (\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1) \sqrt{\left[\frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} k^2 - \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} \xi^2 \right]} \quad (54)$$

где $a' = \mu(k_1^2 + \xi^2) + \alpha(k_1^2 - \xi^2) + 2\alpha\tilde{T}_1 = \mu(k_2^2 + \xi^2) + \alpha(k_2^2 - \xi^2) + 2\alpha\tilde{T}_2$, $k = \sqrt{\xi^2 - p^2/c_1^2}$

$$k_{1,2}^2 = \xi^2 + \frac{1}{2} \left[v_0^2 - \eta_0^2 - \frac{P^2}{c_2^2} - \frac{P^2}{c_4^2} \pm \sqrt{\left(v_0^2 - \eta_0^2 - \frac{P^2}{c_2^2} - \frac{P^2}{c_4^2} \right)^2 + 4 \frac{P^2}{c_2^2} \left(v_0^2 - \frac{P^2}{c_4^2} \right)} \right], \quad \tilde{T}_i = \frac{\mu + \alpha}{2\alpha} \left(\xi^2 - k_i^2 - \frac{P^2}{c_2^2} \right)$$

Рассмотрен предельный случай. Если длина волны очень велика по сравнению с толщиной полосы $2h$, то величины kh, k_1h, k_2h будут малы при конечном значении c .

Подставленная в начале этого параграфа задача решена также на основе прикладных моделей (упрощенной- (49),(50) и полно-уточненной (46)-(48)). Показано, что если в разложении гиперболического тангенса взять первый член, тогда характеристическое уравнение (54) полностью совпадает с соответствующим уравнением, полученным на основе упрощенной модели микрополярных балок. А если в разложении гиперболического тангенса ограничиться первыми двумя членами, то в этом случае характеристическое уравнение будет идентично характеристическому уравнению, получаемой на основе полно-уточненной модели микрополярных балок (46)-(48).

На основе полученных результатов можно заключить, что одномерные прикладные модели микрополярных балок, построенные применением асимптотического подхода, а также, основанное на этом подходе, метода гипотез, в сущности, адекватным образом заменяют двумерную проблему.

Глава третья посвящена изучению задач свободных и вынужденных колебаний микрополярных оболочек, пластин и балок соответственно по построенным динамическим прикладным-двумерным и одномерным микрополярным моделям.

В § 3.1. рассматриваются задачи свободных и вынужденных колебаний шарнирно опертых микрополярных балок.

В пункте А) § 3.1. рассмотрена задача свободных колебаний шарнирно опертых микрополярно-упругих балок. Задача решена по трем выше полученным микрополярным моделям (по упрощенной модели (49),(50), по модели, основанной на обобщенные гипотезы Тимошенко (46)-(48) и по модели, основанной на обобщенные гипотезы Бернулли). Поставленная задача допускает разделение переменных и в конечном итоге получены конкретные формулы для собственных частот колебаний микрополярных балок.

В пункте В) рассмотрена задача вынужденных колебаний микрополярных шарнирно опертых балок, по модели (46)-(48) в двух случаях, когда

$$1) \tilde{p}_3 = p_{31} e^{ip_1 t} \sin(\pi x_1 / a), \quad \tilde{p}_1 = \tilde{m}_2 = 0, \quad \text{где } p_{31} - \text{константа} \quad (55)$$

$$2) \tilde{m}_2 = m_{20} e^{ip_1 t}, \quad \tilde{p}_1 = \tilde{p}_3 = 0, \quad \text{где } m_{20} - \text{константа} \quad (56)$$

Для обеих задач получены частные решения (т.е. определены функции, выражающие вынужденные колебания), определены амплитуды вынужденных колебаний и условия резонанса.

В пункте С) на основе полученных результатов рассмотренных в пунктах А) и В) задач проведен численный анализ и выявлены специфические особенности свободных и вынужденных колебаний балок из микрополярно-упругого материала.

Расчеты показывают, что по сравнению с классической моделью, по микрополярной модели получается дополнительный спектр собственных частот. Это объясняется тем, что свободные вращения точек балки создают новые степени свободы.

На рис. 1 приведены зависимости самой низкой частоты свободных колебаний балки от размера a по рассмотренным моделям и по классической модели. В качестве физических констант для микрополярного материала балки выбраны величины: $\alpha = 1,6 \text{ МПа}$, $\mu = 2 \text{ МПа}$, $\lambda = 3 \text{ МПа}$, $B = 300 \text{ Н}$; $\rho = 1114 \text{ кг/м}^3$, $J = 5,31 \cdot 10^{-6} \text{ кг/м}$, а для относительной толщины балки выбрано значение $\delta = h/a = 1/40$. На этих графиках

сплошная линия 1 соответствует классической теории; пунктирная линия 2 – упрощенной микрополярной модели (49),(50), при которой пренебрегается влияние изгибающего момента M_{11} ; сплошная линия 3 – микрополярной модели (46)-(48), при которой полностью учитываются поперечные сдвиговые деформации и влияние изгибающего момента M_{11} ; пунктирная линия 4 – микрополярной модели, основанной на обобщенные гипотезы Бернулли.

