

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РА  
ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**Степанян Ваан Сейранович**

**ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ ГАРАНТИРОВАННЫМ ПОИСКОМ  
ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА**

**Диссертация**

на соискание ученой степени кандидата  
физико – математических наук  
по специальности 01.02.01 - «Теоретическая механика»

Научный руководитель  
доктор физико- математических наук  
профессор В.В. Аветисян

Ереван – 2016

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>4</b>
<b>ГЛАВА 1. ОПТИМАЛЬНЫЙ ПО МИНИМАЛЬНОМУ ГАРАНТИРОВАННОМУ ВРЕМЕНИ ПОИСК ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА НА ПЛОСКОСТИ.....</b>	<b>14</b>
§1.1. ОПИСАНИЕ ПОИСКОВОЙ СИСТЕМЫ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ .....	14
§1.2. МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ ГАРАНТИРУЮЩИХ УПРАВЛЕНИЙ.....	18
1.2.1. Построение области гарантирующих управлений в случае $l_0 > r_0$ .....	19
1.2.2. Построение областей гарантирующих управлений в случаях $l_0 < r_0$ и $l_0 = r_0$ .....	26
§1.3. НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ГАРАНТИРУЮЩИХ УПРАВЛЕНИЙ И ОПТИМАЛЬНОГО ГАРАНТИРОВАННОГО ВРЕМЕНИ .....	31
1.3.1. Случай $l_0 > r_0$ .....	32
1.3.2. Случаи $l_0 < r_0$ и $l_0 = r_0$ .....	42
<b>ГЛАВА 2. ОПТИМАЛЬНЫЙ ГАРАНТИРОВАННЫЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОИСК ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА НА ПЛОСКОСТИ.....</b>	<b>50</b>
§2.1. ОПИСАНИЕ ПОИСКОВОЙ СИСТЕМЫ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ .....	51
§2.2. СВЕДЕНИЕ К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С ПОДВИЖНЫМ ПРАВЫМ КОНЦОМ.....	55
§2.3. РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА.....	62
§2.4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ И ГАРАНТИРОВАННОГО ВРЕМЕНИ.....	71
<b>ГЛАВА 3. КОМБИНИРОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГАРАНТИРОВАННЫМ ПОИСКОМ ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ.....</b>	<b>75</b>
§3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ .....	76

§3.2. ЭТАП БЫСТРЕЙШЕГО ДОСТИЖЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОЙ ВЫСОТЫ .....	79
§3.3. ЭТАП БЫСТРЕЙШЕЙ СТЫКОВКИ КРУГОВ ОБНАРУЖЕНИЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ .....	
§3.4. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА.....	84
§3.5. АЛГОРИТМ КОМБИНИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ ЗАВЕРШЕНИЕМ ПОИСКА.....	89
<b>ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ .....</b>	<b>98</b>
<b>ЛИТЕРАТУРА .....</b>	<b>101</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Задачи поиска, встречающиеся в повседневной человеческой деятельности, весьма разнообразны. Это и разведка полезных ископаемых, и отыскание неисправностей в компьютерах, и поиск оптимальных управленческих решений, и поиск объектов в различных средах (например, потерпевшего крушение корабля, подводной лодки) и т.д.

В предлагаемой диссертации под поиском будем понимать поиск подвижных объектов. Задачи поиска объектов, как правило, характеризуются тем, что в них принимают участие две стороны: ищущая и искомая. Ищущая обследует определенную область пространства, называемую поисковой областью, с целью обнаружения движущегося там искомого объекта, при наличии неполной начальной и отсутствии текущей информации о состоянии искомого объекта. Обнаружение происходит при выполнении определенных терминальных условий. Таким образом, задачу поиска можно определить как задачу управляемого сближения ищущего объекта с искомым подвижным объектом на определенное расстояние в условиях неопределенности и отнести ее в отдельный класс задач управления.

Имеется значительное количество работ, в которых задачи поиска подвижных объектов рассмотрены и исследованы в различных постановках. В зависимости от постановок и методов их исследования эти работы можно условно разбить на две группы: вероятностные и гарантированные задачи поиска.

В первую группу входят задачи, рассматриваемые в рамках теории дифференциальных игр с неполной информацией (задачи типа сближения – уклонения) [3, 17, 34, 35, 37, 46-48, 58, 69-71, 79, 80, 85, 86]. В этих работах используется общий подход, связанный с применением в моделировании поискового процесса теории вероятностей. В одних работах [1, 34, 37, 46, 58] основным критерием успешности поиска выступает, как правило, вероятность

обнаружения, а типичной поисковой задачей является максимизация этой вероятности, а в других работах [17, 35, 47, 48, 69-71, 79, 80, 85, 86] ищущий объект стремится минимизировать время прошедшее до момента выполнения условия обнаружения при выбранных допустимых управлениях объектов, а искомый объект преследует цель оттянуть сколь возможно дольше момент обнаружения, либо остаться необнаруженным в течение определенного времени. Под решением задачи понимается пара управлений ищущего и искомого объектов, которые соответствуют седловой точке функционалу времени. Как правило, в игровой задаче поиска решение ищут в смешанных стратегиях, т.е. находят вероятностные распределения на множествах допустимых управлений объектов.

Отметим, что вероятностный подход, дающий в среднем лучшие результаты, удобнее использовать при наличии достаточно достоверной информации о статистических характеристиках фазового состояния искомого объекта. Однако, такая информация на практике часто отсутствует. Поэтому целесообразно применять гарантирующий подход к решению задачи поиска. В отличие от вероятностного поиска, здесь должно быть гарантировано успешное обнаружение независимо от действий искомого объекта.

В диссертации изучаются задачи второй группы, методы решения которых к настоящему времени разработаны в меньшей степени, а оптимальности удается достичь лишь в очень редких случаях.

Приведем краткий обзор некоторых работ этой группы и примыкающих к ней работ.

Гарантированная постановка задачи поиска одним из первых рассмотрена Черноусько Ф.Л. [59]. В ней в предположении, что ищущий и искомый объекты обладают простым движением и могут перемещаться в пределах заданной выпуклой области, задача гарантированного поиска управляемого искомого объекта формулирована следующим образом: для ищущего объекта с заданным начальным положением найти время(гарантированное) и допустимое

управление (гарантирующее), при которых для любого начального положения и для любого выбранного искомым объектом допустимого управления обеспечивается выполнение условия обнаружения в некоторый момент, не позже гарантированного времени. Решение этой задачи в [59] получено в некоторых характерных конкретных случаях. В частности, рассмотрена задача поиска в выпуклой ограниченной области в двумерном и трехмерном пространствах в случае, когда условием обнаружения является попадание искомого объекта в заданную окрестность (круг и шар соответственно) ищущего объекта. Предложен способ управления движением ищущего объекта по ломаным-траекториям и установлены условия, гарантирующие успешное завершения поиска.

В случае прямоугольной области в работах Аветисяна В.В. и Меликяна Т.Т. [10-12, 76] построено расширенное множество многопараметрических ломаных-траекторий, движение по которым позволяет ищущему объекту гарантированно обнаружить искомый объект для более широкого диапазона изменения параметров задачи и в построенном множестве найдена траектория, двигаясь по которой ищущий обнаруживает искомый объект не позже минимального гарантированного времени.

В работах Шикина Е.В. и его учеников [26, 31, 40, 41, 52, 53, 62-67] предлагается геометрический подход к решению задачи поиска подвижного объекта – метод следящих областей. Идея рассматриваемого метода состоит в построении так называемого множества контроля. Это множество ищущий объект как бы несет на себе, и попадание в это множество искомого объекта означает завершение поиска. Контролируемое множество строится из двух подмножеств – остаточного, где искомый не может оказаться, в силу ограниченности скорости, и упреждающего множества, находясь в котором в данный момент времени, искомый объект будет обнаружен в один из последующих моментов. На примере некоторых двумерных поисковых задач показывается, как, пользуясь предложенным методом, можно находить

достаточное условие гарантирующее обнаружение, а также соответствующие траектории и требуемое гарантированное время.

В работе Л.А. Петросяна и Н.А. Зенкевича [36, 48] рассмотрена задача гарантированного поиска подвижного объекта на плоскости при условии, что ищущий объект движется вместе с кругом обнаружения заданного постоянного радиуса и обладает лишь информацией о круговой области возможных начальных положений искомого объекта. Предложен способ управления поиска, при котором движение ищущего объекта происходит по траектории, состоящей из участков прямых и участков логарифмической спирали. Получена оценка для параметров задачи, при которых движение по построенной траектории гарантирует осуществление обнаружения искомого объекта за конечное время. Разработанный способ управления в работах [22-24] применен для конкретной поисковой модели в случае, когда требуется осуществить поиск с последующим захватом искомого подвижного объекта. Найдена траектория движения ищущего, перемещение по которой обеспечивает полный осмотр круговой области неопределенности искомого объекта и гарантирует встречу с ним. Найдено время, необходимое для поиска и захвата объекта. В [50] для задачи гарантированного поиска подвижного искомого объекта с заданной начальной областью неопределенности, предложен конструктивный метод нахождения множества начальных положений ищущего объекта, для которых заданное допустимое управление на заданном отрезке времени является управлением поиска.

В работах А.А. Меликяна и его учеников [27, 30, 42-44, 68, 87] впервые предложена математическая модель [42-44] и сформулирована игровая (минимаксная) задача об оптимального быстродействию гарантированном управлении динамической системой при неполной информации о положении целевой точки, известной в начальный момент с точностью до некоторой заданной области неопределенности. В качестве области обнаружения рассмотрена полуплоскость, связанная с фазовым вектором ищущего объекта.

Получены полные решения задачи гарантированного быстродействия при различных областях неопределенности (отрезок [42], многоугольник [27], круг [30]). Существенным элементом решений является особая траектория – движение по некоторой ломаной, к которой подходят прямолинейные оптимальные траектории. Подход этих работ, в отличие от других формулировок задач поиска, позволяет не только обнаружить целевую точку, в качестве которой может служить как неподвижная, но и подвижная точка, но и осуществить приведение в нее фазового вектора ищущий точечный объект.

Варианты постановок задач гарантированного поиска целевых (подвижных и неподвижных) объектов, а также близкие по тематике многомерные задачи управления при различных фазовых ограничениях рассмотрены в работах [1, 2, 6-9, 18-21, 25, 29, 32, 33, 45, 54, 72-74, 75, 78, 81-84, 88].

Отметим, что в работах вышеприведенного обзора задачи гарантированного поиска имеют следующие постановочные общности:

- ищущий и искомый объекты управляются по скорости, т.е. способны произвольно менять направление движения в любой момент времени;
- поиск осуществляется с областью обнаружения в виде круга постоянного радиуса ([10-13, 26, 31, 40, 41, 50, 52, 53, 59, 62-67, 76] или полуплоскости ([27, 30, 42-44, 68, 87]));
- в некоторых работах область поиска - ограниченная выпуклая область, совпадающая с областью неопределенности искомого объекта ([10-12, 26, 31, 40, 41, 52, 53, 59, 62-67, 76]), а в других ([27, 30, 42-44, 50, 68, 87]) - область поиска неограничена, однако ограничена область возможных начальных положений искомого объекта (область неопределенности), не имеющая пересечение с начальной областью обнаружения – кругом в [22-24, 36, 48, 50] и полуплоскости в ([27, 30, 42-44, 68, 87]) – ищущего объекта.

Целью настоящей диссертационной работы является разработка алгоритмов управления, в том числе оптимальных управлений, в задаче гарантированного поиска для двух моделей поисковых систем: системы из двух объектов



управляемых по скорости, а также системы из двух объектов, управляемых по ускорению. Обе модели являются математическим описанием реальных поисковых процессов и имеют многочисленное приложение в прикладных задачах управления системами в условиях неопределенности.

Отметим, что в диссертации исследуются задачи гарантированного поиска, постановки которых существенным образом отличаются от постановок задач гарантированного поиска, рассмотренных в работах вышеприведенного обзора.

В этом смысле научная новизна предлагаемой работы состоит в следующем:

1) наряду с поисковой моделью, в которой ищущий и искомый объекты управляются по скорости (обладают простым движением), рассматривается также поисковая модель, в которой оба объекта управляются по ускорению (обладают динамикой);

2) оба объекта осуществляют движения в неограниченной области: ищущий в трехмерном пространстве, искомый – в горизонтальной плоскости;

3) область обнаружения ищущего объекта – круговое, с управляемым радиусом, основание конуса, вершина которого связана с текущим положением ищущего объекта;

4) поиск на плоскости с кругом обнаружения начинается вне области неопределённости – круга возможных начальных положений – искомого объекта.

В диссертации, при исследовании задачи гарантированного поиска подвижного объекта для рассматриваемых поисковых моделей, были использованы следующие методы: основанный на методе поглощения областей достижимости [39, 49, 61] подход построения управлений, который в [4, 5] был использован для модели управляемых по скорости поисковых объектов и при определенных условиях на физические и геометрические параметры задачи гарантирует обнаружение за первый момент поглощения расширяющегося во времени круга неопределённости искомого объекта кругом обнаружения

ищущего объекта, и методы построения оптимальных по быстродействию управлений в многомерных линейных задачах [28, 57].

В первой главе исследована задача оптимального по минимальному гарантированному времени поиска подвижного объекта, совершающего управляемое по скорости движение на горизонтальной плоскости в предположении, что известен лишь круг, в котором в начальный момент находится искомый объект. Ищущим принимается объект, управляемый по скорости в трёхмерном пространстве. Искомый объект считается обнаруженным в случае его попадания в основание (круга обнаружения) конуса, координаты вершины которого – суть текущие координаты ищущего объекта. Разработан алгоритм управления, при котором поиск искомого объекта завершается за минимальное гарантированное время. В §1.1 даются описание поисковой системы и формулировки задач управления и оптимального по минимальному времени управления гарантированным поиском искомого объекта. В §1.2 излагается методика построения гарантирующих управлений, основанная на трактовке задачи гарантированного поиска как задачу построения управлений, при которых круг обнаружения ищущего объекта в первый момент поглощает расширяющийся во времени круг неопределённости искомого объекта, что гарантирует успешный поиск, так как управление строится с расчетом на движение искомого объекта в любом, в том числе наихудшем для ищущего объекта, направлении. В пп. 1.2.1, 1.2.2, для различных случаев соотношений между начальными радиусами кругов обнаружения и неопределённости, на плоскости изменения управляющих компонент вектора скорости ищущего объекта построены области – области существования задачи гарантированного поиска - каждой точки которой соответствует гарантированное время обнаружения искомого объекта. В §1.3, в построенных для различных случаев областях гарантирующих управлений, методами линейного программирования решена задача нахождения оптимального по минимальному гарантированному времени

поиска управления и установлено существование контрольного начального расстояния между центрами начальных кругов обнаружения и неопределенности, играющего определяющую роль в вычислении оптимальных управляющих скоростей прямолинейного перемещения центра и расширения круга обнаружения. Получены явные выражения гарантирующего управления и соответствующего минимального гарантированного времени поиска в зависимости от различных соотношений (пп.1.3.1, 1.3.2) между начальными радиусами кругов обнаружения и неопределенности, начального расстояния между их центрами, а также максимальными скоростями ищущего и искомого объектов.

Во второй главе исследуется поисковая система, рассмотренная в первой главе, но с той существенной разницей, что и ищущий и искомый объекты управляются по ускорению и начальное состояние искомого объекта известно с точностью до заданного множества в пространстве координат и скоростей. §2.1 ставится задача определения закона изменения ограниченного по модулю управляющего ускорения ищущего объекта, при котором обеспечивается условие обнаружения искомого подвижного объекта за минимально возможное гарантированное время. В §2.2, при решении поставленной задачи, используется минимаксный подход, позволяющий исходную задачу гарантированного обнаружения исследовать для случая, когда искомый объект в начальный момент времени находится на границе круга неопределенности и движется с максимальной скоростью по радиусу в направлении от центра области неопределенности, что обеспечивает расширение круга неопределенности с наибольшей скоростью. Тем самым, исходная задача поиска – осуществления быстрее всего поглощения расширяющейся с максимальной скоростью области неопределённости искомого объекта – сводится к задаче оптимального по быстродействию управления с подвижным правым концом, полное решение которой методом принципа максимума Понтрягина приводится в §2.3. В §2.4 изложен алгоритм конструктивного

вычисления оптимального гарантирующего управления и приведены результаты численного расчета зависимости минимального гарантированного времени поиска от начального расстояния между центров кругов обнаружения и неопределенности.

В третьей главе динамическая модель поисковой системы рассматривается при дополнительных геометрических ограничениях, запрещающих ищущему объекту сталкиваться с известным неподвижным препятствием, например, с землей и подниматься выше заданной допустимой высоты, если речь идет о летательных аппаратах. В §3.1 ставится задача построения управления движением ищущего объекта, гарантирующего обнаружения искомого объекта за конечное время и для решения этой задачи в §§3.2-3.5 разработан алгоритм комбинированного управления, а также получено достаточное условие на физические и геометрические параметры поисковой системы, при котором по предложенному алгоритму управления ищущий объект в горизонтальной полосе заданной высоты в трехмерном пространстве гарантированно обнаруживает искомый объект за конечное время. Построенные в явном виде управления позволят ищущему объекту осуществить многоэтапное поисковое движение по пространственной траектории, состоящей из прямолинейных участков и криволинейных участков в виде окружностей с монотонно убывающими радиусами, что приводит к неизбежному обнаружению искомого объекта. Получена формула для вычисления полного гарантированного времени управляемого поиска. При конкретных значениях размерных параметров задачи, по разработанному алгоритму проведен расчет управлений для каждого этапа процесса поиска и путем численного моделирования динамики рассматриваемой поисковой системы установлено их практическая применимость.

В заключении приведены основные результаты, полученные в диссертационной работе.

В диссертационной работе применена тройная нумерация формул. Первая цифра указывает главу, вторая – параграф, третья – порядковый номер формулы.

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в работах [13-16, 55, 77] и докладывались на УШ международной конференции “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред” в Горисе-Степанакерте(2014), на ІУ международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды” в Цахкадзоре(2015), на семинарах кафедры механики Ереванского государственного университета и на общем семинаре института механики НАН РА.

## ГЛАВА 1

### ОПТИМАЛЬНЫЙ ПО МИНИМАЛЬНОМУ ГАРАНТИРОВАННОМУ ВРЕМЕНИ ПОИСК ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА НА ПЛОСКОСТИ

Рассматривается задача оптимального по минимальному гарантированному времени поиска подвижного объекта, совершающего управляемое по скорости движение на плоскости в предположении, что известен лишь круг, в котором в начальный момент находится искомый объект. Ищущим принимается объект, управляемый по скорости в трёхмерном пространстве. Поиск – определение координат искомого объекта осуществляется с помощью основания заданного конуса, вершина которого связана с текущим положением ищущего объекта. Разработан алгоритм управления, при котором гарантированный поиск искомого объекта завершается за минимальное время.

#### §1.1. Описание поисковой системы и постановка задачи

Пусть имеются два точечных объекта  $X$  и  $Y$ , из которых  $X$  – ищущий, а  $Y$  – искомый. Оба объекта, обладая ограниченными линейными скоростями, имеют возможность в каждый момент времени произвольно изменять направление своих движений:  $X$  – в пространстве, а  $Y$  – на плоскости, согласно следующим уравнениям, ограничениям и начальным данным:

$$X: \dot{x} = u, \quad x(0) = x^0, \quad |u(t)| \leq U, \quad t \geq 0; \quad x, u \in R^3, \quad (1.1.1)$$

$$Y: \dot{y} = v, \quad y(0) = y^0, \quad |v(t)| \leq V, \quad t \geq 0; \quad y, v \in R^2 \quad (1.1.2)$$

В (1.1.1) и (1.1.2)  $x, y$  – векторы координат объектов;  $u, v$  – их управляющие вектор – скорости, которые являются кусочно – непрерывными функциями от  $t \geq 0$ ;  $U, V$  – максимально возможные скорости объектов  $X, Y$ .

Положим, что в каждый момент времени  $t \geq 0$  объекту  $X$  точно известны свои фазовые координаты и максимальная скорость объекта  $Y$ . О координатах

У объекту  $X$  известно лишь то, что в начальный момент времени  $t = 0$  искомый объект  $Y$  находится в заданном круге неопределённости

$$y^0 \in D_0 = \{y \in R^2 : |y - y_c^0| \leq r_0\} \quad (1.1.3)$$

с центром в точке  $y_c^0 = (y_{c1}^0, y_{c2}^0) \in R^2$  и радиусом  $r_0$ , которые также известны объекту  $X$ .

Возможность установления точных координат искомого объекта  $Y$  осуществляется с помощью подвижной и изменяющейся во времени информационной области

$$G(x(t), C) = \left\{ \begin{array}{l} \xi \in R^2 : |\xi(t) - x_c(t)| \leq l(t) = Cx_3(t), \quad C = \operatorname{tg} \alpha \\ x_c(t) = (x_{c1}(t), x_{c2}(t)), \quad 0 < \alpha < \pi / 2 \end{array} \right\}, \quad t \geq 0, \quad (1.1.4)$$

$$G(x(0), C) = G(x_1(0), x_2(0), x_3(0), C) = G(x_c(0), l(0)) = G_0,$$

представляющей собой круговое (с центром  $x_c = (x_{c1}, x_{c2})$ ) основание некоторого конуса, вершина которого связана с текущим значением вектора положения  $X$  (рис. 1.1). В дальнейшем, в записи круга обнаружения  $G(x(t), C)$  параметр  $C$  будем опускать.

При пространственном движении ищущего объекта эволюция информационного круга (1.1.4) на плоскости  $(x_1, x_2)$  при  $t > 0$  определяется плоским движением его центра  $x_c = (x_{c1}, x_{c2})$  с помощью управлений  $u_1, u_2$  и расширением или сужением области (1.1.4) путем изменения расстояния  $x_3$  объекта  $X$  до плоскости  $(x_1, x_2)$  с помощью управления  $u_3$ , т.е. изменением её радиуса  $l = Cx_3$  с помощью управления  $Cu_3: \dot{l} = Cu_3, l_0 = l(0)$ . При  $u_3 > 0$  круг  $G$  (1.1.4) расширяется, а при  $u_3 < 0$  сужается.

Пусть параметры  $y_{c1}^0, y_{c2}^0, r_0$  и  $x_{c1}^0, x_{c2}^0, x_3^0, C$  (или  $x_{c1}^0, x_{c2}^0, l_0$ ) кругов неопределённости и обнаружения такие, что в начальный момент времени

$t = 0$  выполняется условие

$$D_0 \cap G_0 = \emptyset. \quad (1.1.5)$$

Согласно (1.1.5), в начальный момент круг обнаружения находится вне круга неопределённости.

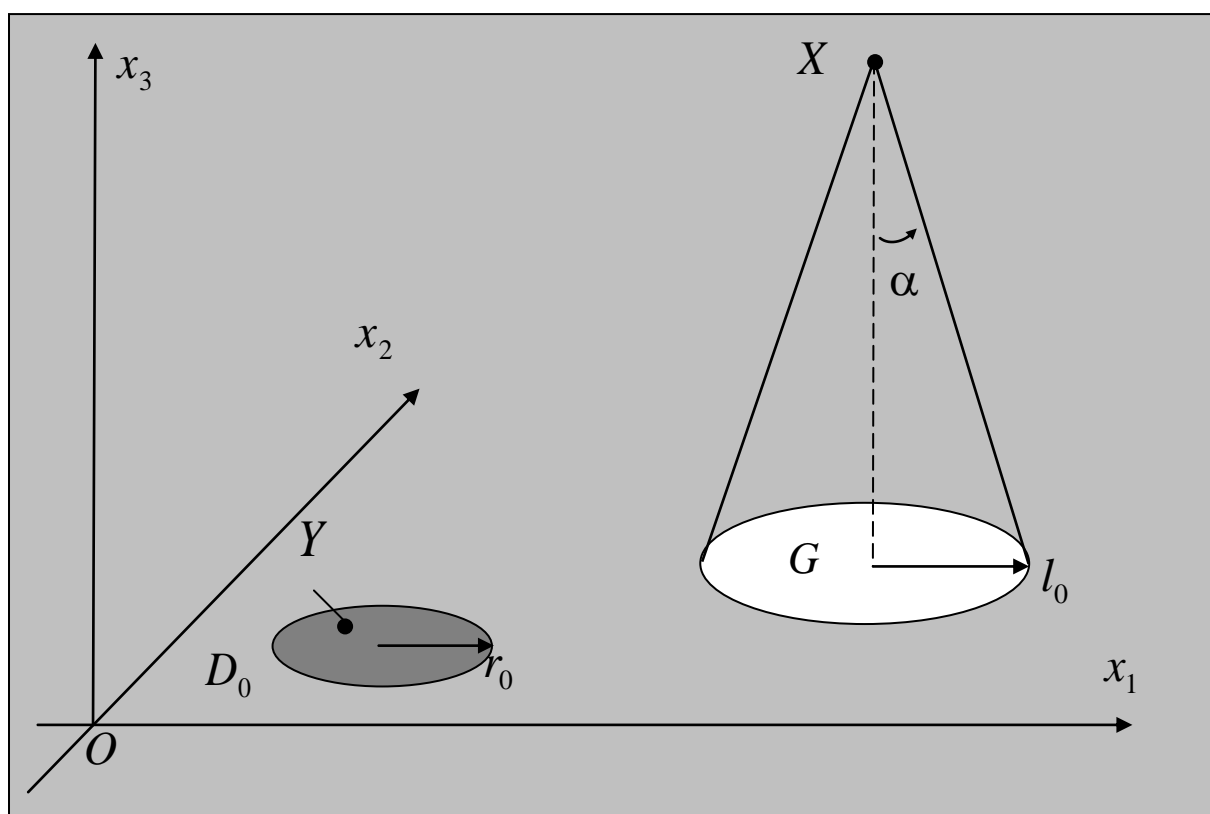


Рис. 1.1

Скажем, что положение искомого объекта  $Y$  становится точно известным в момент времени  $t^* > 0$ , когда впервые выполняется условие обнаружения, т.е. условие его попадания в круг обнаружения

$$y(t^*) \in G(x(t^*)), \text{ т.е. } |y(t^*) - x_c(t^*)| \leq l, \quad x_c = (x_{c1}, x_{c2}). \quad (1.1.6)$$

Так как на плоскости  $(x_1, x_2)$  область достижимости искомого объекта (1.1.2) с фиксированным начальным положением в момент времени  $t > 0$



представляет собой круг, то в тот же момент времени областью неопределённости искомого объекта с начальным включением (1.1.3) также будет круг  $D(t)$ ,  $D(t) \supseteq D_0$  с центром в точке  $y_c^0$  и с радиусом  $r_0 + Vt$ . Следовательно, условие обнаружения (1.1.6) гарантированно выполнимо, если существует такой момент времени  $T$  и управление изменением круга обнаружения  $u(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , при которых выполняется включение

$$D(T) \subseteq G(x(T)). \quad (1.1.7)$$

Требуется найти такое управляемое движение объекта  $X$ , при котором условие поглощения (1.1.7) происходит за минимально возможное время  $T$ .

Для решения этой задачи сначала рассмотрим задачу 1.1 – задачу гарантированного поиска.

**З а д а ч а 1.1.** Для заданного начального положения  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in R^3$  и заданных начальных кругов обнаружения  $G_0$  и неопределённости  $D_0$ , удовлетворяющих условию (1.1.5), найти число  $T > 0$  и допустимое управление  $u(t)$  объекта  $X$  на интервале  $[0, T]$ , для которых при любом начальном положении  $y^0$  объекта  $Y$  в круге неопределённости  $D_0$  (1.1.3) и любом допустимом управлении  $v(t)$  на интервале  $[0, T]$  выполняется условие поглощения (1.1.7), т.е. гарантируется обнаружение (1.1.6) в некоторый момент времени  $t^* > 0$ , не позднее времени  $T$ :  $t^* \leq T$ .

Для заданной начальной позиции  $\{x^0, G_0, D_0\}$  (1.1.5) управление  $u(t)$  – решение задачи 1.1 – назовём гарантирующим, а время  $T$  – гарантированным временем поиска или обнаружения.

Всюду в дальнейшем в этой главе будем полагать, что имеет место следующее соотношение:

$$CU > V, \quad (1.1.8)$$

т.е. скорость расширения круга обнаружения больше, чем скорость расширения

области неопределённости искомого объекта.

