

ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ԱԼԻ ԷՍԿԱՆԴԱՐ ՓԱՀԼԱՎԻԱՆԻ ԳՈԼՍՈՒՐԱԹ

ՀԱԿԱՀԱՐԹ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՅԻ ԺԱՄԱՆԱԿ ՃԱՔԵՐՈՎ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՊՐԻԶՄԱՏԻԿ  
ԿՏՈՐ-ԱՌ-ԿՏՈՐ ՀԱՄԱՍԵՌ ԱՌԱԶԳԱԿԱՆ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԸ

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Ա.02.04 - «Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա»  
մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների  
թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ԵՐԵՎԱՆ - 2013

---

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН РА

АЛИ ЭСКАНДЕР ПАХЛАВИАНИ ГОЛСУРАТ

**НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ  
КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ, ИМЕЮЩИХ ТРЕЩИНЫ, ПРИ  
АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук по специальности  
01.02.04 "Механика деформируемого твердого тела"

Ереван – 2013

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում


Գիտական ղեկավար՝ ՀՀ ԳԱԱ թղթ.-անդ. Ֆ-մ.գ.դ, պրոֆ. Ս.Ս.Մխիթարյան  
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ Ֆիզ.-մաթ. գիտ.դոկտոր Կ.Լ.Աղայան  
Ֆիզ.-մաթ.գիտ. թեկնածու Ջ.Ա.Դավթյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Հայաստանի պետական ճարտարագիտական համալսարան (Պոլիտեխնիկ)

Պաշտպանությունը կայանալու է 2013թ. հունիսի 21-ին, ժամը 14<sup>00</sup>-ին  
ՀՀԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում գործող 047 մասնագիտական խորհրդի նիստում (հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող., 24բ. [avsah@mechins.sci.am](mailto:avsah@mechins.sci.am))

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է՝ 18-ը մայիսի 2013թ.

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար  
Ֆիզ.մաթ.գիտ.դոկտոր  Ա.Վ.Սահակյան

---

Тема диссертации утверждена в Институте механики НАН РА.

Научный руководитель: чл.-корр. НАН РА, д.ф.-м.н, проф. С.М.Мхитарян

Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук К.Л.Агаян  
кандидат физ.-мат. наук З.А.Давтян


Ведущая организация: Государственный инженерный университет  
Армении (Политехник)

Защита диссертации состоится 21-ого июня 2013г. в 14<sup>00</sup> часов на заседании специализированного совета 047 в Институте механики НАН РА по адресу: 0019, г.Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2, [avsah@mechins.sci.am](mailto:avsah@mechins.sci.am).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА.

Автореферат разослан 18-ого мая 2013г.

Ученый секретарь специализированного совета:  
доктор физ.-мат. наук

 А.В.Саакян

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Все инженерные конструкции по конструктивным и технологическим условиям их изготовления содержат дефекты типа микропор, микротрещин, инородных включений, надрезов, повреждений поверхностей и др., которые могут возникать также в процессе эксплуатации конструкций. Эти дефекты в значительной мере влияют на уровень прочности конструкций и их деталей, снижая их теоретическую прочность. Более того, появление и рост микротрещин приводят, в конечном итоге, к их слиянию и образованию макротрещин или магистральных трещин. При некоторых допускаемых значениях параметров нагрузок, а также характерных физических и геометрических параметров, имеющиеся трещины могут оказаться неустойчивыми и из-за спонтанного роста вызвать быстрое лавинообразное разрушение тела или конструкции. С другой стороны, трещины в деформируемых телах являются концентраторами напряжений, вокруг которых образуются локальные поля напряжений, характеризующиеся большими и интенсивно изменяющимися градиентами. Поэтому качественное и количественное исследование этих полей, разработка методов снижения уровня концентрации напряжений вокруг трещин и установление критериев их распространения, составляющих основное содержание механики разрушения - одной из обширных областей механики деформируемого твердого тела - имеют первостепенно важное значение для обеспечения прочности и долговечности инженерных конструкций и их деталей.

В механике разрушения рассматриваются три основных типа деформации разрушения: нормальный отрыв, поперечный сдвиг и продольный сдвиг или антиплоская деформация. Согласно условиям работы данной конструкции и ее предназначения, одна из указанных деформаций представляется доминирующей. Например, в расчетах зданий и сооружений на сейсмостойкость, в исследованиях деформаций земной коры при землетрясениях, в вопросах передачи нагрузок от тонкостенных элементов в виде стрингеров, тонкостенных включений, плит, пластин и оболочек к массивным деформируемым телам различных геометрических форм, в качестве доминирующей деформации часто выступает антиплоская деформация. Значительная часть обширной научной литературы по механике разрушения посвящена вопросам и методам определения напряженно-деформированного состояния деформируемых тел с трещинами при антиплоской деформации, установления различных критериев распространения трещин в них. Но эти исследования, в основном, относятся к телам бесконечных размеров и сравнительно мало исследованы эти вопросы в случае тел конечных размеров. В настоящей диссертационной работе частично заполняется этот пробел и в ней рассматриваются вопросы определения напряженно-деформированного состояния кусочно-однородных призматических тел прямоугольного поперечного сечения с коллинеарной системой трещин на линии спая разнородных материалов, вычисляются коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений (КИН) и раскрытия трещин, выясняются закономерности их изменения. Этим и обусловлена актуальность диссертационной темы.

**Цель и основные задачи работы** заключаются:

- в исследовании общей задачи о напряженно-деформированном состоянии кусочно-однородного призматического тела прямоугольного поперечного сечения с коллинеарной системой из произвольного конечного числа трещин, расположенных на линии спая разнородных материалов, при антиплоской деформации,
- в рассмотрении частного случая общей задачи, когда имеются две одинаковые трещины, симметрично расположенные относительно начала координат, и в выяснении эффектов взаимовлияния смежных концов этих трещин;
- в аналитическом представлении КИН в концевых точках трещин, выведенном двумя способами: из выражения плотности дислокаций на берегах трещин или из выражения разрушающих касательных напряжений, действующих вне трещин на линии их расположения, которые приводят к идентичным результатам;
- в изучении влияния деформируемых по модели Винклера при продольном сдвиге тонкостенных включений, соединяющих берега одинарной трещины вблизи ее концевых точек на симметричных относительно начала координат частичных участках одинаковых длин, на уменьшение КИН, способствующее предотвращению распространения трещины;
- в проведении подробного численного анализа плотностей дислокаций на берегах трещин, их раскрытий, КИН в широких диапазонах изменения характерных параметров рассматриваемых задач, каковыми являются отношения модулей сдвига составляющих фаз двухслойного прямоугольного композита, отношения геометрических размеров трещин к длине составного прямоугольника;
- в исследовании закономерностей изменения указанных физических характеристик в зависимости от упругих и геометрических параметров задач и в их представлении таблицами и графиками;
- в определении КИН методом конечных элементов и в их сравнении с результатами, полученными упомянутыми выше двумя способами.

