ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ ՎԱՀԱՆ ՍԵՅՐԱՆԻ

ՇԱՐԺԱԿԱՆ ՕԲՅԵԿՏԻ ԵՐԱՇԽԱՎՈՐՎԱԾ ՓՆՏՐՄԱՆ ՂԵԿԱՎԱՐՄԱՆ ՕՊՏԻՄԱԼԱՑՈՒՄԸ

Ա.02.01- «Տեսական մեխանիկա» մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ - 2016

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН РА

СТЕПАНЯН ВААН СЕЙРАНОВИЧ

ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ ГАРАНТИРОВАННЫМ ПОИСКОМ ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой
степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.02.01 - ”Теоретическая механика”

ЕРЕВАН - 2016

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Վ.Վ.Ավետիսյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Ա.Ա.Ղուկասյան
ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ Ս.Գ.Շահինյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Հայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2016թ. հունիսի 10-ին ժ. 14^{00}–ին Մեխանիկայի ինստիտուտում գործող Մեխանիկայի-047 մասնագիտական խորհրդում

(հասցեն՝ 0019 ք. Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24բ, avsah@mechins.sci.am)

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2016 թ. մայիսի 6-ին

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար,
ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Ա.Վ. Սահակյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете

Научный руководитель доктор физ.-мат. наук, профессор В.В.Аветисян

Официальные оппоненты доктор физ.-мат. наук, профессор А.А. Гукасян
кандидат физ.-мат. наук, доцент С.Г.Шагинян

Ведущая организация: Национальный политехнический университет Армении

Защита состоится 10 июня 2016г. в 14^{00} на заседании специализированного совета Механики-047 в Институте механики.

Адрес: 0019 г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б, avsah@mechins.sci.am.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА.

Автореферат разослан 6 мая 2016г.

Ученый секретарь специализированного совета,
доктор физ.-мат. наук А.В.Саакян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Задачи поиска, имеющие своим источником многочисленные задачи из механики и других областей знании, находят все большее применение при решении различных проблем. Это и разведка полезных ископаемых, и отыскание неисправностей в компьютерах, и поиск оптимальных управленческих решений, и поиск объектов в различных средах (например, потерпевшего крушение корабля, подводной лодки) и т.д. В предлагаемой диссертации под поиском понимается поиск подвижных объектов. Задачи поиска объектов, как правило, характеризуются тем, что в них принимают участие две стороны: ищущая и искомая. Ищущая обследует определенную область пространства, называемую поисковой областью, с целью обнаружения движущегося там искомого объекта, при наличии неполной начальной и отсутствии текущей информации о состоянии искомого объекта. Обнаружение происходит при выполнении определенных терминальных условий. Таким образом, задачу поиска можно определить как задачу управляемого сближения ищущего объекта с искомым подвижным объектом на определенное расстояние в условиях неопределенности и отнести ее в отдельный класс задач управления. Имеется значительное количество работ, в которых задачи поиска подвижных объектов рассмотрены и исследованы в различных постановках. Их можно условно разбить на две группы: вероятностные и гарантированные задачи поиска. В задачах первой группы ищущий объект либо максимизирует вероятность обнаружения искомого объекта, используя при этом подход, связанный с применением методов теории вероятностей, либо минимизирует время обнаружения, которое искомый объект, наоборот, стремится максимизировать, и в рамках теории дифференциальных игр с неполной информацией решение ищется в смешаных стратегиях, т.е. находят вероятностные распределения на множествах допустимых управлений поисковых объектов. Однако, вероятностный подход, дающий в среднем лучшие результаты, удобнее использовать при наличии достаточно достоверной информации о статистических характеристиках фазового состояния искомого объекта, которая на практике часто отсутствует. Поэтому целесообразно применять гарантирующий подход к решению задачи поиска. В отличие от вероятностного поиска, здесь должно быть гарантировано успешное обнаружение независимо от действий искомого объекта. В диссертации изучаются задачи второй группы, методы решения которых к настоящему времени разработаны в меньшей степени, а оптимальности удается достичь лишь в редких случаях.

Целью диссертации является разработка алгоритмов управления, в том числе оптимального управления, в задаче гарантированного поиска для двух моделей поисковых систем: системы из двух объектов, управляемых по скорости, и системы из двух объектов, управляемых по ускорению.

Методы исследования. В диссертации использовались методы теоретической механики, теории оптимального управления, а также компьютерное моделирование.

Достоверность. Полученные в диссертации результаты базируются на корректности постановок исследуемых задач, строгом и обоснованном использовании математических методов механики и теории управления, а также на сравнении результатов компьютерного моделирования с теоретическими выводами.

Научная новизна. В диссертации содержаться следующие новые результаты: для модели поисковых объектов, обладающих в одном случае простым движением, а в другом - динамикой, разработаны алгоритмы управления, которые позволяют движущемуся в трехмерном пространстве ищущему объекту с помощью информационного круга с управляемым радиусом, за минимальное гарантированное время обнаружить движущийся на плоскости искомый объект, а также гарантируют обнаружение искомого объекта за конечное время, без нарушения ограничений на геометрические координаты ищущего объекта в процессе поиска. В рассматриваемых постановках считается, что начальное состояние искомого объекта на плоскости известно с точностью до заданного множества неопределенности.

Практическая ценность. Теоретические результаты диссертации, а также содержащиеся в ней алгоритмы и формулы для расчета законов управления, в том числе оптимального, могут быть непосредственно использованы в реальных задачах управления различными поисковыми системами.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на YIII-ой международной конференции “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред” в Горисе-Степанакерте (2014), на IY-ой международной конференции ‘’Актуальные проблемы механики сплошной среды’’ в Цахкадзоре (2015), на семинарах кафедры механики Ереванского государственного университета и на общем семинаре института механики НАН РА.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в шести работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы (88 наименований). Общий объем работы составляет 109 страниц печатного текста, включая 14 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность рассматриваемой задачи, дается обзор литературы по диссертации, формулируется цель работы, в сжатом виде излагается содержание всех глав.

В главе 1 исследована задача оптимального по минимальному гарантированному времени поиска подвижного объекта, совершающего управляемое по скорости движение на плоскости, в предположении, что известен лишь круг, в котором в начальный момент находится искомый объект. Ищущим принимается объект, управляемый по скорости в трёхмерном пространстве. Поиск – определение координат искомого объекта, осуществляется с помощью основания заданного конуса, вершина которого связана с текущим положением ищущего объекта. Разработан алгоритм управления, при котором гарантированный поиск искомого объекта завершается за минимальное время.

В §1.1 рассматривается система из двух точечных объектов X и Y, из которых X – ищущий, а Y – искомый. Оба объекта осуществляют простые движения: X – в трехмерном пространстве, а Y – на горизонтальной плоскости, согласно следующим уравнениям, ограничениям и начальным данным:

$$X: \ \dot{x} = u, \ \ x(0) = x^0, \ \ |u(t)| \le U, \ \ t \ge 0; \quad x, u \in R^3, \tag{1}$$

$$Y: \ \dot{y} = v, \ \ y(0) = y^0, \ \ |v(t)| \le V, \ \ t \ge 0; \quad y, v \in R^2 \tag{2}$$

В (1) и (2) x, y – векторы координат объектов; $u(t), v(t)$ – их кусочно-непрерывные управляющие вектор скорости, а U, V – максимально возможные скорости объектов.

Пусть в процессе движения объекту X точно известны свои фазовые координаты и максимальная скорость объекта Y. О координатах Y объекту X известно лишь то, что в начальный момент Y находится в заданном круге неопределённости

$$y^0 \in D_0 = \{y \in R^2 : \ \left| y - y_c^0 \right| \le r_0 \} . \tag{3}$$

Возможность установления точных координат искомого объекта Y осуществляется с помощью подвижной и изменяющейся во времени информационной области

$$G(x(t), C) = \left\{ \begin{aligned} \xi \in R^2 : \left| \xi(t) - x_c(t) \right| \le l(t) = Cx_3(t), \ \ C = \operatorname{tg}\alpha \\ x_c(t) = (x_{c1}(t), x_{c2}(t)), \quad 0 < \alpha < \pi/2 \end{aligned} \right\}, \ t \ge 0, \tag{4}$$

$$G(x(0), C) = G(x_1(0), x_2(0), x_3(0), C) = G(x_c(0), l(0)) = G_0,$$

представляющей собой круговое основание некоторого конуса, вершина которого связана с текущим положением X (рис. 1).