При условии (1.1.8) задача 1.1 для любой начальной позиции  $\{G_0, D_0\}$ , удовлетворяющей условию (1.1.5), имеет решение. Действительно, для произвольного начального положения  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in R^3$  при любых начальных радиусах  $l_0$  и  $r_0$  кругов обнаружения и неопределённости соответственно, условие поглощения (1.1.7) и, следовательно, обнаружение искомого объекта можно осуществить за конечное время, движением  $X$  с максимальной скоростью  $U$  лишь по вертикали вверх, так как при таком способе движения скорость ( $\dot{l} = C\dot{x}_3 = CU$ ) увеличения радиуса круга обнаружения больше, чем максимальная скорость  $V$  увеличения радиуса круга неопределённости искомого объекта.

Таким образом, в рассматриваемом случае (1.1.8), в зависимости от различных соотношений между параметрами  $G_0, D_0, U, V$  исходной модели поисковой системы (1.1.1) - (1.1.5), задача 1.1 может иметь множество решений. Для выделения единственного решения естественно наложить ещё требование оптимальности, например, времени поиска, т.е. рассмотреть задачу 1.2.

**З а д а ч а 1.2.** Для заданного начального положения  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in R^3$  и заданного круга неопределённости  $D_0$  найти гарантирующее управление  $u(t)$ , при котором гарантированное время обнаружения искомого объекта  $T$  минимально.

## **§1.2. Методика построения гарантирующих управлений**

Переходя к решению задачи 1, не нарушая общности, положим, что центр  $y_c^0 = (y_{c1}^0, y_{c2}^0) \in R^2$  круга неопределённости  $D_0 \subset R^2$  искомого объекта  $Y$  совпадает с началом декартовой системы координат  $Ox_1x_2$ , а ищущий объект  $X$  в начальный момент времени  $t = 0$ , в соответствии с (1.1.5), находится в

точке  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ ,  $x_1^0 = R_0$ ,  $x_2^0 = 0$ ,  $x_3^0 = C^{-1}l_0$ ,  $R_0 > 0$ , т.е. центр круга обнаружения  $x_c^0$  находится в точке  $(R_0, 0)$  на оси  $Ox_1$  (рис. 1.2).

Положим, что выполняются соотношение

$$R_0 > l_0 + r_0, \quad (1.2.1)$$

которое полностью описывает начальное расположение (1.1.5) кругов  $D_0$  и  $G_0$ .

Как будет показано в последующем, решения задач 1.1 и 1.2, качественно зависит от соотношений между начальными радиусами кругов обнаружения  $G_0$  и неопределенности  $D_0$ .

### 1.2.1. Построение области гарантирующих управлений в случае $l_0 > r_0$ .

Рассмотрим случай, когда начальный радиус круга обнаружения больше начального радиуса круга неопределенности:

$$l_0 > r_0. \quad (1.2.2)$$

Пусть  $A_X(A_Y)$  и  $B_X(B_Y)$  – соответственно, левая и правая точки пересечения круга обнаружения  $G_0$  (круга неопределённости  $D_0$ ) с осью  $Ox_1$  (рис. 1.2).

Для осуществления поглощения (1.1.7), в рамках метода экстремального прицеливания [39, 60],  $X$  должен двигаться с такой скоростью  $u = (u_1, u_2, u_3)$ , чтобы точки круга обнаружения  $A_X$  и  $B_X$  перемещались вдоль оси  $Ox_1$  (т.е.  $u_2 = 0$ ). При этом, скорости точек  $A_X$  и  $B_X$  в их движении по оси  $Ox_1$  будут, соответственно,  $q_A = u_1 - Cu_3$  и  $q_B = u_1 + Cu_3$ . В соответствии с этим, необходимым и достаточным условием осуществления поглощения круга неопределённости кругом обнаружения является существование такого момента времени  $T > 0$  и управлений  $u_1, u_3$  (1.1.1), при которых выполняются

следующие соотношения:

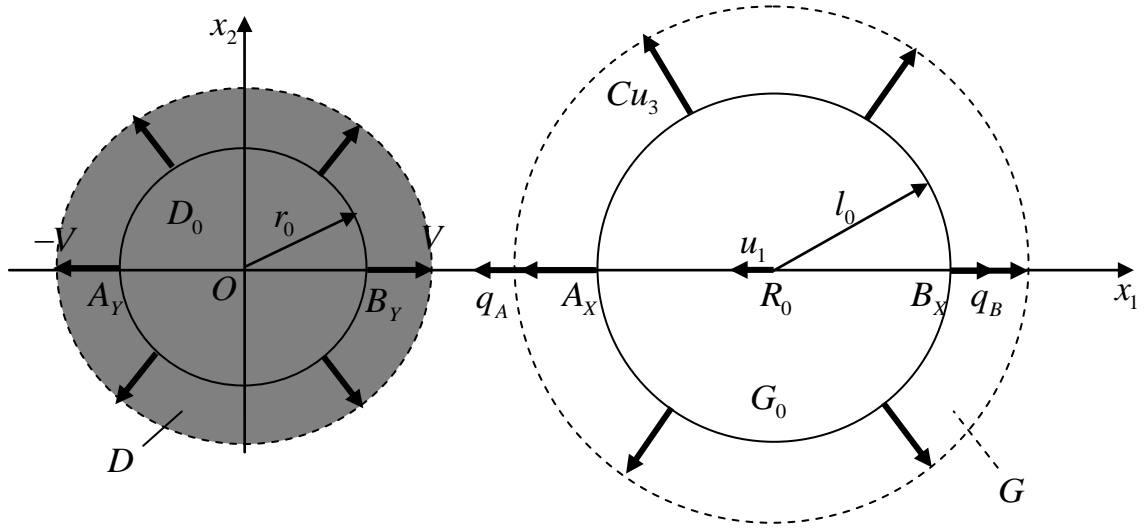


Рис. 1.2

$$q_A T + R_0 - l_0 \leq -VT - r_0, \quad q_A = u_1 - Cu_3, \quad (1.2.3)$$

$$q_B T + R_0 + l_0 \geq VT + r_0, \quad q_B = u_1 + Cu_3. \quad (1.2.4)$$

Запишем систему (1.2.3), (1.2.4) в виде:

$$R_0 - l_0 + r_0 \leq (-u_1 + Cu_3 - V)T, \quad (1.2.5)$$

$$R_0 + l_0 - r_0 \geq (-u_1 - Cu_3 + V)T. \quad (1.2.6)$$

Из (1.2.5), (1.2.6) следует, что если для заданных параметров  $R_0, r_0, l_0$  (1.2.1), (1.2.2) и  $U, V, C$  (1.1.8) управляющие компоненты  $u_1, u_3$  удовлетворяют систему неравенств

$$-u_1 + Cu_3 - V > 0, \quad -u_1 - Cu_3 + V \leq 0, \quad u_1^2 + u_3^2 \leq U^2, \quad (1.2.7)$$

то условие поглощения (или система соотношений (1.2.5), (1.2.6)) имеет место при любом  $T \in [T^-, +\infty)$ , где

$$T^- = \frac{R_0 - l_0 + r_0}{-u_1 + Cu_3 - V} > 0 \quad (1.2.8)$$

– найденная из равенства (1.2.5) момент времени, начиная с которого точка  $A_X$  оказывается левее левой точки  $A_Y$ .

Если  $u_1, u_3$  удовлетворяют систему неравенств

$$-u_1 + Cu_3 - V > 0, \quad -u_1 - Cu_3 + V > 0, \quad u_1^2 + u_3^2 \leq U^2, \quad (1.2.9)$$

то из равенства (1.2.6) можно определить конечный момент времени

$$T^+ = \frac{R_0 + l_0 - r_0}{-u_1 - Cu_3 + V} > 0, \quad (1.2.10)$$

при котором  $B_Y$  пока ещё находится не правее точки  $B_X$ .

Таким образом, при заданных параметрах  $R_0, r_0, l_0$  (1.2.1), (1.2.2),  $U, V, C$  (1.1.8) и управлениях  $u_1, u_3$ , удовлетворяющих (1.2.9), если время достижения точки  $A_X$  к точке  $A_Y$  не больше времени достижения точки  $B_Y$  к точке  $B_X$ :  $T^- \leq T^+$ , которое после несложных преобразований приобретает вид

$$R_0(Cu_3 - V) \geq (l_0 - r_0)u_1, \quad (1.2.11)$$

то система (1.2.5), (1.2.6), а значит и условие поглощения (1.1.7) имеет место при любом  $T \in [T^-, T^+]$ .

В обоих случаях (1.2.7) и ((1.2.9), (1.2.11)) время  $T^-$  (1.2.8) является первым моментом поглощения, т.е. гарантированным временем поиска или обнаружения.

Для заданных параметров  $R_0, r_0, l_0$  (1.2.1), (1.2.2) и  $U, V, C$  (1.1.8) рассмотрим область

$$H = \bigcup_{i=1}^3 H_i. \quad (1.2.12)$$

где через  $H_1$  обозначена область на плоскости управляющих параметров  $u_1$  и  $u_3$ , каждая точка которой удовлетворяет систему неравенств (1.2.7), а через  $H_2$  и  $H_3$  - области для управляющих параметров  $u_1, u_3$ , которые удовлетворяют системам (1.2.9), (1.2.11) при дополнительных неравенствах  $Cu_3 \geq V$  и  $Cu_3 < V$  соответственно:

$$H_1 = \left\{ (u_1, u_3) \in R^2 : \begin{array}{l} -u_1 + Cu_3 - V > 0, \\ -u_1 - Cu_3 + V \leq 0, \\ u_1^2 + u_3^2 \leq U^2 \end{array} \right\}, \quad (1.2.13)$$

$$H_2 = \left\{ (u_1, u_3) \in R^2 : \begin{array}{l} -u_1 + Cu_3 - V > 0, \\ -u_1 - Cu_3 - V > 0, \\ R_0(Cu_3 - V) \geq (l_0 - r_0)u_1, \quad l_0 + r_0 < R_0 < \infty, \\ Cu_3 - V \geq 0, \\ u_1^2 + u_3^2 \leq U^2 \end{array} \right\}, \quad (1.2.14)$$

$$H_3 = \left\{ (u_1, u_3) \in R^2 : \begin{array}{l} -u_1 + Cu_3 - V > 0, \\ -u_1 - Cu_3 - V > 0, \\ R_0(Cu_3 - V) \geq (l_0 - r_0)u_1, \quad l_0 + r_0 < R_0 < \infty, \\ Cu_3 - V < 0, \\ u_1^2 + u_3^2 \leq U^2 \end{array} \right\}. \quad (1.2.15)$$

Области  $H_i, i = 1, 2, 3$  (рис. 1.3) – выпуклые, так как представляют собой части круга, ограниченные дугами и двумя отрезками, соединяющими концы  $u^P(u_1^P, u_3^P), u^K(u_1^K, u_3^K); u^N(u_1^N, u_3^N), u^P(u_1^P, u_3^P); u^M(u_1^M, u_3^M), u^N(u_1^N, u_3^N)$  дуг  $u^P u^K; u^N u^P; u^M u^N$ , соответственно, с внутренней точкой  $u^Q(u_1^Q, u_3^Q)$  круга. На рис. 1.3 горизонтальными отрезками заштрихована область  $H_1$ ,

вертикальными отрезками – область  $H_2$  и косыми отрезками – область  $H_3$ ,  
 угловые вершины  $u^P, u^Q, u^K, u^N, u^M$  которых имеют следующие координаты:

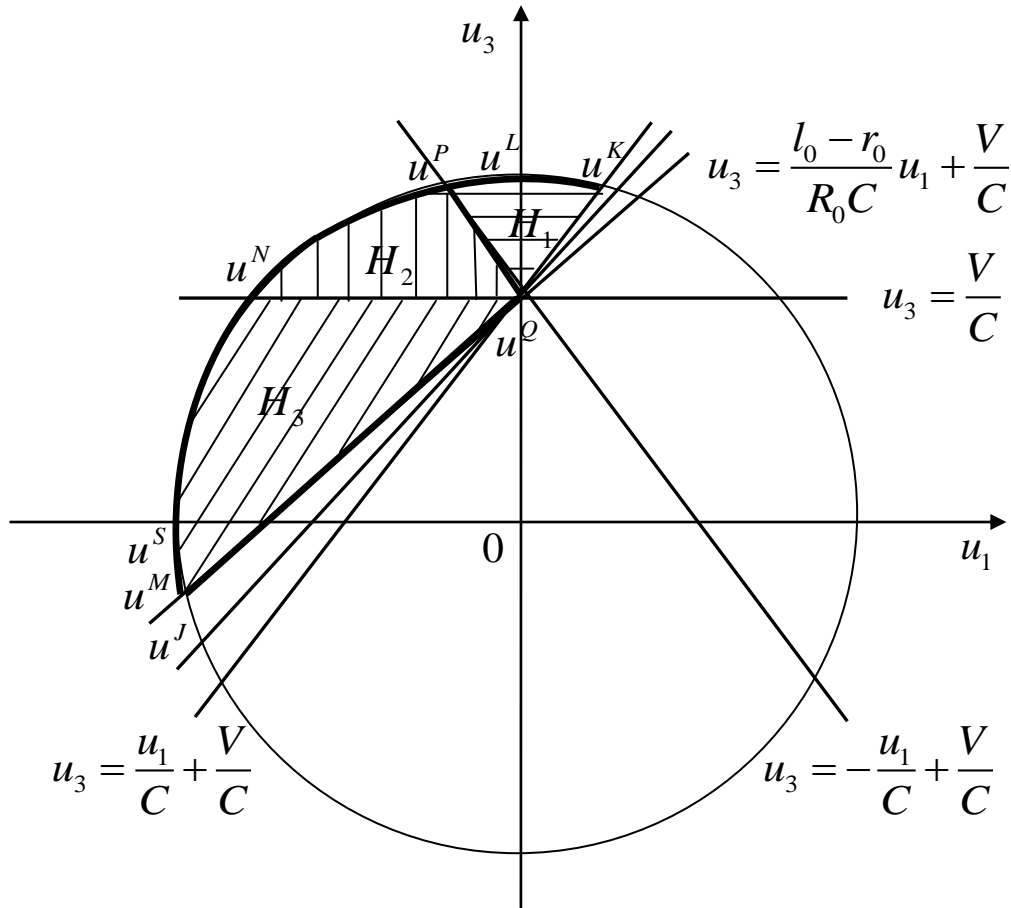


Рис. 1.3

$$u_1^P = \frac{V - C\sqrt{(1+C^2)U^2 - V^2}}{1+C^2} < 0, \quad u_3^P = \frac{CV + \sqrt{(1+C^2)U^2 - V^2}}{1+C^2} > 0, \quad (1.2.16)$$

$$u_1^Q = 0, \quad u_3^Q = \frac{V}{C} > 0, \quad (1.2.17)$$

$$u_1^N = -\frac{\sqrt{C^2U^2 - V^2}}{C} < 0, \quad u_3^N = \frac{V}{C} > 0, \quad (1.2.18)$$

$$u_1^K = \frac{V + C\sqrt{(1+C^2)U^2 - V^2}}{1+C^2} > 0, \quad u_3^K = \left[ U^2 - (u_1^K)^2 \right]^{1/2} > 0, \quad (1.2.19)$$

$$u_1^M(R_0) = \frac{-(l_0 - r_0)/R_0 V - C\sqrt{\{(l_0 - r_0)/R_0\}^2 + C^2}U^2 - V^2}{[(l_0 - r_0)/R_0]^2 + C^2} < 0, \quad (1.2.20)$$

$$u_3^M(R_0) = \frac{CV - [(l_0 - r_0)/R_0]\sqrt{\{(l_0 - r_0)/R_0\}^2 + C^2}U^2 - V^2}{[(l_0 - r_0)/R_0]^2 + C^2}.$$

Как следует из (1.2.15) – (1.2.20) и рис. 1.3, где  $u^S = (-U, 0)$  и  $u^L = (0, U)$ , при  $R_0 \rightarrow \infty$  линия  $u^M(R_0)u^Q$  вращается вокруг точки  $u^Q$  по часовой стрелке и стремится к положению  $u^N u^Q$  (координата  $u_1^M(R_0)(u_3^M(R_0)) \rightarrow u_1^N(u_3^N)$ ). При  $R_0 \rightarrow l_0 + r_0$  линия  $u^M(R_0)u^Q$  вокруг точки  $u^Q$  вращается против часовой стрелки и стремится к положению линии  $u^J u^Q$  (координата  $u_1^M(R_0)(u_3^M(R_0)) \rightarrow u_1^J(u_3^J)$ , где координаты  $u_1^J, u_3^J$  точки  $u^J$  – точки пересечения прямой  $u^M(R_0)u^Q$  с окружностью  $u_1^2 + u_3^2 = U^2$  при  $R_0 = l_0 + r_0$  определяются таким образом:

$$u_1^J = \frac{-(l_0 - r_0)/(l_0 + r_0)V - C\sqrt{\{(l_0 - r_0)/(l_0 + r_0)\}^2 + C^2}U^2 - V^2}{[(l_0 - r_0)/(l_0 + r_0)]^2 + C^2} < 0, \quad (1.2.21)$$

$$u_3^J = \frac{CV - [(l_0 - r_0)/(l_0 + r_0)]\sqrt{\{(l_0 - r_0)/(l_0 + r_0)\}^2 + C^2}U^2 - V^2}{[(l_0 - r_0)/(l_0 + r_0)]^2 + C^2}.$$

Покажем, что знак координаты  $u_3^J$  в (1.2.21) зависит от параметров задачи. Действительно, так как координата  $u_3^M(R_0)$  (1.2.20) монотонно возрастающая функция от параметра  $R_0$  на полубесконечном отрезке  $l_0 + r_0 < R_0 < \infty$  и



$\lim_{R_0 \rightarrow l_0 + r_0} u_3^M(R_0) = u_3^M(R_0)|_{R_0=l_0+r_0} = u_3^J$ ,  $\lim_{R_0 \rightarrow \infty} u_3^M(R_0) = u_3^M(R_0)|_{R_0=\infty} = u_3^N > 0$ , а

при значении  $R_0^0 = \frac{(l_0 - r_0)U}{V}$  координата  $u_3^M(R_0)$  принимает нулевое

значение:  $u_3^M(R_0)|_{R_0=\frac{(l_0-r_0)U}{V}} = 0$ , то отрицательный или положительный знак

$u_3^J$  определяется в зависимости от принадлежности или непринадлежности

величины  $R_0^0$  отрезку  $(l_0 + r_0, \infty)$  соответственно. Это зависимость в явных

параметрических соотношениях записывается таким образом:

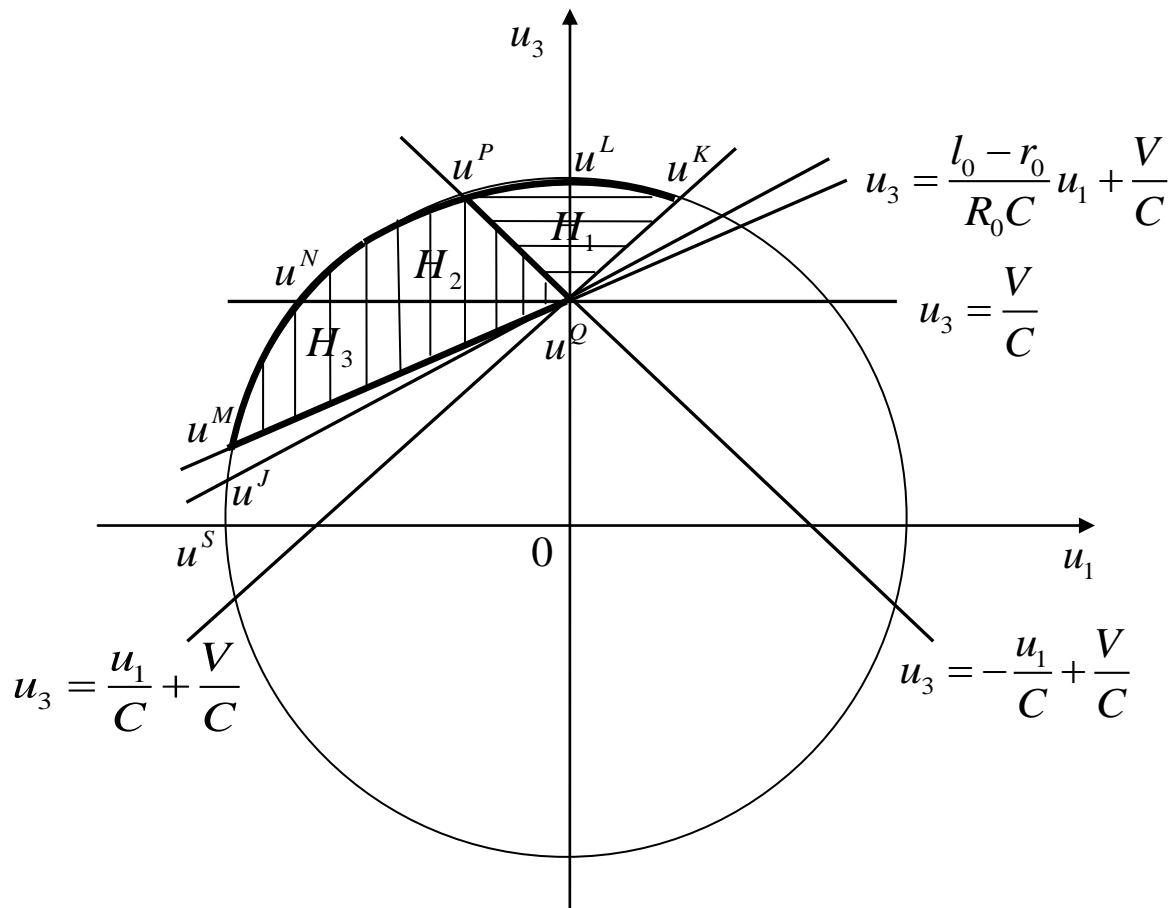


Рис. 1.4

$$\begin{aligned}
u_3^J \leq 0, & \quad \left[ \begin{array}{l} \text{если} \quad V \leq \frac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0} U < CU, \quad (\text{a}) \\ \text{если} \quad V < CU \leq \frac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0} U, \quad (\text{b}) \end{array} \right. \quad (1.2.22) \\
u_3^J > 0, & \quad \text{если} \quad \frac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0} U < V < CU. \quad (\text{c})
\end{aligned}$$

Случаям (1.2.22)(a), (b) соответствует рис. 1.3, а случаю (1.2.22)(c) – рис. 1.4.

Из (1.2.12) – (1.2.15), с учётом (1.2.16) – (1.2.22), следует, что области  $H_1$ (1.2.13) и  $H_2$ (1.2.14) не зависят от параметра  $R_0$ , а область  $H_3$  зависит.

Поэтому, изменение области  $H$  (1.2.12) от параметра  $R_0$  следующее:

$$H_3^J \cup H_2 \cup H_1 \supset H(R_0) \supset H_1 \cup H_2, \quad R_0 \in (l_0 + r_0, \infty), \quad (1.2.23)$$

причем

$$H(R_0) \rightarrow \begin{cases} H_1 \cup H_2 & \text{при} \quad R_0 \rightarrow \infty, \\ H_3^J \cup H_2 \cup H_1 & \text{при} \quad R_0 \rightarrow l_0 + r_0, \end{cases} \quad (1.2.24)$$

где

$$H_3^J = \left\{ (u_1, u_3) \in R^2 : \begin{array}{l} Cu_3 - V < 0, \\ R_0(Cu_3 - V) \geq (l_0 - r_0)u_1, \quad R_0 = l_0 + r_0, \\ u_1^2 + u_3^2 \leq U^2 \end{array} \right\}. \quad (1.2.25)$$

**1.2.2. Построение областей гарантирующих управлений в случаях  $l_0 < r_0$  и  $l_0 = r_0$ .** Рассмотрим случай, когда начальный радиус круга обнаружения меньше начального радиуса круга неопределенности (рис. 1.5):

$$l_0 < r_0.$$

$$(1.2.26)$$

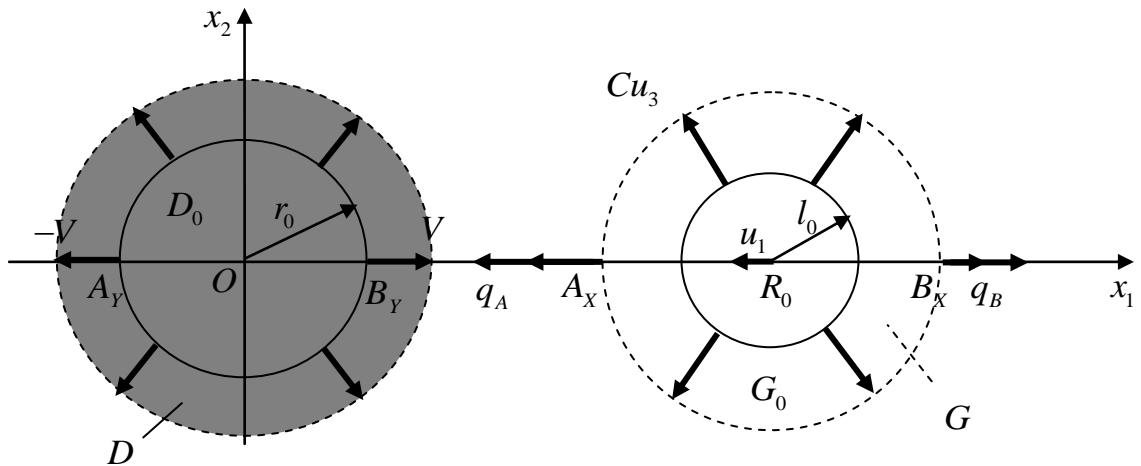


Рис. 1.5

Учитывая (1.2.7) и (1.2.9), (1.2.11), для заданных параметров  $R_0, r_0, l_0$  (1.2.1), (1.2.26) и  $U, V, C$  (1.1.8), в структурном представлении области (1.2.12),  $H_1$  задается в виде (1.2.13),  $H_2$  имеет следующий вид:

$$H_2 = \left\{ (u_1, u_3) \in R^2 : \begin{array}{l} -u_1 - Cu_3 + V > 0, \\ R_0(Cu_3 - V) \geq -(r_0 - l_0)u_1, \quad r_0 + l_0 < R_0 < \infty, \\ Cu_3 - V \geq 0, \\ u_1^2 + u_3^2 \leq U^2 \end{array} \right\}, \quad (1.2.27)$$

а  $H_3 = \emptyset$ , т.е.

$$H = H_1 \cup H_2. \quad (1.2.28)$$

На рис. 1.6 горизонтальными отрезками заштрихована область  $H_1$ , а

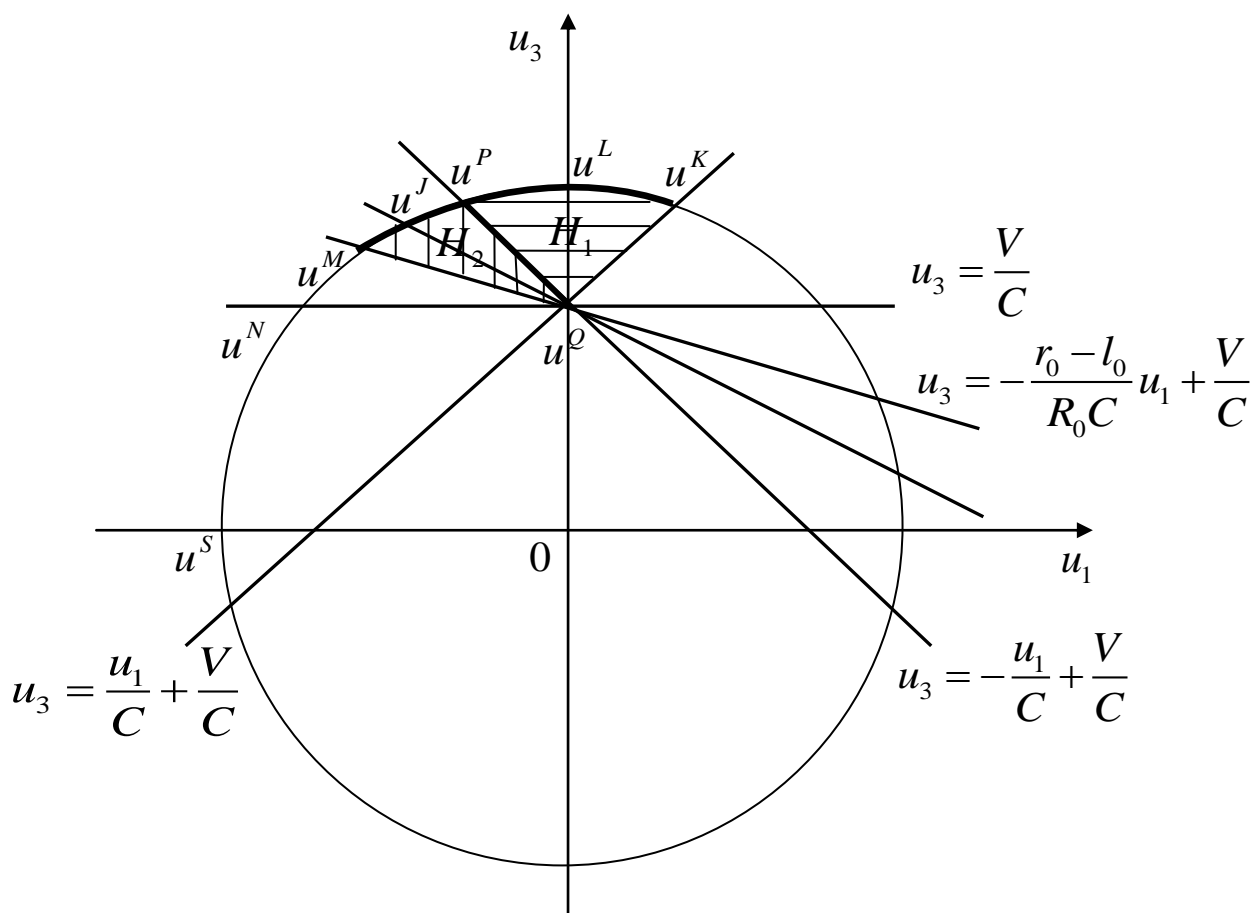


Рис. 1.6

вертикальными – область  $H_2$ , угловые вершины  $u^P$ ,  $u^Q$ ,  $u^K$ ,  $u^M$  которых имеют, соответственно, координаты (1.2.16), (1.2.17), (1.2.19), (1.2.20) (причем  $u_1^M < 0$ , а  $u_3^M > 0$ ).