**Методика исследования.** При помощи метода конечного синус-преобразования Фурье решение обсуждаемых в диссертации задач сведено к системам сингулярных интегральных уравнений (СИУ) с ядром Коши или Гильберта. Решения этих определяющих СИУ построены известным частично-аналитическим методом решения СИУ, основанным на квадратурных формулах Гаусса для обычных интегралов и сингулярных, с ядром Коши, интегралов. В результате, определяющие СИУ сводятся к системам линейных алгебраических уравнений простых структур. На этом пути широко используется математический аппарат многочленов Чебышева.

**Научная новизна** состоит в следующем:

- в широком диапазоне изменения физических и геометрических параметров выведены определяющие СИУ задач о напряженно деформированном состо-

янии кусочно-однородных призматических упругих тел прямоугольного поперечного сечения, когда на линии стыка разнородных материалов расположена система из произвольного конечного числа коллинеарных трещин.

- для основных механических характеристик задач, каковыми являются плотности дислокаций на берегах трещин, их раскрытия, КИН в концевых точках трещин, получены явные аналитические формулы простых структур.
- проведен подробный численный анализ указанных характеристик и полученные результаты представлены большим числом графиков и таблиц.
- в частном случае двух одинаковых и симметрично расположенных трещин при постоянной внешней нагрузке показано, что по мере приближения ближних концов трещин друг к другу КИН в этих концах увеличиваются и, следовательно, трещины проявляют тенденцию к распространению.
- показано, что в задаче об одинарной трещине в двухслойном прямоугольном композите, когда берега трещины частично, вблизи концевых точек на симметричных участках одинаковых длин соединены между собой тонкостенными включениями, механическое поведение которых описывается моделью Винклера при антиплоской деформации, надлежащим выбором характерных параметров можно достичь уменьшения КИН и, тем самым, предотвратить распространение трещины.

**Достоверность полученных результатов.** Все результаты и выводы в диссертации получены строгими методами математической теории упругости, механики разрушения, теории интегральных преобразований, теории сингулярных интегральных уравнений, математического аппарата классических ортогональных многочленов Чебышева, чем и обеспечена их достоверность. Достоверность полученных результатов обеспечивается также их совпадением в частных случаях с известными.

**Практическая ценность работы.** Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в геологических работах по измерению смещений и деформаций трещиноватых горных массивов при их оползнях или подземных толчках, в расчетах фундаментных плит, подушек зданий на сейсмостойкость, протяжных туннельных покрытий и в расчетах прочностных характеристик многих инженерных конструкций и их деталей, в других областях инженерной практики. Эти результаты могут быть использованы также в теоретических исследованиях по механике разрушения.

**Апробация результатов работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались:

- на семинаре “Математические методы инженерных проблем” при кафедре высшей математики Ереванского государственного университета архитектуры и строительства (ЕрГУАС),
- на международной конференции “Архитектура и строительство. Современные проблемы” 30 сент.-3 окт., 2010г, Ереван – Джермук, Армения,

- на 3-ей Международной конференции “Современные проблемы архитектуры и строительства”, 20 – 24 ноября 2011г, Пекин, Китай.

Диссертация в целом доложена на общем семинаре Института механики НАН Армении.

### **Публикации.**

По теме диссертации опубликовано пять научных статей.

### **Структура и объем работы.**

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка цитированной литературы, включающего 200 наименований, изложена на 119 страницах компьютерного текста, содержит 36 рисунков и 3 таблицы.

## **СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**Во введении** дан проблемно-ориентированный краткий обзор основных результатов и работ, примыкающих к теме диссертации. Здесь же очерчен круг вопросов и задач рассматриваемых в диссертации, обоснована актуальность темы, указана научная новизна, кратко изложено содержание диссертации.

**В первой главе** диссертации приведены основные уравнения линейной теории упругости и изложены основные принципы механики разрушения. Сюда относятся энергетический критерий Гриффитса, силовой критерий Ирвина, теория  $J$  интеграла, асимптотические формулы Снеддона для напряжений и смещений вблизи концевых точек трещины. Все эти результаты излагаются главным образом для третьего типа разрушения - при антиплоской деформации, которые неоднократно используются в последующих главах.

**Вторая глава** посвящена исследованию задач о напряженно-деформированном состоянии кусочно-однородных призматических тел прямоугольного поперечного сечения при антиплоской деформации, когда на линии спая разнородных материалов расположена система из произвольного конечного числа коллинеарных трещин. Сначала для сопоставления результатов для тел конечных и бесконечных размеров в первом параграфе этой главы рассмотрена периодическая задача о напряженном состоянии бесконечной упругой пластины при антиплоской деформации, содержащей бесконечный ряд одинаковых трещин. Задача решена методом комплексных потенциалов в сочетании с методом интегрального преобразования Фурье. Определены КИН и разрушающие касательные напряжения вне трещин на линии их расположения. При различных значениях характерного параметра построены графики этих напряжений в зависимости от расстояния от ближайшей вершины трещины.

Далее, в последующем параграфе рассматривается следующая задача. Пусть отнесенное к правой прямоугольной системе координат  $Oxuz$  кусочно-однородное призматическое тело имеет прямоугольное поперечное сечение,

состоящее из верхнего прямоугольника  $D_1 = \{0 \leq x \leq l; 0 \leq y \leq h_1\}$  с модулем сдвига  $G_1$ , длины  $l$ , высоты  $h_1$ , и из нижнего прямоугольника  $D_2 = \{0 \leq x \leq l; -h_2 \leq y \leq 0\}$  с модулем сдвига  $G_2$ , длины  $l$ , высоты  $h_2$ , (рис.1).

