

Институт механики
Национальной академии наук Армении

на правах рукописи

ЗАКАРЯН ВАГЕ ГРИШАЕВИЧ

**ПРОДОЛЬНЫЙ СДВИГ СОСТАВНОГО УПРУГОГО
ПРОСТРАНСТВА И ПОЛУПРОСТРАНСТВА С
КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ РАЗЛИЧНОГО
ТИПА**

01.02.04. – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата физико – математических наук

Научный руководитель:
доктор физико – математических наук
К.Л.АГАЯН

ЕРЕВАН – 2016

Содержание

| | |
|---|-----------|
| Введение | 4 |
| ГЛАВА I. КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СОСТАВНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ ТИПА ТРЕЩИН, ВКЛЮЧЕНИЙ И ШТАМПОВ. | 12 |
| §1.1 Продольный сдвиг составного полупространства, содержащего трещины и включения..... | 12 |
| 1. Постановка задачи и построение разрывного решения. | 13 |
| 2. Вывод определяющей системы интегральных уравнений | 22 |
| 3. Исследование и построение решения определяющей системы уравнений. | 28 |
| 4. Численный анализ | 34 |
| §1.2 Антиплоская контактная задача для упругого составного полупространства с трещиной и штампом..... | 38 |
| 1. Постановка задачи и вывод разрешающих уравнений. | 38 |
| 2. Исследование определяющей системы интегральных уравнений и ее решение. . | 43 |
| 3. Численный анализ..... | 45 |
| §1.3 Продольный сдвиг составного полупространства с штампом и включением | 49 |
| 1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений. | 49 |
| 2. Численный анализ..... | 53 |
| ГЛАВА II. ПРОДОЛЬНЫЙ СДВИГ СОСТАВНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ТРЕЩИНАМИ, ВКЛЮЧЕНИЯМИ И СТРИНГЕРАМИ. | 55 |
| §2.1 Две параллельные трещины (включения) в упругом полупространстве с бесконечным усиливающим слоем..... | 55 |
| 1. Постановка задачи и построение решения основных уравнений | 55 |
| 2. Вывод определяющей системы уравнений для одного частного случая. | 60 |

| | |
|--|-----|
| §2.2 Контактная задача для упругого полупространства с трещинами и накладками при антиплоской деформации. | 71 |
| 1. Постановка задачи и построение функции влияния..... | 71 |
| 2. Система определяющих уравнений контактной задачи..... | 76 |
| 3. Частный случай задачи..... | 77 |
| | |
| ГЛАВА III. ПРОДОЛЬНЫЙ СДВИГ СОСТАВНОГО УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА С ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ И ТРЕЩИНАМИ | 82 |
| | |
| §3.1 Построение разрывных решений антиплоской задачи для двухкомпонентного составного упругого пространства с трещинами и включениями | 82 |
| 1. Постановка задачи..... | 83 |
| 2. Построение разрывного решения. | 85 |
| 3. Вывод определяющей системы уравнений. | 88 |
| §3.2 Численный анализ некоторых частных случаев. | 89 |
| Частный случай 1. | 90 |
| Частный случай 2. | 93 |
| Частный случай 3. | 95 |
| | |
| §3.3 Антиплоское напряженное состояние кусочно – однородного пространства с трещинами и жесткими включениями. | 98 |
| 1. Постановка задачи и построение разрывного решения | 98 |
| 2. Частный случай задачи..... | 106 |
| | |
| Краткие выводы | 110 |
| | |
| Литература | 112 |

Введение

Теоретическое и прикладное значение контактных и смешанных задач теории упругости в области механики деформируемого твердого тела общеизвестно. В последнее время, благодаря как отечественным, так и зарубежным ученым, теория контактных и смешанных задач достигла колоссального прогресса, обогащаясь новыми фундаментальными результатами. Это, в значительной мере, связано с вопросами определения напряженно–деформированного состояния различных элементов и деталей современных инженерных сооружений и конструкций, содержащих, по тем или иным причинам, концентраторы напряжений типа трещин, отверстий и угловых точек, инородных накладок и включений, штампов и т.д. Во время эксплуатации конструкции вокруг концентраторов напряжений, как правило, возникают локальные поля напряжений с быстро возрастающими градиентами, которые, в конечном итоге приводят к местному или глобальному разрушению конструкции. Очевидно, что вследствие взаимовлияния, напряженное состояние вокруг разнородных концентраторов напряжений, которые могут быть и конструктивного характера, существенно зависит от их взаимного расположения. С этой точки зрения, исследование напряженного состояния массивных тел, содержащих концентраторы напряжений, как в целом, так и в непосредственной окрестности концевых точек концентраторов является актуальной проблемой как с теоретической, так и с практической точки зрения. Исследование этих вопросов было и сейчас остается одним из основных направлений в теории смешанных и контактных задач и механики разрушения. Это в значительной мере относится и к задачам теории упругости, в которых исследуются вопросы, связанные с определением взаимовлияния концентраторов напряжений на напряженно – деформированное состояние в составных упругих телах.

Исследование и решение этих вопросов является сложной математической проблемой, для преодоления которой разработаны методы, которые находят свое применение и в других областях математической физики. основополагающие результаты в этой области отражены в известных монографиях И.Я.Штаермана [103], Л.А.Галина [36], Н.И.Мусхелишвили [68,69], А.И.Лурье [58], Я.С.Уфлянда [93], Г.Я.Попова [78], Н.Ф.Морозова [66] и в фундаментальных статьях [46, 52, 56, 62,88, 90, 102].

В развитие теории контактных и смешанных задач значительный вклад, несомненно, внесли представители армянской школы механики под руководством академика Н.Х.Арутюняна. Из огромного числа работ армянских механиков в этой области отметим работы Б.Л.Абрамяна [1,2], Б.Л.Абрамяна, Н.Х.Арутюняна и А.А.Баблюяна [3], Н.Х.Арутюняна [24], Н.Х.Арутюняна и С.М.Мхитаряна [26, 107], А.А.Баблюяна [27, 28], В.С.Саркисяна [86, 87], В.С.Тонояна [91, 92], К.С.Чобаняна [98], А.М.Мкртчяна [63], С.М.Мхитаряна [71, 72], Э.Х.Григоряна [42], В.С.Макаряна [59], В.Н.Акопяна [10], А.В.Саакяна [84, 116], К.Л.Агаяна [7, 8], Л.А.Шекияна [101], а также работы [4-6, 9, 12, 23, 37, 47, 48, 61, 64, 73, 83, 94, 100, 113, 116].

Многие основополагающие результаты в области контактных и смешанных задач, связанных с определением напряженно–деформированного состояния деформируемых твердых тел, которые, в частности, содержат трещины, разрезы, тонкостенные включения и накладки, изложены в коллективных монографиях [18, 60, 80], в монографиях В.М.Александрова, В.И.Сметанина и Б.В.Соболя [22], В.М.Александрова, С.М.Мхитаряна [20], Н.Х.Арутюняна и А.В.Манжирова [25], А.О.Ватульяна [32], И.И.Воровича В.М.Александрова и В.А.Бабешко [34], Э.И.Григолюка и В.М.Толкачева [40], В.Т.Гринченко и В.В.Мелешко [44], В.И.Острика и А.Ф.Улитко [76], В.В.Панасюка, М.П.Саврука, А.П.Дацышин [77], Г.Я.Попова [78, 79], Г.П.Черепанова [95], а также в книгах и монографиях [19, 21, 30, 35, 36, 38, 43, 45, 51, 53, 55, 57, 65, 67, 78, 79, 82, 89, 114].

Учитывая наличие огромного числа библиографического материала по тематике настоящей диссертации, здесь укажем лишь на работы непосредственно связанные с нашим исследованием и касающихся определения напряженно–деформированного состояния массивных однородных и составных упругих тел, содержащих трещину, на берегах которых заданы смешанные условия, а по свободным поверхностям взаимодействуют со штампами и накладками. В этом направлении следует отметить работы Д.И.Шермана [102], Н.И.Мусхелишвили [68], Г.П.Черепанова [96, 97], Сендерса [117], Грейфа Р., Блума Дж и Сендерса мл [39, 111]. Многие интересные и важные задачи из этой области рассмотрены в работах [11-14, 15-17, 49, 50, 70, 72, 75, 85, 89, 106, 108-110].

Обращаясь теперь к диссертационной работе, заметим, что в последние десятилетия сформировалось и бурно развивается новое научное направление в теории кон-

тактных и смешанных задач, ставящее своей целью исследование взаимовлияния различных типов концентраторов напряжений в виде трещин, стрингеров и штампов между собой и с массивными деформируемыми телами. Учет указанных взаимодействий концентраторов напряжений часто приводит к новым постановкам контактных и смешанных задач, качественно изменяет характер концентрации напряжений, существенно влияет на показатели особенности и на распределение напряжений в окрестности концевых точек зоны контакта. В настоящей диссертационной работе, на примере решения конкретных задач по исследованию вопросов взаимовлияния концентраторов напряжений различного типа с массивными телами при разных их расположениях, в определенной степени, развивается указанное научное направление. Она посвящена исследованию антиплоского напряженно–деформированного состояния однородных и составных массивных тел, моделированных в виде составного пространства и полупространства, содержащих концентраторы напряжений типа трещин, жесткого включения, стрингеров и штампов. В ней решения поставленных задач методом интегрального преобразования Фурье, при помощи сочетания методов разрывных решений уравнений теории упругости, сингулярных интегральных уравнений и численно–аналитического метода механических квадратур, поставлены и построены эффективные решения некоторых нестандартных контактных и смешанных задач теории упругости для составных упругих полупространств и пространств, содержащих концентраторы напряжения разного типа.