Как следует из (1.2.28) и (1.2.16) – (1.2.21) при  $l_0 < r_0$ , а также из рис. 1.6, при  $R_0 \rightarrow \infty$  линия  $u^M(R_0)u^Q$  вращается вокруг точки  $u^Q$  против часовой стрелки и стремится к положению  $u^N u^Q$  (координата  $u_1^M(R_0)(u_3^M(R_0)) \rightarrow u_1^N(u_3^N)$ , а при  $R_0 \rightarrow l_0 + r_0$  линия  $u^M(R_0)u^Q$  вокруг точки  $u^Q$  вращается по часовой стрелке и стремится к линии  $u^J u^Q$  (координаты  $u_1^M(R_0) < 0$  и  $u_3^M(R_0) < 0$  (1.2.20) стремятся, соответственно, к

координатам  $u_1^J < 0$  и  $u_3^J > 0$  (1.2.21)), которая лежит между линиями  $u^N u^Q$  и  $u^P u^Q$ .

Так как в рассматриваемом случае  $l_0 < r_0$  область  $H_1$  (1.2.13) не зависит от параметра  $R_0$ , а область  $H_2$  (1.2.28) – зависит, то изменение области  $H$  (1.2.27) от параметра  $R_0$  следующее:

$$H(R_0) \rightarrow \begin{cases} H_1 \cup H_2^N & \text{при } R_0 \rightarrow \infty, \\ H_1 \cup H_2^J & \text{при } R_0 \rightarrow l_0 + r_0, \end{cases} \quad (1.2.29)$$

где

$$H_2^N = \left\{ (u_1, u_3) \in R^2 : \begin{array}{l} -u_1 - Cu_3 + V > 0, \\ Cu_3 \geq V, \\ u_1^2 + u_3^2 \leq U^2 \end{array} \right\}, \quad (1.2.30)$$

$$H_2^J = \left\{ (u_1, u_3) \in R^2 : \begin{array}{l} -u_1 - Cu_3 + V > 0, \\ Cu_3 \geq V, \\ R_0(Cu_3 - V) \geq -(r_0 - l_0)u_1, \quad R_0 = r_0 + l_0, \\ u_1^2 + u_3^2 \leq U^2 \end{array} \right\}. \quad (1.2.31)$$

Теперь рассмотрим случай, когда

$$l_0 = r_0. \quad (1.2.32)$$

Тогда, для заданных параметров  $R_0, r_0, l_0$  (1.2.1), (1.2.32) и  $U, V, C$  (1.1.8), в структурном представлении области (1.2.12),  $H_1$  имеет прежний вид (1.2.13), область  $H_2$  (1.2.14) примет вид (1.2.30), а  $H_3 = \emptyset$  (рис. 1.7), т.е.

$$H = H_1 \cup H_2^N. \quad (1.2.33)$$

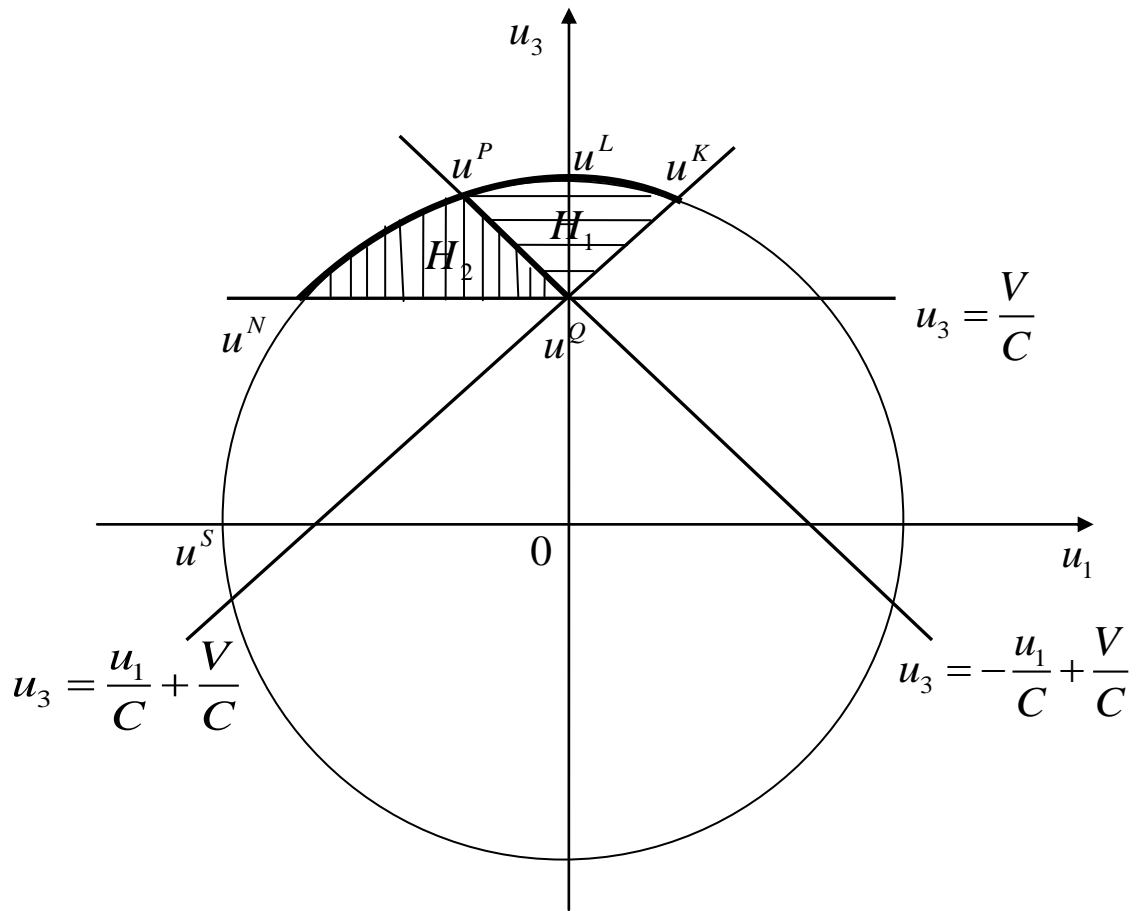


Рис. 1.7

Таким образом, ищущий объект  $X$  обнаруживает искомый объект  $Y$  не позже момента времени  $T^-(u_1, u_3)$  (1.2.6), двигаясь при управлении  $u = (u_1, 0, u_3)$ ,  $(u_1, u_3) \in H$  (1.2.9) в случае  $l_0 > r_0$ , при управлении  $(u_1, u_3) \in H$  (1.2.28) в случае  $l_0 < r_0$  и при управлении  $(u_1, u_3) \in H$  (1.2.33) в случае  $l_0 = r_0$ .

Соответствующие случаям  $l_0 > r_0$ ,  $l_0 < r_0$ ,  $l_0 = r_0$ , области  $H$  (1.2.12), (1.2.28), (1.2.33) назовём областями гарантирующих управлений,  $u = (u_1, 0, u_3)$  – управление, гарантирующее поиск за конечное время, а соответствующий момент первого поглощения  $T^-(u_1, u_3)$  (1.2.6) –

гарантированным временем поиска.

Из (1.2.12), (1.2.28), (1.2.33) также следует, что при условии (1.1.8) область гарантирующих управлений  $H$  не пусто.

### §1.3. Нахождение оптимальных гарантирующих управлений и гарантированного времени

Для каждого из случаев (1.2.2), (1.2.26), (1.2.32) перейдём к решению задачи 1.2 – нахождению в областях (1.2.9), (1.2.27), (1.2.33) гарантирующих управлений, доставляющих минимум гарантированному времени поиска (1.2.6):

$$T^{\min} = \min_{(u_1, u_3) \in H} T^-(u_1, u_3) = \min_{(u_1, u_3) \in H} \left( \frac{R_0 - l_0 + r_0}{-u_1 + Cu_3 - V} \right). \quad (1.3.1)$$

Задача (1.3.1) равносильна задаче

$$\varphi(u_1, u_3) = -u_1 + Cu_3 \rightarrow \max, \quad (u_1, u_3) \in H. \quad (1.3.2)$$

Так как в (1.3.2)  $\text{grad} \varphi(u_1, u_3) = (-1, C)$ ,  $C > 0$ , то задача максимума в (1.3.2), а значит минимума в (1.3.1) сводится к следующей задаче:

$$\varphi(u_1, u_3) = -u_1 + Cu_3 \rightarrow \max, \quad (u_1, u_3) \in u^M(R_0)u^L, \quad (1.3.3)$$

где

$$u^M(R_0)u^L = \left\{ (u_1, u_3): \begin{array}{l} u_1^2 + u_3^2 = U^2, \\ u_1^M(R_0) \leq u_1 < u_1^L = 0, \\ u_3^M(R_0) \leq u_3 < u_3^L = U \end{array} \right\} \quad (1.3.4)$$

– часть дуговой границы  $u^M(R_0)u^L$  области гарантирующих управлений  $H$ , структура которой, как было установлено в §1.2, зависит от соотношений

между параметров  $l_0$  и  $r_0$ .

**1.3.1. Случай  $l_0 > r_0$ .** В рассматриваемом случае дуга (1.3.4) представляет собой объединение дуг  $u^M(R_0)u^N$ ,  $u^N u^P$ ,  $u^P u^L$ :

$$u^M(R_0)u^L = u^M(R_0)u^N \cup u^N u^P \cup u^P u^L, \quad (1.3.5)$$

где

$$u^M(R_0)u^N = \left\{ (u_1, u_3) : \begin{array}{l} u_1^2 + u_3^2 = U^2, \\ u_1^M(R_0) \leq u_1 < u_1^N, \\ u_3^M(R_0) < u_3 < u_3^N \end{array} \right\}, \quad (1.3.6)$$

$$u^N u^P = \left\{ (u_1, u_3) : \begin{array}{l} u_1^2 + u_3^2 = U^2, \\ u_1^N \leq u_1 < u_1^P, \\ u_3^N \leq u_3 < u_3^P \end{array} \right\}, \quad (1.3.7)$$

$$u^P u^L = \left\{ (u_1, u_3) : \begin{array}{l} u_1^2 + u_3^2 = U^2, \\ u_1^P \leq u_1 < u_1^L = 0, \\ u_3^P \leq u_3 < u_3^L = U \end{array} \right\} \quad (1.3.8)$$

В (1.3.6) – (1.3.8) координаты точек  $u^M(R_0)$ ,  $u^N$ ,  $u^P$  определяются по формулам (1.2.20), (1.2.18), (1.2.19) соответственно.

Зависимость длины дуги  $u^M(R_0)u^L$  (1.3.5) от  $R_0$ , аналогично (1.2.20), следующая:  $u^M(R_0)u^L \rightarrow u^N u^L$  при  $R_0 \rightarrow \infty$ ;  $u^M(R_0)u^L \rightarrow u^J u^L$  при  $R_0 \rightarrow l_0 + r_0$  и, поэтому, имеют место включения:

$$u^J u^L \subset u^M(R_0)u^L \subset u^N u^L, \quad l_0 + r_0 < R_0 < \infty, \quad (1.3.9)$$

где



$$u^J u^L = \left\{ (u_1, u_3) : \begin{array}{l} u_1^2 + u_3^2 = U^2, \\ u_1^J < u_1 < u_1^L = 0, \\ u_3^J < u_3 < u_3^L = U \end{array} \right\} \quad (1.3.10)$$

и в котором координаты  $u_1^J, u_3^J$  точки  $u^J$  определяются по формулам (1.2.21), с учетом (1.2.22).

В силу соотношений (1.2.22) (рис. 1.3), имеют место следующие включения:

$$u^S u^L \subset u^J u^L, \quad \left[ \begin{array}{l} \text{если} \quad V \leq \frac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0} U < CU, \quad (a) \\ \text{если} \quad V < CU \leq \frac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0} U, \quad (b) \end{array} \right. \quad (1.3.11)$$

$$u^S u^L \supset u^J u^L, \quad \text{если} \quad \frac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0} U < V < CU, \quad (c)$$

где

$$u^S u^L = \left\{ (u_1, u_3) : \begin{array}{l} u_1^2 + u_3^2 = U^2, \\ -U = u_1^S < u_1 < u_1^L = 0, \\ 0 = u_3^S < u_3 < u_3^L = U \end{array} \right\}. \quad (1.3.12)$$

Функция  $\varphi(u_1, u_3) = -u_1 + Cu_3$  максимального значения на окружности  $u_1^2 + u_3^2 = U^2$  достигает в точке

$$u^* = (u_1^*, u_3^*), \quad u_1^* = -\frac{U}{\sqrt{1+C^2}}, \quad u_3^* = \frac{CU}{\sqrt{1+C^2}}, \quad C > 0, \quad (1.3.13)$$

которая, с учётом вышесказанного, находится на дуге  $u^S u^L$  (1.3.12):

$$u^* \in u^S u^L. \quad (1.3.14)$$

Поскольку, в силу (1.3.9) – (1.3.12),

$$u^S u^L = u^S u^M(R_0) \cup u^M(R_0) u^L, \quad (1.3.15)$$

где

$$u^S u^M(R_0) = \left\{ (u_1, u_3) : \begin{array}{l} u_1^2 + u_3^2 = U^2 \\ -U = u_1^S < u_1 \leq u_1^M(R_0), \\ 0 = u_3^S < u_3 \leq u_3^M(R_0) \end{array} \right\}, \quad (1.3.16)$$

а  $u^M(R_0)u^L$  определяется согласно (1.3.4), то в зависимости от параметров задачи  $R_0, l_0, r_0, C, U, V$  точка (1.3.13) либо находится на дуге  $u^M(R_0)u^L$  (1.3.4):

$$u^* \in u^M(R_0)u^L, \quad (1.3.17)$$

либо находится вне нее – на дуге  $u^S u^M(R_0) = u^S u^L \setminus u^M(R_0)u^L$  (1.3.16) :

$$u^* \in u^S u^M(R_0). \quad (1.3.18)$$

В случае (1.3.17) точка (1.3.13) является оптимальной в задаче (1.3.1):  $u^{\min} = u^*$ , а в случае (1.3.18) оптимальной является конечная точка  $u^M(R_0)$  дуги  $u^S u^M(R_0)$ :  $u^{\min} = u^M(R_0)$ , т.е.

$$u_1^{\min} = u_1^M(R_0) = \frac{-[(l_0 - r_0) / R_0]V - C\sqrt{\{[(l_0 - r_0) / R_0]^2 + C^2\}U^2 - V^2}}{[(l_0 - r_0) / R_0]^2 + C^2}, \quad (1.3.19)$$

$$u_3^{\min} = u_3^M(R_0) = \frac{CV - [(l_0 - r_0) / R_0]\sqrt{\{[(l_0 - r_0) / R_0]^2 + C^2\}U^2 - V^2}}{[(l_0 - r_0) / R_0]^2 + C^2}.$$

Выясним, при каких соотношениях между параметрами задачи  $R_0, l_0, r_0$  (1.2.1), (1.2.2) и  $C, U, V$  (1.1.8), выполняется одно из включений (1.3.17) или (1.3.18).

После проведённого исследования с использованием формул (1.2.16) – (1.2.21) и представления (1.3.15), учитывающего соотношения (1.3.5), (1.3.11), получены следующие результаты:

$$1. u^* \in u^P u^L, \quad (1.3.20)$$

при

$$0 < V \leq \frac{C^2 - 1}{\sqrt{1 + C^2}} U, \quad C > 1 \quad (1.3.21)$$

для любого  $R_0 \in (l_0 + r_0, \infty)$ .

$$2. u^* \in u^N u^P, \quad (1.3.22)$$

при

$$\frac{C^2 - 1}{\sqrt{1 + C^2}} U \leq V \leq \frac{C^2}{\sqrt{1 + C^2}} U, \quad C > 1 \quad (1.3.23)$$

или

$$0 < V \leq \frac{C^2}{\sqrt{1 + C^2}} U, \quad 0 < C \leq 1 \quad (1.3.24)$$

для любого  $R_0 \in (l_0 + r_0, \infty)$ .

$$3. u^* \in u^S u^N, \quad (1.3.25)$$

при

$$\frac{C^2}{\sqrt{1 + C^2}} U \leq V < CU, \quad C > 0 \quad (1.3.26)$$

для любого  $R_0 \in (l_0 + r_0, \infty)$ .

Более подробно остановимся на третьем случае (1.3.25), (1.3.26).

А) Пусть выполняется одно из условий (1.3.11)(a) или (b). Так как, в этом случае

$$u^S u^N = u^S u^M(R_0) \cup u^M(R_0) u^N,$$

то из (1.3.25) следует, что

$$u^* \in u^S u^M(R_0) \quad (1) \quad \text{или} \quad u^* \in u^M(R_0) u^N \quad (2). \quad (1.3.27)$$

В случае (1.3.27) (1), оптимальной в задаче (1.3.1) является точка  $u^M(R_0)$  для всех  $R_0 \in (l_0 + r_0, \infty)$ , а в случае (1.3.27) (2) - точка  $u^*$ . Найдем то значение параметра  $R_0 \in (l_0 + r_0, \infty)$ , при котором имеет место совпадение точек  $u^M(R_0)$  (1.2.20) и  $u^*$  (1.3.13):  $u^M(R_0) = u^*$ . В рассматриваемом случае обе эти точки находятся на окружной дуге  $u^S u^N$  (1.3.11), поэтому достаточно приравнять первые координаты (1.2.20) и (1.3.13) точек  $u^M(R_0)$  и  $u^*$ , соответственно, и разрешить полученное уравнение

$$u_1^M(R_0) = u_1^* \quad (1.3.28)$$

или в явном виде уравнение

$$\frac{-[(l_0 - r_0) / R_0]V - C\sqrt{\{[(l_0 - r_0) / R_0]^2 + C^2\}U^2 - V^2}}{[(l_0 - r_0) / R_0]^2 + C^2} = -\frac{U}{\sqrt{1 + C^2}} \quad (1.3.29)$$

относительно  $R_0$ .

Уравнение (1.3.29) после несложных преобразований приводится к следующему квадратному уравнению относительно  $R_0 \in (r_0 + l_0, \infty)$ .

$$[V^2(1+C^2)-C^4U^2]R_0^2-2UV\sqrt{1+C^2}(l_0-r_0)R_0+(l_0-r_0)^2U^2=0. \quad (1.3.30)$$

Так как в соответствии с (1.3.26) коэффициент у главного члена в (1.3.30) положительный, то это уравнение имеет два положительных корня, из которых только наибольший корень

$$R_0^* = \frac{U(l_0-r_0)}{V\sqrt{1+C^2}-C^2U}. \quad (1.3.31)$$

удовлетворяет ограничению  $r_0+l_0 < R_0^* < \infty$ .

Требуемое неравенство получается из (1.3.11) (а), (b):

$$R_0^* = \frac{U(l_0-r_0)}{V\sqrt{1+C^2}-C^2U} > \frac{U(l_0-r_0)}{V} > r_0+l_0.$$

Таким образом, в случае (1.3.27) (2) получим

$$u^{\min} = u^M(R_0) \quad \text{при} \quad R_0^* \leq R_0 < \infty \quad (1.3.32)$$

и

$$u^{\min} = u^* \quad \text{при} \quad r_0+l_0 < R_0 \leq R_0^*, \quad (1.3.33)$$

где  $R_0^*$  определяется формулой (1.3.31).

В) Пусть выполняется включение (1.3.11)(с). Так как в этом случае

$$u^S u^N = u^S u^J \cup u^J u^M(R_0) u^N,$$

то из (1.3.25) следует, что  $u^* \in u^S u^J$  или  $u^* \in u^J u^M(R_0) u^N$ .

Представив эти включения в виде неравенств и разрешив их относительно  $V$ , соответственно, получим

$$u^S < u^* \leq u^J \quad \text{при} \quad CU > V \geq \frac{C^2U}{\sqrt{1+C^2}} + \frac{l_0 - r_0}{r_0 + l_0} \frac{U}{\sqrt{1+C^2}}, \quad (1)$$

(1.3.34)

$$u^J < u^* \leq u^N \quad \text{при} \quad \frac{C^2U}{\sqrt{1+C^2}} + \frac{l_0 - r_0}{r_0 + l_0} \frac{U}{\sqrt{1+C^2}} < V \leq \frac{C^2U}{\sqrt{1+C^2}}. \quad (2)$$

В случае (1.3.34)(1), оптимальной в задаче (1.3.1) является точка  $u^M(R_0)$  для всех  $R_0 \in (l_0 + r_0, \infty)$ .

В случае (1.3.34)(2), аналогично случаю А), оптимальная точка определяется в зависимости от значения параметра  $R_0$ . Искомое значение  $R_0^*$ , при котором имеет место совпадение точек  $u^M(R_0)$  (1.2.20) и  $u^*$  (1.3.13), находится из уравнения (1.3.29) и определяется формулой (1.3.31). Оно удовлетворяет ограничению  $l_0 + r_0 < R_0^*$ , что, с использованием (1.3.34)(2), следует из следующей оценки

$$R_0^* = \frac{U(l_0 - r_0)}{V\sqrt{1+C^2} - C^2U} > \frac{U(l_0 - r_0)}{[C^2U + (l_0 - r_0)(r_0 + l_0)^{-1}U] - C^2U} > l_0 + r_0. \quad (1.3.35)$$

Таким образом, в случае (1.3.34)(2) получим

$$u^{\min} = \begin{cases} u^M(R_0), & \text{при } R_0^* \leq R_0 < \infty, \\ u^*, & \text{при } r_0 + l_0 < R_0 \leq R_0^*. \end{cases} \quad (1.3.36)$$

Подытожив результаты (1.3.20) – (1.3.36), в итоге, для рассмотренных возможных случаев 1–3 ((1.3.20), (1.3.22), (1.3.25)) получим, что минимальное гарантированное время

$$T^{\min} = T^-(u_1^{\min}, u_3^{\min}) = \frac{R_0 - l_0 + r_0}{-u_1^{\min} + Cu_3^{\min} - V}. \quad (1.3.37)$$

в задаче (1.3.1) вычисляется при следующих оптимальных гарантирующих управлениях  $u_1^{\min}, u_3^{\min}$ :

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & u_{1,3}^*, (u^* \in u^N u^L), \quad \text{при } l_0 + r_0 < R_0 < \infty, \quad (\text{A1}) \\
 & \text{если } 0 < V \leq \frac{C^2}{\sqrt{1+C^2}} U < \min \left\{ \frac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0} U, CU \right\}, \\
 & u_{1,3}^*, (u^* \in u^M(R_0) u^N), \quad \text{при } l_0 + r_0 < R_0 \leq R_0^*, \quad (\text{A2}) \\
 & \text{если } \frac{C^2}{\sqrt{1+C^2}} U < V < \min \left\{ \frac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0} U, CU \right\}, \\
 & u_{1,3}^M(R_0), (u^* \in u^S u^M(R_0)), \quad \text{при } R_0^* < R_0 < \infty, \quad (\text{A3}) \\
 & \text{если } \frac{C^2}{\sqrt{1+C^2}} U < V \min \left\{ \frac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0} U, CU \right\},
 \end{aligned} \right\} u_{1,3}^{\min} \quad (1.3.38)
 \end{aligned}$$

$$u_{1,3}^{\min} = \begin{cases}
\begin{aligned}
& u_{1,3}^*, (u^* \in u^N u^L), \quad \text{при } l_0 + r_0 < R_0 < \infty, \\
& \text{если } \frac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0} U \leq V \leq \frac{C^2 U}{\sqrt{1 + C^2}}, \quad (B1)
\end{aligned} \\
\begin{aligned}
& u_{1,3}^*, (u^* \in u^M(R_0) u^N), \quad \text{при } l_0 + r_0 < R_0 \leq R_0^*, \\
& \text{если } \frac{C^2 U}{\sqrt{1 + C^2}} \leq V \leq \frac{C^2 U}{\sqrt{1 + C^2}} + \frac{l_0 - r_0}{r_0 + l_0} \frac{U}{\sqrt{1 + C^2}}, \quad (B2)
\end{aligned} \\
\begin{aligned}
& u_{1,3}^M(R_0), (u^* \in u^J u^M(R_0)), \quad \text{при } R_0^* < R_0 < \infty, \\
& \text{если } \frac{C^2 U}{\sqrt{1 + C^2}} \leq V \leq \frac{C^2 U}{\sqrt{1 + C^2}} + \frac{l_0 - r_0}{r_0 + l_0} \frac{U}{\sqrt{1 + C^2}}, \quad (B3)
\end{aligned} \\
\begin{aligned}
& u_{1,3}^M(R_0), (u^* \in \overline{u^S u^I}), \quad \text{при } l_0 + r_0 < R_0 < \infty, \\
& \text{если } \frac{C^2 U}{\sqrt{1 + C^2}} + \frac{l_0 - r_0}{r_0 + l_0} \frac{U}{\sqrt{1 + C^2}} \leq V < CU, \quad (B4)
\end{aligned}
\end{cases} \quad (1.3.39)$$

в которых  $u_1^M(R_0)$ ,  $u_3^M(R_0)$ ,  $u_3^*$ ,  $R_0^*$  определяются уже известными соотношениями (1.2.20), (1.3.13), (1.3.31) соответственно.

Расчёт оптимальных гарантирующих управлений (1.3.38), (1.3.39) и оптимального гарантированного времени (1.3.37) производится по следующей последовательности.

При заданных параметрах  $R_0$ ,  $l_0$ ,  $r_0$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $C$ , в совокупности удовлетворяющих соотношениям (1.1.8), (1.2.1), (1.2.2), (1.2.22), вычисляются

величины  $\frac{C^2}{\sqrt{1 + C^2}}$  и  $\frac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0}$ .

А. Пусть  $0 < V < \frac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0} U$  (рис. 1.3). Тогда,



1) если

$$0 < V \leq \frac{C^2}{\sqrt{1+C^2}} U < \frac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0} U,$$

то согласно (1.3.38)(A1), управление объекта  $X$ , определяемое формулой (1.3.13), обеспечивает обнаружение искомого объекта за минимальное гарантированное время (1.3.37) при любом начальном расстоянии  $R_0 \in (r_0 + l_0, \infty)$  между центрами начальных кругов  $D_0$  и  $G_0$ ;

2) если

$$\frac{C^2}{\sqrt{1+C^2}} U \leq V < \min \left\{ \frac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0} U, CU \right\},$$

то согласно (1.3.38)(A2) существует контрольное начальное расстояние  $R_0^*$ , вычисляемое по формуле (1.3.31), такое, что для любого  $R_0 \in (r_0 + l_0, R_0^*]$  оптимальные гарантирующие управляющие скорости прямолинейного перемещения и расширения круга обнаружения неизменны и вновь вычисляются с помощью (1.3.13):  $u_1^{\min} = u_1^*$ ,  $u_3^{\min} = u_3^*$ ,

3) а при  $R_0 \in (R_0^*, \infty)$ , согласно (1.3.38)(A3), оптимальные гарантирующие управляющие скорости вычисляются по формуле (1.3.19). Причём, с увеличением начального расстояния  $R_0$  модуль постоянной скорости прямолинейного перемещения центра круга обнаружения  $u_1^{\min} = u_1^M(R_0)$  уменьшается, а постоянная скорость  $u_3^{\min} = \sqrt{U^2 - (u_1^M(R_0))^2}$  расширения круга обнаружения, наоборот, увеличивается.