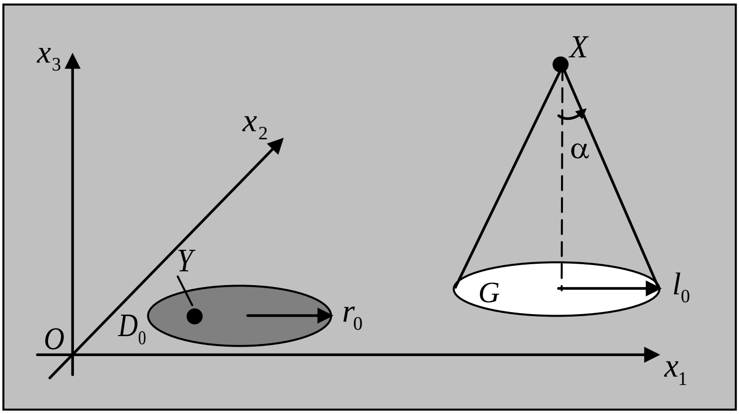

Рис. 1

Скажем, что положение искомого объекта Y становится известным в момент $t^* > 0$, когда впервые выполняется условие его попадания в круг обнаружения (4):

$$y(t^*) \in G(x(t^*)) . \tag{5}$$

Условие обнаружения (5) гарантированно выполнимо, если существует такой момент времени T и управление ищущего объекта $u(t)$, $0 \le t \le T$, при которых область достижимости объекта Y поглощается кругом обнаружения объекта X:

$$D(T) \subseteq G(x(T)) . \tag{6}$$

З а д а ч а 1.1. Для заданного начального положения $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in R^3$ и заданных начальных кругов обнаружения G_0 и неопределённости D_0, найти число $T > 0$ и допустимое управление $u(t)$ объекта X на интервале $[0, T]$, для которых при любом начальном положении y^0 объекта Y в круге неопределённости D_0 (3) и любом допустимом управлении $\mathrm{v}(t)$ на интервале $[0, T]$ выполняется условие поглощения (6), т.е. гарантируется обнаружение (5) в некоторый момент $t^* > 0$, не позднее времени T : $t^* \le T$.

Для заданной начальной позиции $\{x^0, G_0, D_0\}$ управление $u(t)$ – решение задачи 1.1 – назовём гарантирующим, а время T – гарантированным временем поиска или обнаружения. Если скорость расширения круга обнаружения больше, чем скорость расширения области неопределённости искомого объекта, т.е.

$$CU > V , \tag{7}$$

то задача 1.1 имеет множество решений. Для выделения единственного решения естественно наложить ещё требование оптимальности, например, времени поиска, т.е. рассмотреть задачу 1.2.

З а д а ч а 1.2. Для заданного начального положения $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in R^3$ и заданного круга неопределённости D_0 найти гарантирующее управление $u(t)$, при котором гарантированное время обнаружения искомого объекта T минимально.

В §1.2 излагается методика построения гарантирующих управлений, основанная на трактовке задачи гарантированного поиска как задачу построении управлений, при которых круг обнаружения ищущего объекта в первый момент поглощает расширяющийся во времени круг неопределённости искомого объекта. Не нарушая общности, рассматривается случай, когда центр начального круга неопределённости (3) искомого объекта совпадает с началом декартовой системы координат Ox_1x_2, а центр круга обнаружения ищущего объекта находится в точке $(R_0, 0)$, $R_0 > l_0 + r_0$, на оси Ox_1 и $l_0 > r_0$ (рис. 2). Пусть $A_X (A_Y)$ и $B_X (B_Y)$, соответственно, левая и правая

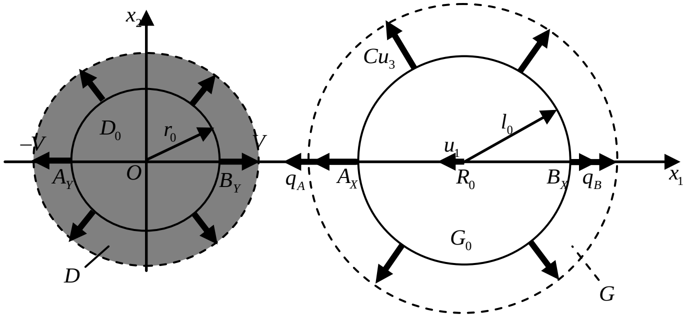

Рис. 2

точки пересечения круга обнаружения G_0 (круга неопределённости D_0) с осью Ox_1 при $l_0 > r_0$ (рис. 2). Для осуществления поглощения (6) X должен двигаться с такой скоростью $u = (u_1, u_2, u_3)$, чтобы точки круга обнаружения A_X и B_X перемещались вдоль оси Ox_1 (т.е. $u_2 = 0$). При этом скорости точек A_X и B_X будут, соответственно, $q_A = u_1 - Cu_3$ и $q_B = u_1 + Cu_3$, где u_1 – управляющая скорость перемещения центра круга G по оси Ox_1, u_3 – управляющая скорость изменения радиуса круга G. В соответствии с этим, необходимым и достаточным условием поглощения круга неопределённости кругом обнаружения является существование такого момента времени $T > 0$ и управлений u_1, u_3, при которых выполняются соотношения:

$$q_A T + R_0 - l_0 \le -VT - r_0, \quad q_A = u_1 - Cu_3 \tag{8}$$

$$q_B T + R_0 + l_0 \ge VT + r_0, \quad q_B = u_1 + Cu_3, \tag{9}$$

Из (8) следует, что если управления u_1, u_3 удовлетворяют систему

$$-u_1 + Cu_3 - V > 0, \quad -u_1 - Cu_3 + V \le 0, \quad u_1^2 + u_3^2 \le U^2, \tag{10}$$

то условие поглощения (6) имеет место при любом $T \in [T^-, +\infty)$, где найденная из равенства (8) величина

$$T^- = (R_0 - l_0 + r_0)(-u_1 + Cu_3 - V)^{-1} > 0 \tag{11}$$

– это момент, начиная с которого точка A_X оказывается левее левой точки A_Y.

Если

$$-u_1 + Cu_3 - V > 0, \quad -u_1 - Cu_3 + V > 0, \quad u_1^2 + u_3^2 \le U^2, \tag{12}$$

то из равенства (9) можно определить конечный момент времени

$$T^+ = (R_0 + l_0 - r_0)(-u_1 - Cu_3 + V)^{-1} > 0, \tag{13}$$

при котором B_Y пока ещё находится не правее точки B_X.

Если при параметрах R_0, r_0, l_0 и U, V, C (7) и управлениях u_1, u_3, удовлетворяющих систему (12), выполняется также неравенство $T^- \le T^+$, которое после несложных преобразований приобретает вид

$$R_0(Cu_3 - V) \ge (l_0 - r_0)u_1, \tag{14}$$

то система (8), (9), а значит и условие поглощения (6) имеет место при любом $T \in [T^-, T^+]$.

В обоих случаях (10) и ((12), (14)) время (11) является первым моментом поглощения, т.е. гарантированным временем поиска или обнаружения, а область

$$H = \bigcup_{i=1}^{3} H_i, \tag{15}$$

где через H_1, H_2, H_3 (рис. 3) обозначены области на плоскости управляющих параметров u_1 и u_3, каждая точка которых удовлетворяет систему неравенств (10), ((12), (14), $Cu_3 - V \ge 0$), ((12), (14), $Cu_3 - V < 0$) соответственно, определяет область гарантирующих управлений задачи 1.1.

Как следует из рис. 3, при $R_0 \to \infty$ линия $u^M(R_0)u^Q$, для которой координаты точки $u^M(R_0)$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1^M(R_0) &= \left[-\alpha V - C\sqrt{\left(\alpha^2 + C^2\right)U^2 - V^2}\right]\left(\alpha^2 + C^2\right)^{-1}, \quad \alpha = (l_0 - r_0)/R_0, \\ u_3^M(R_0) &= \left(U^2 - \left[u_1^M(R_0)\right]^2\right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{16}$$

вращается вокруг точки u^Q по часовой стрелке и стремится к положению $u^N u^Q$. При $R_0 \to l_0 + r_0$ линия $u^M(R_0)u^Q$ вокруг точки u^Q вращается против часовой стрелки и

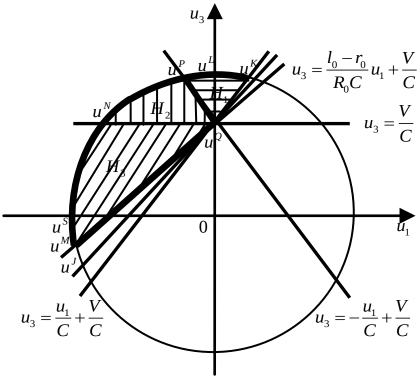

Рис. 3

стремится к положению линии $u^J u^Q$, где $u^J\,(u_1^J, u_3^J)$ – точка пересечения прямой $u^M(R_0)u^Q$ с окружностью $u_1^2 + u_3^2 = U^2$ при $R_0 = l_0 + r_0$. В случаях $l_0 < r_0$ и $l_0 = r_0$ область (15) строится аналогичным образом (рис. 4, 5). При $R_0 \to \infty$ (рис. 4) линия $u^M(R_0)u^Q$ вращается вокруг точки u^Q против часовой стрелки и стремится к положению $u^N u^Q$, а при $R_0 \to l_0 + r_0$ - по часовой стрелке стремится к линии $u^J u^Q$, лежащей между линиями $u^N u^Q$ и $u^P u^Q$.