Вкратце остановимся на изложении содержания диссертационной работы. Она состоит из трех глав и кратких выводов.

Первая глава диссертации посвящена исследованию антиплоских контактных задач для кусочно – однородного полупространства, составленного из бесконечного слоя и полупространства с различными механическими характеристиками. Слой и полупространство содержат концентраторы напряжений какого-либо типа (трещина, тонкое жесткое включение, соединенное с массивным телом или по обоим граням, или только по одной), занимающие конечные отрезки одной линии, перпендикулярной к линии раздела материалов.

В первом параграфе, при помощи обобщенного преобразования Фурье построено разрывное решение задачи для кусочно-однородного полупространства, т.е. получены представления единственной компоненты перемещения и соответствующих танген-

циальных напряжений через возможные скачки касательных напряжений и перемещений при переходе через отрезки, занимаемые концентраторами. Для случая, когда концентраторами напряжений являются трещины, решение задачи сведено к системе из двух сингулярных интегральных уравнений первого рода относительно неизвестных скачков производных перемещений через линию трещин. Ядра интегральных уравнений представлены в виде суммы ядер Коши, слагаемых, которые, в определенных случаях, могут преобразоваться в неподвижную особенность, и регулярной части. Последняя представлена в виде быстросходящегося ряда. Применительно к этому случаю достаточно подробно представлен алгоритм решения определяющей системы уравнений методом механических квадратур.

Во втором и третьем параграфах рассмотрены задачи, когда на свободной поверхности слоя действует ленточный штамп конечной длины. Здесь также решение задачи сведено к системе сингулярных интегральных уравнений относительно контактного напряжения под штампом и скачка производной перемещений берегов трещины или скачка тангенциальных напряжений, действующих по обе стороны жесткого включения.

Во всех случаях проведено исследование разрешающей системы по выявлению возможных особенностей, присущих решениям системы. Решения определяющих систем построены методом механических квадратур. Результаты представлены в виде графиков и таблиц.

В второй главе рассматриваются контактные задачи продольного сдвига для упругого полупространства. В первом параграфе исследуется напряженно – деформированное состояние упругого полупространства с усиливающим упругим бесконечным слоем конечной толщины, содержащего два параллельных концентратора напряжений конечной длины, выходящих под прямым углом на линию раздела материалов. Внешние воздействия приложены к берегам трещин или непосредственно к включениям, а также на свободной поверхности слоя. Построены разрывные решения для этого случая. Для двух частных случаев, когда полупространство содержит один концентратор в виде жесткого тонкого включения, соединенного с полупространством только по одной стороне, и такого же включения, соединенного с полупространством по обоим сторонам, решение задачи доведено до численной реализации.

Во втором параграфе рассматривается антиплоская контактная задача о передаче нагрузки от системы тонких упругих пластин (накладок) к упругому полупространству, которое содержит систему из конечного числа параллельных концентраторов конечных длин, перпендикулярных к границе полуплоскости. Построена функция влияния для рассматриваемой области в условиях антиплоской задачи. В рамках известной модели Мелана для накладок, решение задачи сведено к системе сингулярных интегральных уравнений с определенными условиями. Рассмотрены частные случаи и проведен численный анализ.

Третья глава посвящена исследованию антиплоского напряженно-деформированного состояния составного упругого пространства, содержащего разнонаправленные концентраторы напряжений типа трещины и жесткого включения. Предполагается, что кусочно-однородное упругое пространство состоит или из двух разных упругих полупространств, или из двух разных полупространств, соединенных посредством бесконечного упругого слоя из другого материала. Изменением геометрических и физических параметров и выбором типа концентратора из полученных общих решений поставленных задач можно получить определяющие системы уравнений многих интересных задач.

В первом параграфе рассматривается задача для двухкомпонентного пространства, содержащего две трещины конечной длины, которые расположены на одной линии, перпендикулярной к линии раздела материалов, и находятся в разных полупространствах, а также жесткое тонкое включение, расположенное на линии раздела материалов и соединенное только с нижним полупространством. Внешняя нагрузка задается на берегах вертикальных трещин и на верхнем берегу межфазовой трещины, образуемой над включением. Решение задачи сведено к системе из четырех интегральных уравнений. Во втором параграфе рассмотрены некоторые частные случаи поставленной задачи и получены численные результаты. В третьем параграфе рассматривается похожая задача для трехкомпонентного составного пространства. Предполагается, что две вертикальные трещины расположены в полупространствах, а на обеих линиях раздела материалов имеются горизонтальные межфазовые включения-трещины. Построено общее решение задачи. Для одного частного случая составлена определяющая система сингулярных интегральных уравнений и построено ее решение методом механических квадратур.

В кратких выводах изложены основные результаты и выводы диссертационной работы.

Научную новизну полученных в диссертации результатов можно сформулировать следующим образом:

1. В строгой математической постановке поставлен и решен ряд новых антиплоских смешанных задач теории упругости для составных полупространства и пространства, содержащих один или несколько прямолинейных концентраторов напряжений типа трещины, тонкого жесткого включениями, штампа и упругой накладки.
2. Построены разрывные решения для кусочно-однородных двухкомпонентных полупространств и трехкомпонентного полупространства при различных комбинациях расположения друг относительно друга конечного числа концентраторов напряжений разного типа. Полученные решения позволяют непосредственно выписать разрешающие уравнения для большого числа конкретно поставленных задач.
3. Построены функции влияния для полупространства с конечным числом параллельных трещин и жестких включений и решена антиплоская контактная задача о передаче нагрузки от произвольного числа коллинеарных разнородных упругих стрингеров к однородной полуплоскости, содержащей конечное число параллельных концентраторов напряжений, расположенных перпендикулярно к ее границе.
4. Получено уравнение для определения показателя особенности в контактной задаче, когда так называемая „трещина отслоения” выходит на линию раздела материалов.
5. Методом механических квадратур построены решения поставленных задач содержащие в явном виде особенности, присущие каждой задаче, и в случаях, когда концентраторы напряжений перпендикулярно выходят на линию раздела материалов, свободную границу или на другой концентратор. Эти задачи отличаются тем, что сводятся к решению систем сингулярных интегральных уравнений с обобщенным ядром Коши.
6. Для всех рассмотренных частных случаев проведен достаточно подробный численный анализ и выявлены зависимости взаимосмещения берегов трещин и тангенциальных напряжений на сторонах включения, под штампами и упругими накладками, а также коэффициентов их концентрации от геометрических параметров и отношения модулей сдвига составляющих материалов.

В диссертационной работе метод интегрального преобразования Фурье с методом разрывных решений были с успехом применены для решения нового класса контактных и смешанных задач теории упругости в антиплоской постановке, способствуя тем самым дальнейшему развитию метода разрывных решений, методов исследования и решения сингулярных интегральных уравнений.

Полученные в диссертационной работе результаты могут служить основой для развития аналитических, численных и приближенных методов расчета аналогичных плоских задач теории упругости для массивных однородных и составных тел, содержащих одновременно несколько концентраторов напряжений разных типов, и других родственных задач математической физики. Достоверность полученных результатов обеспечена корректным применением строгого математического аппарата.

С точки зрения практического применения полученных в диссертации результатов заметим, что они могут быть использованы при расчетах прочностных характеристик многих инженерных конструкций и их деталей, содержащих разрезы и включения, для качественной оценки их надежности и долговечности.

Результаты диссертации регулярно докладывались на научных семинарах соответствующих подразделений Института механики НАН Армении. Работы были также доложены на международных конференциях «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред» (22-25 сентября, 2014, Горис – Степанакерт, Армения), «6th Contemporary Problems in Architecture and Construction» (24-27 июня, 2014, Острава, Чехия), «Актуальные проблемы механики сплошной среды» (21-26 сентября, 2015, Цахкадзор, Армения).

Диссертационная работа в целом обсуждена на совместном заседании отделов «Динамика деформируемых систем и связанные поля» и «Теория упругости, ползучести и пластичности» Института механики НАН Армении и на общем семинаре Института механики НАН РА.

Основные положения, выносящиеся на защиту:

1. Постановка задач, методика вывода, исследования и решения разрешающих систем уравнений ряда новых антиплоских смешанных контактных задач для кусочно–однородных полупространств и пространств с примыкающими друг к другу концентраторами напряжений типа трещин, включений, штампов и упругих накладок.

2. Построение разрывных решений для составного полупространства с расположенными на одной линии, перпендикулярно к линии раздела материалов, прямолинейными концентраторами напряжений и кусочно-однородного пространства, содержащего, помимо указанных, еще и жесткие включения, расположенные на линиях раздела материалов и соединенные только с одним из них.
3. Построение функций влияния для полупространства с конечным числом параллельных трещин и жестких включений.
4. Решение антиплоской контактной задачи о передаче нагрузки от произвольного конечного числа коллинеарных разнородных упругих накладок к однородной полуплоскости, содержащей конечное число параллельных трещин конечной длины, расположенных перпендикулярно к ее границе.
5. Примененный подход к построению решений поставленных задач позволяет непосредственно выписать определяющие интегральные уравнения для задач с определенным взаимным расположением концентраторов напряжений при всевозможных, корректно поставленных, граничных условиях на них.
6. Исследование характера распределения контактных напряжений под штампом, когда конец трещины или жесткого включения, содержащихся в слое, приближается к ленточному штампу на границе составного полупространства.
7. Исследование и численный анализ разрешающих уравнений при помощи метода механических квадратур и выявление зависимостей искомых скачков тангенциальных напряжений и смещений, имеющих место на концентраторах, от геометрических параметров поставленных задач и отношения модулей сдвига материалов в случае составного массивного тела.
8. Методика построения решения поставленных задач с успехом может быть использована для постановки и решения родственных задач в рамках плоской теории упругости.