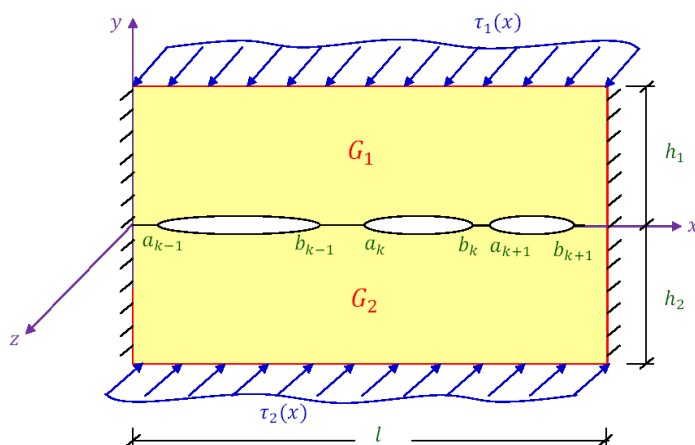


Рис.1. Кусочно-однородное упругое тело прямоугольного сечения с системой коллинеарных трещин на поверхности раздела

Пусть, далее, на отрезке стыка  $0 \leq x \leq l$  этих прямоугольников расположена система  $L$  из произвольного конечного числа  $N$  непересекающихся трещин  $L_k = [a_k, b_k]$  ( $a_1 \geq 0, b_N \leq l$ ),  $L = \bigcup_{k=1}^N L_k = \bigcup_{k=1}^N [a_k, b_k]$ ;  $a_k < b_k$  ( $k = \overline{1, N}$ ), причем верхние (+) и нижние (-) берега этих трещин нагружены противоположно направленными касательными силами заданной интенсивности  $\tau_{\pm}^{(0)}(x)$  т.е.

$$\tau_{yz}^{(1)} \Big|_{y=+0} = \tau_+^{(0)}(x) \quad (x \in L^+); \quad \tau_{yz}^{(2)} \Big|_{y=+0} = \tau_-^{(0)}(x) \quad (x \in L^-); \quad L^{\pm} = \bigcup_{k=1}^N L_k^{\pm}$$

где, как и далее, индекс 1 относится к прямоугольнику  $D_1$  а индекс 2 -  $D_2$ . Кроме того, пусть вертикальные кромки  $x=0$  и  $x=l$  прямоугольников ( $i=1,2$ ) жестко зашпелены, а горизонтальные кромки  $y=h_1$  и  $y=-h_2$  нагружены касательными силами заданной интенсивности  $\tau_j(x)$  ( $j=1,2$ ) т.е.

$$\tau_{yz}^{(1)} \Big|_{y=h_1-0} = \tau_1(x), \quad \tau_{yz}^{(2)} \Big|_{y=h_2+0} = \tau_2(x) \quad (0 < x < l)$$

где  $\tau_{yz}^{(j)}$  ( $j=1,2$ ) - компоненты касательных напряжений в прямоугольниках  $D_1$ . Требуется определить плотность дислокаций на берегах трещин, КИН, разрушающие касательные напряжения вне системы трещин  $L' = [0, l] \setminus L$  и их раскрытия.

Для определения этих характеристик кусочно-однородный прямоугольник по отрезку оси  $Ox$  разрезается на верхнюю  $D_1$  и на нижнюю  $D_2$  прямоугольники, точки которых имеют единственную отличную от нуля компоненту смещений  $w_j(x, y)$  ( $j=1,2$ ) в направлении оси  $Oz$  в прямоугольнике

$D_j (j=1,2)$ . Затем отдельно рассматривается состояние упругого равновесия этих прямоугольников. В результате, с учетом закона Гука, для определения  $w_1(x, y)$  в прямоугольнике  $D_1$  получается следующая граничная задача

$$\begin{aligned} \Delta w_1 &= \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0 \quad (0 < x < l, 0 < y < h_1) \\ w_1(x, y)|_{x=0} &= w_1(x, y)|_{x=l} = 0 \quad (0 < y < h_1) \\ \tau_{yz}^{(1)}|_{y=+0} &= G_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} \Big|_{y=+0} = \tau_+(x); \quad \tau_{yz}^{(1)}|_{y=h_1} = G_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} \Big|_{y=h_1} = \tau_1(x). \quad (0 < x < l) \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$L' = [0, l] \setminus L, \quad \tau_{yz}^{(1)}, \quad \tau_{yz}^{(1)}|_{y=+0} = \tau_+(x) = \begin{cases} \tau_+^{(0)}(x) & (x \in L^+) \\ \tau(x) & (x \in L') \end{cases}$$

где функцией  $\tau_+^{(0)}(x)$  характеризуются действующие на системе верхних берегов  $L^+$  заданные касательные силы, а функцией  $\tau(x)$  - неизвестные разрушающие касательные силы вне системы трещин на  $L'$ .

Решение граничной задачи (1) строится при помощи конечного синус-преобразования Фурье

$$\bar{w}_1(n, y) = \int_0^l w_1(x, y) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

в результате чего двумерная граничная задача (1) сводится к простой одномерной граничной задаче, решение которого выражается элементарной функцией. Вся эта процедура делается также для нижнего прямоугольника  $D_2$ , после чего из условия непрерывности смещений вне трещин, выводится безразмерное определяющее СИУ задачи:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\lambda_0} \frac{\omega_0(u) du}{u-t} + \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_0} \left[ \frac{(u+t)K_0(t, u)}{\sqrt{1-u^2}} - 2K(t, u) \right] \omega_0(u) du = f(t) \quad (t \in \lambda_0) \quad (2)$$

откуда определяется половина безразмерной плотности дислокаций на берегах трещин  $\omega_0(t) = \phi_0(\arccost)$ , где  $\phi_0(x) = w_1'(x, 0) - w_2'(x, 0)$  ( $x \in L$ ) и введены безразмерные величины

$$\xi = \frac{\pi x}{l}; \quad \eta = \frac{\pi s}{l}; \quad h_+ = \frac{\pi h_1}{l}, \quad h_- = \frac{\pi h_2}{l}; \quad \mu = \frac{G_1}{G_2}; \quad \alpha_k = \frac{\pi a k}{l}, \quad \beta_k = \frac{\pi b k}{l};$$

$$\bar{\tau}_j(\xi) = G_* \tau_j(l\xi/\pi); \quad \tilde{\tau}_\pm(\xi) = G_* \tau_\pm^{(0)}(l\xi/\pi); \quad \bar{\tau}(\xi) = G_* \tau(l\xi/\pi);$$



$$G_* = \frac{G_1 + G_2}{2G_2}; \quad L_0 = \bigcup_{k=1}^N [\alpha_k, \beta_k], \quad L'_0 = [0, \pi] \setminus L_0; \quad 0 < \xi, \eta < \pi.$$

$$t = \cos \xi, \quad u = \cos \eta, \quad \phi_0(\xi) = \phi'(l\xi/\pi); \quad \Lambda_0 = \bigcup_{k=1}^N [\delta_k, \gamma_k], \quad \delta_k = \cos \beta_{N+1-k}; \quad \gamma_k = \cos \alpha_{N+1-k}$$

Функции  $K_0(t, u)$ ,  $K(t, u)$  и  $f(t)$  известны и выражаются бесконечными рядами простых структур. СИУ должно рассматриваться при условиях

$$\int_{\delta_k}^{\gamma_k} \frac{\omega_0(u) du}{\sqrt{1-u^2}} = 0 \quad (k = \overline{1, N}) \quad (3)$$

выражающих условие непрерывности смещений в концевых точках трещин.