В. Пусть  $\frac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0} U \leq V < CU$  (рис. 1.4). Тогда,

1) если

$$\frac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0} U \leq V < \frac{C^2 U}{\sqrt{1 + C^2}},$$

то согласно (1.3.39)(B1), при любом начальном расстоянии  $R_0 \in (r_0 + l_0, \infty)$  оптимальные гарантирующие управляющие скорости определяются формулой (1.3.13),

2) если

$$\frac{C^2 U}{\sqrt{1 + C^2}} \leq V \leq \frac{C^2 U}{\sqrt{1 + C^2}} + \frac{l_0 - r_0}{r_0 + l_0} \frac{U}{\sqrt{1 + C^2}},$$

то согласно (1.3.39)(B2), для любого  $R_0 \in (r_0 + l_0, R_0^*]$  оптимальные гарантирующие управляющие скорости снова определяются формулой (1.3.13),

а для любого  $R_0 \in [R_0^*, \infty)$ , согласно (1.3.39)(B3), оптимальные

гарантирующие управляющие скорости определяются с помощью (1.3.19), т.е. чем больше  $R_0$ , тем меньше модуль скорости прямолинейного перемещения

центра круга обнаружения  $u_1^{\min} = u_1^M(R_0)$  и больше скорость расширения

круга обнаружения  $u_3^{\min} = \sqrt{U^2 - (u_1(R_0))^2}$ ,

3) если

$$\frac{C^2 U}{\sqrt{1 + C^2}} + \frac{l_0 - r_0}{r_0 + l_0} \frac{U}{\sqrt{1 + C^2}} \leq V < CU,$$

то согласно (1.3.39)(B4), для любого  $R_0 \in (r_0 + l_0, \infty)$  оптимальные гарантирующие управляющие скорости определяются формулой (1.3.19).

**1.3.2. Случаи  $l_0 < r_0$  и  $l_0 = r_0$ .** Для случая  $l_0 < r_0$ , в задаче (1.3.3) длина дуги  $u^M(R_0)u^L$  от  $R_0$ , согласно изложенного в п. 1.2.2, зависит следующим образом (рис. 1.5):  $u^M(R_0)u^L \rightarrow u^N u^L$  при  $R_0 \rightarrow \infty$ ;  $u^M(R_0)u^L \rightarrow u^J u^L$  при  $R_0 \rightarrow l_0 + r_0$  и, поэтому, имеют место следующие включения:

$$u^J u^L \subset u^M(R_0) u^L \subset u^N u^L, \quad l_0 + r_0 < R_0 < \infty, \quad (1.3.40)$$

$$u^J u^L = u^J u^P \cup u^P u^L, \quad (1.3.41)$$

где координаты  $u_1^J < 0$ ,  $u_3^J > 0$  точки  $u^J$  (рис. 1.6) определяются по формулам (1.2.21)) с учетом в них соотношения  $l_0 < r_0$ .

Точка максимума (1.3.13) функции  $\varphi(u_1, u_3) = -u_1 + C u_3$ , с учётом вышесказанного в пункте 1.3.1, находится на дуге  $u^S u^L$ ,  $u^S u^L \supset u^N u^L$  и в зависимости от параметров задачи  $R_0, U, V, C$  либо находится на дуге  $u^M(R_0) u^L$  (1.3.40), либо – вне этой дуги:  $u^S u^M(R_0) = u^S u^L \setminus u^M(R_0) u^L$ .

Следовательно, оптимальное гарантирующее управление – решение задачи (1.3.3)((1.3.1)) – определяется таким образом:

$$u^{\min} = u^*, \quad \text{если } u^* \in u^M(R_0) u^L, \quad (1.3.42)$$

$$u^{\min} = u^M(R_0), \quad \text{если } u^* \in u^S u^M(R_0) = u^S u^L \setminus u^M(R_0) u^L, \quad (1.3.43)$$

где координаты точки  $u^*$  определяются согласно (1.3.13), а координаты точки  $u^M(R_0)$  – согласно (1.2.20), с учетом в них соотношения  $l_0 - r_0 < 0$ .

Используя вложения (1.3.40), представление дуги (1.3.41), а также формулы (1.2.16), (1.2.18), (1.2.20) для вычисления координат  $u_{1,3}^P$ ,  $u_{1,3}^N$ ,  $u_{1,3}^M(R_0)$ , с помощью соответствующих неравенств, отвечающих включениям (1.3.42), (1.3.43), найдем соотношения между параметрами задачи, при которых оптимальное гарантирующее управление  $u^{\min}$  реализуется в виде (1.3.42) или (1.3.43).

После разрешения соответствующих неравенств, получим следующие результаты:

$$1. u^* \in u^P u^L \quad \text{при } R_0 \in (l_0 + r_0, \infty) \text{ и} \quad (1.3.44)$$

$$0 < V \leq \frac{C^2 - 1}{\sqrt{1 + C^2}} U, \quad C > 1,$$

$$2. u^* \in u^N u^M (R_0) u^P \quad \text{при } R_0 \in (l_0 + r_0, \infty) \text{ и} \quad (1.3.45)$$

$$\frac{C^2 - 1}{\sqrt{1 + C^2}} U < V \leq \frac{C^2}{\sqrt{1 + C^2}} U, \quad C > 1 \text{ или}$$

$$0 < V \leq \frac{C^2}{\sqrt{1 + C^2}} U, \quad 0 < C \leq 1,$$

$$3. u^* \in u^S u^N, \quad \text{при } R_0 \in (l_0 + r_0, \infty) \text{ и} \quad (1.3.46)$$

$$\frac{C^2}{\sqrt{1 + C^2}} U < V \leq CU, \quad C > 0.$$

Более подробно остановимся на втором случае (1.3.45).

Учитывая, что  $u^N u^P = u^N u^M (R_0) u^J \cup u^J u^P$ , то из (1.3.45) следует, что имеет одно из следующих включений:

$$u^* \in u^N u^M (R_0) u^J \quad (1) \text{ либо } u^* \in u^J u^P \quad (2). \quad (1.3.47)$$

В случае (1.3.47) (2), оптимальной в задаче (1.3.3)((1.3.1)) является точка  $u^*$  (1.3.13) при любом  $R_0 \in (l_0 + r_0, \infty)$ , а в случае (1.3.47)(1) – оптимальная точка определяется в зависимости от параметра  $R_0$ .

Выясним при каких дополнительных соотношениях между параметрами задачи имеют места (1.3.47) (1) и (2).

Для этого сначала рассмотрим неравенства

$$u_1^J \leq u_1^* \leq u_1^P, \quad (1.3.48)$$

где  $u_1^P, u_1^J$  определяются согласно (1.2.16), (1.2.21) (при  $l_0 - r_0 < 0$ ).

Разрешая (1.3.48) относительно  $V$  получим, что оно имеет место при следующих соотношениях между параметрами

$$\frac{C^2 U}{\sqrt{1+C^2}} - \frac{r_0 - l_0}{r_0 + l_0} \frac{U}{\sqrt{1+C^2}} \geq V \geq \frac{C^2 - 1}{\sqrt{1+C^2}} U. \quad (1.3.49)$$

Затем, для случая (1.3.47) (1), используя координатные формулы (1.2.18) и (1.2.21), разрешим неравенства

$$u_1^N \leq u_1^* \leq u_1^J, \quad (1.3.50)$$

относительно  $V$ . Получим

$$\frac{C^2}{\sqrt{1+C^2}} U \geq V \geq \frac{C^2 U}{\sqrt{1+C^2}} - \frac{r_0 - l_0}{r_0 + l_0} \frac{U}{\sqrt{1+C^2}}. \quad (1.3.51)$$

Учитывая (1.3.49) – (1.3.51), для нахождения оптимальной точки определим то значение параметра  $R_0 \in (l_0 + r_0, \infty)$ , при котором имеет место совпадение точек  $u^M(R_0)$  (1.2.20) (при  $l_0 - r_0 < 0$ ) и  $u^*$  (1.3.13):  $u^M(R_0) = u^*$ . Так как, в рассматриваемом случае обе эти точки находятся на дуге  $u^N u^J$ , достаточно приравнять первые координаты (1.2.20) и (1.3.13) точек  $u^M(R_0)$  и  $u^*$ , соответственно, и разрешить полученное уравнение (1.3.28), равносильное уравнению (1.2.30) относительно  $R_0$  (с учетом  $l_0 - r_0 < 0$ ). Поскольку, в рассматриваемом случае (1.3.44), коэффициент у главного члена в уравнении (1.3.30) отрицательный, то оно имеет один положительный корень  $R_0^*$ , определяемый по формуле (1.3.31) ( $l_0 - r_0 < 0$ ).

В силу того, что для параметров  $l_0, r_0, U, V, C$  выполняются соотношения (1.3.51), то в силу оценки (1.3.35) корень (1.3.31) удовлетворяет неравенству  $r_0 + l_0 < R_0^* < \infty$ .

Таким образом, в случае (1.3.47) (2) имеем

$$u^* \in \begin{cases} u^M(R_0)u^J, & \text{если } l_0 + r_0 < R_0 \leq R_0^*, \\ u^* \in u^N u^M(R_0), & \text{если } R_0^* \leq R_0 < \infty. \end{cases} \quad (1.3.52)$$

Подытожив результаты (1.3.42) – (1.3.52), полученных для рассмотренных возможных случаев 1–3((1.3.44) – (1.3.46)), получим, что минимальное гарантированное время  $T^{\min} = T^-(u_1^{\min}, u_3^{\min})$  (1.2.6) в задаче (1.3.1) вычисляется при следующих оптимальных гарантирующих управлениях  $u_1^{\min}, u_3^{\min}$ :

$$u_{1,3}^{\min} = \begin{cases} u_{1,3}^*, (u^* \in u^J u^L), & \text{при } R_0 \in (l_0 + r_0, \infty), \\ \text{если } 0 < V \leq \frac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U - \frac{(r_0 - l_0)}{(r_0 + l_0)\sqrt{1+C^2}}U, \end{cases} \quad (1.3.53)$$

$$u_{1,3}^{\min} = \begin{cases} u_{1,3}^*, (u^* \in u^M(R_0^*)u^J), & \text{при } R_0 \in (l_0 + r_0, R_0^*), \\ \text{если } \frac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U - \frac{(r_0 - l_0)}{(r_0 + l_0)\sqrt{1+C^2}}U < V < \frac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U, \end{cases} \quad (1.3.54)$$

$$u_{1,3}^{\min} = \begin{cases} u_{1,3}^M(R_0), (u^* \in u^S u^N), & \text{при } R_0 \in (l_0 + r_0, \infty), \\ \text{если } \frac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U \leq V < CU, \end{cases} \quad (1.3.55)$$

в которых  $u_1^M(R_0)$ ,  $u_3^M(R_0)$ ,  $u_3^*$ ,  $R_0^*$ ,  $u_3^J$  определяются уже известными соотношениями (1.2.20), (1.3.13), (1.3.31), (1.2.21) соответственно.

Таким образом, из (1.3.53) - (1.3.55) следует, что для заданных параметров  $R_0$ ,  $l_0$ ,  $r_0$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $C$ , в совокупности удовлетворяющих соотношениям (1.1.8),

(1.2.1), (1.2.26), если  $0 < V \leq \frac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U - \frac{(r_0-l_0)}{(r_0+l_0)\sqrt{1+C^2}}U$ , то при любом

$R_0 \in (l_0 + r_0, \infty)$  движение ищущего объекта с постоянной оптимальной управляющей скоростью (1.3.13) обеспечивает обнаружение искомого объекта не позже минимального гарантированного времени  $T^{\min} = T^-(u_1^*, u_3^*)$  (1.2.6).

Если  $\frac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U - \frac{(r_0-l_0)}{(r_0+l_0)\sqrt{1+C^2}}U < V < \frac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U$ , то для любого

$R_0 \in (l_0 + r_0, R_0^*)$ , где  $R_0^*$  контрольное начальное расстояние, искомым объект обнаруживается не позже минимального гарантированного времени  $T^{\min} = T^-(u_1^*, u_3^*)$  (1.2.6), при движении ищущего объекта с постоянными

управляющими скоростями (1.3.13), а для  $R_0 \in (R_0^*, \infty)$  - не позже минимальное гарантированного времени  $T^{\min} = T^-(u_1^M(R_0), u_3^M(R_0))$  (1.2.6), при движении

ищущего объекта с оптимальными управляющими скоростями, вычисляемых по формулам (1.2.20), причем, чем больше  $R_0$ , тем, согласно (1.2.20) и с

учетом (1.2.26), меньше  $u_3^M(R_0)$  и больше по модулю  $u_1^M(R_0)$ . И, наконец,

если  $\frac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U \leq V < CU$ , то для любого  $R_0 \in (l_0 + r_0, \infty)$  компоненты

оптимальной управляющей скорости ищущего объекта вычисляются по формулам (1.2.20) и обеспечивают обнаружение искомого объекта не позже

минимального гарантированного времени  $T^{\min} = T^-(u_1^M(R_0), u_3^M(R_0))$  (1.2.6).

При этом с возрастанием параметра  $R_0$  компонента  $u_1^M(R_0)$  по модулю возрастает, а компонента  $u_3^M(R_0)$ , наоборот, убывает.

Для случая  $l_0 = r_0$  (рис. 1.7), в задаче (1.3.3) дуговая граница  $u^N u^L = u^N u^P \cup u^P u^L$  области гарантирующих управлений (1.2.33) от  $R_0$  не зависит.

Точка максимума (1.3.13) функции  $\varphi(u_1, u_3) = -u_1 + C u_3$ , в зависимости от параметра  $C$  либо находится на дуге  $u^S u^N$ , либо на дуге  $u^N u^L$  – на границе области (1.2.33). Следовательно, оптимальное гарантирующее управление – решение задачи (1.3.3)((1.3.1)) – определяется таким образом:

$$u^{\min} = u^*, \quad \text{если} \quad u^* \in u^N u^L, \quad (1.3.56)$$

$$u^{\min} = u^N, \quad \text{если} \quad u^* \in u^S u^N, \quad (1.3.57)$$

где координаты точки  $u^*$  определяются согласно (1.3.13), а координаты точки  $u^N$  – согласно (1.2.18), с учетом в них соотношения  $l_0 - r_0 = 0$ .

Используя формулы  $u_{1,3}^N$  (1.2.18), с помощью соответствующих неравенств, отвечающих включениям (1.3.56), (1.3.57), найдем соотношения между параметрами задачи  $U, V, C$ , при которых оптимальное гарантирующее управление  $u^{\min}$  реализуется в виде (1.3.56) или (1.3.57) и доставляют минимальное значение гарантированному времени обнаружения  $T^-(u_1^{\min}, u_3^{\min})$  (1.2.6):



$$u_{1,3}^{\min} = \begin{cases} u_{1,3}^*, (u^* \in u^N u^L), & \text{при } R_0 \in (l_0 + r_0, \infty), \\ \text{если } 0 < V \leq \frac{C^2}{\sqrt{1+C^2}} U, & \\ u_{1,3}^N, (u^* \in u^S u^N) & \text{при } R_0 \in (l_0 + r_0, \infty), \\ \text{если } \frac{C^2}{\sqrt{1+C^2}} U \leq V < CU. & \end{cases} \quad (1.3.58)$$

Таким образом, в многопараметрической задаче поиска подвижного объекта предложен и обоснован конструктивный алгоритм оптимальное по минимальному гарантированному времени поиска управления. Полученные в явном виде формулы (1.3.38), (1.3.38) ( $l_0 > r_0$ ); (1.3.53)-(1.3.55) ( $l_0 < r_0$ ) и (1.3.58) ( $l_0 = r_0$ ) позволяют вычислить оптимальное гарантирующее управление и соответствующее минимальное время гарантированного поиска (1.2.26) для различных случаев соотношений между радиусами начальных кругов обнаружения и неопределённости ищущего и искомого объектов соответственно. Изложенный алгоритм, в силу простоты и доступности, удобно применять в различных поисковых системах.

## ГЛАВА 2

### ОПТИМАЛЬНЫЙ ГАРАНТИРОВАННЫЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОИСК ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА НА ПЛОСКОСТИ

Рассматривается задача построения управляемого по ускорению пространственного движения ищущего объекта, который из заданного начального состояния должен, совершив подходящий маневр, за возможно минимальное время обнаружить целевой движущийся объект, совершающий управляемое по ускорению движение на горизонтальной плоскости и начальное состояние которого известно ищущему объекту с точностью до заданного множества неопределённости. Искомый объект считается обнаруженным в случае его попадания в круговое основание конуса, координаты вершины которого – суть текущие координаты ищущего объекта. Как и в главе 1, при решении рассматриваемой задачи используется подход, состоящий в построении таких управлений, при которых круг обнаружения ищущего объекта поглощает расширяющийся во времени круг неопределённости искомого объекта за минимальное время. На основе минимаксного подхода, установлено, что для гарантированного обнаружения достаточно рассматривать случай, когда искомый объект в начальный момент времени находится на границе области неопределенности и движется с максимальной скоростью по радиусу круга неопределенности в направлении от центра, что обеспечивает расширение круга неопределенности с наибольшей скоростью. Тем самым, исходная задача поиска сводится к задаче оптимального по быстродействию управления с подвижным правым концом [28], которая решается методом принципа максимума Понтрягина [51]. Разработан конструктивный алгоритм определения оптимального гарантирующего управления и соответствующего минимального гарантированного времени поиска, в зависимости от параметров задачи.

## §2.1. Описание поисковой системы и постановка задачи

Пусть имеются два точечных объекта  $X$  и  $Y$ , из которых  $X$  – ищущий, а  $Y$  – искомый. Объект  $X$  совершает пространственное движение в гравитационном поле Земли, а объект  $Y$  – движение на плоскости Земли. Уравнения движения объектов зададим в виде

$$\begin{aligned} X: \quad m_X \ddot{x} &= f_X + m_X g, \quad x(0) = x^0; \dot{x}(0) = 0, \quad x, f_X \in R^3, \\ |f_X(t)| &\leq F_X, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

$$\begin{aligned} Y: \quad m_Y \ddot{y} &= f_Y, \quad y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}^0, \quad y, f_Y \in R^2, \\ |\dot{y}(t)| &\leq V_Y, \quad |f_Y(t)| \leq F_Y, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

В (2.1.1), (2.1.2)  $x, y$  – векторы координат объектов;  $f_X, f_Y$  векторы управляющих сил объектов, которые являются кусочно-непрерывными функциями от  $t$  и по модулю ограничены заданными величинами  $F_X, F_Y$  соответственно;  $V_Y$  – максимально возможная скорость объекта  $Y$ ;  $g = (0, 0, -g)$  – постоянный вектор ускорения свободного падения, а  $m_X, m_Y$  – массы объектов  $X$  и  $Y$  соответственно,

Введя новую переменную (с дальнейшим опусканием штриха) и обозначения

$$x' = x - gt^2 / 2, \quad w_{X,Y} = f_{X,Y} / m_{X,Y}, \quad W_{X,Y} = F_{X,Y} / m_{X,Y}, \quad (2.1.3)$$

запишем систему (2.1.1), (2.1.2) в виде

$$\begin{aligned} X: \quad \ddot{x} &= w_X, \quad x(0) = x^0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x, w_X \in R^3, \\ |w_X(t)| &\leq W_X, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

$$\begin{aligned} Y: \quad \ddot{y} &= w_Y, \quad y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}^0, \quad y, w_Y \in R^2, \\ |\dot{y}(t)| &\leq V_Y, \quad |w_Y(t)| \leq W_Y, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

где  $w_X, w_Y$  – векторы управляющих ускорений объектов  $X, Y$ , а  $W_X, W_Y$  – их максимально возможные ускорения соответственно.

Положим, что объекту  $X$  точно известно свои текущие фазовые координаты  $x(t), \dot{x}(t), t \geq 0$  и максимальные величины своего управляющего ускорения  $W_X$  и скорости  $V_X$ , а также максимальные величины управляющего ускорения и скорости объекта  $Y$  –  $W_Y$  и  $V_Y$ . О фазовых координатах  $y, \dot{y}$  объекта  $Y$  известно лишь то, что в начальный момент времени  $t = 0$ ,  $Y$  находится в заданном множестве неопределенности

$$(y^0, \dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0, \quad (2.1.6)$$

$$D_0 = \{y^0 \in R^2 : |y^0 - y_c^0| \leq r_0\}, \quad \dot{D}_0 = \{\dot{y}^0 \in R^2 : |\dot{y}^0| \leq V_Y\},$$

где  $D_0, \dot{D}_0$  – круги с центрами в точках  $y_c^0 = (y_{c1}^0, y_{c2}^0)$ ,  $\dot{y}^0 = (0, 0)$  и радиусами  $r_0, V_Y$  соответственно.

Возможность определения точных геометрических координат искомого объекта  $Y$  осуществляется с помощью подвижной и изменяющейся во времени информационной области (1.1.4), представляющей собой круговое (с центром  $x_c = (x_{c1}, x_{c2})$ ) основание некоторого конуса, вершина которого связана с текущим значением вектора положения  $X$  (рис. 1.1).

В соответствии с динамикой (2.1.4), при пространственном движении ищущего объекта изменение информационного круга (1.1.4) на плоскости  $(x_1, x_2)$  определяется плоским движением его центра  $x_c(t) = (x_{c1}(t), x_{c2}(t))$  с помощью вектора управления  $(w_{X1}(t), w_{X2}(t))$  и расширением или сужением области (1.1.4), путем изменения расстояния  $x_3$  объекта  $X$  до плоскости  $(x_1, x_2)$  с помощью скалярного управления  $w_{X3}(t)$ , т.е. изменением его радиуса  $l(t) = Cx_3(t)$  с помощью управления  $Cw_{X3}(t)$ :  $\dot{l}(t) = Cw_{X3}(t)$ ,

$l_0 = l(0)$ ,  $\dot{l}_0 = \dot{l}(0)$ . При  $w_{x_3}(t) > 0$  круг  $G(1.1.4)$  расширяется, а при  $w_{x_3}(t) < 0$  – сужается.

Пусть, как в первой главе, параметры  $y_{c1}^0, y_{c2}^0, r_0$  и  $x_{c1}^0, x_{c2}^0, x_3^0, C$  (или  $x_{c1}^0, x_{c2}^0, l_0$ ) кругов неопределенности  $D_0$  и обнаружения  $G_0$  такие, что в начальный момент времени  $t = 0$  выполняется условие (1.1.5), т.е. начальные круги неопределенности и обнаружения не имеют пересечения.

В процессе управляемого движения  $X$  положение искомого объекта  $Y$  становится точно известным объекту  $X$  в момент времени  $t^* > 0$ , когда впервые выполняется условие обнаружения (1.1.6) - условие попадания  $Y$  в круг обнаружения  $G(x(t^*))$ .

**О п р е д е л е н и е 1.** На плоскости  $(y_1, y_2)$  множеством неопределенности  $D(t, D_0 \times \dot{D}_0)$  искомого объекта (2.1.5) с начальным условием  $(y^0, \dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0$  (2.1.6) при  $t \geq 0$  назовем совокупность концов  $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$  всех траекторий этой системы, начинающихся в момент  $t = 0$  в точках начального множества неопределенности  $D_0 \times \dot{D}_0$  и построенных с помощью всевозможных кусочно-непрерывных управляющих ускорениях (допустимых управлениях)  $w_Y(\tau) = (w_{Y1}(\tau), w_{Y2}(\tau))$ ,  $|w_Y(\tau)| \leq W_Y$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ , при соблюдении ограничения на скорость  $|\dot{y}(t)| \leq V_Y$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ .

Очевидно, что множество  $D(t, D_0 \times \dot{D}_0)$  является объединением всех множеств вида  $D(t, (y^0, \dot{y}^0))$ , где  $(y^0, \dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0$ :

$$D(t, D_0 \times \dot{D}_0) = \bigcup_{(y^0, \dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0} D(t, (y^0, \dot{y}^0)) \quad (2.1.7)$$

В дальнейшем в записи для множества неопределенности  $D(t, D_0 \times \dot{D}_0)$  декартово произведение  $D_0 \times \dot{D}_0$  будем опускать.

Поскольку круг обнаружения  $G(x(t))$  (1.1.4) ищущего объекта  $X$  (2.1.4) в момент  $t$  при использовании им всевозможных кусочно-непрерывных управляющих ускорений (допустимых управлений)  $w_X(\tau)$ ,  $|w_X(\tau)| \leq W_X$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ , представляет собой круг, то условие обнаружения (1.1.6) гарантированно выполнимо, если существует момент  $T$ ,  $T \geq t^*$  и допустимое управление  $w_X(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , что выполняется включение

$$D(T, D_0 \times \dot{D}_0) \subseteq G(x(T)) \quad (2.1.8)$$

**О п р д е л е н и е 2.** Для заданного начального состояния  $(x^0, \dot{x}^0)$  объекта  $X$  и заданных начальных кругов обнаружения  $G_0$  (1.1.4) и неопределенностей  $D_0$  и  $\dot{D}_0$  (2.1.6), число  $T > 0$  и допустимое управление  $w_X(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , объекта  $X$  назовем гарантированным временем поиска и гарантирующим управлением соответственно, если при любом начальном состоянии  $(y^0, \dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0$  и любом допустимом управлении  $w_Y(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  объекта  $Y$  гарантируется условие обнаружения (2.1.8) в некоторый момент времени  $t^* > 0$  – не позднее времени  $T$ :  $t^* \leq T$ .

Будем полагать, что множество гарантирующих управлений  $w_X(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  не пусто для всех рассматриваемых  $(x^0, \dot{x}^0)$ . При фиксированном  $(x^0, \dot{x}^0)$  каждому гарантирующему управлению  $w_X(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  соответствует траектория системы (2.1.4), приходящая в некоторую точку в момент  $T$  так, что выполняется условие поглощения (2.1.8).

Сформулируем задачу о минимальном гарантированном обнаружении искомого подвижного объекта  $Y$  (2.1.5).