Поскольку микрополярная модель (46)-(48) (с полным учетом поперечных сдвиговых деформаций и влияния изгибающего момента M_{11}) является относительно точной моделью, сравнение проведена относительно этой модели. Как видно из рис. 1 (правый рисунок, это продолжение левого, при больших значениях размера a), низкая частота колебаний балки по микрополярной модели (46)-(48) и по классической модели очень сильно различаются для значений до $a=0.3m$. При довольно больших размерах (от $a=0.5m$ до $a=0.8m$ и выше) результаты микрополярной и классической модели довольно близки друг к другу. Ветви низких частот по упрощенной модели (49),(50) (при которой пренебрегалось влияние изгибающего момента M_{11}) и по уточненной модели (46)-(48) практически совпадают почти до значения $a=0.3m$, при возрастании размера a , они начинают резко отличаться друг от друга (их отличие достигает до $\approx 40\%$). Низкая частота по модели (основанной на обобщенные гипотезы Бернулли) при малых размерах ($a \leq 0.015m$) сильно отличается от низкой частоты по модели (46)-(48). При больших размерах a ветви низких частот по этим моделям сливаются в одно.

Отметим, что в диссертационной работе кроме указанных графиков приведены также таблицы, в которых подробным образом для разных значений относительной толщины δ приводятся значения частот собственных колебаний для всех рассмотренных моделей микрополярных балок.

На рис. 2 приведена зависимость низкой частоты колебания микрополярной балки от ее размера a , при различных значениях физической константы α . Здесь пунктирные линии 1,2,3 соответствуют микрополярной модели (46)-(48) (с полным учетом поперечных сдвиговых деформаций и влияния изгибающего момента M_{11}), когда физический параметр α имеет соответственно значения $\alpha=1.6 \cdot 10^4$ Па, $\alpha=1.6 \cdot 10^3$ Па, $\alpha=1.6 \cdot 10^2$ Па (остальные физические параметры соответствуют выше приведенным значениям, а $\delta=1/40$). Сплошная линия 4 соответствует классической модели. Легко убедиться, что при повышении значения физического константа α , низкая частота колебаний микрополярной балки резко возрастает. Это означает, что в выборе микрополярного материала есть определенная возможность регулировать значение низкой частоты колебаний балки, и тем самым, возможно достижение значительного разрыва частот собственных и вынужденных колебаний балки, что важно при явлении резонанса.

Изучались также влияния физической константы B и меры инерции J на частот колебаний микрополярной балки.

При вынужденных колебаниях резонансное явление отличается от аналогичного явления по классической теории упругих балок. В случае микрополярного материала, появляются новые резонансные частоты. В этом направлении весьма важен следующий эффект - в микрополярной упругой балке имеется собственная частота акустического резонанса материала балки, не зависящая от ее геометрических размеров (a и $2h$). Это явление для тонкого слоя (бесконечного), впервые было обнаружено в работе: Варыгина М. П., Садовская О. В., Садовский В. М. Численное моделирование пространственных

волновых движений в моментной упругой среде// В сборник (электр. вариант) «Проблемы механики и акустики сред с микро и наноструктурой». Наномех-2009. Нижний Новгород 21-23 сентября, 2009 года. С. 1-13.

Пусть, например, балка нагружена внешним распределенным моментом \tilde{m}_2 (см. формулу (56)). На рис. 3 приведена зависимость безразмерной амплитуды A_0^2/m_{20} от величины p внешнего момента, при разных размерах балки. Графики получены для различных значений размера балки 1) $a=0,2$ м, 2) $a=0,3$ м, 3) $a=0,5$ м, 4) $a=0,8$ м (для физических параметров приняты вышеприведенные значения, а $\delta=1/40$). Указанный резонансный пик при частоте $p=174,7$ КГц, которая практически не зависит от значений a .

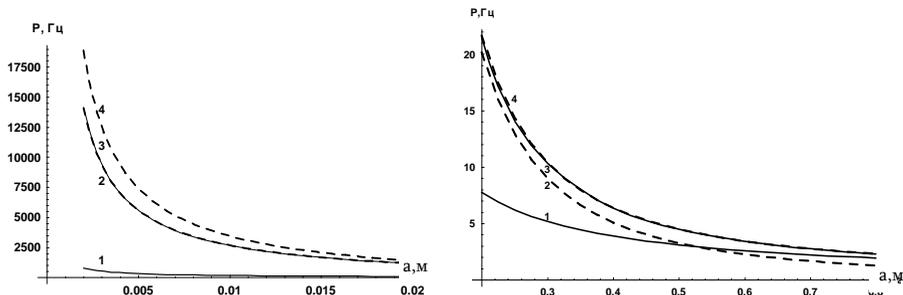


Рис. 1. Зависимость низкой частоты колебаний микрополярной балки от ее размера a .