ГЛАВА I. КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СОСТАВНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ ТИПА ТРЕЩИН, ВКЛЮЧЕНИЙ И ШТАМПОВ.

В настоящей главе рассматриваются антиплоские контактные задачи для кусочно – однородного (составного) упругого полупространства, составленного из бесконечно-го упругого слоя и полупространства с разными упругими характеристиками. Слой и полупространство соединены между собой и находятся в условиях полного контакта. Предполагается, что слой и полупространство ослаблены туннельными (магистральными) трещинами, расположенными на одной линии, перпендикулярной к линии раздела материалов. При общих (однотипных и смешанных) граничных условиях на берегах трещин рассмотренные задачи математически формулируются в виде сингулярных интегральных уравнений с обобщенным ядром Коши, решение которых строится численно – аналитическим методом механических квадратур.

Рассматриваются также случаи, когда на свободной поверхности слоя действует жесткий ленточный штамп конечной длины.

§1.1 Продольный сдвиг составного полупространства, содержащего трещины и включения

Исследуется антиплоская смешанная задача о контактном взаимодействии упругого бесконечного слоя конечной толщины и упругого полупространства, ослабленных туннельными трещинами. Трещины расположены на одной линии перпендикулярной к линии раздела материалов. Получена определяющая система сингулярных интегральных уравнений, ядра которых представляются в виде быстро сходящихся рядов. Решение разрешающих уравнений построено численно-аналитическим методом механических квадратур, предусматривающим предварительное выделение особенностей их поведения в окрестности концов отрезка интегрирования. Исследовано поведение основных характерных механических величин поставленных задач.

1. Постановка задачи и построение разрывного решения.

Рассмотрим составное полупространство, состоящее из упругого слоя толщины H с модулем сдвига G_1 и упругого полупространства с модулем сдвига G_2 . В правосторонней декартовой системе координат $Oxyz$ слой занимает область $\Omega_1(-\infty < x, z < \infty; -H < y < 0)$, а полупространство- $\Omega_2(-\infty < x, z < \infty; 0 < y < \infty)$. Слой и полупространство соединены между собой по плоскости $y = 0$ и находятся в условиях полного контакта.

Полупространство и слой по отрезкам $L_2(b, a)$ и $L_1(-d, -c)$ оси Oy ослаблены туннельными, в направлении оси Oz , трещинами. Полученная упругая система слой-полупространство деформируется под влиянием внешних воздействий, заданных на свободных поверхностях указанных туннельных трещин и на свободной поверхности слоя, которые, соответственно, описываются граничными условиями: $\tau_{xz}^{(j)}(\pm 0, y) = \tau_j^\pm(y)$ ($j = 1, 2$; здесь и в дальнейшем $j = 1$ соответствует области Ω_1 , а $j = 2$ -области Ω_2) и $\tau_{xz}^{(1)}(x, -H) = \tau_H(x)$ (рис.1). Предполагается что на берегах трещин могут быть заданы и смешанные граничные условия, т.е. вместо напряжений на берегах трещин могут быть заданы перемещения или же, на одном берегу - напряжение, а на другом - перемещение. При этом предполагается также, что заданные внешние воздействия равномерно распределены по направлению оси Oz , обеспечивая тем самым антиплоское деформирование упругой системы.

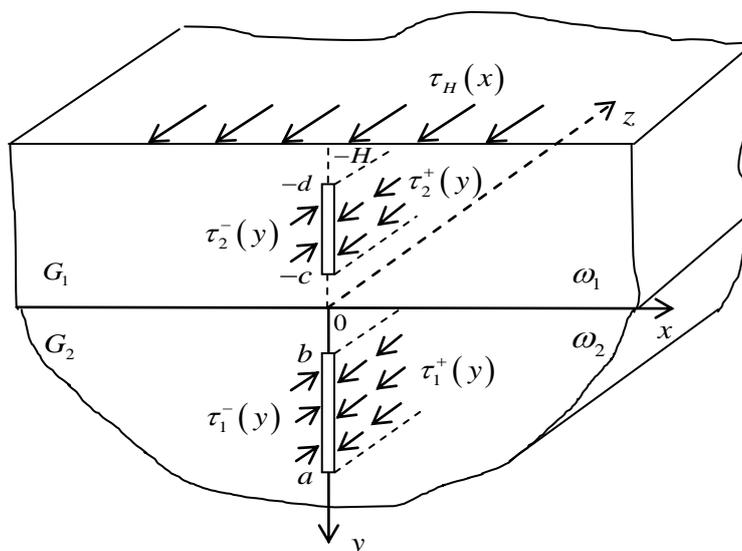


Рис. 1.1.1

При таких, довольно общих, граничных условиях ставится задача: определить компоненты полей напряжений и перемещений упругой системы слой-полупространство при наличии на отрезках $L_1(-d, -c)$ и $L_2(b, a)$ тонких концентраторов напряжений различного типа, приводящих к появлению, при переходе через эти отрезки, скачка как у напряжений, так и у перемещений.

При принятом выше предположении о равномерном, по направлению оси Oz , распределении всех внешних воздействий очевидно, что рассматриваемая упругая система будет деформироваться в условиях продольного сдвига (антиплоская деформация) с базовой плоскостью Oxy , т.е. отличной от нуля будет лишь одна компонента перемещения, а именно $w(x, y)$ - по направлению оси Oz . Тогда поставленная задача математически сформулируется в виде следующих граничных задач для полосы $\omega_1(|x| < \infty, -H < y < 0)$ и полуплоскости $\omega_2(|x| < \infty, 0 < y < \infty)$:

$$\Delta w_j(x, y) = \frac{\partial^2 w_j(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_j(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \omega_j, \quad (j=1, 2), \quad (1.1.1)$$

при граничных условиях на берегах трещин:

$$\left. \frac{\partial w_1}{\partial x} \right|_{x=\pm 0} = \frac{1}{G_1} \tau_1^\pm(y), \quad y \in L_1, \quad (1.1.2)$$

$$\left. \frac{\partial w_2}{\partial x} \right|_{x=\pm 0} = \frac{1}{G_2} \tau_2^\pm(y), \quad y \in L_2, \quad (1.1.3)$$

на свободной поверхности слоя

$$\left. \frac{\partial w_1(x, y)}{\partial y} \right|_{y=-H} = \frac{1}{G_1} \tau_H(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (1.1.4)$$

и контактными условиям

$$w_1(x, -0) = w_2(x, +0),$$

$$G_1 \left. \frac{\partial w_1}{\partial y} \right|_{y=-0} = G_2 \left. \frac{\partial w_2}{\partial y} \right|_{y=+0}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (1.1.5)$$

обеспечивающим совместную деформацию слоя и полупространства по поверхности контакта, и условию $\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 \rightarrow 0, \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty$.

Выше, как отмечалось, $\tau_1^\pm(y)$, $\tau_2^\pm(y)$ и $\tau_H(x)$ заданные функции в своих областях определения. Отметим, что здесь, и в дальнейшем, если противное не оговорено, будем полагать, что внешние нагрузки, заданные на свободной поверхности слоя, определены на конечных интервалах и там ограничены.

В тех случаях, когда на берегах трещин будут заданы перемещения, вместо условий (1.1.2) и (1.1.4) следует принять условия

$$w_1(\pm 0, y) = w_1(y), \quad y \in L_1, \quad (1.1.6)$$

$$w_2(\pm 0, y) = w_2(y), \quad y \in L_2 \quad (1.1.7)$$

Если же на берегах трещин заданы условия смешанного типа, то из условий (1.1.2), (1.1.3), (1.1.6) и (1.1.7) следует выбрать четверку условий, соответствующую конкретно заданным граничным условиям.

Компоненты напряжения, согласно закону Гука [75,90], связаны с указанной выше единственной компонентой перемещения $w(x, y)$ формулами

$$\tau_{xz}^{(j)}(x, y) = G_j \frac{\partial w_j(x, y)}{\partial x}, \quad \tau_{yz}^{(j)}(x, y) = G_j \frac{\partial w_j(x, y)}{\partial y}, \quad (j = 1, 2) \quad (1.1.8)$$

Решение уравнений (1.1.1) построим при помощи интегрального преобразования Фурье [103,115]. Для решения краевой задачи (1.1.1)-(1.1.5), сначала построим так называемое, разрывное решение уравнений (1.1.1) при более общих условиях на линиях, на которых мы предполагаем наличие трещины или включения. Предположим, что на этих линиях заданы скачки (разрывы) перемещений и напряжений. Введем функции, связанные с граничными функциями следующим образом:

$$f_j(y) = \frac{1}{G_j} [\tau_{xz}^{(j)}(+0, y) - \tau_{xz}^{(j)}(-0, y)], \quad (1.1.9)$$

$$g_j(y) = w_j(+0, y) - w_j(-0, y), \quad y \in L_1(-d, -c) \cup L_2(b, a) \quad (1.1.10)$$

которые представляют соответствующие скачки напряжений $\tau_{xz}(x, y)$ и перемещений $w(x, y)$ через линию $x=0$. Разумеется, что на участках, где отсутствуют трещины или включения, функции $f_j(y)$ и $g_j(y)$ тождественно равны нулю.