**З а д а ч а 2.1.** Найти минимальное гарантированное время быстрогодействия

$T^*(x^0)$  и допустимое управление  $w_X^*$ , доставляющее минимум

$$T^*(x^0) = \min_{|w_X| \leq W_X} \max_{|w_Y| \leq W_Y} \max_{(y^0, \dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0} T(x^0, w_X, w_Y, y^0, \dot{y}^0). \quad (2.1.9)$$

## §2.2. Сведение к задаче оптимального быстрогодействия с подвижным правым концом

Не нарушая общности положим, что центр  $y_c^0 = (y_{c1}^0, y_{c2}^0) \in R^2$  круга неопределенности  $D_0 \subset R^2$  искомого объекта  $Y$  совпадает с началом декартовой системы координат  $Ox_1x_2$ , а ищущий объект  $X$  в начальный момент времени с нулевой скоростью (2.1.4) находится в точке  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ ,  $x_1^0 = R_0 > 0$ ,  $x_2^0 = 0$ ,  $x_3^0 = 0$ , т.е. круг обнаружения - точка  $x_c^0 = (R_0, 0)$  на оси  $Ox_1$  (фиг. 1). Будем полагать, что выполняется соотношение  $R_0 > r_0$ , которое полностью описывает начальное расположение (1.1.5) кругов  $D_0$  и  $G_0$ :

$$D_0 = \{(y_1, y_2) : y_1^2 + y_2^2 = r_0^2\}, \quad G_0 = (R_0, 0), \quad R_0 > r_0. \quad (2.2.1)$$

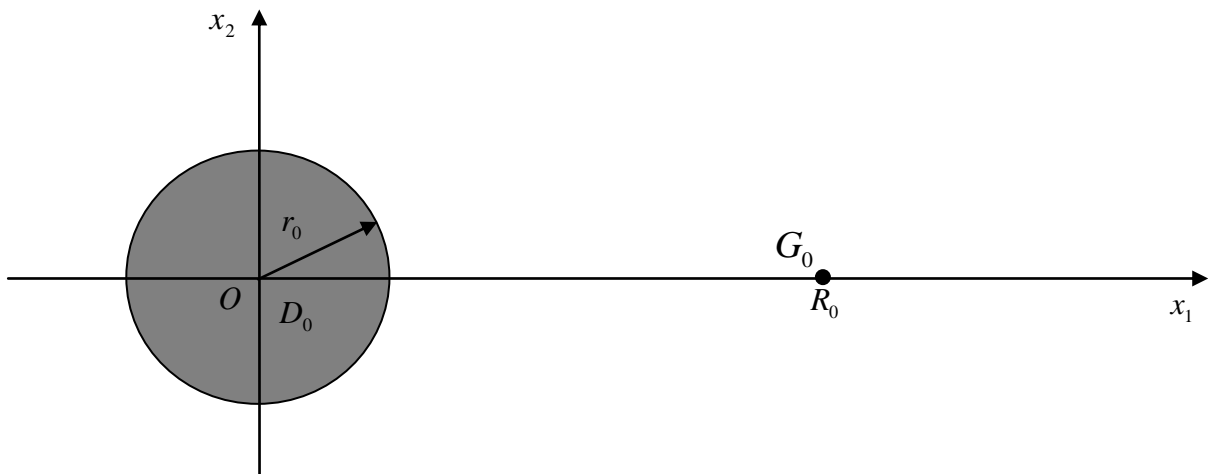


Рис. 2.1

Обозначим через  $\partial D_0$  и  $\partial \dot{D}_0$  границы областей неопределенности  $D_0$  и  $\dot{D}_0$  (2.1.6) соответственно:

$$\partial D_0 = \{y^0 \in R^2 : |y^0| = r_0\}, \quad \partial \dot{D}_0 = \{\dot{y}^0 \in R^2 : |\dot{y}^0| = V_Y\}. \quad (2.2.2)$$

**У т д в е р ж д е н и е .** Искомый объект (2.1.5) в момент времени  $t$  может оказаться на максимальном расстоянии от начало координат, если в начальный момент  $t = 0$  находится на границе круга неопределенности  $D_0$ :  $y^0 \in \partial D_0$ , имеет максимальную по модулю начальную вектор-скорость:  $\dot{y}^0 \in \partial \dot{D}_0$ , направленная по радиусу круга  $D_0$  в сторону от центра:

$$\dot{y}^0 = (\dot{y}_1^0, \dot{y}_2^0) = \left( V_Y \frac{y_1^0}{r_0}, V_Y \frac{y_2^0}{r_0} \right) \quad (2.2.3)$$

и движется с нулевым ускорением:

$$w_Y(\tau) \equiv 0, \quad 0 \leq \tau \leq t. \quad (2.2.4)$$

Действительно. Используя решения уравнения (2.1.5)

$$y_i(t) = y_i^0 + t\dot{y}_i^0 + \int_0^t (t - \tau) w_{Yi}(\tau) d\tau, \quad \dot{y}_i(t) = \dot{y}_i^0 + \int_0^t w_{Yi}(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \quad (2.2.5)$$

где управляющие ускорения  $w_{Yi}(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ , из класса кусочно-непрерывных функций, представим формулу для вычисления расстояния объекта  $Y$  от начало координат  $r(t) = \sqrt{y_1^2(t) + y_2^2(t)}$  в виде:

$$r(t) = \sqrt{|y^0|^2 + t^2 |\dot{y}^0|^2 + 2t \langle y^0, \dot{y}^0 \rangle + 2 \langle y^0 + t\dot{y}^0, Q(t) \rangle + |Q(t)|^2}, \quad (2.2.6)$$

а ограничение на скорость  $\sqrt{\dot{y}_1^2(t) + \dot{y}_2^2(t)} \leq V_Y$  – в виде:



$$\dot{y}_1^2(t) + \dot{y}_2^2(t) = 2\langle P(t), \dot{y}^0 \rangle + \sum_{i=1}^2 \left[ \left( \int_0^t w_{Y_i}(\tau) d\tau \right)^2 + (\dot{y}_i^0)^2 \right] \leq V_Y^2, \quad t \geq 0. \quad (2.2.7)$$

В (2.2.6), (2.2.7) введены следующие обозначения:

$$Q(t) = \left( \int_0^t (t-\tau) w_{Y_1}(\tau) d\tau, \int_0^t (t-\tau) w_{Y_2}(\tau) d\tau \right)^T, \quad (2.2.8)$$

$$P(t) = \left( \int_0^t w_{Y_1}(\tau) d\tau, \int_0^t w_{Y_2}(\tau) d\tau \right)^T, \quad y^0 = (y_1^0, y_2^0)^T, \quad \dot{y}^0 = (\dot{y}_1^0, \dot{y}_2^0)^T,$$

где символом  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначено скалярное произведение двух векторов.

Так как, максимум подкорневого выражения (2.2.6) относительно  $y^0, \dot{y}^0$ , достигается на такой граничной точке  $(y^0, \dot{y}^0) \in \partial D_0 \times \partial \dot{D}_0$  (2.2.2), что векторы

$y^0 = (y_1^0, y_2^0)^T$ ,  $\dot{y}^0 = (\dot{y}_1^0, \dot{y}_2^0)^T$  коллинеарны и одинаково направлены:

$\dot{y}_i^0 = V_Y \frac{y_i^0}{r_0}$ ,  $i = 1, 2$ , то при такой начальной вектор-скорости из (2.2.7)

получаем неравенство

$$2V_Y \langle P(t), y^0 \rangle r_0^{-1} + \langle P(t), P(t) \rangle \leq 0, \quad t \geq 0. \quad (2.2.9)$$

Неравенство (2.2.9) будет заведомо выполнено, если выполняется

$$2V_Y \left[ t \int_0^t [w_{Y_1}^2(\tau) + w_{Y_2}^2(\tau)] d\tau \right]^{1/2} + t \int_0^t [w_{Y_1}^2(\tau) + w_{Y_2}^2(\tau)] d\tau \leq 0, \quad t \geq 0, \quad (2.2.10)$$

которое получается после последовательного применения к левой части (2.2.9) неравенств Коши-Буняковского и Шварца. Очевидно, что (2.2.10) имеет место только при  $w_{Y_i}(\tau) \equiv 0$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ ,  $i = 1, 2$ . С учетом этого из (2.2.8) получим  $Q(t) \equiv 0$ ,  $t \geq 0$  и, таким образом, максимальное значение  $r(t)$  (2.2.6) будет

следующим:

$$\max_{|w_Y(t)| \leq W_Y} \max_{(y^0, \dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0} r(t) = r_0 + tV_Y. \quad (2.2.11)$$

Обозначим через  $D(t, \partial D_0 \times \partial \dot{D}_0)$  совокупность концов траекторий  $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$  искомого объекта  $Y$  (2.1.5), стартующих из начальных состояний  $(y^0, \dot{y}^0) \in \partial D_0 \times \partial \dot{D}_0$  (2.2),  $\dot{y}^0 = V_Y \frac{y^0}{r_0}$  (2.2.3) и построенных при нулевом ускорении (2.2.4). Тогда из доказанного утверждения следует, что множество  $D(t, \partial D_0 \times \partial \dot{D}_0)$ , которое на плоскости  $(y_1, y_2)$  представляет собой окружность с центром в точке  $(0, 0)$  и радиусом  $r(t) = r_0 + tV_Y$  (2.2.11), удовлетворяет следующему включению:

$$D(t, D_0 \times \dot{D}_0) \subset D(t, \partial D_0 \times \partial \dot{D}_0), \quad t \geq 0. \quad (2.2.12)$$

Из (2.2.12) следует, что для гарантированного поглощения (2.1.8), ищущий объект должен строить управление поиском с расчетом на то, что искомый объект в начальный момент времени находится на границе области неопределенности  $D_0$  и имеет начальную скорость (2.2.3), что обеспечивает расширение круга неопределенности с наибольшей скоростью. Такой подход гарантирует успешный поиск, так как управление поиском строится с расчетом на движение искомого объекта в любом, в том числе наихудшем для ищущего объекта, направлении.

Таким образом, вместо (2.1.8) достаточно рассматривать следующее условие поглощения

$$D(T, \partial D_0 \times \partial \dot{D}_0) \subseteq G(x(T)), \quad (2.2.13)$$

где множество  $D(T, \partial D_0 \times \partial \dot{D}_0)$  имеет следующую форму окружности

$$D_T = D(T, \partial D_0 \times \partial \dot{D}_0) = \{(y_1, y_2) : y_1^2 + y_2^2 = r^2(T), r(T) = r_0 + V_Y T\}. \quad (2.2.14)$$

Из геометрии взаимного расположения двух окружностей следует, что одно из допустимых расположений окружности-границы  $G_T$  круга  $G(x(T))$  и окружности  $D_T$ , отвечающее условию поглощения (2.2.13), является расположение, изображенное на рис. 2.2 и характеризуемое следующими условиями:

$$G_T = \{(x_1, x_2) : (x_1 - R(T))^2 + x_2^2 = l^2(T)\}, \quad (2.2.15)$$

$$D_T = \{(y_1, y_2) : y_1^2 + y_2^2 = r^2(T)\}, \quad r(T) = r_0 + V_Y T, \quad (2.2.16)$$

$$R(T) \geq 0, \quad R(T) = l(T) - r(T). \quad (2.2.17)$$

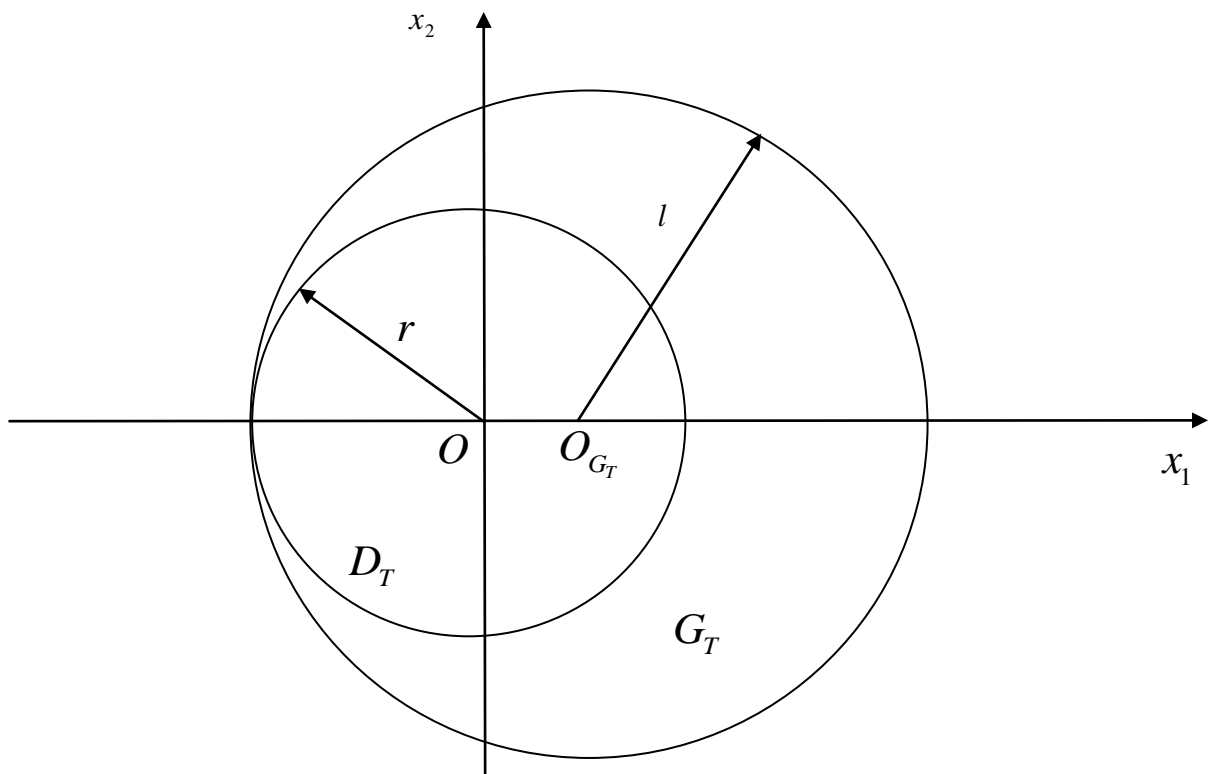


Рис. 2.2.

При переходе расширяющегося во времени круга обнаружения из

начального положения (2.2.1) в конечное положение (2.2.15) в момент  $t = T$ , условие (2.2.17) в переменных  $x_1, x_3$  запишется в следующем виде:

$$x_1(T) \geq 0, \quad x_1(T) = Cx_3(T) - r_0 - V_Y T \quad (2.2.18)$$

Если ввести фазовые переменные  $\dot{x}_i = v_i$  и записать уравнения (2.1.4) относительно  $x_i, v_i$  в виде

$$\dot{x}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = w_{X_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2.19)$$

то придем к следующей задаче оптимального управления.

**З а д а ч а 2.2.** Найти ограниченное управляющее ускорение  $w_X^*(t) = (w_{X_1}^*(t), w_{X_2}^*(t), w_{X_3}^*(t))$ ,  $t \in [0, T]$  (2.1.4), обеспечивающее приведение объекта  $X$  (2.2.19) из заданного начального состояния

$$\begin{aligned} x_1(0) = R_0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0, \\ v_1(0) = 0, \quad v_2(0) = 0, \quad v_3(0) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

на множество

$$S(x(T), T) = \left\{ x \in R^3 : \begin{aligned} g_1(x(T), T) &= x_1(T) \geq 0, \\ g_2(x(T), T) &= x_2(T) = 0, \\ g_3(x(T), T) &= x_1(T) - Cx_3(T) + r_0 + V_Y T = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.21)$$

за минимальное время  $T$ .

Задача 2.2((2.2.19)–(2.2.21)) является задачей оптимального по быстродействию управления с закрепленным левым (2.2.20) и подвижным правым (2.2.21) концами. К ней применим метод принципа максимума [28, 51], дающего необходимые условия оптимальности управления  $w_X(t)$  из достаточно широкого для приложений класса кусочно–непрерывных функций.

Покажем, что в классе постоянных управлений в задаче (2.2.19) – (2.2.21) существует гарантирующее управление и соответствующее гарантированное время поиска. Действительно, управление  $w_X = (w_{X_1}, w_{X_2}, w_{X_3})$  (2.1.4)

выберем со следующими компонентами:

$$w_{X1} = w_{X2} = 0, \quad w_{X3} = W_X. \quad (2.2.21)(a)$$

Проинтегрируем уравнения (2.2.19) при управлениях (2.2.21)(a) и начальных условиях (2.2.20). Затем, полученные выражения при  $t = T$  поставим в конечные условия в (2.2.21). Первое и второе соотношения выполняются автоматически, а третье соотношение преобразуется к квадратному уравнению относительно времени  $T$ :

$$-Cw_{X3}T^2 + 2V_Y T + 2(R_0 + r_0) = 0,$$

которое имеет один положительный корень:

$$T = \frac{2V_Y}{Cw_{X3}} + \sqrt{\left(\frac{2V_Y}{Cw_{X3}}\right)^2 + \frac{2(R_0 + r_0)}{Cw_{X3}}}. \quad (2.2.21)(b)$$

Таким образом, управления (2.2.21)(a), в частности, являются гарантирующими, а время (2.2.21)(b) – гарантированным времени поиска, так как, в этот момент выполняются краевые условия (2.2.21), равносильные условию поглощения, т.е. условию гарантированного обнаружения.

Перейдем к решению задачи (2.2.19)–(2.2.21). Составим функцию Гамильтона

$$H = p_0 + \sum_{i=1}^3 (p_i v_i + q_i w_{Xi}) \quad (2.2.22)$$

и определим оптимальное управления  $w_X^*$  из принципа максимума [51]

$$H^* = \max_{|w_X| \leq W_X} H, \quad |w_X^*| = W_X, \quad w_{Xi}^* = q_i W_X \left[ \sum_{i=1}^3 q_i^2 \right]^{-1/2}. \quad (2.2.23)$$

и выпишем двухточечную краевую задачу для гамильтоновой системы вида

$$\dot{x}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = w_{xi}^*, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial v_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.2.24)$$

$$x_1(0) = R_0, \quad x_2(0) = x_3(0) = 0, \quad v_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.2.25)$$

$$p_i(T) = \sum_{j=1}^3 \mu_j \frac{\partial g_j(x(T), T)}{\partial x_i}, \quad q_j(T) = \sum_{i=1}^3 \mu_i \frac{\partial g_i(x(T), T)}{\partial v_j}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.2.26)$$

$$\mu_1 g_1(x(T), T) = 0, \quad \mu_1 \leq 0, \quad g_2(x(T), T) = 0, \quad g_3(x(T), T) = 0, \quad (2.2.27)$$

$$H^*(T) = -\sum_{i=1}^3 \mu_i \frac{\partial g_i(x(T), T)}{\partial T}. \quad (2.2.28)$$

В условиях трансверсальности (2.2.26)–(2.2.28) функции  $g_j$  задаются из (2.2.21), а  $\mu_j = const$  – множители Лагранжа, которые вместе с постоянной  $p_0 \leq 0$  одновременно не равняются нулю [28].

### §2. 3. Решение краевой задачи принципа максимума

Найдем сопряженные переменные путем интегрирования сопряженных уравнений (2.2.24) при условиях (2.2.26) с учетом (2.2.21), (2.2.22):

$$q_i(t) = (T - t)p_i(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.3.1)$$

$$p_1(t) \equiv -\mu_1 + \mu_3, \quad p_2(t) = \mu_2, \quad p_3(t) = -\mu_3 C, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Используя решения (2.3.1), получим важный для дальнейших построений вывод о постоянстве во времени оптимальных управлений  $w_{xi}^*$ ,  $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}
w_{X1}^* &= W_X \frac{-\mu_1 + \mu_3}{\sqrt{(-\mu_1 + \mu_3)^2 + \mu_2^2 + C^2 \mu_3^2}}, \\
w_{X2}^* &= W_X \frac{\mu_2}{\sqrt{(-\mu_1 + \mu_3)^2 + \mu_2^2 + C^2 \mu_3^2}}, \\
w_{X3}^* &= W_X \frac{-C\mu_3}{\sqrt{(-\mu_1 + \mu_3)^2 + \mu_2^2 + C^2 \mu_3^2}},
\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Интегрируя уравнения движения (2.2.24) при управлениях (2.3.2) с начальными условиями (2.2.25) получим

$$x_1(t) = w_{X1}^* \frac{t^2}{2} + R_0, \quad x_2(t) = w_{X2}^* \frac{t^2}{2}, \quad x_3(t) = w_{X3}^* \frac{t^2}{2}, \tag{2.3.3}$$

$$v_i(t) = w_{Xi}^* t, \quad i = 1, 2, 3.$$

Подставив (2.3.3) в условия (2.2.27), (2.2.28), получим систему уравнений относительно неизвестных параметров  $T, p_0, \mu_i, i = 1, 2, 3$ :

$$\mu_1(x_1(T)) = \mu_1\left(w_{X1}^* \frac{T^2}{2} + R_0\right) = 0, \tag{2.3.4}$$

$$x_2(T) = w_{X2}^* \frac{T^2}{2} = 0, \tag{2.3.5}$$

$$x_1(T) - Cx_3(T) + r_0 + V_Y T = (w_{X1}^* - Cw_{X3}^*) \frac{T^2}{2} + V_Y T + R_0 + r_0 = 0, \tag{2.3.6}$$

$$p_0 + (-\mu_1 + \mu_3)w_{X1}^* T + \mu_2 w_{X2}^* T - \mu_3 C w_{X3}^* T = -\mu_3 V_Y. \tag{2.3.7}$$

Так как  $T > 0$ , то из (2.3.5)((2.3.2)) получаем  $w_{X2}^* = 0$  ( $\mu_2 = 0$ ), т.е. движение по координате  $x_2$  отсутствует. Таким образом, имеем систему из трех нелинейных уравнений (2.3.4), (2.3.6), (2.3.7) относительно четырех неизвестных  $p_0, \mu_1, \mu_3, T$ . Из постановки задачи следует, что  $\mu_3 < 0$ , так как в

противном случае круг обнаружения не может расширяться и задача теряет смысла. Согласно методу принципа максимума рассмотрению подлежат случаи  $p_0 = 0$  и  $p_0 = -1$ , а для каждого из этих случаев необходимо последовательно рассматривать два варианта удовлетворения условия дополняющей нежесткости (2.2.27):  $\mu_1 = 0$  и  $\mu_1 < 0$ . Покажем, что в случае  $p_0 = 0$  система (2.3.4), (2.3.6), (2.3.7) не имеет решения, т.е. из краевой задачи (2.2.24)–(2.2.28) принцип максимума оптимальное управление не определяется.

Действительно, пусть  $p_0 = 0$ ,  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_3 < 0$ . Тогда из (2.3.2) получим

$$w_{x1}^* = -\frac{W_X}{\sqrt{1+C^2}}, \quad w_{x3}^* = -Cw_{x1}^* = \frac{CW_X}{\sqrt{1+C^2}}. \quad (2.3.8)$$

При управлениях (2.3.8) уравнения (2.3.6), (2.3.7) запишутся в виде

$$-\frac{W_X \sqrt{1+C^2}}{2} T^2 + V_Y T + R_0 + r_0 = 0, \quad (2.3.9)$$

$$\mu_3 [-W_X T \sqrt{1+C^2} + V_Y] = 0. \quad (2.3.10)$$

Разрешив (2.3.10) относительно  $T$  и подставив найденное в (2.3.9), получим соотношение

$$\frac{V_Y^2}{2W_X \sqrt{1+C^2}} + R_0 + r_0 = 0,$$

которое не имеет места в силу положительности левой части.

Пусть  $p_0 = 0$ ,  $\mu_1 < 0$ ,  $\mu_3 < 0$ . Тогда из (2.3.2) следует, что

$$w_{x1}^* = \frac{(-\mu_1 + \mu_3)W_X}{\sqrt{(-\mu_1 + \mu_3)^2 + C^2 \mu_3^2}} < 0, \quad w_{x3}^* = \frac{-C\mu_3 W_X}{\sqrt{(-\mu_1 + \mu_3)^2 + C^2 \mu_3^2}} > 0 \quad (2.3.11)$$

и  $w_{x1}^* - Cw_{x3}^* < 0$ .

Из условия трансверсальности (2.3.7) найдем



$$T = \frac{-\mu_3 V_Y}{-\mu_1 w_{X1}^* + \mu_3 (w_{X1}^* - C w_{X3}^*)},$$

которое с использованием (2.3.11) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} T &= \frac{-\mu_3 V_Y}{W_X \sqrt{(-\mu_1 + \mu_3)^2 + C^2 \mu_3^2}} = \\ &= \frac{-C \mu_3 V_Y}{C W_X^2 \sqrt{(-\mu_1 + \mu_3)^2 + C^2 \mu_3^2}} W_X = \frac{V_Y}{C W_X^2} w_{X3}^*. \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Подставим (2.3.12) в равносильное (2.3.4) уравнение

$$\frac{w_{X1}^*}{2} T^2 + R_0 = 0, \quad (2.3.13)$$

и в уравнение (2.3.6). Получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{w_{X1}^*}{2} \left( \frac{V_Y}{C W_X^2} w_{X3}^* \right)^2 + R_0 &= 0, \\ \frac{w_{X1}^* - C w_{X3}^*}{2} \left( \frac{V_Y}{C W_X^2} w_{X3}^* \right)^2 + \frac{V_Y^2}{C W_X^2} w_{X3}^* + R_0 + r_0 &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Исключив из системы (2.3.14) параметр  $R_0$  и разрешив полученное уравнение относительно  $r_0$ , получим

$$r_0 = \frac{V_Y^2}{C W_X^2} w_{X3}^* \left( \frac{w_{X3}^{*2}}{2 W_X^2} - 1 \right). \quad (2.3.15)$$

Поскольку по условию задачи  $r_0 > 0$ , то из (2.3.15) следует неравенство  $w_{X3}^{*2} > 2 W_X^2$ , которое невозможно согласно (2.2.23).

Теперь рассмотрим второй случай  $p_0 = -1$ . Как и в предыдущем случае, для системы (2.3.4), (2.3.6), (2.3.7) будем исследовать следующие варианты

удовлетворения условия дополняющей нежесткости (2.3.4): А)  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_3 < 0$  и В)  $\mu_1 < 0$ ,  $\mu_3 < 0$ .

В случае А), из (2.3.2) следует, что оптимальные управления  $w_{X1}^*$  и  $w_{X3}^*$  определяются по формулам (2.3.8) и при них система (2.3.4), (2.3.6), (2.3.7) запишется в виде:

$$-\frac{W_X}{\sqrt{1+C^2}} \frac{T^2}{2} + R_0 \geq 0, \quad (2.3.16)$$

$$-W_X \sqrt{1+C^2} \frac{T^2}{2} + V_Y T + R_0 + r_0 = 0, \quad (2.3.17)$$

$$\mu_3 (V_Y - W_X T \sqrt{1+C^2}) = 1. \quad (2.3.18)$$

Для заданных параметров  $C, W_X, V_Y, r_0$  выясним при каких значениях  $R_0 > 0$  система (2.3.16)-(2.3.18) разрешима относительно  $T > 0$ . В случае существования более одного положительного корня  $T$ , оптимальным будет наименьший из них –  $T = T_1^{\min}(R_0)$ .

Сначала рассмотрим уравнение (2.3.17). Оно имеет один положительный корень

$$T_1^{\min}(R_0) = \frac{V_Y + \sqrt{(V_Y)^2 + 2W_X(R_0 + r_0)\sqrt{1+C^2}}}{W_X \sqrt{1+C^2}}, \quad (2.3.19)$$

который должен удовлетворять равенству (2.3.18) при некотором  $\mu_3 < 0$  и, следовательно, следующему ограничению

$$T_1^{\min}(R_0) = -\frac{1 - \mu_3 V_Y}{\mu_3 W_X \sqrt{1+C^2}} > \frac{V_Y}{W_X \sqrt{1+C^2}}, \quad (2.3.20)$$

вытекающему из (2.3.18), а также неравенству (2.3.16), т.е. ограничению

$$T_1^{\min}(R_0) \leq \sqrt{\frac{2R_0\sqrt{1+C^2}}{W_X}}. \quad (2.3.21)$$

Из (2.3.20), (2.3.21) следует, что для существования решения  $T_1^{\min}(R_0)$  системы (2.3.16)–(2.3.18), необходимо и достаточно, чтобы относительно  $R_0 > 0$  было разрешимо неравенство

$$\frac{V_Y}{W_X\sqrt{1+C^2}} < \sqrt{\frac{2R_0\sqrt{1+C^2}}{W_X}}. \quad (2.3.22)$$

Разрешая неравенство (2.3.22), найдем

$$R_0 > R_0^* = \frac{V_Y^2}{2W_X(1+C^2)\sqrt{1+C^2}}. \quad (2.3.23)$$

При условии (2.3.23) и с учетом (2.3.19), рассмотрим неравенство (2.3.21), которое можно преобразовать к виду

$$\sqrt{V_Y^4 + 2W_X V_Y^2 (R_0 + r_0)\sqrt{1+C^2}} \leq W_X (R_0 C^2 - r_0)\sqrt{1+C^2} - V_Y^2.$$

Это неравенство имеет положительную правую часть при значениях

$$R_0 > R_0^{**} = \frac{W_X r_0 \sqrt{1+C^2} + V_Y^2}{W_X C^2 \sqrt{1+C^2}} \quad (2.3.24)$$

и после несложных преобразований приводится к виду

$$R_0^2 W_X (1+2C^2)^2 - 2R_0 [W_X (1+2C^2)r_0 + 4V_Y^2 \sqrt{1+C^2}] + W_X r_0^2 \geq 0. \quad (2.3.25)$$

Решение квадратного неравенства (2.3.25) относительно параметра  $R_0$  следующее:

$$R_0 \in (-\infty, R_0^-] \cup [R_0^+, \infty), \quad R_0^-, R_0^+ > 0,$$

где  $R_0^-$ ,  $R_0^+$  определяются через известные параметры  $W_X, V_Y, r_0, C$ :

$$R_0^\pm = \frac{W_X C^2 r_0 + V_Y^2 \sqrt{1+C^2} \pm \sqrt{2W_X r_0 V_Y^2 C^2 \sqrt{1+C^2} + V_Y^4 (1+C^2)}}{W_X C^4}. \quad (2.3.26)$$

Отметим, что для любого  $r_0 \geq 0$  между  $R_0^*$  (2.3.23),  $R_0^{**}$  (2.3.23),  $R_0^-$ ,  $R_0^+$  (2.3.26) имеют место следующие соотношения:

$$R_0^- < R_0^{**} < R_0^+, \quad R_0^* < R_0^{**}. \quad (2.3.27)$$

Из (2.3.27) следует, что при  $R_0 \in [R_0^+, \infty)$  оптимальные управления и время определяются формулами (2.3.8) и (2.3.19), а соответствующий параметр

$$\mu_3 = \frac{1}{V_Y - W_X T \sqrt{1+C^2}} \text{ из (2.3.18) при } T = T_1^{\min}(R_0), \text{ в силу (2.3.20), -}$$

отрицательный.