Далее, каждый отрезок  $(\delta_k, \gamma_k)$  ( $k = \overline{1, N}$ ) при помощи формул

$$t = \frac{\gamma_k - \delta_k}{2} r + \frac{\gamma_k + \delta_k}{2}; \quad u = \frac{\gamma_k - \delta_k}{2} \rho + \frac{\gamma_k + \delta_k}{2}$$

преобразуется в отрезок  $[-1, 1]$ , а затем СИУ (2) при условиях (3) известным численно-аналитическим методом сводится к системе линейных алгебраических уравнений

$$\frac{1}{M} \sum_{p=1}^M \left[ \frac{\Psi_k(\rho_p)}{\rho_p - r_m} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^N [L_{kn}(r_m, \rho_p) + 0.5K_{kn}(r_m, \rho_p)] \Psi_n(\rho_p) \right] = f_k(r_m) \quad (m = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}) \quad (4)$$

$$\frac{1}{M} \sum_{p=1}^M \frac{\Psi_k(\rho_p)}{\sqrt{4 - [(\gamma_k - \delta_k)\rho_p + \gamma_k + \delta_k]^2}} = 0$$

Здесь  $M$  - произвольное фиксированное натуральное число,  $\Psi_k(\rho)$  - функции из гильдеровского класса на отрезке  $(-1, 1)$ ,  $r_m = \cos\left(\frac{\pi m}{M}\right)$  ( $m = \overline{1, M-1}$ ),

$\rho_p = \cos\left(\frac{2p-1}{2M}\pi\right)$  ( $p = \overline{1, M}$ ) - известные чебышевские узлы. Кроме того в (4)

$$\omega_k^{(0)}(\rho) = \Psi_k \sqrt{1-\rho^2}; \quad \omega_0^{(0)}(\rho) = \omega_0 \left( \frac{\gamma_k - \delta_k}{2} \rho + \frac{\gamma_k + \delta_k}{2} \right).$$

Безразмерные раскрытия трещин даются формулой

$$\Phi_{N+1-k}^{(0)}(r) = \frac{\gamma_{N+1-k} - \delta_{N+1-k}}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\text{sign}(r - \phi) \omega_{N+1-k}^{(0)}(\phi) d\phi}{\sqrt{4 - [(\gamma_{N+1-k} - \delta_{N+1-k})\rho + \gamma_{N+1-k} + \delta_{N+1-k}]}} \quad (5)$$

а КИН в концевых точках трещины  $(a_k, b_k)$  - формулами

$$K_{III} \left\{ \begin{array}{l} a_k \\ b_k \end{array} \right\} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a_k + 0} \left[ \sqrt{2\pi(x - a_k)} \right] \phi'(x) \\ \lim_{x \rightarrow b_k - 0} \left[ \sqrt{2\pi(x - b_k)} \right] \phi'(x) \end{array} \right\}. \quad (6)$$

Последние формулы преобразуются к безразмерным видам при помощи приведенных выше безразмерных величин. В конечном итоге, характеристики (5) и (6), а также разрушающие касательные напряжения вне трещины на отрезке их расположения, выражаются через решение системы (4).

В третьей главе диссертации детально следуются несколько частных случаев решенной в предыдущей главе общей задачи. Сначала рассматривается случай одной центральной трещины в составном прямоугольнике

$$L = [a_1, b_1], \quad a_1 = \frac{l}{2} - a, \quad b_1 = \frac{l}{2} + a, \quad (0 < a < \frac{l}{2}),$$

когда горизонтальные кромки  $y = \pm h$  в своих срединных точках  $(l/2, \pm h)$  нагружены касательными сосредоточенными силами  $P$ , т.е.

$$\tau_{yz}^{(1)} \Big|_{y=h-0} = \tau_{yz}^{(2)} \Big|_{y=-h+0} = P\delta(x - \frac{l}{2}) \quad (0 < x < l)$$

где  $\delta(x)$  - дельта-функция Дирака, а берега трещины свободны от напряжений. В такой постановке решение задачи опять сводится к решению СИУ типа (2)-(3), но со значительно простой структурой, а затем к системе линейных уравнений типа

$$\sum_{p=1}^M K_{mp} X_p = a_m \quad (m = \overline{1, M}) \quad (7)$$

В результате безразмерные разрушающие касательные напряжения

$$\tau_0(t) = (G_1 + G_2)/2G_1G_2 \cdot (l/\pi \cdot \arccost),$$

через решение системы (7), определяются формулой

$$\begin{aligned} \tau_0(t) = & -\frac{\sin \alpha}{M} \sum_{p=1}^M \frac{X_p}{\rho_p \sin \alpha - t} - \frac{\sin^2 \alpha}{M} \sum_{p=1}^M \frac{\rho_p X_p}{\sqrt{1 - \rho_p^2 \sin^2 \alpha} (\sqrt{1 - t^2} + \sqrt{1 - \rho_p^2 \sin^2 \alpha})} + \\ & + \frac{2 \sin \alpha}{M} \sqrt{1 - t^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)h_0}}{\text{ch}[(2n-1)h_0]} U_{2n-2}(t) \sum_{p=1}^M \frac{T_{2n-1}(\sin \rho_p) X_p}{\sqrt{1 - \rho_p^2 \sin^2 \alpha}} + \\ & + \frac{4Q_0 \sqrt{1 - t^2}}{1 + \mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} U_{2n-2}(t)}{\text{ch}[(2n-1)h_0]} \quad (t \in [-1, 1] \setminus (-\sin \alpha, \sin \alpha)) \end{aligned} \quad (8)$$

$$L = \frac{\pi a}{l}, \quad h_0 = \frac{\pi h}{l}, \quad Q_0 = \frac{(G_1 + G_2)P}{2G_1G_2l}, \quad \mu = \frac{G_1}{G_2},$$

где  $T_n(t)$  и  $U_{n-1}(t)$  - многочлены Чебышева первого и второго рода.