Введем еще обобщенное перемещение

$$U_j(x, y) = [\mathfrak{G}(x) + \mathfrak{G}(-x)]w_j(x, y), \quad j=1,2; \quad (1.1.11)$$

где

$$\mathfrak{G}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (1.1.12)$$

известная функция Хевисайда.

Теперь, подставив (1.1.11) в (1.1.1), с учетом (1.1.9) и (1.1.10), для $U_j(x, y)$ получим неоднородное уравнение

$$\frac{\partial^2 U_j(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_j(x, y)}{\partial y^2} = \delta'(x)g_j(y) + \delta(x)f_j(y), \quad j=1,2 \quad (1.1.13)$$

где $\delta(x)$ ($\delta(x) = \mathfrak{G}'(x)$)-известная дельта - функция Дирака, а $\delta'(x)$ ее производная.

Применив теперь к уравнениям (1.1.13) и к условиям (1.1.4) и (1.1.5) обобщенное преобразование Фурье, придем к следующим граничным задачам

$$\frac{d^2 \bar{U}_j(\alpha, y)}{dy^2} - \alpha^2 \bar{U}_j(\alpha, y) = -i\alpha g_j(y) + f_j(y), \quad j=1,2 \quad (1.1.14)$$

$$\left. \frac{d\bar{U}_1(\alpha, y)}{dy} \right|_{y=-H} = \frac{1}{G_1} \bar{\tau}_H(\alpha) \quad (1.1.15)$$

$$\bar{U}_1(\alpha, -0) = \bar{U}_2(\alpha, +0) \quad (1.1.16)$$

$$G_1 \left. \frac{d\bar{U}_1(\alpha, y)}{dy} \right|_{y=-0} = G_2 \left. \frac{d\bar{U}_2(\alpha, y)}{dy} \right|_{y=+0} \quad (1.1.17)$$

на интервалах $y \in (-H, 0)$ при $j=1$ и $y \in (0, \infty)$ при $j=2$.

Здесь черточкой обозначена трансформанта Фурье, связанная с $U_j(x, y)$ формулами взаимности

$$\bar{U}_j(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{\infty} U_j(x, y) e^{i\alpha x} dx; \quad U_j(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}_j(\alpha, y) e^{-i\alpha x} dx \quad (1.1.18)$$

Считая пока, что функции $g_j(y)$ и $f_j(y)$ известны, общие решения уравнений (1.1.14), исчезающие при $y \rightarrow +\infty$, представим в виде [76]

$$\bar{U}_1(\alpha, y) = A_1 e^{-|\alpha|y} + B_1 e^{|\alpha|y} + \frac{i \operatorname{sgn} \alpha}{2} \int_{-H}^0 E(\alpha, \eta, y) g_1(\eta) d\eta -$$

$$-\frac{1}{2|\alpha|} \int_{-H}^0 E(\alpha, \eta, y) f_1(\eta) d\eta, \quad -H < y < 0, \quad (1.1.19)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_2(\alpha, y) = & A_2 e^{-|\alpha|y} + \frac{i \operatorname{sgn} \alpha}{2} \int_0^\infty E(\alpha, \eta, y) g_2(\eta) d\eta - \\ & - \frac{1}{2|\alpha|} \int_0^\infty E(\alpha, \eta, y) f_2(\eta) d\eta, \quad y > 0 \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

где

$$E(\alpha, \eta, y) = e^{-|\alpha||\eta-y|} + e^{-|\alpha||\eta+y|} \quad (1.1.21)$$

а A_1 , B_1 и A_2 - неизвестные постоянные.

Удовлетворяя условиям (1.1.15)-(1.1.17), выразим коэффициенты A_1 , B_1 и A_2 через функции $g_j(y)$, $f_j(y)$ и $\bar{\tau}_H(\alpha)$:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{e^{-2|\alpha|H}}{(1+\mu)\Delta(\alpha, H)} \tilde{A}(\alpha) - \frac{e^{-|\alpha|H}}{|\alpha|\Delta(\alpha, H)} \tilde{B}(\alpha) \\ B_1 &= \frac{1}{(1+\mu)\Delta(\alpha, H)} \tilde{A}(\alpha) + \gamma \frac{e^{-|\alpha|H}}{|\alpha|\Delta(\alpha, H)} \tilde{B}(\alpha) \\ A_2 &= \frac{\mu}{\mu+1} \frac{e^{-2|\alpha|H} - 1}{\Delta(\alpha, H)} \tilde{A}(\alpha) - \frac{2\mu}{1+\mu} \frac{e^{-|\alpha|H}}{\Delta(\alpha, H)} \tilde{B}(\alpha) \end{aligned} \quad (1.1.22)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\alpha) = & i \operatorname{sgn} \alpha \int_0^\infty e^{-|\alpha|\eta} g_2(\eta) d\eta - i \operatorname{sgn} \alpha \int_{-H}^0 e^{+|\alpha|\eta} g_1(\eta) d\eta + \\ & + \frac{1}{|\alpha|} \int_{-H}^0 e^{+|\alpha|\eta} f_1(\eta) d\eta - \frac{1}{|\alpha|} \int_0^\infty e^{-|\alpha|\eta} f_2(\eta) d\eta \end{aligned} \quad (1.1.23)$$

$$\tilde{B}(\alpha) = -\frac{i\alpha}{2} \int_{-H}^0 E(\alpha, \eta, H) g_1(\eta) d\eta + \frac{1}{2} \int_{-H}^0 E(\alpha, \eta, H) f_1(\eta) d\eta + \frac{1}{G_1} \bar{\tau}_H(\alpha) \quad (1.1.24)$$

$$\Delta(\alpha, H) = 1 + \gamma e^{-2|\alpha|H}, \quad \gamma = \frac{1-\mu}{1+\mu}, \quad \mu = \frac{G_1}{G_2} \quad (1.1.25)$$

Подставляя значения постоянных A_1 , B_1 и A_2 из (1.1.22) в (1.1.19) и (1.1.20), после обратного преобразования (1.1.18) для $U_j(x, y)$ получим следующие представления

$$\begin{aligned}
U_1(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-H}^0 \left[\frac{i \operatorname{sgn} \alpha}{2} g_1(\eta) - \frac{1}{2|\alpha|} f_1(\eta) \right] d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ E(\alpha, \eta, y) - \right. \\
& - \frac{1}{\Delta(\alpha, H)} \left[\frac{2}{1+\mu} \left(e^{-\alpha(2H+y)} + e^{|\alpha|y} \right) e^{|\alpha|\eta} + \left(\gamma e^{-\alpha(H-y)} - e^{|\alpha|(H+y)} \right) E(\alpha, \eta, H) \right] \left. \right\} e^{-i\alpha x} d\alpha + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\alpha(2H+y)} + e^{|\alpha|y}}{\Delta(\alpha, H)} e^{-|\alpha|\eta} e^{-i\alpha x} d\alpha \int_0^{\infty} \left[i \operatorname{sgn} \alpha g_2(\eta) d\eta - \frac{1}{|\alpha|} f_2(\eta) \right] d\eta + \\
& + \frac{1}{2\pi G_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma e^{-\alpha(H-y)} - e^{-\alpha(H+y)}}{|\alpha| \Delta(\alpha, H)} e^{-i\alpha x} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \tau_H(t) e^{i\alpha t} dt + \text{const}, \quad (x, y) \in \omega_1, \quad (1.1.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_2(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \left[\frac{i \operatorname{sgn} \alpha}{2} g_2(\eta) - \frac{1}{2|\alpha|} f_2(\eta) \right] e^{-|\alpha|\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \left[E(\alpha, \eta, y) + \right. \\
& + \frac{2\mu}{1+\mu} \frac{e^{-\alpha(2H+y)} - e^{-|\alpha|y}}{\Delta(\alpha, H)} \left. \right] e^{-i\alpha x} d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta(\alpha, H)} \left[\frac{\mu}{1+\mu} \left(e^{-\alpha(2H+y)} - \right. \right. \\
& - \left. \left. e^{-|\alpha|y} \right) \int_{-H}^0 e^{|\alpha|\eta} \left(i \operatorname{sgn} \alpha g_1(\eta) - \frac{1}{|\alpha|} f_1(\eta) \right) d\eta \right] e^{-i\alpha x} d\alpha + \\
& + \frac{1}{2\pi} \frac{\mu}{\mu+1} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-\alpha(H+\eta)} + e^{-\alpha(H-\eta)}}{\Delta(\alpha, H)} \int_{-H}^0 e^{|\alpha|\eta} \left[i \operatorname{sgn} \alpha g_1(\eta) - \frac{1}{|\alpha|} f_1(\eta) \right] d\eta \right\} e^{-i\alpha x} d\alpha - \\
& - \frac{\mu}{\pi G_1 (1+\mu)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\alpha(H+y)}}{|\alpha| \Delta(\alpha, H)} e^{-i\alpha x} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \tau_H(t) e^{i\alpha t} dt + \text{const}, \quad (x, y) \in \omega_2 \quad (1.1.27)
\end{aligned}$$

Очевидно, что, согласно представлениям (1.1.11), функции $U_j(x, y)$, вне линии $x=0$, представляют собой упругие перемещения в каждой из областей Ω_1 и Ω_2 . Следовательно, можно утверждать, что решение антиплоской контактной задачи для составной упругой полуплоскости, когда на линии $x=0$ заданы скачки перемещений и напряжений, представляется формулами (1.1.26) и (1.1.27) и, поэтому, в дальнейшем $U_j(x, y)$ заменим на $w_j(x, y)$.