В)  $\mu_1 < 0$ ,  $\mu_3 < 0$ . Тогда из (2.3.2) следует, что оптимальные управления  $w_{X1}^*$  и  $w_{X3}^*$  определяются по соответствующим формулам (2.3.11). Далее, из (2.3.4) получим  $x_1(T) = 0$ , а из (2.3.3) при  $t = T$  - следующие выражения для

$w_{X1}^*$ ,  $w_{X3}^*$ :

$$w_{X1}^* = -\frac{2R_0}{T^2}, \quad w_{X3}^* = \frac{2x_3(T)}{T^2}, \quad (2.3.28)$$

где  $x_3(T)$  определяется из (2.3.6) следующим образом:

$$x_3(T) = \frac{r_0 + V_Y T}{C}. \quad (2.3.29)$$

Используя (2.3.28) и (2.3.29), из условия  $|w_X^*| = W_X$  (2.2.23) для заданных параметров  $C, W_X, V_Y, r_0 > 0$  получим следующее алгебраическое уравнение четвертого порядка относительно искомого  $T$ :

$$-T^4 + \frac{4V_Y^2}{C^2W_X^2}T^2 + \frac{8r_0V_Y}{C^2W_X^2}T + \frac{4(C^2R_0^2 + r_0^2)}{C^2W_X^2} = 0, \quad r_0 < R_0 < \infty. \quad (2.3.30)$$

наименьший положительный корень которого обозначим через  $T_2^{\min}(R_0)$ .

Далее, из (2.3.2), (2.3.28) и (2.3.29) при  $T = T_2^{\min}(R_0)$  получим следующие соотношения для определения множителей  $\mu_1$  и  $\mu_3$ :

$$\frac{w_{X1}^*}{w_{X3}^*} = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_3 C}, \quad \frac{w_{X1}^*}{w_{X3}^*} = -\frac{CR_0}{r_0 + V_Y T_2^{\min}(R_0)}, \quad (2.3.31)$$

откуда следует, что

$$\left[ r_0 + V_Y T_2^{\min}(R_0) \right] (\mu_1 - \mu_3) + C^2 R_0 \mu_3 = 0. \quad (2.3.32)$$

Условие трансверсальности (2.3.7) при управлениях (2.3.2) и  $T = T_2^{\min}(R_0)$  примет вид

$$W_X T_2^{\min}(R_0) \sqrt{(-\mu_1 + \mu_3)^2 + C^2 \mu_3^2} = 1 - \mu_3 V_Y. \quad (2.3.33)$$

Разрешая систему (2.3.32), (2.3.33) относительно параметров  $\mu_1$  и  $\mu_3$ , получим

$$\mu_1 = A_\mu \mu_3, \quad \mu_3 = -\frac{V_Y}{B} - \sqrt{\left(\frac{V_Y}{B}\right)^2 + \frac{1}{B}}, \quad (2.3.34)$$

$$B = \left[ W_X T_2^{\min}(R_0) \right]^2 \left[ (A_\mu - 1)^2 + C^2 \right] - V_Y^2,$$

$$A_\mu = \frac{r_0 + V_Y T_2^{\min}(R_0) - C^2 R_0}{r_0 + V_Y T_2^{\min}(R_0)}.$$

Численно–аналитическое исследование знаков множителей  $\mu_1$ ,  $\mu_3$  (2.3.34) по отношению параметра  $R_0$  показывает, что если  $R_0 \in (r_0, R_0^+)$ , то  $\mu_1 < 0$ ,

$\mu_3 < 0$ , если  $R_0 = R_0^+$ , то  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_3 < 0$ , если  $R_0 \in (R_0^+, \infty)$ , то  $\mu_1 > 0$ ,  $\mu_3 < 0$ . Следовательно, при значениях  $R_0 \in [R_0^+, \infty)$  приходим к противоречию по отношению знака множителя  $\mu_1$ .

Таким образом, для заданных параметров  $C, W_X, V_Y, r_0 > 0$ , случай В) реализуем только при  $R_0 \in (r_0, R_0^+)$ : сначала находится наименьший положительный корень  $T = T_2^{\min}(R_0)$  уравнения (2.3.30), затем из (2.3.32), (2.3.33) определяются множители  $\mu_1(T_2^{\min}(R_0)) < 0$ ,  $\mu_3(T_2^{\min}(R_0)) < 0$  по формулам (2.3.34) и в конце вычисляются оптимальные управляющие ускорения  $w_{X1}^*$  и  $w_{X3}^*$  (2.3.2).

Подытожив результаты, полученных в случаях А) и В), получаем, что оптимальное (минимальное) гарантированное время обнаружения искомого объекта и соответствующие оптимальные гарантирующие управления  $w_{X1}^*$ ,  $w_{X3}^*$ , соответственно, определяются следующим образом:

$$T^*(R_0) = \begin{cases} T_2^{\min}(R_0), & \text{если } r_0 < R_0 < R_0^+, \\ T_1^{\min}(R_0), & \text{если } R_0^+ \leq R_0 < \infty, \end{cases} \quad (2.3.35)$$

$$w_{X1}^*(R_0) = \begin{cases} \frac{(-\mu_1 + \mu_3)W_X}{\sqrt{(-\mu_1 + \mu_3)^2 + C^2\mu_3^2}}, & \text{если } R_0 \in (r_0, R_0^+), \\ -\frac{W_X}{\sqrt{1 + C^2}}, & \text{если } R_0 \in [R_0^+, \infty), \end{cases} \quad (2.3.36)$$

$$w_{X3}^*(R_0) = \begin{cases} \frac{-C\mu_3 W_X}{\sqrt{(-\mu_1 + \mu_3)^2 + C^2 \mu_3^2}}, & \text{если } R_0 \in (r_0, R_0^+), \\ -\frac{C W_X}{\sqrt{1 + C^2}}, & \text{если } R_0 \in [R_0^+, \infty). \end{cases} \quad (2.3.37)$$

В (2.3.35)–(2.3.37)  $R_0^+$  и  $T_1^{\min}(R_0)$ ,  $R_0 \in [R_0^+, \infty)$  вычисляются формулами (2.3.26) и (2.3.19) соответственно,  $T_2^{\min}(R_0)$ ,  $R_0 \in (r_0, R_0^+)$  определяется как наименьший положительный корень уравнения (2.3.30), а постоянные множители  $\mu_1(T_2^{\min}(R_0)) < 0$ ,  $\mu_3(T_2^{\min}(R_0)) < 0$ ,  $R_0 \in (r_0, R_0^+)$  находятся в результате решения системы (2.3.32), (2.3.33).

#### **§2.4. Результаты численного расчета оптимальных управлений и гарантированного времени**

Для системы (2.1.4)–(2.1.6), (2.2.1) со следующими параметрами:

$$W_X = 20 \text{мсек}^{-2}, \quad V_Y = 50 \text{мсек}^{-1}, \quad r_0 = 50 \text{м}, \quad C = 1 \quad (2.4.1)$$

расчёт оптимального гарантированного времени поиска (2.3.35) и соответствующих управлений (2.3.36), (2.3.37) по изложенному в предыдущем пункте алгоритму производится по следующей последовательности:

- 1) вычисляется значение  $R_0^+ = 447.937 \text{м}$  по формуле (2.3.26),
- 2) строится зависимость оптимального гарантированного времени  $T^*(R_0)$ ,  $R_0 \in (r_0, \infty)$  согласно (2.3.35) (рис. 2.3),

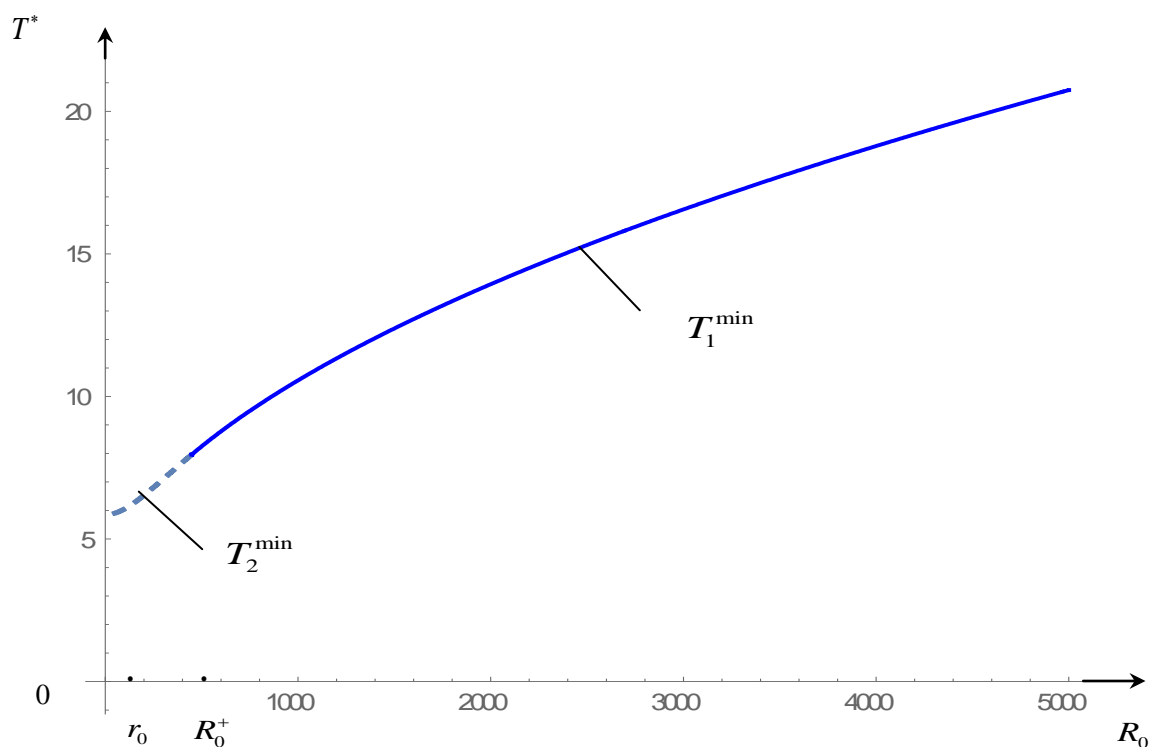


Рис. 2.3

3) определяются зависимости множителей  $\mu_1(T_2^{\min}(R_0))$  (рис. 2.4) и  $\mu_3(T_2^{\min}(R_0))$  (рис. 2.5) от параметра  $R_0 \in (r_0, R_0^+)$ , путем использования формул (2.3.34),

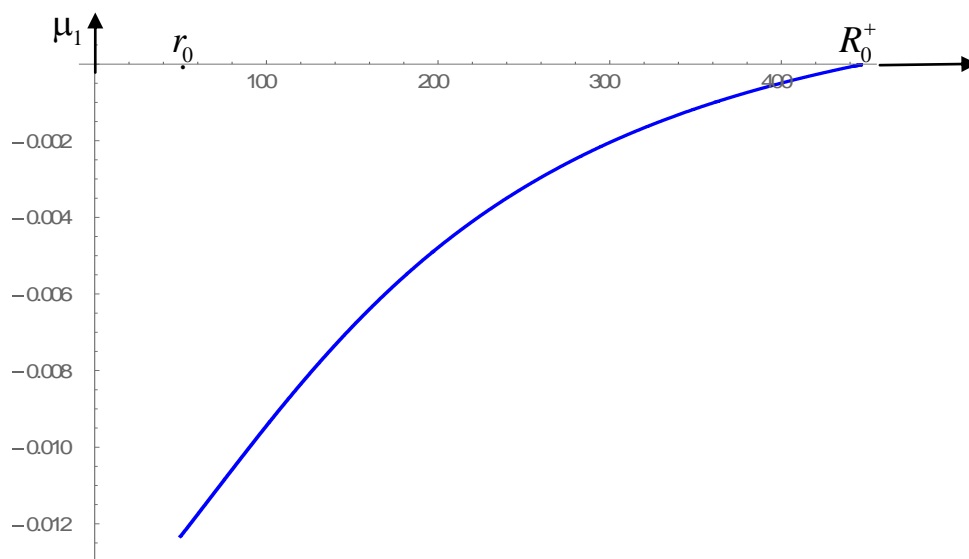


Рис. 2.4



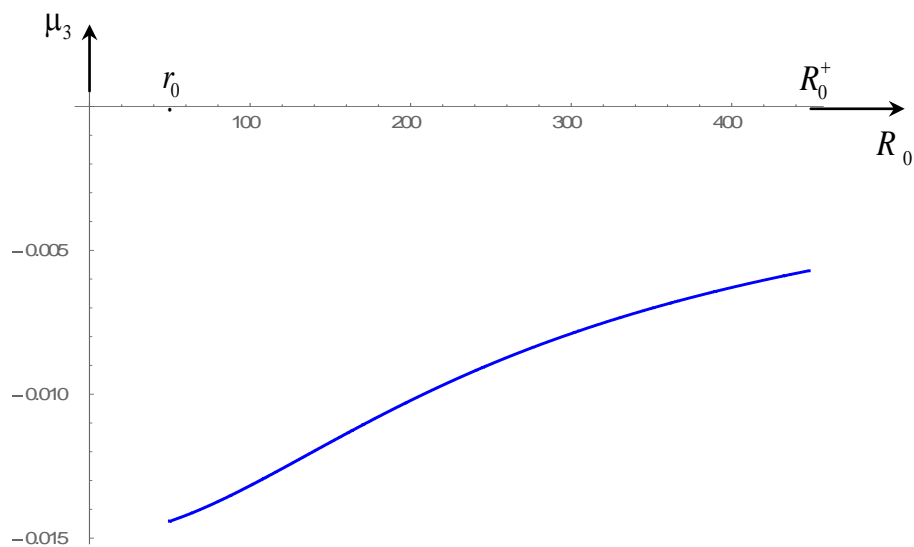


Рис. 2.5

4) по формулам (2.3.36) и (2.3.37) вычисляются оптимальные гарантирующие управления  $w_{x1}^*(R_0)$  (рис. 2.6) и  $w_{x3}^*(R_0)$  (рис. 2.7)

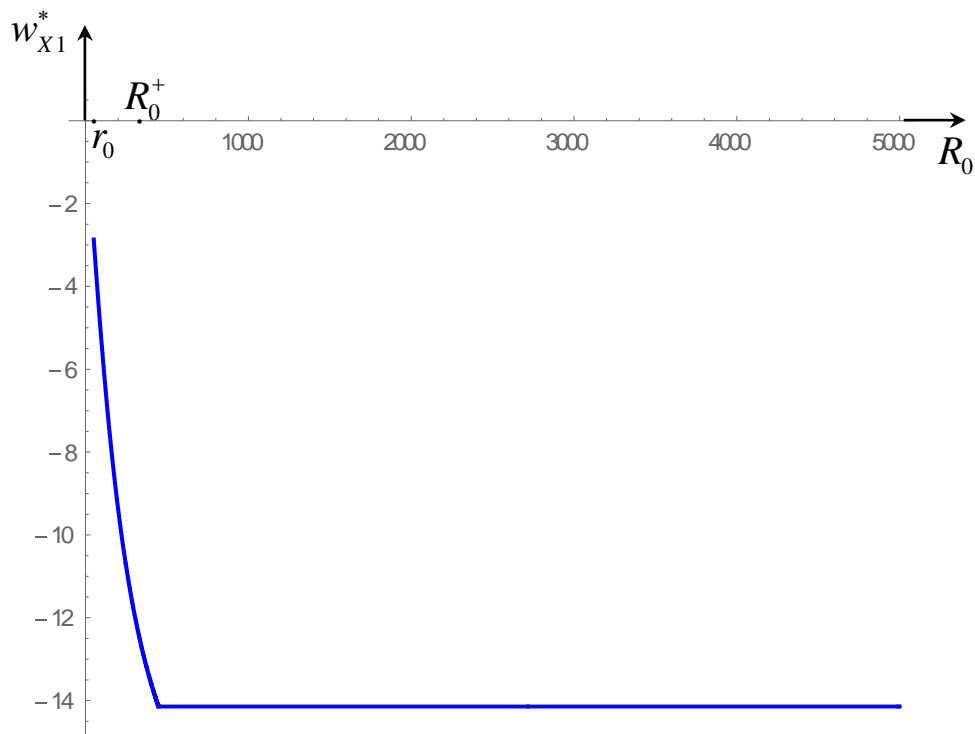


Рис. 2.6

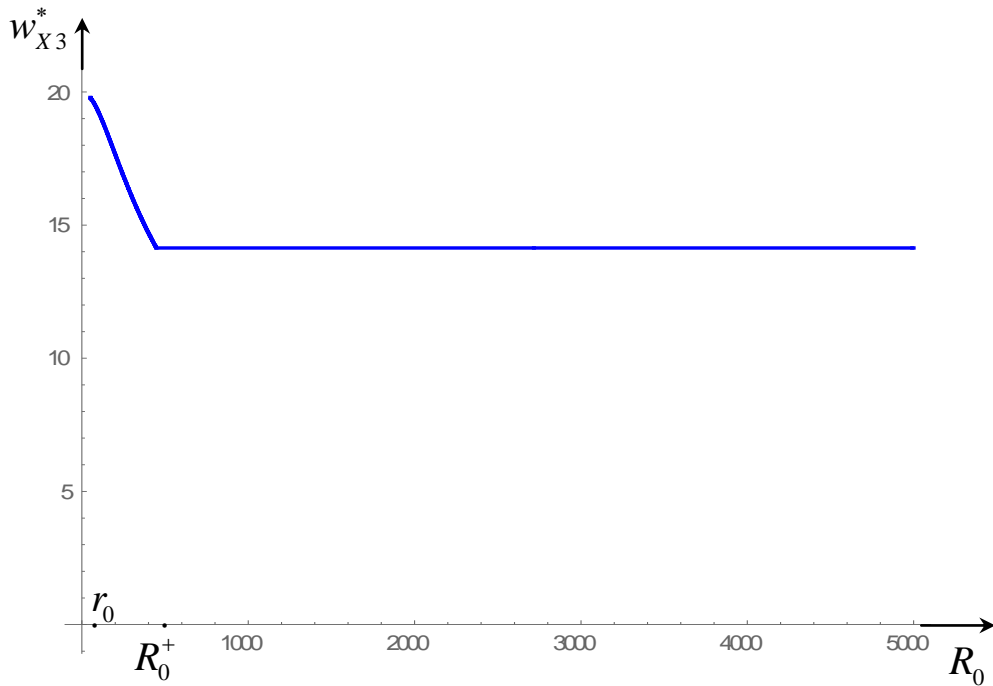


Рис. 2.7

Таким образом, установлено существования такого контрольного расстояния  $R_0^+$ , вычисляемое по формуле (2.3.26), что для любого начального расстояния  $R_0$  не меньше контрольного, наискорейший гарантированный поиск искомого объекта реализуется при одном и том же постоянном управляющем ускорении и, при этом, в наименьший гарантированный момент обнаружения, круг неопределенности искомого объекта содержится в круге обнаружения, имея с последним внутреннее касание. Для начальных расстояний  $R_0$  меньше контрольного, в момент оптимального гарантированного обнаружения искомого объекта круги неопределенности и обнаружения совмещаются. При этом, к достижению ситуации совмещения, чем величина начального расстояния близка к величине радиуса начального круга неопределенности, тем круг обнаружения расширяется с большим ускорением, а прямолинейное движение центра круга обнаружения происходит с меньшим абсолютным ускорением.

### ГЛАВА 3

## КОМБИНИРОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГАРАНТИРОВАННЫМ ПОИСКОМ ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

В настоящей главе для динамической модели поисковой системы, рассмотренной в предыдущей главе, исследуется задача построения управления ищущего объекта, гарантирующего обнаружение искомого объекта за конечное время при дополнительных геометрических ограничениях, запрещающих ищущему объекту сталкиваться с известным неподвижным препятствием, например, с землей и подниматься выше заданной допустимой высоты, если речь идет о летательных аппаратах. Во второй главе, при решении задачи оптимального по минимальному гарантированному времени поиска без учета ограничения на вертикальную координату ищущего объекта, был разработан минимаксный подход, позволяющий свести задачу оптимального гарантированного поиска – осуществления быстрее всего поглощения расширяющейся с максимальной скоростью области неопределённости искомого объекта – к задаче оптимального по быстрдействию управления с подвижным правым концом, которая решалась методом принципа максимума Понтрягина в классе постоянных во времени управляющих ускорений. Однако, при наличии ограничения на высоту в задаче гарантированного, в том числе, оптимального гарантированного поиска, реализация указанного в § 2. 1 подхода в ряде случаев, в зависимости от начальных параметров поисковой системы, представляется невозможным, так как ограничивается возможность расширения круга обнаружения, необходимого для осуществления поглощения расширяющейся во времени области неопределённости искомого объекта. По этой причине для рассматриваемой задачи в настоящей главе предлагается иной подход, основанный на разработке алгоритма комбинированного управления движением ищущего объекта, позволяющего осуществить

многоэтапный поиск искомого объекта по пространственной траектории, состоящей из прямолинейных участков и участков, представляющих собой окружности с монотонно убывающими радиусами.

### § 3. 1. Постановка задачи

Рассмотрим поисковую систему (2.1.1), (2.1.2) с дополнительным ограничением на вертикальную координату ищущего объекта  $X$ :  
 $0 \leq x_3(t) \leq h$ .

Введя обозначения

$$w_{x_i, y_j} = f_{x_i, y_j} / m_{X, Y}, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, \quad W_{X, Y} = F_{X, Y} / m_{X, Y},$$

запишем эту систему в координатной форме:

$$\begin{aligned} X: \quad & \ddot{x}_1 = w_{x_1}, \quad \ddot{x}_2 = w_{x_2}, \quad \ddot{x}_3 = w_{x_3} - g, \\ & x_1(0) = R_0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0, \\ & \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0, \quad \dot{x}_3(0) = 0, \\ & 0 \leq x_3(t) \leq h, \quad |w_X(t)| \leq W_X, \quad w_X = (w_{x_1}, w_{x_2}, w_{x_3})^T, \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

$$\begin{aligned} Y: \quad & \ddot{y}_i = w_{y_i}, \quad i = 1, 2, \\ & y_i(0) = y_i^0, \quad \dot{y}_i(0) = \dot{y}_i^0, \quad i = 1, 2, \\ & |\dot{y}(t)| \leq V_Y, \quad |w_Y(t)| \leq W_Y, \quad t \geq 0, \\ & \dot{y} = (\dot{y}_1, \dot{y}_2)^T, \quad w_Y = (w_{y_1}, w_{y_2})^T. \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

где  $x_i, y_i$  – геометрические координаты объектов  $X, Y$ ;  $w_{x_i}, w_{y_i}$  – координаты управляющих ускорений объектов, которые являются кусочно-непрерывными вектор функциями от  $t$ ;  $W_X, W_Y$  – максимально возможные значения управляющих ускорений  $w_X, w_Y$  соответственно;  $V_Y$  – максимально возможная скорость объекта  $Y$ ;  $h$  – максимально допустимое значение координаты  $x_3$  объекта  $X$  в процессе движения;  $g$  – ускорение свободного

падения;  $R_0$  – заданное положительное число. Символами  $( )^T$  и  $|\cdot|$  обозначены, соответственно, операция транспонирования и евклидова норма вектора.

Как и в § 2. 1, положим, что в процессе управляемого движения объекту  $X$  о фазовых координатах искомого объекта  $Y$  известно лишь то, что в начальный момент объект  $Y$  находится в заданном множестве неопределенности (2.1.6). Будем считать, также, что искомым объектом обнаруживается в первый момент  $t = t^*$ , когда выполняется условие обнаружения (1.1.6) - условие попадания  $Y$  в область  $G(x(t))$ , которая представляет собой подвижную и изменяющуюся во времени круговое основание конуса (1.1.4), с центром в начальный момент времени в точке  $x_c(0) = (R_0, 0)$  на оси  $Ox_1$ .

Изменение круга обнаружения (1.1.4), при пространственном движении ищущего объекта  $X$ , подробно описано в § 2. 1 и, в соответствии с начальными условиями (3.1.1), в начальный момент времени представляет собой точку -  $G_0 = (R_0, 0)$  - на оси  $Ox_1$ , которая, в предположении, что  $R_0 > r_0$ , находится вне области возможных начальных положений - круга неопределенности - искомого объекта  $Y$ : (1.1.5)(рис. 2.1).

**З а д а ч а 3.1.** Для заданного начального состояния  $(x(0), \dot{x}(0))$  (3.1.1) и начального круга неопределенности  $D_0$  (2.2.1), найти число  $T > 0$  и допустимое управление  $w_X(t)$  объекта  $X$  на интервале  $[t_0, T]$ , для которых при любом начальном состоянии  $(y^0, \dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0$  (2.1.6) объекта  $Y$  и любом допустимом управлении  $w_Y(t)$  на интервале  $[t_0, T]$  гарантируется условие обнаружения (1.1.6) в некоторый момент времени  $t^*$  – не позднее времени  $T$ :  $t^* \leq T$ .

Число  $T > 0$  и допустимое управление  $w_X(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  объекта  $X$ , согласно §2.1, называются гарантированным временем поиска и

гарантирующим управлением соответственно.

Для системы (3.1.1), (3.1.2) при решении задачи оптимального по минимальному гарантированному времени поиска без учета ограничения сверху на координату  $x_3$ , в предыдущей главе было введено в рассмотрение область неопределенности искомого объекта в момент  $T$ :  $D(T)$ , представляющая на плоскости  $(y_1, y_2)$  совокупность концов  $y(T) = (y_1(T), y_2(T))$  всех траекторий искомого объекта (3.1.2) при всевозможных начальных условиях  $(y^0, \dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0$  и построенных с помощью всевозможных кусочно–непрерывных допустимых управляющих ускорениях  $w_Y(t) = (w_{Y1}(t), w_{Y2}(t))$ ,  $|w_Y(t)| \leq W_Y$ ,  $0 \leq t \leq T$ , при соблюдении ограничения на скорость  $|\dot{y}(t)| \leq V_Y$ ,  $0 \leq t \leq T$ .

С учетом вышесказанного в главе 2 был предложен подход, состоящий в построении такого допустимого управления движением  $X$ , при котором круг обнаружения ищущего объекта за минимальное гарантированное время  $T$  поглощает расширяющийся во времени область неопределённости искомого объекта (2.1.8), что обеспечивало выполнение условия (1.1.6) в некоторый момент времени  $t^* \leq T$ . Далее, на основе минимаксного подхода было установлено, что для гарантированного обнаружения достаточно рассматривать случай, когда искомый объект в начальный момент находится на границе множества неопределенности (2.2.2) - имеет начальную вектор–скорость (2.2.3), направления по радиусу круга  $D_0$  в сторону от центра и движется с нулевым ускорением (2.2.4), т.е. радиус круга неопределенности  $D(t)$  возрастает по линейному закону (2.2.11). Тем самым задача оптимального гарантированного поиска, трактованная как задача оптимального по быстродействию поглощения расширяющегося во времени с максимальной скоростью круга неопределенности кругом обнаружения, была сведена к задаче оптимального по быстродействию управления с подвижным правым

концом [28], которая решалась методом принципа максимума Понтрягина [51] в классе постоянных во времени управляющих ускорениях. Однако, при наличии ограничения (3.1.1) на вертикальную координату  $x_3$  сверху в задаче гарантированного, в том числе, оптимального гарантированного поиска, реализация разработанного в главе 2 подхода – осуществления условия поглощения (2.1.8) с помощью постоянного управления ищущего объекта – в ряде случаев, в зависимости от значений начальных параметров поисковой системы, представляется невозможным, так как ограничивается возможность расширения круга обнаружения, необходимого для осуществления поглощения расширяющейся с максимальной скоростью области неопределённости искомого объекта (2.2.11). Вследствие этого, для решения задачи 3.1 при условиях (2.2.3), (2.2.4), (2.2.11), в настоящей главе предлагается иной подход, состоящий в построении комбинированного управления ищущего объекта, позволяющего осуществить многоэтапный поиск искомого объекта.