При этом для безразмерного КИН на основании (6) получается формула

$$K_{III}^{(0)} = \frac{G_1 + G_2}{2G_1G_2\sqrt{l}}, \quad K_{III}(a_1) = \frac{\sqrt{tg\alpha}}{M} \sum_{p=1}^M (-1)^{p+1} X_p ctg \frac{(2p-1)\pi}{4M} \quad (9)$$

а для безразмерного раскрытия трещины, согласно (5), имеет место формула

$$\Phi_1^{(0)}(r) = \frac{\sin \alpha}{M} \sum_{p=1}^M \frac{\text{sign}(r-\rho_p) X_p}{\sqrt{1-\rho_p^2 \sin^2 \alpha}} \quad (-1 \leq r \leq 1) \quad (10)$$

Для числовых расчетов принято  $h_0 = 0.1\pi$ ;  $\alpha = \pi/3, \pi/4, \pi/8, \pi/16, \pi/32$ ;  $M = 10$ .

Результаты вычислений для решения системы (7) приведены в таблице 1, для КИН (9) – в таблице 2, а ход изменения  $\tau_0(t)$  из (8) и  $\Phi_1^{(0)}(r)$  из (10) для различных значений  $\alpha$  и  $\mu$  показан на рис. 2 и 3, соответственно.

Таблица 1. Вектор дислокации  $X_p$  при  $\alpha = \pi/4, h_0 = 0.1\pi, Q_0 = 0.01, M = 10$

$P$	1	2	3	4	5
$X_p$	-0.003336	-0.01014	-0.02039	-0.01577	0.642398
$P$	6	7	8	9	10
$X_p$	0.101971	0.003718	-0.01272	-0.03394	-0.61789

Таблица 2. Коэффициент  $K_{III}^{(0)}$  при разных значениях  $M$  и  $\alpha$

	$\alpha=\pi/32$	$\alpha=\pi/16$	$\alpha=\pi/8$	$\alpha=\pi/4$	$\alpha=\pi/3$
$M=10$	1.927826	1.695110	2.446246	3.801916	5.006037
$M=20$	1.420968	2.019393	2.914226	4.529243	5.963718
$M=30$	1.670195	2.373580	3.425360	5.323640	7.009712
$M=40$	2.293439	3.2592965	4.703554	7.310187	9.625427
$M=50$	2.301109	3.263621	4.709795	7.319887	9.638198

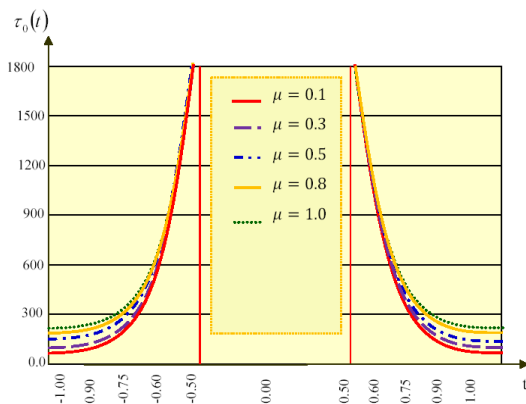


Рис.2. Касательное напряжение  $\tau_0(t)$  при  $\alpha=\pi/4, h_0=0.1\pi, Q_0=0.01$

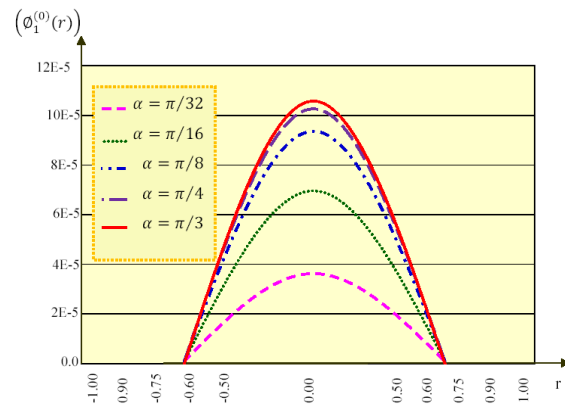


Рис.3. Дислокация трещины  $\Phi_1^{(0)}(r)$  для  $M=50, h_0=0.1\pi, Q_0=0.01$

Далее, рассматривается частный случай для трещин одинаковых длин, симметрично расположенных относительно начала координат, т.е. когда

$$L = \bigcup_{k=1}^2 [a_k, b_k], \quad a_1 = \frac{l}{2} - a, \quad b_1 = \frac{l}{2} - b, \quad a_2 = \frac{l}{2} + b, \quad b_2 = \frac{l}{2} + a \quad (0 < a < l/2, \quad b < a).$$

Здесь, как и в предыдущем случае, горизонтальные кромки составного прямоугольника  $y = \pm h$  в своих срединных точках  $(l/2 \pm h)$  оять нагружены касательными сосредоточенными силами величины  $P$ . В этом частном случае также получены явные выражения указанных выше характеристик. Численный анализ задачи проведен для различных значений параметров  $\mu = G_1/G_2$ ,  $\alpha = \pi a/l$ ,  $\beta = \pi b/l$  и полученные результаты наглядно представлены на рис.4-7.

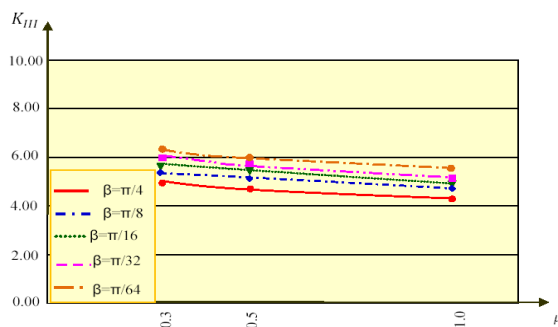


Рис.4. Зависимость  $K_{III}$  от  $\mu$  при  $\alpha = \pi/3$  и  $\beta = \pi/4, \pi/8, \pi/16, \pi/32, \pi/64$

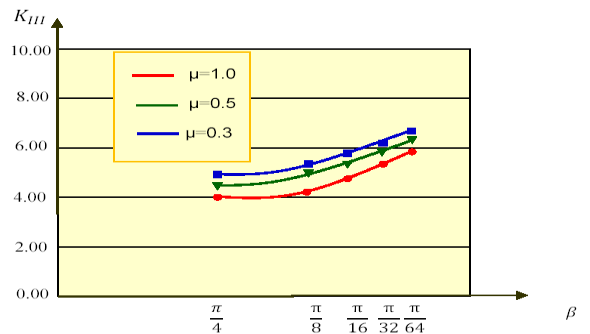


Рис.5. Зависимость  $K_{III}$  от  $\beta$  при  $\alpha = \pi/3$  и  $\mu = 1, 0.5, 0.3$