Следует отметить, что решение в виде формул (1.1.26) и (1.1.27) было построено при единственном предположении, что перемещения и напряжения на линии $x=0$ претерпевают скачок, не уточняя при этом на каких участках этой линии этот скачок отличен от нуля. Следовательно, при помощи построенного решения можно решить

задачу для упругой системы слой-полупространство при наличии произвольного числа концентраторов напряжений разного типа, расположенных на линии $x=0$, и заданных касательных напряжениях на граничной поверхности слоя. В зависимости от типа концентратора напряжений часть из граничных значений $\tau_{xz}(\pm 0, y)$ и $w(\pm 0, y)$ на его берегах будет задана, а, следовательно, и часть из скачков перемещения и напряжения, будут известны. Для определения же остальных неизвестных следует удовлетворить соответствующим граничным условиям из группы условий (1.1.2), (1.1.3), (1.1.6) и (1.1.7), в результате чего получаются сингулярные интегральные уравнения, определенные на системе отрезков линии $x=0$, где расположены концентраторы напряжений. Более подробно это будет проиллюстрировано далее на примере конкретных задач.

В конце пункта вернемся к поставленной задаче, предполагающей наличие концентраторов напряжений, по причине которых появляются скачки перемещения и напряжения, только на интервалах $-d < y < -c$ и $b < y < a$ оси Oy . Так что, имеют места условия :

$$g_j(y) = f_j(y) = 0, \quad y \in (L_1 \cup L_2), \quad (1.1.28)$$

обеспечивающие условие непрерывности полей перемещения и напряжения на линии $x=0$ вне концентраторов. Следовательно, в формулах (1.1.26) и (1.1.27), следует пределы интегрирования $(-H, 0)$ и $(0, \infty)$ заменить соответственно на $(-d, -c)$ и (b, a) .

Следует отметить, что некоторые интегралы в представлениях (1.1.26) и (1.1.27) в обычном смысле сходимости несобственных интегралов расходятся, и их следует понимать в смысле теории обобщенных функций [31,103].

Выделяя главные части несобственных интегралов, фигурирующих в формулах (1.1.26) и (1.1.27), и интегрируя, в некоторых случаях, по частям, перемещения представим в более простом и удобном, для дальнейшего их использования, виде. Для этого заметим, что при любом μ и H

$$\left| \gamma e^{-2|\alpha|H} \right| = \left| \frac{1-\mu}{1+\mu} e^{-2\alpha H} \right| < 1 \quad (1.1.29)$$

следовательно, имеет место представление

$$\frac{1}{1 + \gamma e^{-2|\alpha|H}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma)^n e^{-2|\alpha|Hn} \quad (1.1.30)$$

Подставляя (1.1.30) в (1.1.26) и (1.1.27) и вычисляя интегралы, соответствующие преобразованию Фурье, после некоторых выкладок получим следующие выражения для перемещения в каждой из областей Ω_1 и Ω_2

$$\begin{aligned} w_1(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{-c} \left[\operatorname{arctg} \frac{x}{\eta - y} + \gamma \operatorname{arctg} \frac{x}{\eta + y} + R_{11}^{(1)}(x, y, \eta) \right] g'_1(\eta) d\eta + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{-c} \left[\ln \frac{1}{x^2 + (\eta - y)^2} + \gamma \ln \frac{1}{x^2 + (\eta + y)^2} + R_{12}^{(1)}(x, y, \eta) \right] f_1(\eta) d\eta + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_b^a \left[R_{21}^{(1)}(x, y, \eta) g'_2(\eta) + R_{22}^{(1)}(x, y, \eta) f_2(\eta) \right] d\eta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x, y, t) \tau_H(t) dt + const \\ & (-d < y < -c), \quad |x| < \infty \quad (1.1.31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \int_b^a \left[\operatorname{arctg} \frac{x}{\eta - y} + \gamma \operatorname{arctg} \frac{x}{\eta + y} + R_{21}^{(1)}(x, y, \eta) \right] g'_2(\eta) d\eta - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_b^a \left[\ln \frac{1}{x^2 + (\eta - y)^2} + \gamma \ln \frac{1}{x^2 + (\eta + y)^2} + R_{22}^{(2)}(x, y, \eta) \right] f_2(\eta) d\eta - \\ & - \frac{\mu}{\pi(1 + \mu)} \int_{-d}^{-c} \left[\operatorname{arctg} \frac{x}{\eta - y} + R_{11}^{(2)}(x, y, \eta) \right] g'_1(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \int_{-d}^{-c} R_{12}^{(2)}(x, y, \eta) f_1(\eta) d\eta - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(x, y, t) \tau_H(t) dt + const, \quad (b < y < a), \quad |x| < \infty \quad (1.1.32) \end{aligned}$$

где приняты следующие обозначения

$$R_{11}^{(1)}(x, y, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma)^n \left[M_n(x, y, \eta) - \gamma^2 M_n(x, -y, -\eta) - \gamma M_n(x, -y, \eta) + \gamma M_n(x, y, -\eta) \right]$$

$$R_{12}^{(1)}(x, y, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma)^n \left[-\gamma N_n(x, y, -\eta) - \gamma^2 N_n(x, -y, -\eta) + \gamma N_n(x, y, -\eta) + N_n(x, y, \eta) \right]$$

$$R_{21}^{(1)}(x, y, \eta) = \frac{1}{\pi(1 + \mu)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[M_n(x, y, \eta) + M_n(x, y, -\eta) \right]$$

$$R_{22}^{(1)}(x, y, \eta) = \frac{1}{\pi(1+\mu)} \sum_{n=0}^{\infty} [N_n(x, y, \eta) + N_n(x, y, -\eta)] \quad (1.1.33)$$

$$R_{11}^{(2)}(x, y, \eta) = \frac{2\mu(1+\gamma)}{(1+\mu)} \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma)^n M_n(x, y, \eta)$$

$$R_{12}^{(2)}(x, y, \eta) = \frac{2\mu(1+\gamma)}{(1+\mu)} \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma)^n N_n(x, y, \eta)$$

$$R_{21}^{(2)}(x, y, \eta) = \frac{1}{\pi(1+\mu)} \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma)^{n+1} \left[\gamma M_n(x, -y, \eta) + \frac{1}{2} M_n(x, y, \eta) \right]$$

$$R_{22}^{(2)}(x, y, \eta) = \frac{1}{\pi(1+\mu)} \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma)^n \left[\gamma N_n(x, -y, \eta) + \frac{1}{2} N_n(x, y, \eta) \right] \quad (1.1.34)$$

$$M_n(x, y, \eta) = \operatorname{arctg} \frac{x}{2(n+1)H + \eta + y} \quad (1.1.35)$$

$$N_n(x, y, \eta) = \ln \sqrt{x^2 + (2(n+1)H + \eta + y)^2} \quad (1.1.36)$$

$$F_1(x, y, t) = \frac{1}{G_1} \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma)^n \left[\gamma \ln \sqrt{(x-t)^2 + ((2n+1)H - y)^2} - \right. \\ \left. - \ln \sqrt{(x-t)^2 + ((2n+1)H + y)^2} \right] \quad (1.1.37)$$

$$F_2(x, y, t) = \frac{2}{(1+\mu)G_2} \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma)^n \ln \sqrt{(t-x)^2 + ((2n+1)H + y)^2} \quad (1.1.38)$$

Отметим, что при получении формул (1.1.31) и (1.1.32) было учтено условие непрерывности перемещений на концах трещин, а также значения интегралов [31,80]

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda a} \sin \lambda (t-x) d\lambda = \frac{t-x}{(t-x)^2 + a^2}, \quad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda a} \cos \lambda (t-x) d\lambda = \frac{a}{(t-x)^2 + a^2}, \quad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda (t-x) - 1}{\lambda} e^{-\lambda a} d\lambda = \frac{1}{2} \ln \frac{a^2}{(t-x)^2 + a^2}, \quad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda a}}{\lambda} \sin \lambda (t-x) d\lambda = \operatorname{arctg} \frac{t-x}{a}, \quad a > 0 \quad (1.1.39)$$

2. Вывод определяющей системы интегральных уравнений

Приступим к выводу определяющих уравнений, сформулированной в начале предыдущего пункта. В рассматриваемом случае, на основе граничных условий (1.1.2) и (1.1.3), скачки $f_j(y)$ непосредственно вычисляются по формуле (1.1.9), а функции $g_j(y)$ (следовательно и $g'_j(y)$) остаются неизвестными. Удовлетворяя при помощи представлений (1.1.31) и (1.1.32) граничным условиям (1.1.2) и (1.1.3), получим соответствующие уравнения для определения $g'_j(y)$.