Таким образом, X обнаруживает Y не позже момента $T^-(u_1, u_3)$ (11), двигаясь при управлении $u = (u_1, 0, u_3)$, $(u_1, u_3) \in H$ (15).

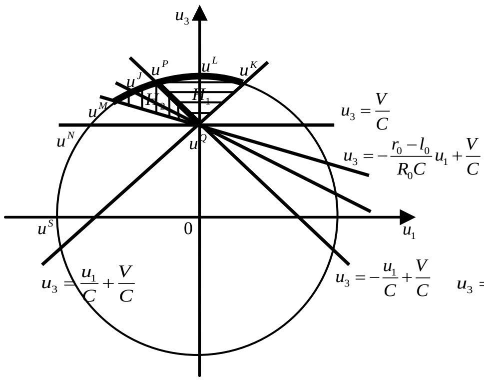

Рис. 4

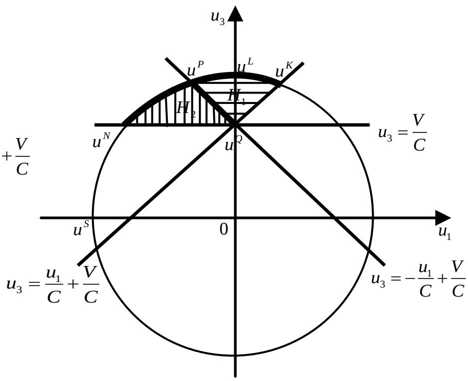

Рис. 5

В §1.3 решается задача нахождения оптимальных гарантирующих управлений в построенных областях (15), доставляющих минимум гарантированному времени поиска (11):

$$T^{\min} = \min_{(u_1,u_3)\in H} T^-(u_1,u_3) = \min_{(u_1,u_3)\in H} (R_0 - l_0 + r_0)(-u_1 + Cu_3 - V)^{-1}. \qquad (17)$$

Так как $\operatorname{grad}\varphi(u_1,u_3) = (-1, C)$, $C > 0$, где $\varphi(u_1,u_3) = -u_1 + Cu_3 - V$, то задача (17) сводится к следующей задаче

$$\varphi(u_1,u_3) = -u_1 + Cu_3 \to \max_{u_1,u_3}, \qquad (u_1,u_3) \in u^M(R_0)u^L, \qquad (18)$$

где $u^M(R_0)u^L$ – часть круговой границы $u^M(R_0)u^K$ области гарантирующих управлений (15) с граничной точкой $u^M(R_0)$, зависящей от соотношений между параметрами задачи R_0, l_0, r_0, C, U, V.

В пп. 1.3.1, 1.3.2 приводятся полное решение задачи (18) в случаях $l_0 > r_0$, $l_0 < r_0$ и $l_0 = r_0$. Так как функция $\varphi(u_1, u_3) = -u_1 + Cu_3$ максимального значения на окружности $u_1^2 + u_3^2 = U^2$ достигает в точке

$$u^* = (u_1^*, u_3^*), \quad u_1^* = -U\left(1+C^2\right)^{-1/2}, \quad u_3^* = CU\left(1+C^2\right)^{-1/2}, \; C > 0, \quad u^* \in u^S u^L, \qquad (19)$$

то в зависимости от параметров задачи, либо $u^* \in u^M(R_0)u^L$, либо $u^* \in u^S u^M(R_0)$. В первом случае точка (19) является оптимальной в задаче (17): $u^{\min} = u^*$, а во втором случае оптимальной является граничная точка $u^M(R_0)$ (16) дуги $u^S u^M(R_0)$: $u^{\min} = u^M(R_0)$. Совпадение точек (16) и (19) имеет место при контрольном начальном расстоянии

$$R_0^* = U(l_0 - r_0)\left(V\sqrt{1+C^2} - C^2U\right)^{-1}, \; r_0 + l_0 < R_0^* < \infty, \qquad (20)$$

играющем определяющую роль в вычислении оптимальных гарантирующих управлений, которые в зависимости от соотношений между физическими и геометрическими параметрами задачи для случая $l_0 > r_0$, в частности, имеют вид:

$$u_{1,3}^{\min} = \begin{cases} u_{1,3}^* \; (u^* \in u^N u^L), \text{ при } l_0 + r_0 < R_0 < \infty, \text{ если } 0 < V \le C^2\left(1+C^2\right)^{-1/2} U, \\ u_{1,3}^* \; (u^* \in u^M(R_0)u^N), \text{ при } l_0 + r_0 < R_0 \le R_0^*, \text{ если } C^2\left(1+C^2\right)^{-1/2} U < V < CU, \\ u_{1,3}^M(R_0), \; (u^* \in u^S u^M(R_0)), \text{ при } R_0^* < R_0 < \infty, \text{ если } C^2\left(1+C^2\right)^{-1/2} U < V < CU. \end{cases}$$

В главе 2 рассматривается поисковая система, в которой ищущий и искомый объекты управляются по ускорению, а начальное состояние искомого объекта известно с точностью до заданного множества в пространстве координат и скоростей. Ставится и решается задача оптимального по минимальному гарантированному времени динамического поиска искомого объекта.

В §2.1 приводится описание поисковой динамической системы, состоящей из двух точечных объектов X и Y, из которых первый – ищущий, совершающий управляемое по ускорению пространственное движение, а второй – искомый, совершающий управляемое по ускорению горизонтальное движение. Используя обозначение $x_3' = x_3 - gt^2/2$ (с дальнейшим опусканием штриха), где g – ускорение свободного падения, уравнения движения объектов зададим в виде

$$X: \; \ddot{x} = w_X, \quad x(0) = x^0, \; \dot{x}(0) = 0, \quad x, w_X \in R^3, \quad |w_X(t)| \le W_X, \quad t \ge 0, \qquad (21)$$

$$Y: \; \ddot{y} = w_Y, \quad y(0) = y^0, \; \dot{y}(0) = \dot{y}^0, \quad y, w_Y \in R^2, \quad |\dot{y}(t)| \le V_Y, \quad |w_Y(t)| \le W_Y, \quad t \ge 0. \qquad (22)$$

Здесь w_X, w_Y – векторы управляющих ускорений объектов X, Y, а W_X, W_Y – их максимально возможные ускорения соответственно.

Предположим, что к начальному моменту времени объекту X доступна полная информация о соотношениях (21), (22) за исключением начального состояния $(y^0, \dot{y}^0)$ искомого объекта Y. Задано лишь, что

$$(y^0, \dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0, \ D_0 = \{y^0 \in R^2 : \left| y^0 - y_c^0 \right| \le r_0\}, \ \dot{D}_0 = \{\dot{y}^0 \in R^2 : \left| \dot{y}^0 \right| \le V_Y\}, \qquad (23)$$

причем множество неопределенности $D_0 \times \dot{D}_0$ известно объекту X. Возможность обнаружения искомого объекта описывается посредством информационного множества (4), зависящего от текущего фазового вектора $x(t)$ (рис. 1). Объект Y считается обнаруженным в первый момент t^*, в который выполняется включение (5) – условие попадания Y в круг обнаружения (4), которое гарантированно выполнимо, если существует момент времени (гарантированный) T, $T \ge t^*$ и допустимое управление (гарантирующее) $w_X(t)$, $0 \le t \le T$ объекта X, при которых выполняется условие поглощения

$$D(T, D_0 \times \dot{D}_0) \subseteq G(x(T)) \qquad (24)$$

Здесь $D(T, D_0 \times \dot{D}_0)$ – область неопределенности искомого объекта на плоскости (y_1, y_2) в момент T, т.е. совокупность концов $y(T) = (y_1(T), y_2(T))$ всех траекторий системы (22), начинающихся в начальный момент в точках начального множества неопределенности (23) и построенных с помощью всевозможных кусочно-непрерывных ограниченных управляющих ускорениях $w_Y(t)$, $0 \le t \le T$, при соблюдении ограничения на скорость (22).

Пусть множество гарантирующих управлений не пусто. Тогда каждому гарантирующему управлению соответствует траектория системы (21), по которой объект X из начального состояния покоя (21) переходит в некоторое состояние за время $T(x^0, w_X, w_Y, y^0, \dot{y}^0)$ такое, что выполняется условие поглощения (24).