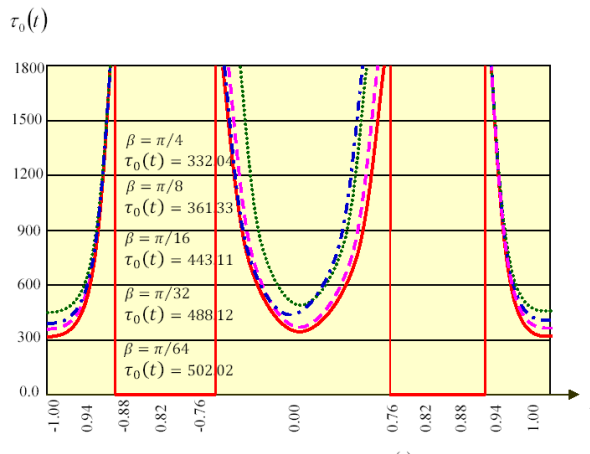


Рис.6. Зависимость  $\tau_0(t)$  при  $\alpha = \pi/3$  и  $\mu = 1.0$

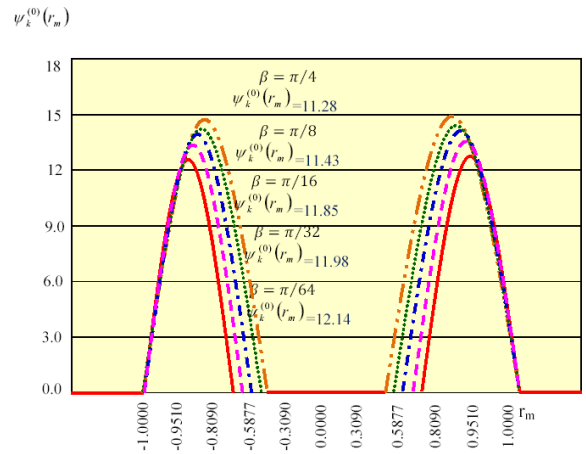


Рис.7. Раскрытие трещины  $\psi_k^{(0)}(r_m)$  при  $\alpha = \pi/3$  и  $\mu = 1.0$

В заключительной части третьей главы исследуется задача о взаимодействии трещины и тонкостенных включений в призматическом теле прямоугольного поперечного сечения. Пусть призматическое тело в прямоугольной системе координат  $Oxyz$  занимает область  $\Omega = \{0 \leq x \leq l, -h \leq y \leq h, -\infty < z < \infty\}$ , обладает модулем сдвига  $G$ , по вертикальным кромкам  $x = 0$  и  $x = l$  жестко защемлено, а на горизонтальных гранях  $y = \pm h$  нагружено касательными силами рав-

ной интенсивности  $T(x)$ , действующими, соответственно, по направлению оси  $Oz$  и в противоположном оси  $Oz$  направлению (рис.8).

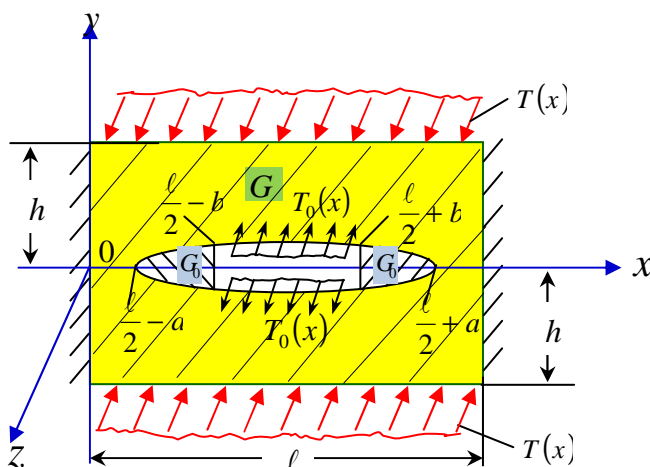


Рис.8 Поперечное сечение упругого тела, имеющего центральную трещину и включения вблизи вершин трещины

Пусть, далее, тело  $\Omega$  в своей плоскости симметрии  $y=0$  содержит сквозную трещину в форме полосы

$$\omega = \left\{ y=0; \frac{l}{2}-a < x < \frac{l}{2}+a, -\infty < z < \infty \right\} \quad (a < l/2),$$

на участках верхнего (+) и нижнего (-) берегов

$$\omega_{\pm} = \left\{ y=0; \frac{l}{2}-b < x < \frac{l}{2}+b; -\infty < z < \infty \right\} \quad (b < a)$$

которой по оси  $Oz$  в противоположных направлениях действуют касательные силы равной интенсивности  $T_0(L)$ . Кроме того, на концевых участках

$$\omega_0^{\pm} = \left\{ y = \pm 0; x \in \left( \frac{l}{2}-a, \frac{l}{2}-b \right) \cup \left( \frac{l}{2}+b, \frac{l}{2}+a \right); -\infty < z < \infty \right\} \quad (b < a)$$

берега трещины соединены между собой посредством тонкостенных включений модуля сдвига  $G_0$ , деформирующихся по известной модели Винклера. Опять при помощи конечного синус-преобразования Фурье решение поставленной задачи сводится к решению СИУ с ядром Гильберта, а затем с ядром Коши. Для основных механических характеристик: КИН в концевых точках трещины, раскрытие трещины, касательные контактные напряжения, получены явные формулы. В частном случае, когда

$$T_0(\lambda) = 0, \quad T(\lambda) = P\delta(x-l/2)$$

проведен численный анализ задачи. Результаты численного анализа представлены на рис.9-12.