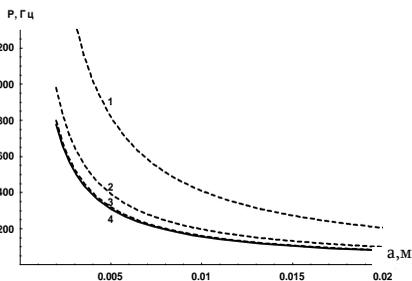


Рис. 2. Зависимость низкой частоты колебаний микрополярной балки от ее размера a при разных значениях α .

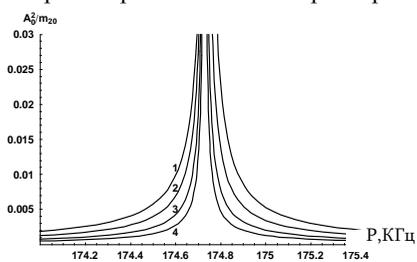


Рис. 3. Собственная частота акустического резонанса балки, не зависящая от ее размеров.

В § 3.2. рассмотрены задачи свободных и вынужденных колебаний микрополярных тонких прямоугольных и круглых пластин.

В пункте А) рассмотрена задача свободных колебаний микрополярных прямоугольных шарнирно опертых пластин по трем выше полученным микрополярным моделям пластин (по упрощенной модели (36)-(38), по уточненной модели (32)-(34) и по модели, на основе обобщенный на микрополярный случай гипотез Кирхгофа). Задача допускает разделение переменных. Получены формулы для определения собственных частот колебаний микрополярных прямоугольных пластин.

В пункте В) рассмотрена задача вынужденных колебаний микрополярных прямоугольных пластин в двух случаях, когда

$$1) p_3 = p_3 e^{ip_1 t} \sin(\pi x_1/a) \sin(\pi x_2/b), \quad \tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = \tilde{m}_1 = \tilde{m}_2 = \tilde{m}_3 = 0, \text{ где } p_{31} - \text{константа}$$

$$2) \tilde{m}_1 = m_{10} e^{ip_1 t} \sin(\pi x_1/a), \quad \tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = \tilde{p}_3 = \tilde{m}_2 = \tilde{m}_3 = 0, \text{ где } m_{10} - \text{константа}$$

Для обеих задач получены частные решения, определяющие вынужденные колебания, получены уравнения для определения амплитуд вынужденных колебаний.

В пункте С), в виде графиков и таблиц приведены основные результаты численного анализа, на основе которых установлены специфические особенности собственных и вынужденных колебаний прямоугольных пластин из микрополярно-упругого материала. Отметим, что указанные специфические особенности микрополярного материала пластинки в основном идентичны особенностям, полученным из аналогичных задач для микрополярных балок (о которых подробно говорилось выше).

В пункте D) рассмотрена задача свободных колебаний микрополярных тонких круглых пластин. Для этого в общих уравнениях модели микрополярных пластин осуществлен переход к полярным координатам. Рассмотрена осесимметричная задача динамического деформирования микрополярных круглых сплошных пластин. В этом случае уравнения и граничные условия расщепляются на две группы (задача изгиба и задача кручения). Изучены обе задачи.

Граничную задачу изгиба и задачу кручения микрополярных круглых пластин преобразованы и написаны в перемещениях и поворотах, соответственно относительно величин w, ψ_1, Ω_2 и ψ_2, Ω_1, t . Далее при изучении собственных колебаний микрополярных пластин решение указанных граничных задач соответственно представлено в виде:

$$w(r, t) = e^{ipnt} \tilde{w}(r), \quad \Omega_2(r, t) = e^{ipnt} \tilde{\Omega}_2(r), \quad \psi_1(r, t) = e^{ipnt} \tilde{\psi}_1(r) \quad (57)$$

$$\Omega_1(r, t) = e^{ipnt} \tilde{\Omega}_1(r), \quad \psi_2(r, t) = e^{ipnt} \tilde{\psi}_2(r), \quad t(r, t) = e^{ipnt} \tilde{t}(r) \quad (58)$$

Относительно функций $\tilde{w}(r), \tilde{\Omega}_2(r), \tilde{\psi}_1(r)$ и $\tilde{\Omega}_1(r), \tilde{\psi}_2(r), \tilde{t}(r)$ получается система обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями шарнирного опирания.