Для удовлетворения граничным условиям (1.1.2) и (1.1.3), а также для определения в дальнейшем напряженного поля в рассматриваемой области, нам необходимо, согласно (1.1.8), иметь представления $\frac{\partial w_j(x, y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial w_j(x, y)}{\partial y}$. Эти производные при

помощи (1.1.31) и (1.1.32), в общем случае даются формулами

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1(x, y)}{\partial x} = & \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{-c} \left[\frac{\eta - y}{x^2 + (\eta - y)^2} - \gamma \frac{\eta + y}{x^2 + (\eta + y)^2} + \frac{2H + \eta + y}{x^2 + (2H + \eta + y)^2} + \right. \\ & + K_{11}^{(1)}(x, y, \eta) \left. \right] g'_1(\eta) d\eta + \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{-c} \left[\frac{x}{x^2 + (\eta - y)^2} - \frac{x}{x^2 + (\eta + y)^2} + \right. \\ & + \frac{x}{x^2 + (2H + \eta + y)^2} + K_{12}^{(1)}(x, y, \eta) \left. \right] f_1(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi(1 + \mu)} \int_b^a \left[\frac{\eta - y}{x^2 + (\eta - y)^2} + \right. \\ & + K_{21}^{(1)}(x, y, \eta) \left. \right] g'_2(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi(1 + \mu)} \int_b^a \left[\frac{x}{x^2 + (\eta - y)^2} + K_{22}^{(1)}(x, y, \eta) \right] f_2(\eta) d\eta + \\ & + \frac{1}{\pi G_1} \int_{-\infty}^{\infty} F_1^{(1)}(x, y, t) \tau_H(t) dt, \quad (x, y) \in \omega_1 \end{aligned} \quad (1.1.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1(x, y)}{\partial y} = & \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{-c} \left[\frac{x}{x^2 + (\eta - y)^2} + \gamma \frac{x}{x^2 + (\eta + y)^2} - \frac{x}{x^2 + (2H + \eta + y)^2} + \right. \\ & + K_{11}^{(2)}(x, y, \eta) \left. \right] g'_1(\eta) d\eta - \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{-c} \left[\frac{\eta - y}{x^2 + (\eta - y)^2} + \gamma \frac{\eta + y}{x^2 + (\eta + y)^2} - \frac{2H + \eta + y}{x^2 + (2H + \eta + y)^2} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + K_{12}^{(2)}(x, y, \eta) \Big] f_1(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi(1+\mu)} \int_b^a \left[\frac{x}{x^2 + (\eta - y)^2} + K_{21}^{(2)}(x, y, \eta) \right] g_2'(\eta) d\eta + \\
& + \frac{1}{\pi(1+\mu)} \int_b^a \left[\frac{\eta - y}{x^2 + (\eta - y)^2} + K_{22}^{(2)}(x, y, \eta) \right] f_2(\eta) d\eta - \frac{1}{2\pi G_1} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{H + y}{(t - x)^2 + (H + y)^2} + \right. \\
& \left. + F_1^{(2)}(x, y, t) \right] \tau_H(t) dt, \quad (x, y) \in \omega_1 \quad (1.1.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_2(x, y)}{\partial x} = & - \frac{\mu}{\pi(1+\mu)} \int_{-d}^{-c} \left[\frac{\eta - y}{x^2 + (\eta - y)^2} + K_{11}^{(3)}(x, y, \eta) \right] g_1'(\eta) d\eta + \\
& + \frac{\mu}{\pi(1+\mu)} \int_{-d}^{-c} K_{12}^{(3)}(x, y, \eta) f_1(\eta) d\eta + \frac{1}{2\pi} \int_b^a \left[\frac{\eta - y}{x^2 + (\eta - y)^2} + \gamma \frac{\eta + y}{x^2 + (\eta + y)^2} + \right. \\
& \left. + K_{21}^{(3)}(x, y, \eta) \right] g_2'(\eta) d\eta + \frac{1}{2\pi} \int_b^a \left[\frac{x}{x^2 + (\eta - y)^2} + \gamma \frac{x}{x^2 + (\eta + y)^2} + \right. \\
& \left. + K_{22}^{(3)}(x, y, \eta) \right] f_2(\eta) d\eta - \frac{1}{\pi G_2} \int_{-\infty}^{\infty} F_1^{(3)}(x, y, t) \tau_H(t) dt, \quad (x, y) \in \omega_2 \quad (1.1.42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_2(x, y)}{\partial y} = & - \frac{\mu}{\pi(1+\mu)} \int_{-d}^{-c} \left[\frac{x}{x^2 + (\eta - y)^2} + K_{11}^{(4)}(x, y, \eta) \right] g_1'(\eta) d\eta + \\
& + \frac{1}{\pi} \int_{-d}^{-c} K_{12}^{(4)}(x, y, \eta) f_1(\eta) d\eta + \frac{1}{2\pi} \int_b^a \left[\frac{x}{x^2 + (\eta - y)^2} - \gamma \frac{x}{x^2 + (\eta + y)^2} - \right. \\
& \left. - K_{21}^{(4)}(x, y, \eta) \right] g_2'(\eta) d\eta - \frac{1}{2\pi} \int_b^a \left[\frac{\eta - y}{x^2 + (\eta - y)^2} - \gamma \frac{\eta + y}{x^2 + (\eta + y)^2} - \right. \\
& \left. - K_{22}^{(4)}(x, y, \eta) \right] f_2(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi G_2} \int_{-\infty}^{\infty} F_1^{(4)}(x, y, t) \tau_H(t) dt, \quad (x, y) \in \omega_2 \quad (1.1.43)
\end{aligned}$$

где

$$K_{11}^{(1)}(x, y, \eta) = -\gamma R_2(x, y, \eta) - \gamma^2 R_1(x, -y, -\eta) - \gamma R_1(x, -y, \eta) + \gamma R_1(x, y, -\eta)$$

$$K_{12}^{(1)}(x, y, \eta) = -\gamma Q_2(x, y, \eta) - \gamma^2 Q_1(x, -y, -\eta) - \gamma Q_1(x, -y, \eta) + \gamma Q_1(x, y, -\eta)$$

$$K_{21}^{(1)}(x, y, \eta) = R_1(x, y, \eta) - \gamma R_0(x, -y, \eta)$$

$$K_{22}^{(1)}(x, y, \eta) = Q_1(x, y, \eta) - \gamma Q_1(x, -y, \eta) \quad (1.1.44)$$

$$K_{11}^{(2)}(x, y, \eta) = \gamma Q_2(x, y, \eta) + \gamma^2 Q_1(x, -y, -\eta) + \gamma Q_1(x, -y, \eta) - \gamma Q_1(x, y, -\eta)$$

$$K_{12}^{(2)}(x, y, \eta) = \gamma R_2(x, y, \eta) + \gamma^2 R_1(x, -y, -\eta) - \gamma R_1(x, -y, \eta) + \gamma R_1(x, y, -\eta)$$

$$K_{21}^{(2)}(x, y, \eta) = Q_1(x, -y, \eta) - Q_1(x, y, \eta)$$

$$K_{22}^{(2)}(x, y, \eta) = R_1(x, -y, \eta) - R_1(x, y, \eta) \quad (1.1.45)$$

$$K_{11}^{(3)}(x, y, \eta) = \frac{\mu}{1+\mu} \left[\gamma^2 R_1(x, -y, \eta) + \frac{1}{2} R_1(x, y, \eta) \right]$$

$$K_{12}^{(3)}(x, y, \eta) = \frac{\mu}{1+\mu} \left[\gamma Q_1(x, -y, \eta) + \frac{1}{2} Q_1(x, y, \eta) \right]$$

$$K_{21}^{(3)}(x, y, \eta) = \frac{4\mu}{(1+\mu)^2} R_1(x, y, \eta)$$

$$K_{22}^{(3)}(x, y, \eta) = \frac{4\mu}{(1+\mu)^2} Q_1(x, y, \eta) \quad (1.1.46)$$

$$K_{11}^{(4)}(x, y, \eta) = -\frac{\mu}{1+\mu} \left[\gamma Q_1(x, -y, \eta) - \frac{1}{2} Q_1(x, y, \eta) \right]$$

$$K_{12}^{(4)}(x, y, \eta) = \frac{\mu}{1+\mu} \left[\gamma R_1(x, -y, \eta) - \frac{1}{2} R_1(x, y, \eta) \right]$$

$$K_{21}^{(4)}(x, y, \eta) = \frac{4\mu}{(1+\mu)^2} R_1(x, y, \eta)$$

$$K_{22}^{(4)}(x, y, \eta) = \frac{4\mu}{(1+\mu)^2} Q_1(x, y, \eta) \quad (1.1.47)$$

В формулах (1.44) – (1.47) приняты обозначения

$$F_1^{(1)}(x, y, t) = -\gamma P_1^{(1)}(x, y, t) + P_1^{(1)}(x, y, t)$$

$$F_1^{(2)}(x, y, t) = \gamma \left[P_1^{(2)}(x, -y, t) + P_3^{(2)}(x, y, t) \right]$$

$$F_1^{(3)}(x, y, t) = \frac{2}{1+\mu} P_1^{(1)}(x-t, y)$$

$$F_1^{(4)}(x, y, t) = \frac{2}{1+\mu} P_1^{(2)}(x-t, y) \quad (1.1.48)$$

$$R_k(x, y, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma)^n \frac{2(n+k)H + \eta + y}{x^2 + ((2n+k)H + \eta + y)^2}$$

$$Q_k(x, y, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma)^n \frac{x}{x^2 + ((2n+k)H + \eta + y)^2} \quad (1.1.49)$$

$$P_k^{(1)}(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma)^n \frac{x-t}{(x-t)^2 + ((2n+k)H + y)^2}$$

$$P_k^{(2)}(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma)^n \frac{(2n+k)H + y}{(t-x)^2 + ((2n+k)H + y)^2} \quad (1.1.50)$$

Теперь удовлетворяя, при помощи (1.1.40) и (1.1.42), граничным условиям (1.1.2) и (1.1.3), получим систему из двух сингулярных интегральных уравнений для определения двух неизвестных функций $g_j(y)$ ($j=1,2$). Отметим, что в тех случаях, когда на линии $x=0$ имеется произвольное конечное число (n) трещин или включений, то по приведенной процедуре придем к системе из n интегральных уравнений для определения неизвестных $g_j(y)$ или $f_j(y)$.