З а д а ч а 2.1. Найти минимальное гарантированное время быстродействия $T^*(x^0)$ и допустимое управление w_X^*, доставляющее минимум

$$T^*(x^0) = \min_{|w_X| \le W_X} \max_{|w_Y| \le W_Y} \max_{(y^0, \dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0} T(x^0, w_X, w_Y, y^0, \dot{y}^0) . \qquad (25)$$

В §2.2 излагается способ сведения задачи 2.1(оптимального гарантированного поиска) к задаче оптмального быстродействия с подвижным правым концом. Полагается, что центр круга неопределенности D_0 совпадает с началом декартовой системы координат Ox_1x_2, а ищущий объект в начальный момент времени с нулевой скоростью (21) находится в точке с координатами $x_1^0 = R_0 > 0$, $x_2^0 = 0$, $x_3^0 = 0$, т.е. начальный круг обнаружения представляет собой точку $x_c^0 = (R_0, 0)$ на оси Ox_1:

$$D_0 = \left\{(y_1, y_2) : \ y_1^2 + y_2^2 \le r_0^2\right\}, \qquad G_0 = (R_0, 0), \qquad R_0 > r_0 . \qquad (26)$$

Установлено, что для осуществления условия поглощения (24), ищущий объект должен строить управление поиском с расчетом на то, что искомый объект в начальный момент времени находится на границе области неопределенности (26):

$$y^0 \in \partial D_0 = \left\{(y_1, y_2) : \ y_1^2 + y_2^2 = r_0^2\right\}, \qquad (27)$$

имеет начальную скорость, направленная по радиусу круга D_0 в сторону от центра:

$$\dot{y}^0 = (\dot{y}_1^0, \dot{y}_2^0) = \left(V_Y y_1^0 r_0^{-1}, V_Y y_2^0 r_0^{-1}\right) \tag{28}$$

и движется с нулевым ускорением:

$$w_Y(\tau) \equiv 0, \; 0 \le \tau \le t \,, \tag{29}$$

что обеспечивает расширение границы круга неопределенности с наибольшей скоростью V_Y, т.е.

$$r(t) = r_0 + tV_Y \,. \tag{30}$$

Такой подход гарантирует успешный поиск, так как управление поиском строится с расчетом на движение искомого объекта в любом, в том числе наихудшем для ищущего объекта, направлении. Таким образом, вместо условия (24) достаточно рассматривать следующее условие

$$D_T = D(T, \partial D_0 \times \partial \dot{D}_0) = \left\{(y_1, y_2): \; y_1^2 + y_2^2 = (r_0 + V_Y T)^2\right\} \subset G(x(T)) \,. \tag{31}$$

Из геометрии взаимного расположения двух окружностей следует, что одно из допустимых расположений $G(x(T))$ и D_T, отвечающее условию поглощения (31), является расположение, характеризуемое следующими условиями:

$$D_T = \left\{(y_1, y_2): \; y_1^2 + y_2^2 = r^2(T)\right\}, \quad G_T = \left\{(x_1, x_2): \; (x_1 - R(T))^2 + x_2^2 = l^2(T)\right\}, \tag{32}$$

$$R(T) \ge 0, \quad R(T) = l(T) - r(T) \,. \tag{33}$$

При переходе расширяющегося во времени круга обнаружения из начального положения (26) в конечное положение (32) в момент $t = T$, условие (33) в переменных x_1, x_3 запишется в следующем виде:

$$x_1(T) \ge 0 \,, \quad x_1(T) = Cx_3(T) - r_0 - V_Y T \,. \tag{34}$$

Если ввести фазовые переменные $\dot{x}_i = v_i$ и записать уравнения (21) относительно x_i, v_i в виде

$$\dot{x}_i = v_i \,, \quad \dot{v}_i = w_{Xi} \,, \; i = 1,2,3 \,, \tag{35}$$

то придем к следующей задаче оптимального управления.

З а д а ч а 2.2. Найти управляющее ускорение $w_X^*(t) = (w_{X1}^*(t), w_{X2}^*(t), w_{X3}^*(t))$ (21), обеспечивающее приведение объекта X (35) из заданного начального состояния

$$x_1(0) = R_0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0; \quad v_1(0) = 0, \quad v_2(0) = 0, \quad v_3(0) = 0 \tag{36}$$

на множество

$$S(x(T), T) = \left\{ x \in R^3: \begin{array}{c} g_1(x(T), T) = x_1(T) \ge 0, \qquad g_2(x(T), T) = x_2(T) = 0, \\ g_3(x(T), T) = x_1(T) - Cx_3(T) + r_0 + V_Y T = 0 \end{array} \right\} \tag{37}$$

за минимальное время T.

В §2.3 получено полное решение задачи оптимального по быстродействию управления (35)–(37) с закрепленным левым (36) и подвижным правым (37) концами. Методом принципа максимума Понтрягина найдены минимальное гарантированное время (25) обнаружения искомого объекта и соответствующие оптимальные гарантирующие управления $w_{X1}^*, w_{X2}^*, w_{X3}^*$:

$$T^*(R_0)=\begin{cases} T_2^{\min}(R_0), & \text{если} \quad r_0 < R_0 < R_0^+, \\ T_1^{\min}(R_0), & \text{если} \quad R_0^+ \le R_0 < \infty, \end{cases} \tag{38}$$

$$w_{X1}^*(R_0)=\begin{cases} (-\mu_1+\mu_3)W_X\left[(-\mu_1+\mu_3)^2+C^2\mu_3^2\right]^{-1/2}, & \text{если} \quad R_0\in\left(r_0,\, R_0^+\right), \\ -W_X\left(1+C^2\right)^{-1/2}, & \text{если} \quad R_0\in\left[R_0^+,\, \infty\right), \end{cases}$$

$$w_{X2}^*(R_0)=0, \tag{39}$$

$$w_{X3}^*(R_0)=\begin{cases} -C\mu_3W_X\left[(-\mu_1+\mu_3)^2+C^2\mu_3^2\right]^{-1/2}, & \text{если} \quad R_0\in\left(r_0,\, R_0^+\right), \\ -CW_X\left(1+C^2\right)^{-1/2}, & \text{если} \quad R_0\in\left[R_0^+,\, \infty\right), \end{cases}$$

где

$$R_0^+=\left[W_XC^2r_0+V_Y^2\sqrt{1+C^2}+\sqrt{2W_Xr_0V_Y^2C^2\sqrt{1+C^2}+V_Y^4(1+C^2)}\right]\left(W_XC^4\right)^{-1}, \tag{40}$$

$$T_1^{\min}(R_0)=\left[V_Y+\sqrt{\left(V_Y\right)^2+2W_X(R_0+r_0)\sqrt{1+C^2}}\right]\left[W_X\left(1+C^2\right)^{1/2}\right]^{-1}, \tag{41}$$

$T_2^{\min}(R_0)$ – минимальный положительный корень уравнения $\left|w_X^*(T)\right|=W_X$:

$$-T^4+4V_Y^2C^{-2}W_X^{-2}T^2+8r_0V_YC^{-2}W_X^{-2}T+4(C^2R_0^2+r_0^2)C^{-2}W_X^{-2}=0, \quad R_0\in(r_0,\, R_0^+), \tag{42}$$

а постоянные множители Лагранжа $\mu_1\left(T_2^{\min}(R_0)\right)<0$, $\mu_3\left(T_2^{\min}(R_0)\right)<0$, $R_0\in\left(r_0,\, R_0^+\right)$ – решения краевой задачи принципа максимума:

$$\mu_1=A_\mu\mu_3, \qquad A_\mu=\left[r_0+V_YT_2^{\min}(R_0)-C^2R_0\right]\left[r_0+V_YT_2^{\min}(R_0)\right]^{-1}, \tag{43}$$

$$\mu_3=-V_YB^{-1}-\sqrt{\left(V_YB^{-1}\right)^2+B^{-1}}, \qquad B=\left[W_XT_2^{\min}(R_0)\right]^2\left[(A_\mu-1)^2+C^2\right]-V_Y^2.$$

В §2.4 приведены результаты численного расчета оптимальных управлений и гарантированного времени для системы (21)–(23) со следующими параметрами:

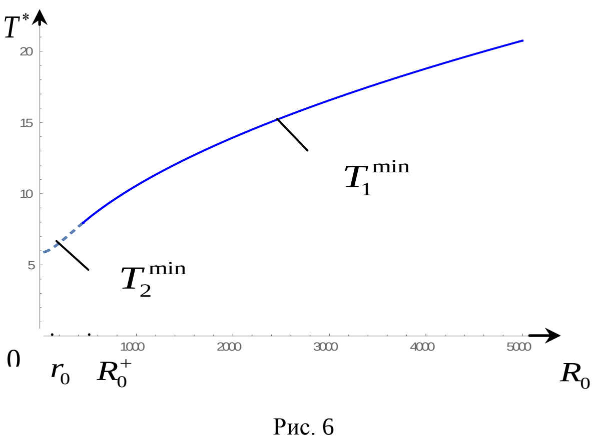

Рис. 6

$W_X = 20$ мсек$^{-2}$, $V_Y = 50$ мсек$^{-1}$, $r_0 = 50$ м, $C = 1$. Расчёт оптимального времени поиска (38) и соответствующих управлений (39) по разработанному алгоритму производится по следующей последовательности: 1) вычисляется значение $R_0^+ = 447.937$ м по формуле (40), 2) строится зависимость оптимального гарантированного времени $T^*(R_0)$, $R_0 \in (r_0, \infty)$ (38) с помощью зависимостей $T_1^{\min}(R_0)$ (41) и решения $T_2^{\min}(R_0)$ уравнения (42)(рис. 6), 3) определяются зависимости множителей $\mu_1\left(T_2^{\min}(R_0)\right)$ (рис. 7) и $\mu_3\left(T_2^{\min}(R_0)\right)$ (рис. 8) от параметра $R_0 \in \left(r_0, R_0^+\right)$, путем использования формул (43), 4) вычисляются оптимальные гарантирующие управления $w_{X1}^*(R_0)$ (рис. 9) и $w_{X3}^*(R_0)$ (рис. 10) по формулам (39).