### §3. 2. Этап быстрого достижения максимальной высоты

На этом этапе ищущий объект осуществляет вертикальное движение с целью быстрого достижения максимальной высоты с конечной нулевой скоростью. Такое движение реализуется при решении следующей задачи оптимального быстрогодействия.

**З а д а ч а 3. 2.** Найти управляющие ускорения  $w_{xi}^*(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ ,  $i = 1, 2, 3$  (3.1.1), обеспечивающие перемещение объекта  $X$  (3.1.1) из заданного начального состояния покоя (3.1.1) в заданное терминальное состояние покоя

$$\begin{aligned} x_1(t_1) = R_0, \quad x_2(t_1) = 0, \quad x_3(t_1) = h, \\ \dot{x}_1(t_1) = 0, \quad \dot{x}_2(t_1) = 0, \quad \dot{x}_3(t_1) = 0 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

за минимальное время  $t_1$ .

Эта задача является двухточечной задачей оптимального быстрогодействия. Согласно принципу максимума Понтрягина [51] оптимальным управлением, обеспечивающим наискорейший переход из одной точки в другую в фазовом пространстве, является вектор-функция  $w_X^* = (w_{X1}^*(t), w_{X2}^*(t), w_{X3}^*(t))$  со следующими компонентами:

$$w_{X1}^* = w_{X2}^* = 0, \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad w_{X3}^* = \begin{cases} W_X, & 0 \leq t < \tau_1, \\ -W_X, & \tau_1 \leq t \leq t_1. \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Проинтегрируем последнее уравнение (3.1.1) на интервале  $0 \leq t < \tau_1$  при управлении  $w_{X3}^* = W_X$  (3.2.2) с начальными условиями (3.1.1):

$$x_3(t) = (W_X - g)t^2 / 2, \quad \dot{x}_3(t) = (W_X - g)t, \quad 0 \leq t < \tau_1. \quad (3.2.3)$$

Затем, произведя интегрирование этого же уравнения на интервале  $\tau_1 \leq t \leq t_1$  при управлении  $w_{X3}^* = -W_X$  с конечным условием (3.2.1), получим

$$x_3(t) = (-W_X - g)\frac{t^2}{2} + (W_X + g)t_1 t + H - (W_X + g)\frac{t_1^2}{2}, \quad (3.2.4)$$

$$\dot{x}_3(t) = (W_X + g)(t_1 - t).$$

В силу непрерывности фазовой траектории третьего уравнения (3.1.1) при  $t = \tau_1$ , имеем следующее равенство:

$$(W_X - g)\frac{\tau_1^2}{2} = -(W_X + g)\left(\frac{\tau_1^2}{2} + \frac{t_1^2}{2}\right) + (W_X + g)t_1\tau_1 + h, \quad (3.2.5)$$

$$(W_X - g)\tau_1 = (W_X + g)(t_1 - \tau_1).$$

Разрешая систему (3.2.5) относительно неизвестных параметров  $\tau_1, t_1$ , найдем

$$t_1 = \frac{2W_X}{W_X + g}\tau_1, \quad \tau_1 = \sqrt{\frac{h(W_X + g)}{W_X(W_X - g)}}, \quad (3.2.6)$$



т.е.

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{hW_x}{(W_x + g)(W_x - g)}}. \quad (3.2.7)$$

Таким образом, управление (3.2.2), (3.2.6), (3.2.7) обеспечивает достижение ищущего объекта на максимальную высоту  $x_3 = h$  с конечной нулевой скоростью за минимальное время (3.2.7). При этом в момент  $t = t_1$  радиус круга обнаружения достигает максимального значения:  $l(t_1) = Cx_3(t_1) = Ch$ , а круг обнаружения на плоскости  $Ox_1x_2$  принимает следующую форму:

$$G(t_1) = \{(x_1, x_2) : (x_1 - R_0)^2 + x_2^2 = l^2(t_1), l(t_1) = Cx_3(t_1) = Ch\}. \quad (3.2.8)$$

Так как искомый объект за промежуток времени  $0 \leq t \leq t_1$  может оказаться на максимальном расстоянии от центра начального круга неопределенности, если в начальный момент времени находится на границе области неопределенности  $D_0$  (2.1.6) и имеет начальную скорость (2.2.3), что обеспечивает расширение круга неопределенности с наибольшей скоростью  $V_Y$  (2.2.11), то в момент  $t = t_1$  он может находиться в любой точке окружности

$$D(t_1) = \{(y_1, y_2) : y_1^2 + y_2^2 = r_1^2\}, \quad r_1 = r(t_1) = r_0 + V_Y t_1. \quad (3.2.9)$$

### **§3.3. Этап быстрой стыковки кругов обнаружения и неопределенности**

На следующем этапе, находясь в момент  $t = t_1$  на допустимо максимальной высоте с нулевой скоростью - в состоянии (3.2.1), объект  $X$  на промежутке времени  $t_1 \leq t \leq t_2$  осуществляет прямолинейное горизонтальное движение по оси  $Ox_1$  в направлении к центру круга неопределенности до первого момента

$t = t_2$  соприкосновения круга обнаружения  $G(t_2)$ , при его нулевой скорости, с кругом неопределенности  $D(t_2)$ .

Так как на промежутке времени  $t_1 \leq t \leq t_2$  искомый объект продолжает движение с максимальной по модулю вектор скоростью (2.2.3), (2.2.4), то в момент  $t = t_2$  он может оказаться в любой точке границы круга неопределенности

$$D(t_2) = \{(y_1, y_2) : y_1^2 + y_2^2 = r_2^2\}, \quad (3.3.1)$$

где радиус  $r_2$  с учетом (2.2.11), (3.2.9) вычисляется следующим образом:

$$r_2 = r(t_2) = r_1 + V_Y(t_2 - t_1) = r_0 + V_Y t_2. \quad (3.3.2)$$

Отсюда следует, что требуемое выше движение ищущего объекта можно реализовать с помощью вектора управления  $w_X^* = (w_{X1}^*(t), w_{X2}^*(t), w_{X3}^*(t))$ , в котором второй и третий компоненты задаются в виде

$$w_{X2}^*(t) = 0, w_{X3}^*(t) = g, \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad (3.3.3)$$

а первый компонент определяется из решения следующей задачи оптимального по быстрдействию управления.

**З а д а ч а 3.3.** Найти оптимальное управление  $w_{X1}^*(t)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$ , которое при заданных постоянных управлениях (3.3.3) удовлетворяет (с учетом (3.1.1)) ограничению

$$|w_{X1}^*(t)| \leq \sqrt{W_X^2 - g^2}, \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad (3.3.4)$$

и обеспечивает перемещение объекта  $X$  из состояния покоя (3.2.1) в конечное состояние покоя

$$\begin{aligned} x_1(t_2) &= r_0 + V_Y t_2 + Ch, & x_2(t_2) &= 0, & x_3(t_2) &= h, \\ \dot{x}_1(t_2) &= 0, & \dot{x}_2(t_2) &= 0, & \dot{x}_3(t_2) &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

за минимальное время  $t_2 - t_1$ .

Отметим, что первые два граничные условия в (3.3.5), которые с учетом (3.3.1), (3.3.2) можно записать также в виде  $x_1(t_2) = r_2 + Ch = y_1(t_2) + Ch$ ,  $x_2(t_2) = y_2(t_2) = 0$ , выражают ситуацию соприкосновения снаружи окружностей  $G$  и  $D$  в момент  $t_2$ , так как определяемая этими условиями точка на плоскости  $(x_1, x_2)((y_1, y_2))$  в момент  $t = t_2$  является одновременно левой и правой точкой пересечения с осью  $Ox_1$  окружностей  $G(t_2)$  и  $D(t_2)$  соответственно.

Поскольку при заданных управлениях (3.3.3) движение системы (3.1.1) (с краевыми условиями (3.2.1) и (3.3.5)) по координатам  $x_2, x_3$  не происходит, то задача 3.2 является одномерной, относительно координаты  $x_1$ , задачей оптимального по быстродействию управления с правым подвижным концом:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= w_{x1}, \\ x_1(t_1) &= R_0, & \dot{x}_1(t_1) &= 0, \\ x_1(t_2) &= r_0 + V_Y t_2 + Ch, & \dot{x}_1(t_2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Решив (3.3.6), как двухточечную задачу оптимального быстродействия [51], получим аналитические выражения для оптимального управления  $w_{x1}^*$  и соответствующего минимального времени  $t_2 - t_1$  перемещения:

$$w_{x1}^* = \begin{cases} \sqrt{W_X^2 - g^2}, & t_1 \leq t < \tau_2, \\ -\sqrt{W_X^2 - g^2}, & \tau_2 \leq t \leq t_2, \end{cases} \quad (3.3.7)$$

$$t_2 - t_1 = 2\tau_2, \quad \tau_2 = \sqrt{\frac{x_1(t_2) - x_1(t_1)}{-\sqrt{W_X^2 - g^2}}}.$$

Учитывая краевые условия (3.3.6) и представление (3.3.2), запишем разность  $t_2 - t_1$  из (3.3.7) в виде

$$t_2 - t_1 = 2 \sqrt{\frac{R_0 - Ch - r_1 - V_Y(t_2 - t_1)}{\sqrt{W_X^2 - g^2}}}.$$

Это соотношение равносильно квадратному уравнению относительно  $(t_2 - t_1)$ :

$$(t_2 - t_1)^2 + 4 \frac{V_Y}{\sqrt{W_X^2 - g^2}} (t_2 - t_1) - 4 \frac{R_0 - Ch - r_1}{\sqrt{W_X^2 - g^2}} = 0,$$

имеющее один положительный корень

$$t_2 = t_1 + 2 \left[ -\frac{V_Y}{\sqrt{W_X^2 - g^2}} + \sqrt{\frac{V_Y^2}{W_X^2 - g^2} + \frac{R_0 - Ch - r_1}{\sqrt{W_X^2 - g^2}}} \right]$$

и который, после подстановки вместо  $r_1$  выражение (3.2.9), можно записать также в виде

$$t_2 = t_1 + 2 \left[ -\frac{V_Y}{\sqrt{W_X^2 - g^2}} + \sqrt{\frac{V_Y^2}{W_X^2 - g^2} + \frac{R_0 - Ch - r_0 - V_Y t_1}{\sqrt{W_X^2 - g^2}}} \right]. \quad (3.3.8)$$

Таким образом, в момент  $t = t_2$  (3.3.8) в состоянии (3.3.5) объекта  $X$ , окружность круга обнаружения

$$G(t_2) = \left\{ (x_1, x_2) : [x_1 - x_1(t_2)]^2 + x_2^2 = l^2(t_2), \quad l(t_2) = Cx_3(t_2) = Ch \right\} \quad (3.3.9)$$

имеет касание снаружи с окружностью круга неопределенности (3.3.1), (3.3.2).

### §3. 4. Вспомогательная задача

Начиная с момента  $t = t_2$  (3.3.8), когда ищущий объект находится в состоянии покоя (3.3.5), а окружности кругов обнаружения (3.3.9) и неопределенности (3.3.1) соприкасаются, ищущий объект поиск осуществляет с

постоянным радиусом круга обнаружения  $l = Cx_3(t) \equiv Ch$ ,  $t \geq t_2$ , двигаясь по горизонтальной плоскости  $x_3 = h$ .

Учитывая уравнения движения (3.1.1) и условия (3.3.5) на координату  $x_3$  и скорость  $\dot{x}_3$  в момент времени  $t = t_2$ , такое движение  $X$  осуществляет при

$$w_{x_3}^*(t) \equiv g, \quad t \geq t_2. \quad (3.4.1)$$

Из сказанного следует, что к рассмотрению подлежит только плоское движение объекта  $X$ , задаваемое первыми двумя уравнениями (3.1.1). Введем полярную систему координат  $(\rho, \varphi, O)$  так, чтобы полюс  $O$  находился в центре круга неопределенности, а полярная ось проходила через центр круга обнаружения, имеющий в момент  $t = t_2$  координаты (3.3.5). В первых двух уравнениях перейдем к полярным координатам  $\rho, \varphi$ , связанным с исходными декартовыми координатами  $x_1, x_2$  соотношениями

$$x_1 = \rho \cos \varphi, \quad x_2 = \rho \sin \varphi. \quad (3.4.2)$$

Уравнения плоского движения ищущего объекта (3.1.1), представленные в полярных координатах, имеют следующий вид:

$$\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 = w_\rho, \quad \frac{d}{dt}(\rho \dot{\varphi}) = w_\varphi, \quad (3.4.3)$$

где  $w_\rho$  и  $w_\varphi$ , соответственно, радиальное и тангенциальное составляющие ускорения объекта  $X$  при его плоском движении. Они связаны с первыми двумя компонентами вектора управляющего ускорения  $w_X = (w_{x_1}, w_{x_2}, w_{x_3})$  следующими соотношениями:

$$w_{x_1} = w_\rho \cos \varphi - w_\varphi \sin \varphi, \quad w_{x_2} = w_\rho \sin \varphi + w_\varphi \cos \varphi. \quad (3.4.4)$$

С учетом (3.4.1), (3.4.4), ограничение на модуль управляющего ускорения (3.1.1) запишется в виде

$$\sqrt{w_{x1}^2 + w_{x2}^2} = \sqrt{w_\rho^2 + w_\varphi^2} \leq \sqrt{W_X^2 - g^2}, \quad t \geq t_2, \quad (3.4.5)$$

а начальные условия (3.3.5) – в виде

$$\rho(t_2) = r_2 + Ch, \quad \dot{\rho}(t_2) = 0, \quad \varphi(t_2) = 0, \quad \dot{\varphi}(t_2) = 0. \quad (3.4.6)$$

Для обнаружения искомого объекта, ищущий выбрав направление обхода, совпадающим с положительным направлением отсчета полярного угла, осуществляет круговое, с радиусом  $\rho(t_2) = const$ , движение вокруг центра  $O$ .

Тогда, уравнения движения (3.4.3) примут вид

$$-\rho(t_2)\dot{\varphi}^2 = w_\rho, \quad \rho(t_2)\ddot{\varphi} = w_\varphi, \quad (3.4.7)$$

Найдем удовлетворяющие ограничению (3.4.5) законы изменения управляющих ускорений  $w_\rho(t)$  и  $w_\varphi(t)$ , при которых двигаясь по окружности с постоянным радиусом  $\rho(t_2)$  согласно уравнениям (3.4.7), центр круга обнаружения из состояния покоя (3.4.6) переходит в состояние покоя

$$\rho(t_*) = r_2 + Ch, \quad \dot{\rho}(t_*) = 0, \quad \varphi(t_*) = 0, \quad \dot{\varphi}(t_*) = 0. \quad (3.4.8)$$

за минимально возможное время  $t_* - t_2$ .

Искомые управления  $w_\rho(t)$  и  $w_\varphi(t)$  находятся по следующей схеме. Наложим ограничение на тангенциальное управляющее ускорение:

$$|w_\varphi(t)| \leq \varepsilon, \quad t \in [t_2, t_*], \quad (3.4.9)$$

где  $\varepsilon > 0$  и  $t_*$  пока неизвестные постоянная и время соответственно.

Сначала из двухточечной задачи оптимального быстрогодействия (3.4.6)-(3.4.9) определим оптимальное управляющее тангенциальное ускорение  $w_\varphi$ . Из принципа максимума следует, что искомое управление – релейное с одной точкой переключения  $t = \tau$ :

$$w_\varphi = \varepsilon \operatorname{sign} [2\pi(\tau - t)], \quad (3.4.10)$$

$$\tau = \frac{t_* + t_2}{2}, \quad t_* = t_2 + 2\sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon} \rho(t_2)}.$$

Затем, интегрируя второе уравнение (3.4.7) при управлении (3.4.10) и граничных условиях (3.4.6), (3.4.8) найдем зависимость угловой скорости от времени  $\dot{\varphi}(t)$  и подставив ее в первое уравнение (3.4.7), определим закон изменения радиального ускорения от времени

$$w_\rho(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon^2 (t - t_2)^2}{\rho(t_2)}, & t_2 \leq t \leq \tau, \\ \frac{\varepsilon^2 (-t + 2\tau - t_2)^2}{\rho(t_2)}, & \tau \leq t \leq t_*. \end{cases} \quad (3.4.11)$$

Вогнутая и непрерывная функция (3.4.11) на концах промежутка  $t_2 \leq t \leq t_*$  принимает нулевые значения:  $w_\rho(t_2) = w_\rho(t_*) = 0$ . На отрезке времени  $t_2 \leq t \leq \tau$  она монотонно возрастает, а на отрезке времени  $\tau \leq t \leq t_*$  монотонно убывает, принимая в середине отрезка  $\tau = \frac{t_* + t_2}{2}$  максимальное значение:

$$\max_{t_2 \leq t \leq t_*} w_\rho(t) = w_\rho(\tau) \Big|_{\tau = \frac{t_* + t_2}{2}} = \frac{\varepsilon^2 (t_* - t_2)^2}{4\rho(t_2)} \Big|_{t_* - t_2 = 2\sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon} \rho(t_2)}} = 2\pi\varepsilon. \quad (3.4.12)$$

Из (3.4.9) и (3.4.12) следует, что

$$w_\rho^2(t) + w_\varphi^2(t) < 4\pi^2 \varepsilon^2 + \varepsilon^2, \quad t_2 \leq t \leq t_*. \quad (3.4.13)$$

В силу (3.4.13), на промежутке  $t_2 \leq t \leq t_*$  ограничение (3.4.5) гарантированно имеет место, если удовлетворяется следующее неравенство относительно  $\varepsilon > 0$ :

$$4\pi^2 \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \leq W_X^2 - g^2. \quad (3.4.14)$$

Решение неравенство (3.4.14) относительно  $\varepsilon > 0$  следующее:

$$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \quad \varepsilon_0 = \sqrt{\frac{W_X^2 - g^2}{4\pi^2 + 1}}. \quad (3.4.15)$$

Таким образом,  $\varepsilon = \varepsilon_0(3.4.15)$  - то максимальное значение, при котором ограничение (3.4.14) не нарушается, а время  $t_*$  и управление (3.4.10) оптимальны:

$$t_* = t_2 + 2\sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon_0} \rho(t_2)}, \quad w_\varphi = \varepsilon_0 \text{sign} \left[ 2\pi \left( \frac{t_* + t_2}{2} - t \right) \right]. \quad (3.4.16)$$

Движущийся с максимальной скоростью  $V_Y$  искомый объект, находящийся в момент  $t = t_2$  в некоторой точке окружности  $D(t_2)$  (3.3.1), за время  $t_* - t_2$  пройдет расстояние  $V_Y(t_* - t_2)$  и в момент  $t = t_*$  может находиться на максимальном расстоянии от начала координат, т.е. в некоторой точке окружности  $D(t_*) = \{(y_1, y_2) : y_1^2 + y_2^2 = r_*^2\}$  с радиусом  $r_* = r_2 + V_Y(t_* - t_2)$ . Отсюда и из (3.4.16) следует, что если выполняется условие

$$r_* - r_2 = 2V_Y \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon_0} \rho(t_2)} < 2Ch, \quad (3.4.17)$$

то за оптимальное время одного полного вращения ищущего объекта вокруг центра  $O$  искомый объект не успевает перейти расстояние  $2l = 2Ch$  будучи незамечанным.



### §3. 5. Алгоритм комбинированного управления завершением поиска

Предположим, что для заданных исходных параметров задачи  $r_0, R_0, C, h, V_Y, W_X, g$ , в момент  $t = t_2$  условие (3.4.17), записанное в виде

$$\sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon_0} \rho(t_2)} < \frac{Ch}{V_Y} \quad (3.5.1)$$

- выполняется.

С момента  $t = t_2$ , оставляя тангенциальное ускорение равным нулю  $w_\varphi = 0$ , ищущий объект из состояния (3.4.6)((3.3.5)) быстрее всего двигаясь по оси  $Ox_1$  в направлении полюса  $O$  осуществляет некоторое перемещение длиной  $\Delta x_1^{(1)} > 0$  (определяемое ниже). Используя (с учетом (3.4.4)) для этого управления

$$w_{x1}^*(t) = -\sqrt{W_X^2 - g^2} \operatorname{sign} \left[ \left( \frac{t_3 + t_2}{2} - t \right) \Delta x_1^{(1)} \right], \quad (3.5.2)$$

$$w_{x2}^*(t) = 0, \quad w_{x3}^*(t) = g, \quad t_2 \leq t \leq t_3, \quad t_3 = t_2 + 2 \frac{\sqrt{\Delta x_1^{(1)}}}{\sqrt[4]{W_X^2 - g^2}}$$

объект  $X$  за минимально возможное время  $t_3 - t_2$  перейдет в состояние покоя, определяемое соотношениями

$$x_1(t_3) = \rho(t_3) = \rho(t_2) - \Delta x_1^{(1)}, \quad x_2(t_3) = 0, \quad (3.5.3)$$

$$\dot{x}_1(t_3) = 0, \quad \dot{x}_2(t_3) = 0,$$

Тем временем, за время  $t_3 - t_2$ , круг неопределенности искомого объекта со скоростью  $V_Y$  расширяется и к моменту  $t = t_3$  его радиус достигает значения

$$r(t_3) = r_3 = r_2 + V_Y(t_3 - t_2). \quad (3.5.4)$$

Потребуем, чтобы в момент  $t = t_3$  правая точка  $(r(t_3), 0)$  пересечения круга неопределенности с осью  $Ox_1$  была левее от правой точки  $(x(t_3) + Ch, 0)$  пересечения круга обнаружения с осью  $Ox_1$ :  $r(t_3) < x_1(t_3) + Ch$ , т.е. с учетом обозначений (3.5.3), (3.5.4) выполнялось условие

$$V_Y(t_3 - t_2) < 2Ch - \Delta x_1^{(1)}. \quad (3.5.5)$$

Неравенство (3.5.5) накладывает ограничение на искомую величину  $\Delta x_1^{(1)} > 0$  и после замены  $t_3 - t_2$  на соответствующее выражение из (3.5.2), оно сводится к следующему неравенству:

$$\Delta x_1^{(1)} + \frac{2V_Y}{\sqrt[4]{W_X^2 - g^2}} \sqrt{\Delta x_1^{(1)}} - 2Ch < 0, \quad (3.5.6)$$

решение которого задается в виде

$$\Delta x_1^{(1)} \in (0, a), \quad a = \left( -\frac{V_Y}{\sqrt[4]{W_X^2 - g^2}} + \sqrt{\frac{V_Y^2}{\sqrt{W_X^2 - g^2}} + 2Ch} \right)^2. \quad (3.5.7)$$

Если за время  $t_3 - t_2$  обнаружение  $Y$  не происходит, то находясь в момент  $t = t_3$  в состоянии (3.5.3), для которого  $\Delta x_1^{(1)}$  из отрезка (3.5.7), ищущий объект осуществляет наибо́льшее круговое вращение с постоянным радиусом  $\rho(t_3) = \rho(t_2) - \Delta x_1^{(1)}$  по описанному в §3.4 способу из состояния покоя

$$\rho(t_3) = \rho(t_2) - \Delta x_1^{(1)}, \quad \dot{\rho}(t_3) = 0, \quad \varphi(t_3) = 0, \quad \dot{\varphi}(t_3) = 0 \quad (3.5.8)$$

в конечное состояние покоя

$$\rho(t_4) = \rho(t_3) = \rho(t_2) - \Delta x_1^{(1)}, \quad \dot{\rho}(t_4) = 0, \quad \varphi(t_4) = 2\pi, \quad \dot{\varphi}(t_4) = 0 \quad (3.5.9)$$

за минимально возможное время  $t_4 - t_3$ .

Такое перемещение ищущий объект реализует при тангенциальном (3.4.16) и радиальном (3.4.11) управляющих ускорениях, а также управлении (3.4.1), отнесенных к промежутке времени  $t_3 \leq t \leq t_4$ :

$$w_\varphi = \varepsilon_0 \operatorname{sign} \left[ 2\pi \left( \frac{t_4 + t_3}{2} - t \right) \right], \quad t_4 = t_3 + 2\sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon_0} \rho(t_3)}, \quad (3.5.10)$$

$$w_\rho(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0^2 (t - t_3)^2}{\rho(t_3)}, & t_3 \leq t \leq \tau_4, \\ \frac{\varepsilon_0^2 (-t + 2\tau_4 - t_3)^2}{\rho(t_3)}, & \tau_4 \leq t \leq t_4, \end{cases} \quad \tau_4 = \frac{t_3 + t_4}{2},$$

$$w_{X_3}^*(t) = g, \quad t_3 \leq t \leq t_4,$$

где  $\rho(t_3)$  и  $\varepsilon_0$  определяются, соответственно, из (3.5.8) и (3.4.15).

При ограничении (3.5.7) искомую величину  $\Delta x_1^{(1)}$  определим из следующего уравнения:

$$r_3 + (t_4 - t_3)V_Y = r_2 + 2Ch - \Delta x_1^{(1)}, \quad (3.5.11)$$

которое с использованием формул (3.5.2), (3.5.4) и (3.5.10) принимает вид

$$2V_Y \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon_0} (\rho(t_2) - \Delta x_1^{(1)})} = 2Ch - \frac{2V_Y}{\sqrt[4]{W_X^2 - g^2}} \sqrt{\Delta x_1^{(1)} - \Delta x_1^{(1)}}. \quad (3.5.12)$$

Здесь величина  $\rho(t_2)$  с помощью формул (3.2.7), (3.3.2), (3.3.8), (3.4.6) выражается через заданные известные параметры задачи  $r_0, R_0, C, h, V_Y, W_X, g$ .

При условии (3.5.1), уравнение (3.5.12) разрешимо относительно  $\Delta x_1^{(1)}$  на отрезке (3.5.7). Решив его, можно найти ту величину перемещения  $\Delta x_1^{(1)}$  при котором за время  $t_4 - t_3$  полного оборота вокруг полюса  $O$  искомый объект

обнаружиться, двигаясь с постоянной скоростью из любой точки границы круга неопределенности с радиусом:

$$r(t_3) = r_3 = r_2 + \frac{2V_Y}{\sqrt[4]{W_X^2 - g^2}} \sqrt{\Delta x_1^{(1)}}. \quad (3.5.13)$$

Таким образом, если на интервале времени  $t_2 \leq t \leq t_4$  ни в какой промежуточный момент  $t^* \in [t_2, t_4]$  обнаружение (1.1.6) искомого объекта не происходит, то реализация ищущим объектом комбинированного управления (3.5.2), (3.5.10) за время  $t_4 - t_2$  приводит к уменьшению радиуса области неопределенности  $r_2 = r(t_2)$  на величину  $\Delta x_1^{(1)}$ ,  $0 < \Delta x_1^{(1)} < Ch < r_2$ , т.е. область неопределенности искомого объекта в момент  $t = t_4$  будет содержаться в круге с радиусом

$$r_4 = r(t_4) = r_2 - \Delta x_1^{(1)} > 0, \quad 0 < r_4 < r_2. \quad (3.5.14)$$

Здесь возможны следующие случаи:

$$\text{a) } r(t_4) = r_4 < Ch, \quad \text{b) } r(t_4) = r_4 \geq Ch. \quad (3.5.15)$$

В случае (3.5.15)(a) найдем условие, при котором управления

$$w_{X1}^* = -\sqrt{W_X^2 - g^2}, \quad w_{X2}^* = 0, \quad w_{X3}^* = g, \quad t \geq t_4, \quad (3.5.16)$$

осуществляющие прямолинейное движение по оси  $Ox_1$  из состояния (3.5.9)(будучи записанной в декартовых координатах (3.4.2)), обеспечивают выполнение условия поглощения (2.1.8) не позже некоторого конечного момента  $T$ .

Проинтегрируем уравнения (3.1.1) при управлениях (3.5.16) и начальных условиях (3.5.9)((3.4.2)). Затем, полученные выражения при  $t = T$  поставим в конечные условия

$$x_1(T) - Ch = y_1(T), \quad x_1(T) \geq 0, \quad y_1(T) = -r_4 - V_Y(T - t_4), \quad (3.5.17)$$

описывающие взаимное расположение окружностей кругов  $G(x(T))$  и  $D(T)$ , отвечающее условию поглощения (2.1.8).

Соотношения (3.5.17) можно, также, представить в виде следующей системы относительно параметра  $T > 0$ :

$$w_{x_1}^* T^2 + V_Y T + R_4 = 0,$$

$$w_{x_1}^* T^2 - w_{x_1}^* t_4^2 - 2w_{x_1}^* t_4 + 2r(t_4) \geq 0, \quad (3.5.18)$$

$$R_4 = -w_{x_1}^* t_4^2 - 2w_{x_1}^* t_4 + 4r(t_4) - 2V_Y t_4.$$

Если система (3.5.18) разрешима относительно  $T > 0$ , то управления (3.5.16) являются гарантирующими на промежутке  $t_4 \leq t \leq T$ , а время  $T$  (наименьший положительный корень уравнения (3.5.18)) – гарантированным временем поиска, так как в этот момент выполняется краевое условие (3.5.17), равносильное условию поглощения (2.1.8) и гарантирующее обнаружение (1.1.6).