В случае задачи изгиба из указанной системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\tilde{\psi}_1$ получается отдельное дифференциальное уравнение вида:

$$A_1 \Delta \Delta \Delta \tilde{\psi}_1 + A_2 \Delta \Delta \tilde{\psi}_1 + A_3 \Delta \tilde{\psi}_1 + A_4 \tilde{\psi}_1 = 0 \quad (59)$$

$$\text{где } \Delta = \frac{d}{dr} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right), \quad A_1 = (\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon) \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)}, \quad A_2 = \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} s_1 + \frac{\mu + \alpha}{2\mu} (\gamma + \varepsilon) \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} \rho p_m^2 - 2\mu s_2$$

$$A_3 = -2\mu s_3 - s_1 \left(2\mu - \frac{\rho h^2}{3} p_m^2 \right) - s_2 \rho p_m^2, \quad A_4 = -\rho p_m^2 s_3, \quad s_1 = (\gamma + \varepsilon)(\mu - \alpha) \frac{\rho p_m^2}{2\mu} + 4\mu\alpha - (\mu - \alpha) J p_m^2 \quad (60)$$

$$s_2 = (\gamma + \varepsilon) \left(2\alpha - \frac{\mu + \alpha}{2\mu} \frac{\rho h^2}{3} p_m^2 \right) - (J p_m^2 - 4\alpha) \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)}, \quad s_3 = (J p_m^2 - 4\alpha) \left(\mu + \alpha - \frac{\rho h^2}{3} p_m^2 \right) + 4\alpha^2$$

В случае задачи кручения, аналогичным образом получается отдельное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $\tilde{\psi}_2$

$$A_1 \Delta \Delta \Delta \tilde{\psi}_2 + A_2 \Delta \Delta \tilde{\psi}_2 + A_3 \Delta \tilde{\psi}_2 + A_4 \tilde{\psi}_2 = 0 \quad (61)$$

$$\text{где } A_1 = (\mu + \alpha)(\beta + 2\gamma) \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{h^4}{9}, \quad A_2 = S_1 S_4 - S_2 \beta \frac{\mu + \alpha}{2\alpha} \frac{h^2}{3} - \frac{S_3}{S_1} A_1$$

$$A_3 = -S_1 s_3 + \left[\frac{2\alpha h^2}{3} + \frac{\beta}{2\alpha} \left(\mu + \alpha - \frac{\rho h^2}{3} p_m^2 \right) \right] S_2 - S_3 S_4, \quad A_4 = s_3 S_3 \quad (62)$$

$$S_1 = \frac{h^2}{3} \left(\beta + \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \right), \quad S_2 = 2\alpha \left[\frac{h^2}{3} \frac{\beta + 2\gamma}{S_1} S_3 + (J p_m^2 - 4\alpha) \frac{h^2}{3} - \beta \right], \quad S_3 = \beta + 2\gamma - (J p_m^2 - 4\alpha) \frac{h^2}{3}$$

$$S_4 = (Jp_m^2 - 4\alpha)(\mu + \alpha) \frac{h^2}{3} + 2\alpha(\beta + 2\gamma) \frac{h^2}{3} \left[\frac{2\alpha h^2}{3} + \frac{\beta}{2\alpha} \left(\mu + \alpha - \frac{\rho h^2}{3} p_m^2 \right) \right] \frac{1}{S_1} - (\beta + 2\gamma) \left(\mu + \alpha - \frac{\rho h^2}{3} p_m^2 \right)$$

На основе метода операторных разложений для сплошной пластинки строятся общие решения как для уравнения (59), так и для уравнения (61).

Определяя требуемые величины, удовлетворяя граничные условия шарнирного опирания, и требуя ненулевое решение, в результате относительно собственных частот получено трансцендентное уравнение, которое в случае задачи изгиба можно представить в следующем компактном виде:

$$\text{Det} \left| a_n^m \right| = 0, \quad n, m = 1, 2, 3 \quad (63)$$

$$\text{где } a_n^1 = s_4 i \sqrt{\lambda_n} I_0(R\sqrt{\lambda_n}), \quad a_n^2 = \sqrt{\lambda_n} I_0(R\sqrt{\lambda_n}) - \frac{(1-\nu)}{R} I_1(R\sqrt{\lambda_n})$$

$$a_n^3 = -(\gamma + \varepsilon) s_5 i \sqrt{\lambda_n} I_0(R\sqrt{\lambda_n}) + \frac{\gamma}{s_1 R \rho p_m^2} \left\langle \alpha \lambda_n (\mu - \alpha) \left[-2\mu [2\alpha(\gamma + \varepsilon) \lambda_n - 4\mu\alpha + (\mu + \alpha) Jp_m^2] + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[\lambda_n \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} + \frac{\rho h^2}{3} p_m^2 \right] [s_1 + (\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon) \lambda_n + 2\mu(Jp_m^2 - 4\alpha)] \right] - \right. \\ \left. - 2\mu\alpha(\mu - \alpha) s_1 \lambda_n + \rho p_m^2 \mu s_1 \left[(\mu + \alpha) - \lambda_n \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} \right] - s_1 \mu \frac{\rho^2 h^2}{3} p_m^4 \right\rangle I_1(R\sqrt{\lambda_n}) \quad (64)$$

а $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ корни уравнения третьей степени $A_1 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_3 \lambda + A_4 = 0$, где A_1, A_2, A_3 определяются по (60). Здесь $I_0(x)$ и $I_1(x)$ функции Бесселя чисто мнимого аргумента нулевого и первого порядка.