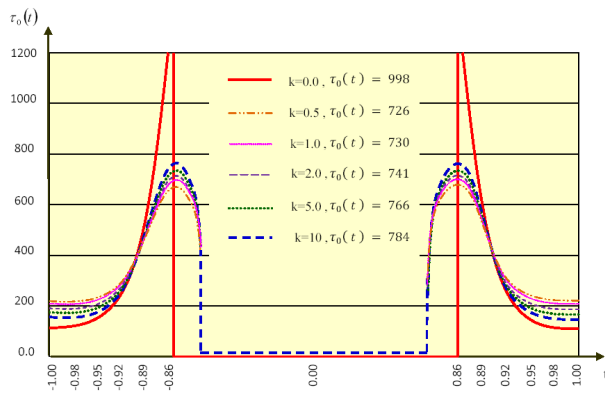


Рис.9. Зависимость антиплоского касательного напряжения  $\tau_0(t)$  от  $t$

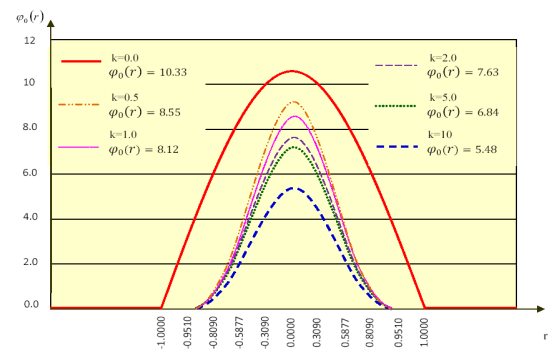


Рис.10. Кривая дислокации на краях трещины

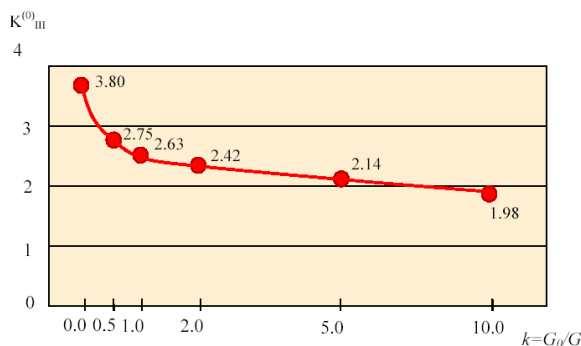


Рис.11 Зависимость  $K_{III}^{(0)}$  от  $k = G_0/G$

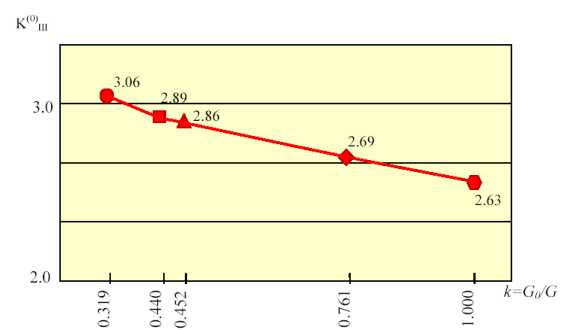


Рис.12 Зависимость  $K_{III}^{(0)}$  от  $k = G_0/G$  для различных материалов включений и базовой стальной основой

На основании результатов на графиках 11 и 12 можно прийти к важному заключению, что присутствие тонкостенных включений уменьшает величину КИН и, тем самым, предотвращает распространение трещины.

## Заключение

В диссертации получены следующие основные результаты:

- В широком диапазоне изменения характерных физических и геометрических параметров строгими методами математической теории упругости выведены определяющие сингулярные интегральные уравнения (СИУ) одного класса задач о напряженно-деформированном состоянии кусочно-однородных тел прямоугольного поперечного сечения при антиплоской деформации, когда на отрезке разнородных материалов расположена система из произвольного конечного числа коллинеарных трещин.
- Строгими методами математической теории упругости, сингулярных интегральных уравнений, интегрального преобразования Фурье, ортогональных многочленов Чебышева получены явные выражения основных механических

характеристик поставленных задач, каковыми являются плотность дислокаций на берегах трещин, разрушающие касательные напряжения вне трещин на отрезке их расположения, КИН в концевых точках трещин.

- В достаточно широких промежутках изменения физических и геометрических параметров обсуждаемых задач осуществлен численный анализ полученных аналитических результатов и выявлены закономерности изменения указанных механических характеристик задач.
- Исследован вопрос взаимовлияния концентраторов напряжений различных типов: трещин и тонкостенных включений, деформирующихся по модели Винклера при антиплоской деформации, и на этом пути установлено, что надлежащим подбором параметров включений и матрицы можно уменьшить КИН и, тем самым, достичь предотвращения распространения трещины.
- Проведено комплексное исследование и анализ класса граничных задач математической теории упругости, имеющих теоретическое и прикладное значение, позволяющие вести эффективный расчет прочностных характеристик различных инженерных конструкций и их деталей.

Основные положения опубликованы в следующих работах

1. Pahlaviani A.G. *Determination of s.i.f. in a center-cracked plate subject to antiplane deformation*. Bulletin of Yerevan State University of Architecture and Construction, 2011, №1, pp. 63-69.
2. Mkhitarian S.M., Pahlaviani A.G. *The Stress Distribution Field of Piecewise Homogeneous Elastic Rectangular Plate With a System of Collinear Cracks Subject to Antiplane Deformations*. The 2nd Intern. Scientific and Techn. Conf. "Architecture and Construction– Contemporary Problems" , 30 Sept. - 03 Oct., 2010, Yerevan – Jermuk. Conference proceedings, Vol. 2, pp. 295-303.
3. Pahlaviani A.G. *Main Characteristics of Fracture Failure of a Piecewise Homogeneous Elastic Plate With Crack Subject to Antiplane Deformations*. The 2nd Intern. Scientific and Techn. Conf. "Architecture and Construction– Contemporary Problems" 30 Sept. – 3 Oct. 2010, Yerevan – Jermuk. Conference proceedings, Vol. 2, pp. 304-310.
4. Pahlaviani A.G. *The Stress State of a Piecewise Homogeneous Elastic Plate With Two Symmetric Central Cracks in Antiplane Strains*. Proceedings of the National Academy of Sciences of Armenia, Mechanics, 2012, Vol. 65, Issue 3, pp. 10-21.
5. Mkhitarian S.M., Pahlaviani A.G. *On Stressed State of an Elastic Rectangle With a Central Crack And Thin-Walled Inclusions at Antiplane Deformation*. The 3rd International Conference on Contemporary Problems in Architecture and Construction, November 20-24, 2011, Beijing, China, Conference proceedings.