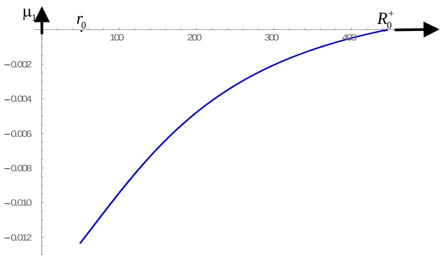

Рис. 7

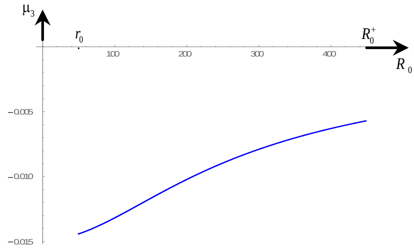

Рис. 8

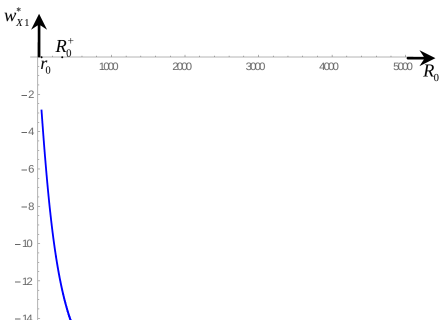

Рис. 9

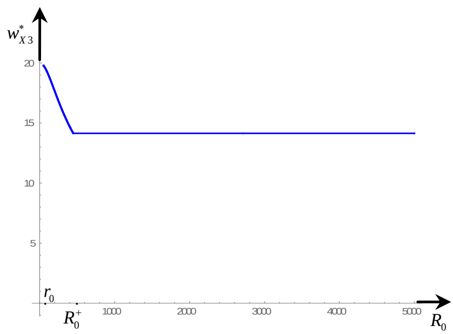

Рис. 10

В главе 3 задача динамического поиска, рассмотренная в предыдущей главе, исследуется при дополнительном геометрическом ограничении, запрещающем ищущему объекту подниматься свыше заданной допустимой высоты.

В § 3.1 описанная в § 2.1 поисковая система рассматривается с дополнительным ограничением на вертикальную координату ищущего объекта X. Уравнения движения этой системы запишем в следующей координатной форме:

$$X: \quad \ddot{x}_1 = w_{X1}, \quad \ddot{x}_2 = w_{X2}, \quad \ddot{x}_3 = w_{X3} - g, \tag{44}$$

$$x_1(0) = R_0,\;\; x_2(0) = 0,\quad x_2(0) = 0;\quad \dot{x}_1(0) = 0,\quad \dot{x}_2(0) = 0,\;\; \dot{x}_3(0) = 0, \tag{45}$$

$$|w_X(t)| \le W_X,\quad w_X = (w_{X1}, w_{X2}, w_{X3})^{\mathrm{T}},\;\; t \ge 0, \tag{46}$$

$$0 \le x_3(t) \le h,\quad t \ge 0, \tag{47}$$

$$Y:\;\; \ddot{y}_i = w_{Yi},\quad y_i(0) = y_i^0,\quad \dot{y}_i(0) = \dot{y}_i^0,\;\; i = 1,2, \tag{48}$$

$$|\dot{y}(t)| \le V_Y,\;\; |w_Y(t)| \le W_Y,\;\; t \ge 0,\;\; y = (\dot{y}_1, \dot{y}_2)^{\mathrm{T}},\;\; w_Y = (w_{Y1}, w_{Y2})^{\mathrm{T}}. \tag{49}$$

Информированность объекта X и возможность обнаружения искомого объекта Y те же, что во второй главе. Ставится следующая задача гарантированного поиска.

З а д а ч а 3.1. Для заданного начального состояния (45) и круга неопределенности D_0 (26), найти число $T > 0$ и управление $w_X(t)$ (46) движением объекта X на интервале $[t_0, T]$, для которых при любом начальном состоянии $(y^0, \dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0$ (23) объекта Y и любом управлении $w_Y(t)$ (49) на интервале $[t_0, T]$ гарантируется условие обнаружения (5) в некоторый момент t^*, не позднее времени T : $t^* \le T$, без нарушения условия (47).

Для решения поставленной задачи, как и в главе 2, рассматривается случай, когда искомый объект в начальный момент находится на границе области неопределенности (27), имеет начальную вектор–скорость (28) и движется с нулевым ускорением (29), т.е. радиус круга неопределенности возрастает по линейному закону (30). Однако, при наличии ограничения (47), в задаче гарантированного поиска, в том числе оптимального гарантированного поиска, реализация разработанного в главе 2 подхода – осуществления условия поглощения (24) с помощью управлений ищущего объекта (39) – в ряде случаев, в зависимости от значений начальных параметров поисковой системы, представляется невозможным, так как ограничивается возможность расширения круга обнаружения, необходимого для осуществления поглощения расширяющейся с максимальной скоростью V_Y области неопределённости искомого объекта. Вследствие этого, для решения задачи 3.1 при условиях (27)–(30) предлагается подход, состоящий в построении комбинированного управления ищущего объекта, позволяющего осуществить многоэтапный поиск искомого объекта с последующим его обнаружением.

В §3.2 решается задача быстрейшего достижения объекта X максимальной высоты с конечной нулевой скоростью.

З а д а ч а 3. 2. Найти управляющие ускорения $w_{Xi}^*(t)$, $t \in [0, t_1]$, $i = 1,2,3$ (46), обеспечивающие перемещение объекта X (44) из заданного начального состояния покоя (45) в заданное терминальное состояние покоя

$$x_1(t_1) = R_0,\quad x_2(t_1) = 0,\quad x_3(t_1) = h,\quad \dot{x}_1(t_1) = 0,\quad \dot{x}_2(t_1) = 0,\quad \dot{x}_3(t_1) = 0, \tag{50}$$

за минимальное время t_1.

Эта задача является двухточечной задачей оптимального быстродействия, решение которой имеет вид:

$$w_{X1}^* = w_{X2}^* = 0,\quad 0 \le t \le t_1,\quad w_{X3}^* = \begin{cases} W_X, & 0 \le t < \tau_1, \\ -W_X, & \tau_1 \le t \le t_1, \end{cases} \tag{51}$$

$$t_1 = 2W_X \left(W_X + g\right)^{-1} \tau_1 , \qquad \tau_1 = \sqrt{h(W_X + g)\left[W_X (W_X - g)\right]^{-1}} . \tag{52}$$

При этом в момент $t = t_1$ круг обнаружения принимает следующую форму:

$$G(t_1) = \left\{(x_1, x_2):\ (x_1 - R_0)^2 + x_2^2 = l^2(t_1),\ \ l(t_1) = Cx_3(t_1) = Ch \ \right\}, \tag{53}$$

а искомый объект в момент $t = t_1$ может находиться в любой точке окружности

$$D(t_1) = \left\{(y_1, y_2):\ y_1^2 + y_2^2 = r_1^2\right\}, \quad r_1 = r(t_1) = r_0 + V_Y t_1 . \tag{54}$$

В §3.3 решается задача быстрейшей стыковки круга обнаружения, при нулевой его скорости, с кругом неопределенности. Находясь в момент $t = t_1$ на допустимо максимальной высоте с нулевой скоростью в состоянии (50), объект X на промежутке времени $t_1 \le t \le t_2$ осуществляет прямолинейное горизонтальное движение по оси Ox_1 в направлении к центру круга неопределенности до первого момента $t = t_2$ соприкосновения круга обнаружения $G(t_2)$ с кругом неопределенности $D(t_2)$. Так как на промежутке времени $t_1 \le t \le t_2$ искомый объект продолжает движение с максимальной по модулю скоростью V_Y, то в момент $t = t_2$ он может оказаться в любой точке границы круга неопределенности

$$D(t_2) = \left\{(y_1, y_2):\ y_1^2 + y_2^2 = r_2^2\right\}, \tag{55}$$

где радиус r_2 с учетом (30), (54) вычисляется следующим образом:

$$r_2 = r(t_2) = r_1 + V_Y (t_2 - t_1) = r_0 + V_Y t_2 . \tag{56}$$

Отсюда следует, что требуемое выше движение ищущего объекта можно реализовать с помощью вектора управления $w_X^* = (w_{X1}^*(t), w_{X2}^*(t), w_{X3}^*(t))$, в котором второй и третий компоненты задаются в виде

$$w_{X2}^*(t) = 0 ,\ w_{X3}^*(t) = g , \quad t_1 \le t \le t_2 , \tag{57}$$

а первый компонент определяется из решения следующей задачи оптимального по быстродействию управления.