В случае задачи кручения относительно собственных частот получено уравнение:

$$A_1 (t_m/R)^6 + A_2 (t_m/R)^4 + A_3 (t_m/R) + A_4 = 0 \quad (65)$$

где t_m m -ая корень трансцендентного уравнения $J_1(t_m) = 0$, а A_1, A_2, A_3 определяются по (62). $J_1(x)$ функция Бесселя действительного аргумента первого порядка.

Задача о собственных колебаниях микрополярных круглых сплошных пластин (осесимметричные колебания) решена также по упрощенной модели микрополярных пластин и по модели, основанной на обобщенных гипотезах Кирхгофа.

В пункте Е в виде графиков приведены основные результаты численного анализа, на основе которых установлены специфические особенности собственных и вынужденных колебаний круглых пластин из микрополярно-упругого материала. Отметим, что указанные специфические особенности микрополярного материала пластинки в основном идентичны особенностям, полученным из аналогичных задач для микрополярных балок (о которых подробно говорилось выше).

В § 3.3. рассмотрены задачи свободных и вынужденных осесимметричных колебаний микрополярно-упругих тонких круговых цилиндрических оболочек.

Из общих уравнений уточненной модели динамики (13)-(15) микрополярных оболочек получены разрешающие уравнения для круговых цилиндрических оболочек, далее рассмотрена осесимметричная задача. В этом случае общие уравнения разделяются на две группы. Рассматривается задача изгиба. Уравнения относительно перемещений u_1, w , поворота ψ_1 и свободного поворота Ω_2 выражаются так:

$$\frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial w}{\partial \xi} \right] = \rho r^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{r^2}{2h} (p_1^+ - p_1^-)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{E}{1-\nu^2} \left[\nu \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + w \right] + (\mu + \alpha) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \rho r^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\alpha r \frac{\partial \Omega_2}{\partial \xi} + (\mu - \alpha) r \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} = -\frac{r^2}{2h} (p_3^+ - p_3^-) \\
& - 2\alpha r \frac{\partial w}{\partial \xi} + (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial \xi^2} - 4\alpha r^2 \Omega_2 - \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \Omega_2 + 2\alpha r^2 \psi_1 = Jr^2 \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2} - \frac{r^2}{2h} (m_2^+ - m_2^-) \\
& - (\mu - \alpha) r \frac{\partial w}{\partial \xi} + 2\alpha r^2 \Omega_2 + \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} - (\mu + \alpha) r^2 \psi_1 - \frac{\rho h^2}{3} r^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = -\frac{r^2}{2} (p_1^+ + p_1^-)
\end{aligned} \tag{66}$$

где r - радиус срединной поверхности оболочки, ξ - относительное расстояние по образующей (измеренное в долях r).

К уравнениям (66) присоединяются граничные условия шарнирного опирания.

Рассмотрена задача свободных колебаний $p_1^\pm = p_3^\pm = m_2^\pm = 0$, которая допускает разделение переменных, и получены частоты собственных колебаний микрополярных круговых цилиндрических оболочек.

Далее задача о свободных колебаниях микрополярных цилиндрических оболочек решена также по модели (10)-(12) и по модели на основе обобщенной гипотезы Кирхгофа-Лява и проведены сравнения.

В пункте В) рассмотрены задачи вынужденных колебаний (осесимметричных) микрополярных круговых цилиндрических шарнирно опертых оболочек по уточненной модели (66), когда

$$1) p_3^+ = p_3^- e^{ip_3 t} \sin \pi x_1 / a, \quad p_1^+ = p_1^- = p_3^- = m_2^+ = m_2^- = 0, \quad p_{31} - \text{константа}$$

$$2) m_2^+ = m_{20} e^{ip_2 t}, \quad p_1^+ = p_1^- = p_3^+ = p_3^- = m_2^- = 0, \quad m_{20} - \text{константа}$$

Получены частные решения, выражающие вынужденные колебания микрополярных оболочек и уравнения для определения амплитуд вынужденных колебаний.

В пункте С) в виде графиков приведены основные результаты численного анализа, на основе которых установлены специфические особенности собственных и вынужденных колебаний круговых цилиндрических пластин из микрополярно-упругого материала. Указанные специфические особенности микрополярного материала оболочки, как в случае пластин, в основном идентичны особенностям, полученным из аналогичных задач для микрополярных балок (о которых подробно говорилось выше).

В заключении представлены основные результаты диссертационной работы.

В диссертационной работе методом гипотез С. О. Саркисяна построены математические модели динамики микрополярных упругих тонких оболочек, пластин и балок. На основе этих моделей изучены конкретные задачи о собственных и вынужденных колебаниях микрополярных балок, прямоугольных и круглых пластин и цилиндрических оболочек.