## ԱՄՓՈՓՈՒՄ

### ՀԱԿԱՀԱՐԹ ԴԵՖՈՐՄԱՅԻԱՅԻ ԺԱՄԱՆԱԿ ՃԱՔԵՐՈՎ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՊՐԻՁՄԱՏԻԿ ԿՏՈՐ-ԱՌ-ԿՏՈՐ ՀԱՄԱՍԵՌ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԸ

Ատենախոսությունը նվիրված է հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ ուղղանկյունաձև ընդլայնական կտրվածքով կտոր-առ-կտոր համասեռ պրիզմատիկ առաձգական մարմինների լարվածադեֆորմացիոն վիճակի վերաբերյալ առաձգականության մաթեմատիկական տեսության եզրային խնդիրների մի դասի հետազոտությանը, երբ տարասեռ նյութերի միացման հատվածի վրա կան կամայական վերջավոր թվով համագիծ ճաքերի համակարգ: Դիտարկված են մասնավոր դեպքեր և կատարվել է թվային վերլուծություն: Ատենախոսության հիմնական արդյունքներն են.

1. Ֆիզիկական և երկրաչափական բնութագրական պարամետրերի փոփոխության լայն տիրույթում հակահարթ խնդրի դեպքի համար առաձգականության մաթեմատիկական տեսության խիստ մեթոդներով դուրս են բերվել կտոր-առ-կտոր համասեռ ուղղանկյուն ընդլայնական կտրվածքով մարմինների լարվածադեֆորմացիոն վիճակի մի դասի խնդիրների որոշիչ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումները, երբ տարասեռ մարմինների հատվածի վրա կան կամայական վերջավոր թվով համագիծ ճաքեր:

2. Առաձգականության մաթեմատիկական տեսության, սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների, Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունների, Չեբիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների խիստ մեթոդների կիրառությամբ ստացվել են դրված խնդիրների հիմնական մեխանիկական բնութագրերի՝ ինչպիսիք են ճաքերի ափերի վրա դիսլոկացիաների խտությունը, ճաքերից դուրս քայքայող շոշափող լարումները դրանց տեղակայման հատվածների վրա, ճաքերի ծայրակետերում լարումների ինտենսիվության գործակիցները, բացահայտ արտահայտությունները,:



3. Քննարկվող խնդիրների ֆիզիկական և երկրաչափական պարամետրերի փոփոխության բավականին ընդարձակ միջակայքերում իրականացվել է ստացված անալիտիկական արդյունքների թվային վերլուծություն և բացահայտվել են խնդրի՝ նշված մեխանիկական բնութագրերի փոփոխության օրինաչափությունները:

4. Ուսումնասիրվել է ըստ Վինկլերի մոդելի դեֆորմացվող տարբեր նյութերի, ճաքերի և բարակապատ ներդրակների տիպի լարումների կենտրոնացուցիչների փոխազդեցությունը հակահարթ դեֆորմացիայի պարագայում, և այդ ընթացքում հաստատվել է, որ ներդրակների և մատրիցի մեխանիկական և երկրաչափական բնութագրիչների ճշգրիտ ընտրությամբ կարելի է նվազեցնել լարումների ինտենսիվության գործակիցները և դրանով իսկ, հասնել ճաքերի տարածման կանխմանը:

5. Կատարվել է առաձգականության մաթեմատիկական տեսության եզրային խնդիրների դասի համալիր հետազոտություն և վերլուծություն, որոնք ունեն տեսական և գործնական նշանակություն, և որոնք թույլ են տալիս կատարել տարբեր ինժեներական կառուցվածքների և դրանց մասերի ամրության բնութագրերի արդյունավետ հաշվարկ:

ALI G. PAHLAVIANI

STRESS STATE OF RECTANGULAR PRISMATIC PIECEWISE  
HOMOGENEOUS ELASTIC BODIES WITH CRACKS  
IN ANTIPLANE STRAINS

SUMMARY


The problems involving investigation and determination of the main physical characteristics of fracture of elastic cracked bodies have outstanding importance in theoretical engineering works. Development of equations and derivation of some formulas for stress intensity factors, S.I.F, in the three modes of fracture are pertaining problems in this field and many relations can be found in literature, but the third mode, namely tearing mode, has determining role in calculations of stress fields of cracked plates subjected to antiplane deformations and torsional shears, for example steel structure elements which are excited by seismic vibrations and torsions, or rotating bodies of missiles, and also members which are used in industry.

In this thesis Elastic Fracture Mechanics Concepts are reexamined for a row of collinear cracks on the interface between dissimilar solids. A derivation approach for stress and displacement or in better words “dislocation” fields in the vicinity of the crack tips is studied. In this manner the definitions of stress intensity factor  $K_{III}$  of classical type associated with interface cracks are discussed. Also a major problem of structures that is the repair of cracked bodies is investigated here. The procedure we have used is the integral equation method, which is more efficient, and in general is more accurate than the finite and boundary element methods.

The presenting research is devoted to specific purposes and questions involving the behavior of cracked bimaterial bodies, with several cracks at interface, deriving their dimensionless formulas for antiplane stress intensity factors, dislocations fields of cracks boundaries, investigation of the effects of shear modulus ratios of the two solids and cracks distances on the plate fracture characteristics with calculating the above parameters in a numerical analysis manner, to show the related variations with graphs and curves.

For study, a prismatic piecewise homogeneous elastic plate with a row of collinear central cracks in antiplane deformation considered. The vertical edges of the plate are rigidly clamped; meanwhile, the uniformly distributed shear forces causing the antiplane deformation are acting on the horizontal sides of plate and the edges of crack free of tractions. The solution of the stated problem via Fourier finite sine transformation is reduced to the determination of singular integral equation (SIE), and, consequently, to the system of linear algebraic equations. For calculating the main characteristics of stated problem, such as the SIF, the crack dislocations, and the shear stresses out-of-crack on the line of its interface, the obvious equations are obtained, the special case is considered that is a plate with one and two central cracks.

To study the inclusion effects, a prismatic elastic body with rectangular section and a central crack, subject to antiplane deformation whereas repaired by thin-walled infinitesimal inclusions at its tips, that have deformations according to Winkler model, is investigated. The vertical edges of the plate are modeled as fixed supports and the body is subject to antiplane shear tractions at the top and lower edges also at the crack boundaries that have no inclusion materials. The solution of the above boundary value problem with the aid of Fourier sinusoidal transformation leads to solve a singular integral equation and then we invert it to a system of linear algebraic equations. by using a suitable choice of shear rigidity elastic and geometric parameters we reach to a noticeable reduction in stress intensity factors at the crack tips which means to avoid and stop the crack propagation. Finally we calculate the stress intensity factors, crack displacements and shear stresses that show how the method used here is effective for reduction of tearing stresses of mode III in plates and as a result is proposed for strengthening and retrofit of structures to be used for practice and design methods in engineering codes.

Ali G. Pahlaviani