Учитывая, что в случае, когда трещины не выходят на линию раздела материалов или свободную поверхность, уравнения указанной системы являются классическими сингулярными интегральными уравнениями первого рода, для которых известны как особенности поведения решения у концов интервала интегрирования, так и методы их решения, здесь исследуем случай, когда $b=0$, т.е. когда трещина, находящаяся в полупространстве, выходит на линию раздела материалов. Этот случай, как известно, является одним из особых случаев для рассматриваемой здесь общей задачи, в том смысле, что в подобных случаях имеем сингулярное интегральное уравнение с обобщенным ядром Коши, в котором наряду с традиционным ядром Коши имеются и ядра, содержащие, так называемые, неподвижные особенности. Эти неподвижные особенности, о которых в дальнейшем неоднократно будет указано, как правило, приводят к появлению неклассических особенностей в решениях полученных уравнений.

Таким образом, при составлении определяющих уравнений, следует в выражениях (1.1.40) и (1.1.42) положить $b=0$ и перейти к пределу при $x \rightarrow +0$ (или $x \rightarrow -0$).

После этого, используя условия (1.1.2) и (1.1.3), получим требуемую систему уравнений.

Теперь, осуществляя указанный выше предельный переход при $x \rightarrow +0$ в представлениях (1.1.31)-(1.1.32) и граничных условиях (1.1.2)-(1.1.3), приходим к следующим сингулярным интегральным уравнениям относительно скачков производных перемещения

$$\int_{-d}^{-c} \left[\frac{1}{\eta-y} - \frac{\gamma}{\eta+y} + \frac{1}{2H+\eta+y} - H_{11}(\eta, y) \right] g'_1(\eta) d\eta + \frac{2}{1+\mu} \int_0^a \left[\frac{1}{\eta-y} + H_{12}(\eta, y) \right] g'_2(\eta) d\eta =$$

$$= \frac{\pi}{G_1} [\tau_1^+(y) + \tau_1^-(y)] + h_1(y) \quad -d < y < -c, \quad (1.1.51)$$

$$\frac{\mu}{\pi(1+\mu)} \int_{-d}^{-c} \left[\frac{1}{\eta-y} + H_{21}(\eta, y) \right] g'_1(\eta) d\eta + \frac{1}{2\pi} \int_0^a \left[\frac{1}{\eta-y} + \frac{\gamma}{\eta+y} + \right.$$

$$\left. + H_{22}(\eta, y) \right] g'_2(\eta) d\eta = \frac{1}{2G_2} [\tau_2^+(y) + \tau_2^-(y)] + h_2(y), \quad 0 < y < a, \quad (1.1.52)$$

где

$$H_{11}(\eta, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma)^{n+1} [A_{n-1}(\eta, y) + A_n(\eta, -y) + \gamma A_n(-\eta, -y) - A_n(-\eta, y)]$$

$$H_{12}(\eta, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma)^n [A_n(\eta, y) - \gamma A_{n-1}(\eta, -y)]$$

$$H_{21}(\eta, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma)^n [A_n(\eta, y) - \gamma A_n(-\eta, y)]$$

$$H_{22}(\eta, y) = \frac{4\mu}{(1+\mu)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma)^n A_n(\eta, y)$$

$$A_n(\eta, y) = (2(n+1)H + \eta + y)^{-1} \quad (1.1.53)$$

$$h_1(y) = \frac{1}{\pi G_1} \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma)^n \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\gamma t}{t^2 + (2(n+1)H - y)^2} - \frac{t}{t^2 + (2(n+1)H + y)^2} \right] \tau_H(t) dt$$

$$h_2(y) = \frac{2}{\pi(1+\mu)G_2} \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{t^2 + (2(n+1)H + y)^2} \tau_H(t) dt \quad (1.1.54)$$

Отметим, что при получении правых частей (1.1.51) и (1.1.52) было использовано известное [33] соотношение для функций $\delta(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + y^2} = \delta(y) \quad (1.1.55)$$

Таким образом, решение задачи свелось к системе сингулярных интегральных уравнений (1.1.51) и (1.1.52).

Следует еще отметить, что в (1.1.51) и (1.1.52) и в дальнейшем, интегралы с ядром Коши следует понимать в смысле главного значения.

При этом искомые функции системы $g'_j(y)$ должны удовлетворять условиям

$$\int_0^a g'_2(t) dt = 0, \quad \int_{-d}^{-c} g'_1(t) dt = 0 \quad (1.1.56)$$

отображающим условия непрерывности перемещений на концах трещин.

Имея решение системы $g'_j(y)$, при помощи формул (1.1.40)-(1.1.43) и закона Гука (1.1.8) можно определить напряженно-деформированное состояние в любой точке рассматриваемых областей и, в частности, контактные напряжения и разрывающие касательные напряжения на продолжениях участков трещин.

Следует отметить, что в системе (1.1.51) и (1.1.52) свободно можно варьировать параметрами a , c , d , вплоть до крайних значений, и получить систему определяющих уравнений для соответствующей задачи. Так, например, при $d = H$ и $c = 0$ система уравнений (1.1.51) и (1.1.52) переходит в определяющую систему антиплоской задачи для составной полуплоскости с проходящей через линию раздела материалов трещиной, выходящей на свободный край.

3. Исследование и построение решения определяющей системы уравнений.

Приступим к исследованию системы уравнений (1.1.51) и (1.1.52) при условиях (1.1.56). В интегральных уравнениях (1.1.51), (1.1.52) основные ядра представляют собой обобщенные ядра типа Коши, содержащие помимо простого ядра Коши, члены которые, вообще могут становиться неограниченными, когда η и y приближаются к концам линии интегрирования. Для определенности, предположим, что $c \neq 0$, $d < H$ и согласно [68], решение системы ищем в классе функций, представимых в виде

$$g'_1(y) = \frac{\psi_1(y)}{(c+y)^{\delta_1}(d+y)^{\delta_2}}, \quad 0 < \delta_1, \delta_2 < 1, \quad \psi_1(-c) \neq 0, \quad \psi_1(-d) \neq 0 \quad (1.1.57)$$

$$g'_2(y) = \frac{\psi_2(y)}{y^{r_1}(a-y)^{r_2}}, \quad 0 < r_1, r_2 < 1, \quad \psi_2(0) \neq 0, \quad \psi_2(a) \neq 0 \quad (1.1.58)$$

где функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ удовлетворяют условию Гельдера на отрезках $[-d, -c]$ и $[0, a]$.

Подставим эти представления в (1.1.51) и (1.1.52) и исследуем поведение уравнений в окрестности концов интервалов интегрирования. Для этого воспользуемся следующим известным результатом Н.И.Мусхелишвили о поведении интеграла типа Коши около концов линии интегрирования [69]:

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\varphi(s) ds}{(s-c)^{\gamma_1}(s-x)} = \begin{cases} \pm \frac{\varphi(c)}{(x-c)^{\gamma_1}} \operatorname{ctg} \pi \gamma_1 + \Phi_*^{(1)}(x), & (a < x < b) \\ \pm \frac{\varphi(c)}{(x-c)^{\gamma_1}} \frac{e^{i\pi \gamma_1}}{\sin \pi \gamma_1} + \Phi_*^{(2)}(x), & (x < a, x > b) \end{cases} \quad (1.1.59)$$

$$\left\{ (\Phi_*^{(1)}(x), \Phi_*^{(2)}(x)) = \frac{(\Phi_{**}^{(1)}(x), \Phi_{**}^{(2)}(x))}{|x-c|^{\alpha_0}}; \quad \alpha_0 < \operatorname{Re} \gamma_1 \right\}$$

где верхний знак берется при $c = a$, нижний при $c = b$, а $\Phi_{**}^{(1)}(x)$ и $\Phi_{**}^{(2)}(x)$ - гильдеровские функции, ограниченные в точке $x = c$.

Устремляя в уравнении (1.1.51) $y \rightarrow -c$, нетрудно заметить, что только первый интеграл с ядром Коши, согласно (1.1.59), будет стремиться к бесконечности, а все остальные слагаемые как в левой части, так и в правой части уравнения принимают конечные значения. Для исключения неограниченно возрастающего слагаемого

необходимо коэффициент при нем приравнять нулю и, тем самым, получить уравнение для определения показателя δ_1 :

$$\operatorname{ctg} \pi \delta_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \delta_1 = 1/2. \quad (1.1.60)$$

Совершенно аналогично, устремляя $y \rightarrow -d$, найдем, что и $\delta_2 = 1/2$.

Устремляя в уравнении (1.1.52) $y \rightarrow a$, замечаем, что ситуация подобна предыдущей, и, следовательно, $r_2 = 1/2$.