В работе, в частности, получены следующие новые результаты:

- На основе асимптотического метода построены внутренняя задача, погранслои (по координате и по времени) для начально-граничной задачи микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений в области тонкой оболочки и изучена задача о сращивании внутренней и погранслоиных асимптотических разложений [5].
- На основе асимптотического анализа начально-граничной задачи микрополярной теории упругости в области тонкой оболочки, обосновывается прикладная теория динамики микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений, построенная С. О. Саркисяном на основе метода гипотез, при

которой полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации [5].

- С помощью метода гипотез построена прикладная модель динамики микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений, при которой полностью учитываются поперечные сдвиговые деформации. Построена также прикладная модель динамики микрополярных упругих тонких пластин без учета поперечных сдвигов [10].

- С помощью метода гипотез построена прикладная модель динамики микрополярных упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений, при которой полностью учитываются поперечные сдвиговые деформации. Построена также прикладная модель динамики микрополярных упругих тонких балок без учета поперечных сдвигов [3].

- Изучены задачи о распространении волн в микрополярно-упругом слое и полосе. Эти же задачи изучены также при помощи прикладных моделей микрополярно-упругих тонких пластин и балок. Обосновывается метод гипотез построения прикладных моделей микрополярно-упругих тонких пластин и балок [4].

- Изучены задачи о свободных и вынужденных колебаниях шарнирно-опертых микрополярно-упругих тонких балок. Определены частоты собственных колебаний, амплитуды вынужденных колебаний и условия резонанса для микрополярных балок. На основе численного анализа выявлены основные специфические стороны характеристик микрополярных балок в зависимости от значений различных упругих и инерционных констант микрополярного материала [2,3,6,8,9].

- Изучены задачи о свободных и вынужденных колебаниях шарнирно-опертых микрополярно-упругих прямоугольных и круглых пластин. Определены частоты собственных колебаний, амплитуды вынужденных колебаний и условия резонанса для микрополярно-упругих прямоугольных и круглых пластин. На основе численного анализа выявлены основные специфические стороны характеристик микрополярных пластин в зависимости от значений различных упругих и инерционных констант микрополярного материала [2,6-10].

- Изучены задачи о свободных и вынужденных колебаниях шарнирно-опертых микрополярно-упругих круговых цилиндрических тонких оболочек. Определены частоты собственных колебаний, амплитуды вынужденных колебаний и условия резонанса для микрополярно-упругих круговых цилиндрических оболочек. На основе численного анализа выявлены основные специфические стороны характеристик микрополярных оболочек в зависимости от значений различных упругих и инерционных констант микрополярного материала [1,2,8,9].

- Показано, что в тонких телах, типа балок, пластин и оболочек из микрополярного материала имеется собственная частота акустического резонанса, которая не зависит от размеров указанных тонких тел, а зависит только от физических и инерционных свойств микрополярного материала [10].

- Показано, что в выборе микрополярного материала есть определенная возможность регулировать значения низких частот собственных колебаний балок, пластин и оболочек, и тем самым, возможно достижение значительного разноса частот собственных колебаний балок, пластин и оболочек, что важно при явлении резонанса.

• При изучении собственных колебаний микрополярно-упругих тонких балок, пластин и цилиндрических оболочек, на основе численного анализа сравнены между собой построенные различные модели микрополярных балок, пластин, оболочек и их классические модели. Сделаны определенные выводы и рекомендации.

Перечень публикаций по теме диссертации

1. Саркисян А. А. Свободные колебания микрополярных упругих тонких цилиндрических оболочек// Механика. Сборник трудов международной школы-конференции молодых ученых. 28 сентября-1 октября, 2009 Агавнадзор, Армения 2009. С. 304-309.
2. Саркисян А. А. Свободные колебания микрополярных упругих тонких балок, прямоугольных пластин и цилиндрических оболочек // Труды II международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды” 4-8 октября, Дилижан, Армения. 2010. Т. 2. С. 125-129.
3. Саркисян А. А. Свободные колебания микрополярных упругих тонких балок// Известия НАН Армении. Механика. 2010. Т. 63. № 3. С. 41-51.
4. Саркисян А. А. Математическая модель динамического изгиба микрополярных упругих тонких балок // “Вестник научно-технического развития”. Интернет журнал. № 3 (43), 2011. С. 20-27.
5. Саркисян А. А. Асимптотический анализ начально-граничной динамической задачи несимметричной теории упругости со свободным вращением в области тонкой оболочки// Известия НАН Армении. Механика. 2011. Т. 64. № 2. С. 39-50.
6. Саркисян С.О., Саркисян А. А. Динамические задачи для тонких стержней и пластин по несимметричной теории упругости// Межвузовский сборник научных трудов посвященной к 80-летию С. Н. Мергеляна. Ванадзор: Государственный педагогический институт им. О. Туманяна. 2008. Том 2. С. 4-17.
7. Саркисян С.О., Саркисян А. А. Свободные колебания микрополярных пластин// Труды VII Всероссийской научной конференции “Нелинейные колебания механических систем”. Нижний Новгород: Изд. Дом “Диалог Культур”, 2008. С. 415-423.
8. Саркисян С.О., Саркисян А. А. Динамические эффекты колебаний микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек.// Первая Всероссийская конференция. Проблемы механики и Акустики сред с микро - и наноструктурой: Наномех-2009. Нижний Новгород, 21-23 сентября 2009 года. Тезисы докладов. С. 58. Полные тексты в электронном виде. С. 266-275.
9. Саркисян С.О., Саркисян А. А. Некоторые особенности колебательных процессов в микрополярных упругих тонких пластинах и оболочках // Международный симпозиум “Перспективные материалы и технологии”. Сборник тезисов. Витебск 2009. С. 44.
10. Саркисян С.О., Саркисян А. А. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких пластин со свободным вращением и особенности их свободных колебаний // Акустический журнал. 2011. Т. 57. № 4. (в печати).