З а д а ч а 3.3. Найти оптимальное управление $w_{X1}^*(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, которое при заданных постоянных управлениях (57) удовлетворяет (с учетом (46)) ограничению

$$\left|w_{X1}^*(t)\right| \le \sqrt{W_X^2 - g^2} , \qquad t_1 \le t \le t_2 \tag{58}$$

и обеспечивает перемещение объекта X из состояния покоя (50) в конечное состояние покоя

$$x_1(t_2) = r_0 + V_Y t_2 + Ch,\ \ x_2(t_2) = 0,\ \ x_3(t_2) = h,\ \ \dot{x}_1(t_2) = 0,\ \ \dot{x}_2(t_2) = 0,\ \ \dot{x}_3(t_2) = 0 \tag{59}$$

за минимальное время $t_2 - t_1$.

Отметим, что первые два граничные условия в (59), которые с учетом (55), (56) можно записать также в виде $x_1(t_2) = r_2 + Ch = y_1(t_2) + Ch$, $x_2(t_2) = y_2(t_2) = 0,$ выражают ситуацию соприкосновения окружностей G и D в момент t_2 .

Так как, при заданных управлениях (57) движение системы (44) (с краевыми условиями (50) и (59)) по координатам x_2, x_3 не происходит, то задача 3.3 является одномерной, относительно координаты x_1, задачей оптимального быстродействия с правым подвижным концом. Решая ее, как двухточечную задачу оптимального быстродействия, получим аналитические выражения для оптимального управления и соответствующего минимального времени перемещения:

$$w_{X1}^{*} = \sqrt{W_X^2 - g^2}\, sign\left\{\left[\left(t_2 + t_1\right)/2 - t\right]\left(r_0 + V_Y t_2 + Ch - R_0\right)\right\}, \qquad (60)$$

$$t_2 = t_1 + 2\left[-V_Y\left(W_X^2 - g^2\right)^{-1/2} + \sqrt{V_Y^2\left(W_X^2 - g^2\right)^{-1} + \left(R_0 - Ch - r_0 - V_Y t_1\right)\left(W_X^2 - g^2\right)^{-1/2}}\right], \qquad (61)$$

в которых t_1 вычисляется согласно (52).

Таким образом, в момент $t = t_2$, в состоянии (59) объекта X, окружность круга обнаружения

$$G(t_2) = \left\{(x_1, x_2) : [x_1 - x_1(t_2)]^2 + x_2^2 = l^2(t_2),\ l(t_2) = Cx_3(t_2) = Ch\right\} \qquad (62)$$

имеет касание снаружи с окружностью круга неопределенности (55), (56).

В §3.4 рассмотрена вспомогательная задача нахождения условия, выполнение которого позволяет построить алгоритм успешного поиска, излагаемый в следующем параграфе. Начиная с момента $t = t_2$ ищущий объект поиск осуществляет с постоянным радиусом круга обнаружения $l = Cx_3(t) \equiv Ch$, $t \ge t_2$, двигаясь по горизонтальной плоскости $x_3 = h$. Такое движение X осуществляет при

$$w_{X3}^{*}(t) \equiv g, \qquad t \ge t_2. \qquad (63)$$

Из сказанного следует, что рассмотрению подлежит только плоское движение объекта X, задаваемое первыми двумя уравнениями (44). Введя полярную систему координат (ρ, φ, O) с полюсом в центре круга неопределенности и полярной осью, проходящей через центр круга обнаружения и имеющий в момент $t = t_2$ координаты (59), уравнения плоского движения ищущего объекта (44) в полярных координатах ρ, φ примут следующий вид:

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = w_\rho, \qquad d(\rho\dot{\varphi})/dt = w_\varphi, \qquad (64)$$

где w_ρ и w_φ, соответственно, радиальное и тангенциальное составляющие ускорения объекта X при его плоском движении и которые связаны с компонентами w_{X1}, w_{X2} следующими соотношениями:

$$w_{X1} = w_\rho \cos\varphi - w_\varphi \sin\varphi, \qquad w_{X2} = w_\rho \sin\varphi + w_\varphi \cos\varphi. \qquad (65)$$

С учетом (63), (65), ограничение на модуль управляющего ускорения (46) и начальные условия (59) запишутся, соответственно, в виде

$$\sqrt{w_{X1}^2 + w_{X2}^2} = \sqrt{w_\rho^2 + w_\varphi^2} \le \sqrt{W_X^2 - g^2}, \qquad t \ge t_2, \qquad (66)$$

$$\rho(t_2) = r_2 + Ch,\ \ \dot{\rho}(t_2) = 0,\ \ \varphi_2(t_2) = 0,\ \ \dot{\varphi}(t_2) = 0. \qquad (67)$$

Найдены удовлетворяющие ограничению (66) управления $w_\rho(t)$ и $w_\varphi(t)$ круговым движением, с радиусом $\rho(t_2) = const$, ищущего объекта

$$w_\rho(t) = \begin{cases} \varepsilon_0^2\left(t - t_2\right)^2 \rho^{-1}(t_2), & t_2 \le t \le \tau, \\ \varepsilon_0^2\left(-t + 2\tau - t_2\right)^2 \rho^{-1}(t_2), & \tau \le t \le t_*. \end{cases} \qquad (68)$$

$w_\varphi = \varepsilon_0 sign\left\{2\pi\left[\left(t_* + t_2\right)/2 - t\right]\right\}$, $\quad \tau = \left(t_* + t_2\right)/2$**,** $\quad t_* = t_2 + 2\sqrt{2\pi\rho(t_2)\varepsilon_0^{-1}}$.

при которых за минимальное время $t_* - t_2$ центр круга обнаружения из состояния покоя (67) после полного оборота вокруг полюса переходит в состояние покоя

$$\rho(t_*) = r_2 + Ch, \quad \dot\rho(t_*) = 0, \quad \varphi_2(t_*) = 0, \quad \dot\varphi(t_*) = 0. \tag{69}$$

Тем временем, искомый объект, находящийся в момент $t = t_2$ в некоторой точке окружности $D(t_2)$ (55) и движущийся с максимальной скоростью V_Y при $t \ge t_2$, за время $t_* - t_2$ пройдет расстояние $V_Y(t_* - t_2)$ и в момент $t = t_*$ может находиться на максимальном расстоянии от начала координат, т.е. в некоторой точке окружности $D(t_*) = \left\{(y_1, y_2):\ y_1^2 + y_2^2 = r_*^2\right\}$ с радиусом $r_* = r_2 + V_Y(t_* - t_2)$. Отсюда и из (68) следует, что объект Y не может избегать обнаружения, если выполняется условие

$$V_Y\sqrt{2\pi\rho(t_2)\varepsilon_0^{-1}} < Ch . \tag{70}$$

В §3.5, в предположении, что условие (70) выполняется, излагается алгоритм многоэтапного комбинированного управления завершением поиска, суть которого состоит в следующем. С момента $t = t_2$, оставляя тангенциальное ускорение равным нулю: $w_\varphi = 0$ и используя (с учетом (65) управления

$$w_{X1}^*(t) = -\sqrt{W_X^2 - g^2}\, sign\left\{\left[\left(t_3 + t_2\right)/2 - t\right]\Delta x_1^{(1)}\right\}, \quad w_{X2}^*(t) = 0, \quad w_{X3}^*(t) = g , \tag{71}$$

$$t_2 \le t \le t_3 , \qquad t_3 = t_2 + 2\sqrt{\Delta x_1^{(1)}\left(W_X^2 - g^2\right)^{-1/2}}$$

ищущий объект, двигаясь по оси Ox_1 в направлении полюса O, переходит из состояния покоя (67)((59)) в состояние покоя

$$x_1(t_3) = \rho(t_3) = \rho(t_2) - \Delta x_1^{(1)}, \quad \dot x_1(t_3) = 0, \quad x_2(t_3) = 0, \quad \dot x_2(t_3) = 0, \tag{72}$$

осуществляя перемещение $\Delta x_1^{(1)}$ (определяемое ниже) за минимальное время $t_3 - t_2$. За это время круг неопределенности искомого объекта со скоростью V_Y расширяется и к моменту $t = t_3$ его радиус достигает значения

$$r(t_3) = r_3 = r_2 + V_Y(t_3 - t_2) . \tag{73}$$

Затем, из состояния (72) ищущий объект с помощью управлений

$$w_\varphi = \varepsilon_0 sign\left\{2\pi\left[\left(t_4 + t_3\right)/2 - t\right]\right\}, \qquad w_\rho(t) = \begin{cases} \varepsilon_0^2\left(t - t_3\right)^2\rho^{-1}(t_3), & t_3 \le t \le \tau_4, \\ \varepsilon_0^2\left(-t + 2\tau_4 - t_3\right)^2\rho^{-1}(t_3), & \tau_4 \le t \le t_4, \end{cases} \tag{74}$$

$$w_{X3}^*(t) = g, \quad t_4 = t_3 + 2\sqrt{2\pi\rho(t_3)\varepsilon_0^{-1}}, \quad \tau_4 = \left(t_3 + t_4\right)/2, \quad t_3 \le t \le t_4 .$$

осуществляет круговое, с радиусом $\rho(t_3) = \rho(t_2) - \Delta x_1^{(1)}$, движение из состояния покоя (72) в конечное состояние покоя

$$\rho(t_4) = \rho(t_3) = \rho(t_2) - \Delta x_1^{(1)}, \quad \dot\rho(t_4) = 0, \quad \varphi(t_4) = 2\pi, \quad \dot\varphi(t_4) = 0 \tag{75}$$

за минимальное время $t_4 - t_3$.