Если система (3.5.18) неразрешима, то в обоих случаях (3.5.15)(a) и (b) начиная с момента  $t = t_4$  вторично применив управления (3.5.2) и (3.5.10), отнесенных к интервалам  $t_4 \leq t \leq t_5$  и  $t_5 \leq t \leq t_6$  соответственно, получим

$$r_6 = r(t_6) = r_4 - \Delta x_1^{(2)}, \quad (3.5.19)$$

где  $\Delta x_1^{(2)}$  определяется из следующего уравнения:

$$r_5 + (t_6 - t_5)V_Y = r_4 + 2Ch - \Delta x_1^{(2)}, \quad \Delta x_1^{(2)} \in (0, a). \quad (3.5.20)$$

Уравнение (3.5.20) с помощью аналогичных формул (3.5.2), (3.5.4), (3.5.10), отнесенных к разностям  $(t_5 - t_2)$ ,  $(r_5 - r_4)$ ,  $(t_6 - t_5)$  соответственно, записывается в виде

$$2V_Y \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon_0} (\rho(t_2) - \Delta x_1^{(1)} - \Delta x_1^{(2)})} = 2Ch - \frac{2V_Y}{\sqrt[4]{W_X^2 - g^2}} \sqrt{\Delta x_1^{(2)} - \Delta x_1^{(2)}}, \quad (3.5.21)$$

$$\Delta x_1^{(2)} \in (0, a),$$

где величина  $\Delta x_1^{(1)}$  определена в предыдущем этапе – на интервале  $t_2 \leq t \leq t_4$ .

В соответствии с (3.5.15) рассмотрим следующие возможные случаи.

В случае (3.5.15)(а), если решение  $\Delta x_1^{(2)}$  уравнения (3.5.21) удовлетворяет неравенству

$$r_4 \leq \Delta x_1^{(2)} < Ch, \quad (3.5.22)$$

то из (3.5.19) следует, что  $r_6 = r(t_6) = r_4 - \Delta x_1^{(2)} \leq 0$ , т.е. поглощение области неопределенности кругом обнаружения происходит к моменту  $t = t_6$ .

В случае (3.5.15)(а), если решение  $\Delta x_1^{(2)}$  уравнения (3.5.21) удовлетворяет неравенству

$$0 < \Delta x_1^{(2)} < r_4 < Ch, \quad (3.5.23)$$

т.е.

$$r_6 = r(t_6) = r_4 - \Delta x_1^{(2)} > 0 \quad (3.5.24)$$

и на интервале  $t_4 \leq t \leq t_6$  обнаружение не происходит, то область неопределенности в момент  $t = t_6$  содержится в круге с радиусом  $r(t_6) = r_6 < r_4$ , причем, как это следует из (3.5.19), (3.5.24) и уравнений (3.5.12), (3.5.21) при условии (3.5.1)

$$\Delta x_1^{(1)} = r_2 - r_4 < r_4 - r_6 = \Delta x_1^{(2)}. \quad (3.5.25)$$

Аналогично случаю (3.5.15)(а), можно использовать управление (3.4.1) при  $t \geq t_6$  и из уравнения (3.5.18), в котором  $t_4$  заменен на  $t_6$ , найти гарантированное время поглощения, если (3.5.18) разрешимо относительно  $T > 0$ . В противном случае и в случае (3.5.15)(b), если на промежутке  $t_4 \leq t \leq t_6$  обнаружение не происходит и

$$0 < \Delta x_1^{(2)} < Ch \leq r_4, \quad (3.5.26)$$

то в момент  $t = t_6$  соотношения (3.5.25) вновь имеют место. Тогда переходим к следующему этапу комбинированного управления и т.д., пока не выполняется одно из условий (3.5.22) или (3.5.23), отнесенных к соответствующему этапу.

Пусть в момент  $t = t_{2n}$ ,  $n \geq 3$  перед  $n$ -ым этапом, обнаружение за время  $t_{2n-2} \leq t \leq t_{2n}$  не произошло и, следовательно, после реализации ищущим объектом комбинированного управления на интервале  $t_{2n-2} \leq t \leq t_{2n}$  радиус круга неопределенности  $r_{2n-2} = r(t_{2n-2})$  уменьшилось на величину  $\Delta x_1^{(n-1)}$ ,  $0 < \Delta x_1^{(n-1)} < Ch$ , т.е. область неопределенности искомого объекта в момент  $t = t_{2n}$  содержится в круге с радиусом

$$r_{2n} = r(t_{2n}) = r_{2n-2} - \Delta x_1^{(n-1)}, \quad r_{2n-2} > r_{2n}, \quad n \geq 3. \quad (3.5.27)$$

С момента  $t = t_{2n}$  последовательно применив управления (3.5.2), (3.5.10) на интервалах времени  $t_{2n} \leq t \leq t_{2n+1}$  и  $t_{2n+1} \leq t \leq t_{2n+2}$  соответственно, получим

$$r_{2n+2} = r(t_{2n+2}) = r_{2n} - \Delta x_1^{(n)}, \quad r_{2n} > r_{2n+2}, \quad n \geq 3, \quad (3.5.28)$$

где  $\Delta x_1^{(n)}$  определяется из уравнения

$$r_{2n+1} + (t_{2n+2} - t_{2n+1})V_Y = r_{2n} + 2Ch - \Delta x_1^{(n)}, \quad n \geq 3,$$

записанное в виде

$$2V_Y \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon_0} \left( r_2 + Ch - \sum_{i=1}^n \Delta x_1^{(i)} \right)} = 2Ch - \frac{2V_Y}{\sqrt[4]{W_X^2 - g^2}} \sqrt{\Delta x_1^{(n)}} - \Delta x_1^{(n)}, \quad (3.5.29)$$

$$\Delta x_1^{(n)} \in (0, a), \quad n \geq 3,$$

с помощью следующих, аналогичных (3.5.10), (3.5.2), (3.5.8), рекуррентных формул:

$$t_{2n+2} = t_{2n+1} + 2 \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon_0} \rho(t_{2n+1})}, \quad (3.5.30)$$

$$t_{2n+1} = t_{2n} + 2 \frac{\sqrt{\Delta x_1^{(n)}}}{\sqrt[4]{W_X^2 - g^2}},$$

$$\rho(t_{2n+1}) = \rho(t_{2n}) - \Delta x_1^{(1)} = r_2 + Ch - \sum_{i=1}^n \Delta x_1^{(i)}.$$

Поскольку, как это следует из (3.5.25), имеют место рекуррентные соотношения

$$0 < r_{2n-2} - r_{2n} = \Delta x_1^{(n-1)} < \Delta x_1^{(n)} = r_{2n} - r_{2n+2} < Ch, \quad n \geq 3, \quad (3.5.31)$$

то  $0 < \Delta x_1^{(1)} < \dots < \Delta x_1^{(n)} < Ch$  и процесс поиска заканчивается при таком  $n$ ,

когда  $r_{2n} \leq \Delta x_1^{(n)} < Ch$  или  $\Delta x_1^{(n)} < r_{2n} \leq Ch$ . В первом случае

$r_{2n+2} = r_{2n} - \Delta x_1^{(n)} \leq 0$ , т.е. поглощение области неопределенности кругом

обнаружения происходит к моменту  $t = t_{2n+2}$ , а обнаружение искомого объекта

– в некоторый момент на промежутке  $t_{2n} \leq t \leq t_{2n+2}$ . А во втором случае

область неопределенности в момент  $t = t_{2n+2}$  содержится в круге с радиусом

$r(t_{2n+4}) = r_{2n+4} < r_{2n+2}$  и к достижению условия поглощения приводят



управления (3.5.16), отнесенные к промежутку  $t_{2n} \leq t \leq T$ , где  $T$  - наименьший положительный корень уравнения (3.5.18), записанное для момента  $t_{2n}$ .

Приведем пример численной реализации изложенного алгоритма управления поиском (3.5.27)-(3.5.31) для системы (3.1.1), (3.1.2), (2.2.1) со следующими параметрами:

$$\begin{aligned} W_X &= 100 \text{ мс}^{-2}, & V_Y &= 5 \text{ мс}^{-1}, & r_0 &= 25 \text{ м}, & h &= 50 \text{ м}, \\ R_0 &= 5000 \text{ м}, & g &= 9.8 \text{ мс}^{-2}, & C &= 1. \end{aligned} \quad (3.5.32)$$

Сначала при параметрах (3.5.32) по формулам (3.2.7), (3.2.9), (3.3.8), (3.3.2), (3.4.6), (3.5.18) вычислялись, соответственно, величины  $t_1 = 1,42 \text{ с}$ ,  $r_1 = 32,10 \text{ м}$ ,  $t_2 = 15,38 \text{ с}$ ,  $r_2 = 101,90 \text{ м}$ ,  $\rho(t_2) = 126,90 \text{ м}$ ,  $\varepsilon_0 = 15.64 \text{ мс}^{-2}$  и была установлена выполнимость условия (3.5.1), которое обеспечивает обнаружение искомого объекта за конечное время по предложенному алгоритму управления. Результаты расчетов показали, что с момента  $t_2$  процесс поиска с последующим обнаружением искомого объекта осуществляется в три этапа с применением комбинированного управления в виде управлений (3.5.2), (3.5.10), отнесенных каждому этапу:

этап-1

$$\begin{aligned} 15,38 \text{ с} = t_2 \leq t \leq t_4 = 30,72 \text{ с}, & \quad \Delta x_1^{(1)} = 23,29 \text{ м}, & \quad r_4 = r_2 - \Delta x_1^{(1)}, \\ r_2 = 101,90 \text{ м} \rightarrow r_4 = 78,61 \text{ м}, \end{aligned}$$

этап-2

$$\begin{aligned} 30,72 \text{ с} = t_4 \leq t \leq t_6 = 44,31 \text{ с}, & \quad \Delta x_1^{(2)} = 32,04 \text{ м}, & \quad r_6 = r_4 - \Delta x_1^{(2)}, \\ r_4 = 78,62 \text{ м} \rightarrow r_6 = 46,58 \text{ м}, \end{aligned}$$

этап-3

$$\begin{aligned} 44,31 \text{ с} = t_6 \leq t \leq t_8 = 54,43 \text{ с}, & \quad \Delta x_1^{(3)} = 49,44 \text{ м}, & \quad r_8 = r_6 - \Delta x_1^{(3)}, \\ r_6 = 46,57 \text{ м} \rightarrow r(t_8) = 0. \end{aligned}$$

Из таблицы следует, что область неопределенности искомого объекта после каждого этапа сужается (радиус круга, содержащего эту область, уменьшается) и в конце третьего этапа исчезает. Следовательно, к моменту  $t_8 = 54,43\text{с}$  область неопределенности поглощается кругом обнаружения, т.е. обнаружение искомого объекта происходит не позже гарантированного времени поиска  $T = t_8$ .

Таким образом, в задаче гарантированного поиска подвижного объекта разработан конструктивный алгоритм комбинированного управления и получено достаточное условие на физические и геометрические параметры поисковой системы, позволяющие ищущему объекту в горизонтальной полосе заданной высоты в трехмерном пространстве осуществить поиск искомого объекта за конечное время. При полученных в явном виде гарантирующих управлениях поиск, с последующим обнаружением искомого объекта, осуществляется по пространственной траектории, состоящей из прямолинейных участков и криволинейных участков в виде окружностей с монотонно убывающими радиусами.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации получены следующие основные результаты.

**1.** Для поисковой системы из двух, управляемых по скорости, объектов: ищущего и искомого, разработана методика решения задачи гарантированного, в том числе оптимального по минимальному времени, поиска. При этом:

- предложен подход, сводящий задачу гарантированного поиска к задаче построения множеств гарантирующих управлений, обеспечивающих поглощение расширяющегося во времени круга неопределённости искомого объекта кругом обнаружения ищущего объекта за конечное время в зависимости от различных соотношений между физическими и геометрическими параметрами поисковой системы;

- графоаналитическим способом решена задача нахождения оптимальных гарантирующих управлений в построенных множествах и получены формулы для вычисления соответствующих минимальных гарантированных времен.

**2.** Для поисковой системы объектов, управляемых по ускорению, разработана методика решения задачи оптимального по минимальному гарантированному времени обнаружения искомого объекта, состоящая из следующих этапов:

- путем минимаксного подхода исходная задача сведена к задаче оптимального по быстрдействию управления с подвижным правым концом;

- методом принципа максимума получено ее полное аналитическое решение – оптимальное гарантирующее управление, и при конкретных значениях параметров поисковой системы, путем численного моделирования получена расчетная зависимость минимального гарантированного времени поиска от начального расстояния между центрами кругов обнаружения и неопределенности.

**3.** Для динамической модели поисковой системы при геометрических ограничениях на вертикальную координату ищущего объекта рассмотрена задача построения управления движением ищущего объекта, гарантирующего

обнаружение искомого объекта за конечное время, решение которой в рамках минимаксного подхода опирается на последовательном использовании решений следующих подзадач:

- построение оптимального по быстродействию управления достижением ищущего объекта максимальной высоты с нулевой скоростью;
- построение управления прямолинейным движением, на максимальной высоте, ищущего объекта для быстрой стыковки круга обнаружения, при нулевой его скорости, с кругом неопределенности искомого объекта, расширяющегося с максимальной скоростью;
- разработка алгоритма комбинированного управления и установление условий на геометрические и физические параметры поисковой системы, при которых, двигаясь по соответствующей траектории, состоящей из прямолинейных участков и криволинейных участков в виде окружностей с монотонно убывающими радиусами, ищущий объект поэтапно сужает круг неопределенности, что приводит к обнаружению искомого объекта за конечное время.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамянц Т. Г., Беланов Ю. А., Маслов Е. П., Яхно В. П. Поиск подвижного объекта по информационному признаку “след”. Ч. 1. Общая структура оптимальной поисковой траектории // Проблемы управления. 2009. Вып. 5. С. 61-68.
2. Абрамянц Т. Г., Беланов Ю. А., Маслов Е. П., Яхно В. П. Поиск подвижного объекта по информационному признаку “след”. Ч. 2. Оптимизация поисковых траекторий // Проблемы управления. 2009. Вып. 6. С. 44-51.
3. Абчук В.А., Суздаль В.Г. Поиск объектов. – М.: Советское радио. 1977. 336с.
4. Аветисян В.В. Оптимальное гарантирующее управление поиском движущегося на плоскости целевого объекта // Известия НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. № 1. С.3-9.
5. Аветисян В.В. Оптимизация гарантирующего управления поиском подвижного объекта // Известия НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. № 2. С.68-78.
6. Аветисян В.В., Багдасарян А.А. Оптимизация управления захватом целевого объекта роботом-манипулятором при неполной информации // Известия НАН РА. Механика. 2004. Т.57. № 2. С. 53-63.
7. Аветисян В.В., Мартиросян С.Р. Оптимальный управляемый поиск электро-механическим манипулятором при минимальных световых энергозатратах // Известия НАН РА. Механика. 2007. Т. 60. № 2. С. 53-63.
8. Аветисян В.В., Мартиросян С.Р. Управление поиском электромеханической системой подвижного объекта при минимальных световых энергозатратах // Известия НАН РА. Механика. 2008. № 1. С. 83-90.
9. Аветисян В.В., Мартиросян С.Р. Гарантированный поиск целевого объекта электромеханической системой при минимальных световых энергозатратах // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 5. С.151-164.

10. Аветисян В.В., Меликян Т.Т. Управляемый поиск подвижного объекта в одноом семейстер траекторий в прямоугольной области // ДНАН РА. 1997. № 4. С. 17-24.
11. Аветисян В.В., Меликян Т.Т. Гарантированное управление поиском подвижного объекта в прямоугольной области // Известия РАН. Теория и системы управления. 1999. № 1. С.58-66.
12. Аветисян В.В., Меликян Т.Т. О задаче гарантированного поиска подвижного объекта в прямоугольной области // Известия РАН. Теория и системы управления. 1999. № 2. С.31-39.
13. Аветисян В.В., Степанян В.С. К задаче оптимального гарантированного поиска подвижного объекта на плоскости // Труды УШ международной конференций “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”. Ереван. Изд. “Чартарапет”. 2014. Том. 1. С. 10-15.
14. Аветисян В.В., Степанян В.С. Оптимальный по минимальному гарантированному времени поиск подвижного объекта на плоскости // Известия НАН РА. Механика. 2015. Т. 60. № 1. С. 68-80.
15. Аветисян В.В., Степанян В.С. Применение принципа максимума Понтрягина к задаче оптимального гарантированного поиска движущегося объекта // Труды ІУ международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”. 21-21 сентября 2015 г., Цахкадзор, Армения. С. 10-14.
16. Аветисян В.В., Степанян В.С. Оптимальный гарантированный динамический поиск подвижного объекта на плоскости // Известия НАН РА. Механика. 2015. Т. 68. № 4. С. 45-61.
17. Айзеке Р. Дифференциальные игры. – М.: Мир. 1967. 479с.
18. Айрапетян В.В., Гукасян А.А., Манукян А.А. Об одной задаче оптимального гарантированного управления манипулятором при неполной информации // Известия НАН РА. Механика. 2005. Т. 58. №1. С. 68-78.

19. Акуленко Л. Д. Синтез управления в задаче оптимального по быстродействию пересечения сферы // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 724-735.
20. Акуленко Л. Д. Оптимальное по быстродействию приведение возмущенного динамического объекта в заданное положение // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 230-240.
21. Акуленко Л.Д. Наискорейшее приведение пространственного динамического объекта в круговую область // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 3. С. 457-473.
22. Алферов Г.В., Малафеев О.А., Мальцева А.С. Трехэтапный процесс поиска подводной лодки //Труды конференции «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация». Минск. 2013. С. 177-178.
23. Алферов Г.В., Малафеев О.А., Мальцева А.С. Процесс поиска и захвата объекта. Процессы управления и устойчивость // Труды 44-ой международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. Н.В.Смирнова, Т.Е.Смирновой: Изд. дом СПбГУ. 2013. С. 113-119.
24. Алферов Г.В., Малафеев О.А., Мальцева А.С. Теоретико-игровые модели поиска подвижного объекта при инспектировании. Проблемы механики и управления. Нелинейные динамическиесистемы: межвузовский сборник научных трудов // ПГУ. Пермь, 2014. Вып. 46. С. 11-19.
25. Барсегян В.Р. Управление линейными динамическими системами с ограничениями на значения частей координат фазового вектора в промежуточные моменты времени // Доклады НАН РА. 2010. Т. 110. № 3. С. 251-260.
26. Березин С. Б. Информационные множества в задаче динамического поиска объектов с несколькими ищущими // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2001. № 3. С. 14-18.
27. Бочаров В.Ю., Меликян А.А. Задача гарантированного быстродействия с поиском целевой точки в многоугольной области неопределенности // Известия АН СССР. Техническая Кибернетика. 1991. № 1. С. 82-92.

28. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. - М.: Наука, 1988. 552с.
29. Габриелян М.С., Кряжимский А.В. Дифференциальная игра сближения-уклонения с  $m$  целевыми множествами // ДАН СССР. 1986. Т. 288. № 3. С. 525-527.
30. Головкин А.С., Меликян А.А. Задача оптимального быстрогодействия с поиском целевой точки в круговой области неопределенности // Известия АН СССР. Техническая Кибернетика. 1994. № 4. С. 40-47.
31. Губайдуллин С.М., Шикин Е.В. Следящие области на цилиндре и на торе // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 1992. №2. С. 46-50.
32. Гукасян А.А., Казарян В. С. Задача гарантированного управления роботом при неполной информации о положении целевой точки // Известия НАН РА. Механика. Т. 49. № 2. С. 42-51.
33. Гукасян А.А., Манукян А.А. О гарантированном управлении материальной точки при неполной информации // Ученые записки ЕГУ. 2002. № 1. С. 39-48.
34. Емельянов Л.А., Абчук В.А., Лапшин В.П., Суздаль В.Г. Теория поиска в военном деле. – М: Воениздат. 1964. 208с.
35. Зеликин М. И. Об одной дифференциальной игре с неполной информацией // ДАН СССР. 1972. Т. 202. № 5. С. 998-1000.
36. Зенкевич Н.А. Одна оценка для простого поиска на плоскости // Вестник Ленинградского Университета. Серия математика, механика, астрономия. 1981. Вып. 4. С. 112-114.
37. Ким Д.П. Методы поиска и преследования подвижных объектов.–М.: Наука. 1989. 336с.
38. Красовский Н. Н. Теория управления движением. – М.: Наука. 1968. 476с.
39. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. – М.: Наука, 1970. 420с.



40. Ларин П.М. Следящая область пары отрезков // Фундаментальная и прикладная математика, 1998. Т. 4. Вып. 2. С.559-566.
41. Ларин П.М. О неразрешимости задач гарантированного поиска в достаточно большой области // Вестник Московского Университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика, 2000. № 1. С.44-47.
42. Меликян А.А. Минимаксная задача управления при неполной информации о положении целевой точки // Изв. АН СССР. Техническая Кибернетика. 1989. № 2. С. 111-118.
43. Меликян А.А. Задача оптимального быстрогодействия с поиском целевой точки // Прикладная математика и механика. 1990. Т. 54. Вып. 1. С. 3-13.
44. Меликян А.А. Оптимальное гарантирующее управление динамической системой с поиском целевой точки // ДАН СССР. 1991. Т. 316. № 4. С. 815-819.
45. Местников С. В. Аппроксимация области неопределенности в дифференциальных играх поиска // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. № 6. С. 967-972.
46. Петросян Л.А. Одновременная игра поиска и случайное распределение точек на плоскости // Вестник. Ленинградского Университета. Серия математика, механика, астрономия. 1985. Вып. 1. С. 31-35.
47. Петросян Л.А., Гарнаев А.Ю. Игры поиска. - СПб.: Изд-во СПбУ. 1992. 217с.
48. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А. Оптимальный поиск в условиях конфликта. – Л.: Изд-во ЛГУ. 1987. 75с.
49. Петросян Л.А., Томский Геометрия простого преследования. – М.: Наука. 1983. 140с.
50. Пивоварчук Д. Г. Задача динамического поиска на плоскости с простой динамикой убегающего // Проблемы динамического управления. – М.: Издательский отдел факультета ВМиКМГУ, 2005. С. 230-252.
51. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983. 392с.

52. Скворцов А.А. Динамический поиск в выпуклых областях // *Фундаментальная и прикладная математика*. 1998. Т. 4. Вып. 2. С. 785-790.
53. Скворцов А.А. Динамический поиск в трехмерных выпуклых областях // *Вестник Московского Университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика*. 1999. №3. С.20-24.
54. Скитович В. В., Чистяков С. В. Игровые задачи сближения и поиска. – М.: Изд-во МАИ, 1985. 48с.
55. Степанян В.С. Сведение задачи оптимального гарантированного поиска движущегося объекта к задаче оптимального быстрогодействия с подвижным концом // *Труды IV международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”*. 21–26 сентября 2015г. Цахкадзор. Армения. С. 390-394.
56. Суздаль В.Г. Теория игр для флота. – М.: Воениздат. 1976. 317с.
57. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Феодоров В.В. Курс методов оптимизации. – М.: Физматлит. 2005. 368 с.
58. Хеллман О. Введение в теорию оптимального поиска. – М.: Наука. 1985. 248с.
59. Черноусько Ф.Л. Управляемый поиск подвижного объекта // *Прикладная математика и механика*. 1980. Т. 44. Вып.1. С. 3-12.
60. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. – М.: Наука. 1978. 272с.
61. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. – М.: Наука. 1988. 319с.
62. Чхартишвили А.Г. Об одном геометрическом свойстве следящей области в задачах поиска // *Вестник Московского Университета. Серия 1, Математика. Механика*. 1992, №3, С.7-10.
63. Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. Метод следящих областей в задачах поиска // *Математический сборник*. 1993. Т. 184. №10. С.107- 134.

64. Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. Динамические задачи поиска и обнаружения на некоторых замкнутых поверхностях // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29. №11. С. 1948-1957.
65. Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. Об одном геометрическом подходе к решению динамических игр поиска // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 6. С. 1097-1098.
66. Чхартишвили А. Г., Шикин Е. В. Динамический поиск объектов. Геометрический взгляд на проблему // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Т. 1. Вып. 4. С. 827-862
67. Шикин Е.В., Березин С. Б. Поиск объектов, динамика, геометрия, графика // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11. № 1. С. 3-34.
68. Adams S., Melikyan A.A. Optimal trajectory planning for manipulators with goal point uncertainty // 6-th International Conference on CAD/CAM. Robotics and Factories of the Future, 1991, London. Proceedings. P. 11-16.
69. Alpern S. The rendezvous search problem // SIAM J. Control Optimization. 1995, Vol. 33. No. 3. P. 673-683.
70. Alpern S., Lim W.S. Minimax rendezvous on the line // SIAM J. Control Optimization. 1996. Vol. 34. No. 4. P. 1650-1665.
71. Alpern S., Gal S. The Theory of Search Games and Rendezvous. Kluwer (now Springer) Academic Publishers. 2003. 319 p.
72. Avetisyan V.V. Optimal search of a immobile object in rectangular domain in minimal guaranteed time // Journal of Computer and Systems Sciences International, 2002. Vol. 45. P. 58-66.
73. Avetisyan V.V. Controlled search with subsequent catch of immobile object by the robot-manipulator // Proceedings of 11-th International Symposium on Dynamic Games and Applications. Tucson, USA. AZ. 2004. Vol. 1. P. 24-29.
74. Avetisyan V.V. Control of the Search for an Immobile Object Aimed at Its Capture // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2006. Vol. 45. P. 907-1006.

75. V. Avetisyan, N. Hovakimyan, Constructing the Regions of Admissible States of Positioning for a Two-Link Manipulator with Account of Speed Constraints // Journal of Computer and Systems Sciences International. 1997. Vol. 36. No. 4. P. 638-646.
76. Avetisyan V.V., Melikyan T.T. "On search game of mobile object in rectangular domain" // 8-th International Symposium on Dynamic Games and Applications. Maastricht, The Netherlands. Proceedings. 1998. Vol. 1. P. 65-68.
77. Avetisyan V.V., Stepanyan V.S. Combined control of guaranteed search for a moving object with geometric constraints // Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. Vol. 69(2016), Issue 1. P. 53-65.
78. Cortés J., Martínez S., Karatas T., Bullo F. Coverage control for mobile sensing networks // IEEE Transactions on Robotics and Automation. April 2004. 20(2). P. 243-255.
79. Gal S. Search games. – New York: Academic Press. 1980. 216p.
80. Garnaev A.Yu. Search game in a Rectangle // Journal of Optimization Theory and Applications: Vol. 69. No. 3. 1991. P. 531-542.
81. Guo Y., Qu Z. Coverage control for a mobile robot patrolling a dynamic and uncertain environment // In Fifth Worlds Congress on Intelligent Control and Automation. June 2004. Volume 6. P. 4899-4903.
82. Hokayem P.F., Stipanović D. M., Spong M. W. Dynamic Coverage Control with Limited Communication // Proceedings of the 2007 American Control Conference. New York. July 9-13 (2007). P. 4878-4883.
83. Hovakimyan N., Cao C., Kharisov E., Xargay E., Gregory I.  $L_1$  Adaptive Controller for Safety Critical Systems: Guaranteed Robustness with Fast Adaptation, IEEE Control Systems Magazine, pp. 54-104, October, 2011.
84. Hussein I. I., Stipanović D. M. Effective Coverage Control using Dynamic Sensor Networks // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 15(2007). P. 642-657.
85. Koopman B.O. Theory of search. Part II, III. // Operation Research. 1956. Vol. 4. P. 503-531.

86. Koopman B.O. Search and screening. – New York: Pergamon Press. 1980.
87. Melikyan A.A. Time – optimal control problem with goal point uncertainty // Modeling Techniques for Uncertain Systems. Progress in Systems and Control Theory. Vol. 18. Eds. A.B.Kurzhanski, V.M.Velov. Boston. Birkhauser. 1994. P. 205-215.
88. Stipanovi'c D. M., Melikyan A. A., Hovakimyan N. V. Guaranteed Strategies for Nonlinear Multi-Player Pursuit-Evasion Games, International Game Theory Review, 2010. Vol. 12. No. 1. P. 1-17.