Ամփոփում

Ատենախոսական աշխատանքում Ս. Չ. Սարգսյանի վարկածների մեթոդի հիման վրա կառուցված են ազատ պտույտներով միկրոպոլյար առաձգական բարակ թաղանթների, սալերի և ձողերի դինամիկ մաթեմատիկական մոդելները: Այդ մոդելների հիման վրա ուսումնասիրված են մասնավոր խնդիրներ միկրոպոլյար ձողերի, ուղղանկյուն և շրջանային սալերի և շրջանային գլանական թաղանթների ազատ և հարկադրական տատանումների վերաբերյալ:

Աշխատանքում մասնավորաբար ստացվել են հետևյալ արդյունքները.

- Ասիմպտոտիկ մեթոդի հիման վրա բարակ թաղանթի տիրույթում կառուցված են ազատ պտույտներով միկրոպոլյար առաձգական դինամիկական տեսության ներքին խնդիրը և ըստ կոորդինատի ու ըստ ժամանակի սահմանային շերտերը, ուսումնասիրված են ներքին և սահմանային շերտերի ասիմպտոտիկ վերլուծությունների համակցման խնդիրները [5]:
- Առաձգականության միկրոպոլյար տեսության նախնական խնդրի ասիմպտոտիկ անալիզի հիման վրա հիմնավորվում է Ս. Չ. Սարգսյանի կողմից վարկածների մեթոդով կառուցված անկախ պտույտներով միկրոպոլյար առաձգական բարակ թաղանթների դինամիկ տեսությունը, որի դեպքում լիովին հաշվի են առնված լայնական սահքային դեֆորմացիաները [5]:
- Վարկածների մեթոդի հիման վրա կառուցված են անկախ պտույտներով միկրոպոլյար առաձգական բարակ սալերի դինամիկայի կիրառական մոդելները, ինչպես լայնական սահքային դեֆորմացիաների հաշվառմամբ, այնպես էլ առանց նրանց արժեվորման [10]:
- Վարկածների մեթոդի հիման վրա կառուցված են անկախ պտույտներով միկրոպոլյար առաձգական բարակ ձողերի դինամիկայի կիրառական մոդելները, ինչպես լայնական սահքային դեֆորմացիաների հաշվառմամբ, այնպես էլ առանց նրանց արժեվորման [3]:
- Ուսումնասիրված են անկախ պտույտներով միկրոպոլյար առաձգական շերտում (եռաչափ և երկչափ դրվածքներով) ալիքների տարածման խնդիրները: Նույն խնդիրներն ուսումնասիրված են նաև անկախ պտույտներով միկրոպոլյար առաձգական բարակ սալերի և ձողերի կիրառական մոդելների օգնությամբ: Հիմնավորվում են միկրոպոլյար առաձգական բարակ սալերի և ձողերի կիրառական մոդելները [4]:
- Ուսումնասիրված են հողակապորեն հենված միկրոպոլյար առաձգական բարակ ձողերի ազատ ու հարկադրական տատանումների խնդիրները:

Որոշված են սեփական տատանումների հաճախականությունները, հարկադրական տատանումների ամպլիտուդները և ռեզոնանսի առաջացման պայմանները: Թվային անալիզի հիման վրա բացահայտվում են տարբեր առաձգական հաստատունների և նյութի իներցիոն հատկությունների ազդեցություններն այդ բնութագրիչների վրա [2,3,6,8,9]:

- Ուսումնասիրված են հողակապորեն հենված միկրոպոլյար առաձգական բարակ ուղղանկյուն ու շրջանային սալերի ազատ ու հարկադրական տատանումների խնդիրները: Որոշված են սեփական տատանումների հաճախականությունները, հարկադրական տատանումների ամպլիտուդները և ռեզոնանսի առաջացման պայմանները: Թվային անալիզի հիման վրա բացահայտվում են տարբեր առաձգական հաստատունների և նյութի իներցիոն հատկությունների ազդեցություններն այդ բնութագրիչների վրա [2,6-10]:

- Ուսումնասիրված են հողակապորեն հենված միկրոպոլյար առաձգական բարակ շրջանային գլանական թաղանթների ազատ ու հարկադրական տատանումների խնդիրները: Որոշված են սեփական տատանումների հաճախականությունները, հարկադրական տատանումների ամպլիտուդները և ռեզոնանսի առաջացման պայմանները: Թվային անալիզի հիման վրա բացահայտվում են տարբեր առաձգական հաստատունների և նյութի իներցիոն հատկությունների ազդեցություններն այդ բնութագրիչների վրա [1,2,8,9]:

- Ցույց է տրված, որ միկրոպոլյար նյութից պատրաստված բարակ ձողերում, սալերում և թաղանթներում համապատասխանաբար գոյություն ունեն ակուստիկ ռեզոնանսի սեփական հաճախականություններ, որենք կախված չեն նշված մարմինների չափերից, այլ պայմանավորված են միայն այդ մարմինների միկրոպոլյար նյութերի ֆիզիկական և իներցիոն հատկություններով [10]:

- Ցույց է տրված, որ միկրոպոլյար նյութի ընտրության հարցում լայն հնարավորություններ կան ձողերի, սալերի և թաղանթների սեփական տատանումների ցածր հաճախականությունները կարգավորելու առումով: Ինչը կարևոր է ռեզոնանսի երևույթի տեսանկյունից:

- Ազատ պտույտներով միկրոպոլյար առաձգական բարակ ձողերի, սալերի և թաղանթների ազատ տատանումների խնդիրներն ուսումնասիրելիս սեփական տատանումների հաճախականությունների տեսանկյունից համեմատվում են ինչպես կառուցված տարբեր միկրոպոլյար մոդելներն, այնպես էլ դասական մոդելները: Կատարված են որոշակի եզրահանգումներ և առաջարկություններ:

Abstract

In dissertation work mathematical dynamic models of micropolar elastic thin shells, plates and bars are constructed by the hypotheses method of S. H. Sargsyan. On the basis of these models specific problems about the proper and forced vibrations of micropolar bars, rectangular and round plates and cylindrical shells are studied.

In work, in particular, following new results are received

- On the basis of the asymptotic method an internal problem and frontier layers for initial-boundary problem of micropolar elasticity theory with independent fields of transitions and rotations in the thin shells area are constructed and problem about the internal and frontier layer's asymptotical decomposition's merging is studied [5].
- On the basis of the asymptotic analysis of micropolar elasticity initial-boundary problem in the thin shell's area the applied dynamic theory of micropolar elastic thin shells with independent fields of transitions and rotations (constructed by S. H. Sargsyan on the basis of hypotheses method) with the full account of cross shift deformations is proved [5].
- On the basis of the hypotheses method micropolar elastic thin plate's applied dynamic models with independent fields of transitions and rotations with the full account of cross shift deformations and also without their account are constructed [10].
- On the basis of the hypotheses method micropolar elastic thin bar's applied dynamic models with independent fields of transitions and rotations with the full account of cross shift deformations and also without their account are constructed [3].
- Problems about wave's distribution in the micropolar elastic layer and strip are studied. The same problems on the basis of micropolar elastic thin plate's and bar's applied models are studied. The construction hypotheses method of micropolar elastic thin plates and bars applied models is proved [4].
- Problems about the proper and forced vibrations of the hinge support micropolar elastic thin bars are studied. The proper vibration's frequencies, forced vibration's amplitudes and resonance conditions for micropolar bars are defined. On the basis of the numerical analysis the basic specific sides of micropolar bar's characteristics are revealed

depending on values of various elastic and inertial constants of micropolar material [2,3,6,8,9].

- Problems about the proper and forced vibrations of the hinge support micropolar elastic thin rectangular and round plates are studied. The proper vibration's frequencies, forced vibration's amplitudes and resonance conditions for micropolar rectangular and round plates are defined. On the basis of the numerical analysis the basic specific sides of the micropolar rectangular and round plate's characteristics are revealed depending on values of various elastic and inertial constants of micropolar material [2, 6-10].

- Problems about the proper and forced vibrations of the hinge support micropolar elastic thin cylindrical shells are studied. The proper vibration's frequencies, forced vibration's amplitudes and resonance conditions for micropolar cylindrical shells are defined. On the basis of numerical analysis the basic specific sides of the micropolar cylindrical shell's characteristics are revealed depending on values of various elastic and inertial constants of micropolar material [1,2,8,9].

- It is shown, that in the thin micropolar body's such as bars, plates and shells there is acoustic resonance's proper frequency which does not depend on the sizes of specified thin bodies and depends only on physical and inertial properties of micropolar material [10].

- It is shown, that in choice of micropolar material there is certain possibility to regulate values of proper vibration's low frequencies of bars, plates and shells. That is important at the resonance phenomenon.

- At studying of proper vibrations of micropolar elastic thin bars, plates and cylindrical shells, on the basis of the numerical analysis constructed various models of micropolar bars, plates, shells and their classical models are compared among themselves. The certain conclusions and recommendations are made.