Величина $\Delta x_1^{(1)}$ в (71) – (75) определяется из следующего уравнения:

$$r_3+(t_4-t_3)V_Y=r_2+2Ch-\Delta x_1^{(1)}\,, \tag{76}$$

$$\Delta x_1^{(1)}\in\left(0,\ \left[-V_Y\sqrt{\left(W_X^2-g^2\right)^{-1/2}}+\sqrt{V_Y^2\left(W_X^2-g^2\right)^{-1/2}+2Ch}\right]^2\right)$$

Установлено, что при условии (70) решение уравнения (76) относительно $\Delta x_1^{(1)}$ единственно и определяет то перемещение $\Delta x_1^{(1)}$, после которого ищущий за время t_4-t_3 полного оборота вокруг полюса O обнаруживает искомый объект, если последний движется с максимальной скоростью из любой точки границы круга неопределенности с радиусом: $r(t_3)=r_3=r_2+2V_Y\sqrt{\Delta x_1^{(1)}\left(W_X^2-g^2\right)^{-1/2}}$.

Если ни в какой момент $t^*, t_2\le t^*\le t_4$ обнаружение (5) искомого объекта не происходит, то реализация ищущим объектом комбинированного управления (71), (74) за время t_4-t_2 приводит к уменьшению радиуса области неопределенности $r_2=r(t_2)$ на величину $\Delta x_1^{(1)}$: $0<\Delta x_1^{(1)}<Ch<r_2$, т.е. в момент $t=t_4$ область неопределенности искомого объекта содержится в круге с радиусом $r_4=r(t_4)=r_2-\Delta x_1^{(1)}>0$, $0<r_4<r_2$. Тогда процесс комбинированного управляемого поиска повторяется до тех пор, пока в одном из последующих этапов не выполняется условие обнаружения (5).

Для поисковой системы (44)-(49), (26) со следующими размерными параметрами: $W_X=100$ мс$^{-2}$, $V_Y=5$ мс$^{-1}$, $r_0=25$ м, $h=50$ м, $R_0=5000$ м, $g=9.8$ мс$^{-2}$, $C=1$, по разработанному алгоритму проводилось численное моделирование процесса гарантированного поиска. Результаты расчетов показали, что с момента t_2 процесс поиска с последующим обнаружением искомого объекта осуществляется в три этапа с применением комбинированного управления в виде управлений (71), (74), отнесенных каждому этапу $[t_{2n},t_{2n+2}]$, $n=1,2,3$:

этап-1

$$15{,}38\text{с}=t_2\le t\le t_4=30{,}72\text{с},\ \ \Delta x_1^{(1)}=23.29\text{м},\ \ r_4=r_2-\Delta x_1^{(1)},\ \ r_2=101{,}90\text{м}\to r_4=78{,}61\text{м},$$

этап-2

$$30{,}72\text{с}=t_4\le t\le t_6=44{,}31\text{с},\ \ \Delta x_1^{(2)}=32.04\text{м},\ \ r_6=r_4-\Delta x_1^{(2)},\ \ r_4=78{,}62\text{м}\to r_6=46{,}58\text{м},$$

этап-3

$$44{,}31\text{с}=t_6\le t\le t_8=54{,}43\text{с}=T,\ \ \Delta x_1^{(3)}=49{,}44\text{м},\ \ r_8=r_6-\Delta x_1^{(3)},\ \ r_6=46{,}57\text{м}\to r(t_8)=0.$$

Из таблицы следует, что область неопределенности искомого объекта после каждого этапа сужается (радиус круга, содержащего эту область, уменьшается) и в конце третьего этапа исчезает – поглощается кругом обнаружения, т.е. обнаружение искомого объекта происходит не позже гарантированного времени поиска $T=t_8=54{,}43\text{с}$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Для поисковой системы из двух, управляемых по скорости, объектов: ищущего и искомого, разработана методика решения задачи гарантированного, в том числе оптимального по минимальному времени, поиска. При этом:

- предложен подход, сводящий задачу гарантированного поиска к задаче построения множеств гарантирующих управлений, обеспечивающих поглощение расширяющегося во времени круга неопределённости искомого объекта кругом обнаружения ищущего объекта за конечное время в зависимости от различных соотношений между физическими и геометрическими параметрами поисковой системы;
- графоаналитическим способом решена задача нахождения оптимальных гарантирующих управлений в построенных множествах и получены формулы для вычисления соответствующих минимальных гарантированных времен.

2. Для поисковой системы объектов, управляемых по ускорению, разработана методика решения задачи оптимального по минимальному гарантированному времени обнаружения искомого объекта, состоящая из следующих этапов:

- путем минимаксного подхода исходная задача сведена к задаче оптимального по быстродействию управления с подвижным правым концом;
- методом принципа максимума получено ее полное аналитическое решение – оптимальное гарантирующее управление, и при конкретных значениях параметров поисковой системы, путем численного моделирования получена расчетная зависимость минимального гарантированного времени поиска от начального расстояния между центров кругов обнаружения и неопределенности.

3. Для динамической модели поисковой системы при геометрических ограничениях на вертикальную координату ищущего объекта рассмотрена задача построения управления движением ищущего объекта, гарантирующего обнаружение искомого объекта за конечное время, решение которой в рамках минимаксного подхода опирается на последовательном использовании решений следующих подзадач:

- построение оптимального по быстродействию управления достижением ищущего объекта максимальной высоты с нулевой скоростью;
- построение управления прямолинейным движением, на максимальной высоте, ищущего объекта для быстрейшей стыковки круга обнаружения, при нулевой его скорости, с кругом неопределенности искомого объекта, расширяющегося с максимальной скоростью;
- разработка алгоритма комбинированного управления и установление условий на геометрические и физические параметры поисковой системы, при которых, двигаясь по соответствующей траектории, состоящей из прямолинейных участков и криволинейных участков в виде окружностей с монотонно убывающими радиусами, ищущий объект поэтапно сужает круг неопределенности, что приводит к обнаружению искомого объекта за конечное время.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян В.В., Степанян В.С. К задаче оптимального гарантированного поиска подвижного объекта на плоскости // Труды YIII международной конференций “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”. Ереван. Изд. “Чартарапет”. 2014. Том. 1. С. 10-15.
2. Аветисян В.В., Степанян В.С. Оптимальный по минимальному гарантированному времени поиск подвижного объекта на плоскости // Известия НАН РА. Механика. 2015. Т. 60. № 1. С. 68-80.
3. Аветисян В.В., Степанян В.С. Применение принципа максимума Понтрягина к задаче оптимального гарантированного поиска движущегося объекта // Труды IY международной конференции ‘’Актуальные проблемы механики сплошной среды’’. 21-21 сентября 2015 г., Цахкадзор, Армения. С. 10-14.
4. Степанян В.С. Сведение задачи оптимального гарантированного поиска движущегося объекта к задаче оптимального быстродействия с подвижным концом // Труды IY международной конференции ‘’Актуальные проблемы механики сплошной среды’’. 21-26 сентября 2015г. Цахкадзор. Армения. С. 390-394.
5. Аветисян В.В., Степанян В.С. Оптимальный гарантированный динамический поиск подвижного объекта на плоскости // Известия НАН РА. Механика. 2015. Т. 68. № 4. С. 45-61.
6. Avetisyan V.V., Stepanyan V.S. Combined control of guaranteed search for a moving object with geometric constraints // Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. Vol. 69(2016). Issue 1. P. 53-65.

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ատենախոսությունը նվիրված է հարթության վրա շարժվող օբյեկտի երաշխավորված փնտրման ղեկավարման, ինչպես նաև օպտիմալ ղեկավարման ալգորիթմների կառուցման խնդիրներին: Աշխատանքը բաղկացած է ներածությունից, երեք գլխից, վերջաբանից և գրականության ցանկից:

Ներածությունում բերված են ատենախոսության թեմային առնչվող գրականության վերլուծությունը, հիմնավորված է թեմայի արդիականությունը, ձևակերպված է ուսումնասիրության նպատակը:

Առաջին գլխում ուսումնասիրվել է հարթության վրա արագությամբ ղեկավարվող շարժական օբյեկտի օպտիմալ ըստ նվազագույն երաշխավորված ժամանակի փնտրման խնդիրը, երբ հայտնի է միայն, որ սկզբնական պահին որոնելի օբյեկտը գտնվում է տրված շրջանում: Որպես փնտրող է դիտարկվել եռաչափ տարածության մեջ արագությամբ ղեկավարվող օբյեկտը: Հայտնաբերումը՝ որոնելի օբյեկտի կոորդինատների որոշումն իրականցվում է շարժական կոնի հայտնաբերման շրջանային հիմքի միջոցով, որի գագաթը կապված է փնտրող օբյեկտի ընթացիկ դիրքի հետ: Առաջարկված է երաշխավորող ղեկավարումների կառուցման մի եղանակ, համաձայն որի երաշխավորված փնտրման խնդիրը դիտարկվում է որպես այնպիսի

ղեկավարումների կառուցման խնդիր, որոնց դեպքում փնտրող օբյեկտի հայտնաբերման շրջանը առաջին պահին կլանում է որոնելի օբյեկտի՝ ժամանակի ընթացքում ընդարձակվող անորոշության շրջանը, ինչը երաշխավորում է որոնելի օբյեկտի հայտնաբերումն իրականացնել վերջավոր ժամանակում: Հայտնաբերման և անորոշության շրջանների սկզբնական շառավիղների հարաբերությունների տարբեր դեպքերի համար փնտրող օբյեկտի արագության վեկտորի բաղադրիչների հարթության մեջ կառուցված են տիրույթներ, որոնց յուրաքանչյուր կետին համապատասխանում է որոնելի օբյեկտի հայտնաբերման երաշխավորված ժամանակ: Կառուցված տիրույթներում էքստրեմալ խնդիրների լուծման հայտնի մեթոդներով գտնված են օպտիմալ ըստ նվազագույն երաշխավորված ժամանակի փնտրման ղեկավարումների և համապատասխան ժամանակների բացահայտ տեսքերը, կախված փնտրման համակարգի ֆիզիկական և երկրաչափական պարամետրերի տարբեր փոխադարձ հարաբերակցություններից:

Երկրորդ գլխում հետազոտվել է առաջին գլխում դիտարկված փնտրման համակարգն այն էական տարբերությամբ, որ փնտրող և որոնելի օբյեկտները ղեկավարվում են արագացմամբ և փնտրվող օբյեկտի սկզբնական վիճակը կոորդինատների և արագությունների տարածության մեջ հայտնի է տրված բազմության ճշտությամբ: Դիտարկվել է փնտրող օբյեկտի մոդուլով սահմանափակ ղեկավարող արագացման որոշման խնդիրը, որի դեպքում ոչ ուշ, քան նվազագույն երաշխավորված ժամանակը բավարարվում է որոնելի շարժական օբյեկտի հայտնաբերման պայմանը: Դրված խնդրի լուծման համար օգտագործվել է մինիմաքսային մոտեցում, որը թույլ է տվել երաշխավորված հայտնաբերման սկզբնական խնդիրը ուսումնասիրել այն դեպքի համար, երբ որոնելի օբյեկտը ժամանակի սկզբնական պահին գտնվում է անորոշության շրջանի եզրին և մաքսիմալ արագությամբ շարժվում է կենտրոնից դուրս ուղղված շառավղի ուղղությամբ, ինչն ապահովում է անորոշության տիրույթի ընդարձակումն առավելագույն արագությամբ: Վերջինով, փնտրման սկզբնական խնդիրը՝ մեծագույն արագությամբ ընդարձակվող անորոշության տիրույթի հնարավորինս արագ կլանման իրագործումը, բերվել է շարժական աջ ծայրակետով օպտիմալ ըստ արագագործության ղեկավարման խնդրին, որի ամբողջական լուծումը տրվել է Պոնտրյագինի մաքսիմումի սկզբունքի միջոցով: Շարադրվել է օպտիմալ երաշխավորող ղեկավարման կոնստրուկտիվ հաշվարկի ալգորիթմը և բերվել է փնտրման նվազագույն երաշխավորված ժամանակի՝ հայտնաբերման և անորոշության շրջանների կենտրոնների սկզբնական հեռավորությունից կախվածության թվային հաշվարկի արդյունքները:

Երրորդ գլխում փնտրման համակարգի դինամիկ մոդելը դիտարկվել է լրացուցիչ երկրաչափական սահմանափակման դեպքում, որը փնտրող օբյեկտին թույլ չի տալիս տարածական շարժման ընթացքում խախտել թույլատրելի բարձրությունը: Դրվել է փնտրող օբյեկտի կողմից վերջավոր ժամանակում որոնելի օբյեկտին հայտնաբերելու երաշխավորող ղեկավարման կառուցման

խնդիրը: Մշակվել է ղեկավարման համակցված ալգորիթմ, ինչպես նաև ստացվել է բավարար պայման փնտրման համակարգի ֆիզիկական և երկրաչափական պարամետրերի համար, որի դեպքում եռաչափ տարածության մեջ տրված մեծագույն բարձրությամբ շարժվելիս և ղեկավարվելով առաջարկված ալգորիթմով, փնտրող օբյեկտը վերջավոր ժամանակի ընթացքում երաշխավորված հայտնաբերում է որոնելի օբյեկտին: Բացահայտ տեսքով կառուցված ղեկավարումները փնտրող օբյեկտին թույլ են տալիս իրագործել բազմափուլ որոնողական շարժում տարածական մի հետագծով, բաղկացած ուղղագիծ հատվածներից և կորագիծ հատվածներից՝ մոնոտոն նվազող շառավիղներով շրջանագծերի տեսքով, որի արդյունքում տեղի է ունենում որոնելի օբյեկտի անխուսափելի հայտնաբերումը: Ստացվել է փնտրման ամբողջական պրոցեսի երաշխավորված ժամանակի հաշվման բանաձև: Խնդրի ֆիզիկական և երկրաչափական պարամետրերի տրված արժեքների դեպքում կատարվել է փնտրման համակարգի դինամիկայի թվային մոդելավորում, որի արդյունքներն հաստատել են ղեկավարման առաջարկված ալգորիթմի գործնական արդյունավետությունը

Vahan S. Stepanyan

OPTIMIZATION OF CONTROL BY GUARANTEED SEARCH OF MOVING OBJECT

SUMMARY

This thesis is dedicated to algorithms' construction for control (as well as optimal control) of guaranteed search for moving object on a plane. It consists of introduction, three chapters, summary and bibliography.

Introduction contains bibliography related to the subject of this thesis, novelty substantiation of the subject and the definition of the research purpose.

The first chapter involves the problem of time-optimal guaranteed search for a velocity-controlled object moving on a plane when it is known that at the starting moment the target object is located in a given disk. The searching object is considered to be a velocity-controlled object moving in a three-dimensional space. Discovery (defined as determination of the target object's coordinates) is implemented via base detector-disk of a moving cone whose apex's coordinates are current coordinates of the searching object. A way of guaranteeing control development is suggested where the guaranteed search problem is interpreted as a problem of finding controls, such that in that case the detection disk of the searching object absorbs the target object's uncertainty disk expanding in time which guarantees the discovery of the target object in finite time. For various relations of initial radii of the detection and the uncertainty disks, regions are constructed in a plane of the searching object's velocity vector components, such that every point in the regions corresponds to a time of the target object's discovery. In the constructed regions with known solution methods of extreme problems, explicit forms of time-optimal guaranteed search

controls and corresponding times are found depending on interrelation of physical and geometrical parameters of the searching system.

In the second chapter, the searching system from the first chapter is investigated, but with such a significant difference that the searching and the target objects are controlled by acceleration (acceleration-controlled) and that the target object’s initial state is known up to a given set from coordinates-velocity space. The determination of the searching object’s controlling acceleration (limited by absolute value) is observed, such that the discovery condition of the moving target object is satisfied no later than the minimal guaranteed time. For the stated problem, a minimax approach is used which allows the exploration of the initial guaranteed search problem for the case, when at the starting moment the target object is located on the verge of the uncertainty disk and has maximal velocity directed radially away from the center which ensures expansion of the uncertainty disk with maximal rate. This reduces the initial problem of fastest possible absorption of the expanding uncertainty disk to an optimal control problem with free right end. The full solution is given using Pontryagin’s Maximum Principle.

The algorithm of constructive calculation for optimal guaranteed control was stated and the results of numerical calculation of minimum guaranteed search time dependency against initial distance between centers of the detection and the uncertainty disks is given.

In the third chapter, the dynamic model of the searching system is considered with additional geometric constraint, which limits the height of the searching object during the spatial movement. Construction of control for guaranteed search of target object by the searching object within a finite time has been stated. A hybrid algorithm has been developed, and sufficient condition for physical and geometrical parameters of the search system has been obtained, where the searching object will guaranteedly find the target object in finite time, while moving with the suggested algorithm in the three-dimensional space with given limited height. Explicitly built controls allow the searching object to implement a multi-step search motion with a spatial trajectory which consists of linear and curvilinear segments in form of circles with monotonically decreasing radii. As a result, the target object is inevitably discovered. The equation for calculation of the complete search process’s duration has been obtained. The results of numeric simulation of the dynamics of the search system, for given values of problem's physical and geometrical parameters confirmed the practical effectiveness of the proposed control algorithm.

Summary contains the primary results of the thesis.