При стремлении же $y \rightarrow 0$, уже интегралы от двух первых слагаемых во втором интеграле уравнения (1.1.52) будут неограниченно возрастать. Согласно (1.1.59) в окрестности конца $y = 0$ для этих интегралов имеем:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^a \frac{1}{\eta - y} g'_1(\eta) d\eta = \frac{\Psi_2(0)}{2a^{r_2} y^{r_1}} \operatorname{ctg} \pi r_1$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^a \frac{\gamma}{\eta + y} g'_1(\eta) d\eta = \frac{\Psi_2(0)}{2a^{r_2} (-y)^{r_1}} \frac{\gamma e^{i\pi r_1}}{\sin \pi r_1} = \frac{\Psi_2(0)}{2a^{r_2} y^{r_1}} \frac{\gamma}{\sin \pi r_1}$$

Складывая их и приравнивая к нулю коэффициент при особенности, получим:

$$\operatorname{ctg} \pi r_1 + \frac{\gamma}{\sin \pi r_1} = 0 \quad \rightarrow \quad r_1 = \alpha = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \arccos(-\gamma) & \gamma \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{\pi} \arccos \gamma & \gamma > 0 \end{cases} \quad (1.1.60)$$

Таким образом, искомые функции будут иметь вид:

$$g'_1(y) = \frac{\Psi_1(y)}{\sqrt{(c+y)(d+y)}} \quad ; \quad g'_2(y) = \frac{\Psi_2(y)}{y^\alpha \sqrt{a-y}} \quad (1.1.61)$$

и в качестве искомым функций будут выступать уже ограниченные на соответствующих отрезках гельдеровские функции $\Psi_1(y)$ и $\Psi_2(y)$. Учитывая последнее, решение системы уравнений (1.1.51) и (1.1.52) целесообразно решить методом механических квадратур [84, 112].

Для этого необходимо перейти к безразмерным величинам и свести уравнения на интервал $(-1,1)$, чего можно добиться при помощи следующих замен:

$$\{a^*, c^*, d^*\} = \frac{\{a, c, d\}}{H}, \quad \{\tau_1^*, \tau_2^*, \tau_H^*\} = \frac{\{\tau_1, \tau_2, \tau_H\}}{G_1}$$

$y = \frac{d-c}{2} \left(x - \frac{d+c}{d-c} \right)$ на интервале $(-d, -c)$ и $y = \frac{a}{2}(x+1)$ на интервале $(0, a)$.

Систему уравнений (1.1.51)-(1.1.52) запишем в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\xi-x} - \frac{\gamma}{\xi+x+2} \frac{d^*+c^*}{d^*-c^*} + \frac{1}{\xi+x+\frac{4d^*}{d^*-c^*}} - H_{11}(\xi, x) \right] g'_1(\xi) d\xi + \\ & + \frac{2}{(1+\mu)\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\xi - \frac{d^*-c^*}{a^*} x + \frac{a^*+d^*+c^*}{a^*}} + H_{12}(\xi, x) \right] g'_2(\xi) d\xi = \end{aligned} \quad (1.1.62)$$

$$= \tau_1^{*+}(x) + \tau_1^{*-}(x) + 2h_1(x) \quad (-1 < x < 1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{(1+\mu)\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\xi - \frac{a^*}{d^*-c^*} x - \frac{a^*+d^*+c^*}{d^*-c^*}} + H_{21}(\xi, x) \right] g'_1(\xi) d\xi + \\ & + \frac{1}{\pi\mu} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\xi-x} + \frac{\gamma}{\xi+x+2} + H_{22}(\xi, x) \right] g'_2(\xi) d\xi = \tau_2^{*+}(x) + \tau_2^{*-}(x) + 2h_2(x) \end{aligned} \quad (1.1.63)$$

$$(-1 < x < 1)$$

где, сохраняя, после замены аргумента, названия функций, имеем

$$\begin{aligned} H_{11}(\xi, x) &= \frac{d-c}{2} H_{11} \left(\frac{d-c}{2} \left(\xi - \frac{d+c}{d-c} \right), \frac{d-c}{2} \left(x - \frac{d+c}{d-c} \right) \right); \\ H_{12}(\xi, x) &= \frac{a}{2} H_{12} \left(\frac{a}{2} (\xi+1), \frac{d-c}{2} \left(x - \frac{d+c}{d-c} \right) \right); \\ H_{21}(\xi, x) &= \frac{d-c}{2} H_{21} \left(\frac{d-c}{2} \left(\xi - \frac{d+c}{d-c} \right), \frac{a}{2} (x+1) \right); \\ H_{22}(\xi, x) &= \frac{a}{2} H_{22} \left(\frac{a}{2} (\xi+1), \frac{a}{2} (x+1) \right); \\ g'_1(\xi) &= g'_1 \left(\frac{d-c}{2} \left(\xi - \frac{d+c}{d-c} \right) \right); & g'_2(\xi) &= g'_2 \left(\frac{a}{2} (\xi+1) \right); \\ h_1(x) &= h_1 \left(\frac{d-c}{2} \left(x - \frac{d+c}{d-c} \right) \right); & h_2(x) &= h_2 \left(\frac{a}{2} (x+1) \right); \end{aligned} \quad (1.1.64)$$

При этом представления (1.1.61) примут вид:

$$g_1'(\xi) = \frac{\psi_1(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} ; \quad g_2'(\xi) = \frac{\psi_2(\xi)}{(1+\xi)^\alpha \sqrt{1-\xi}} \quad (1.1.65)$$

Далее, используем квадратурные формулы [116]

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(\xi)(1-\xi)^\alpha (1+\xi)^\beta}{\xi-z} d\xi = \sum_{j=1}^n \frac{w_j \varphi(\xi_j)}{\xi_j-z} \left[1 - \frac{q_n^{(\alpha,\beta)}(z)}{q_n^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)} \right] \quad (1.1.66)$$

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi)(1-\xi)^\alpha (1+\xi)^\beta d\xi = \sum_{j=1}^n w_j \varphi(\xi_j) \quad (1.1.67)$$

где n - порядок аппроксимации, $\xi_j (j = \overline{1, n})$ - корни многочлена Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$,

$$w_j = \frac{2}{n+\alpha+\beta+1} \frac{q_n^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}{P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\xi_j)}, \quad (1.1.68)$$

$$q_n^{(\alpha,\beta)}(\zeta) = - \left(\frac{2}{\zeta-1} \right)^{n+1} 2^{\alpha+\beta} B(n+\alpha+1, n+\beta+1) F \left[n+1, n+\alpha+1; 2n+\alpha+\beta+2; \frac{2}{1-\zeta} \right],$$

$B(x, y)$ - известная бета-функция, $F(a, b; c; x)$ - гипергеометрический ряд [29].

Отметим, что функция $q_n^{(\alpha,\beta)}(\zeta)$ принимает различные значения в зависимости от того, стремится ли точка ζ к точке ξ разреза из верхней полуплоскости ($\xi + i0$) или из нижней полуплоскости ($\xi - i0$). На самом разрезе функция $q_n^{(\alpha,\beta)}(\zeta)$ определяется как полусумма этих значений:

$$q_n^{(\alpha,\beta)}(\xi) = \frac{1}{2} \left[q_n^{(\alpha,\beta)}(\xi + i0) + q_n^{(\alpha,\beta)}(\xi - i0) \right], \quad -1 < \xi < 1 \quad (1.1.69)$$

Заменяя в уравнениях (1.1.62) и (1.1.63) интегралы на конечные суммы и учитывая некоторые упрощения, связанные с корневой особенностью на обоих концах у первой функции в (1.1.65), получим два функциональных уравнения с неизвестными коэффициентами $\psi_1(\xi_i)$ и $\psi_2(\zeta_i)$:

$$\frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{\xi_i - x} \left(1 - \frac{U_{n-1}(x)}{U_{n-1}(\xi_i)} \right) + R_{11}(\xi_i, x) \right] \psi_1(\xi_i) + \frac{2}{1+\mu} \sum_{i=1}^n w_i R_{12}(\zeta_i, x) \psi_2(\zeta_i) = f_1(x)$$

$$\frac{2\mu}{1+\mu} \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n R_{21}(\xi_i, x) \psi_1(\xi_i) + \sum_{i=1}^n w_i \left[\frac{1}{\zeta_i - x} \left(1 - \frac{q_n^{(\frac{1}{2}, -\alpha)}(x)}{q_n^{(\frac{1}{2}, -\alpha)}(\zeta_i)} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma}{\zeta_i + x + 2} \left(1 - \frac{q_n^{(\frac{1}{2}, -\alpha)}(-x-2)}{q_n^{(\frac{1}{2}, -\alpha)}(\zeta_i)} \right) + H_{22}(\zeta_i, x) \right] \psi_2(\zeta_i) = f_2(x)$$

где $\xi_j = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2n}$ ($j = \overline{1, n}$) - корни многочлена Чебышева первого рода $T_n(x)$, а

$w_i, \zeta_i, q_n^{(\alpha, \beta)}(\zeta)$ - определяются формулами (1.1.68)-(1.1.69) при соответствующей подстановке показателей.

Здесь, с целью упрощения записи, для регулярных ядер и правых частей введены обобщающие обозначения:

$$R_{11}(\xi, x) = -\frac{\gamma}{\xi + x + 2 \frac{d^* + c^*}{d^* - c^*}} + \frac{1}{\xi + x + \frac{4d^*}{d^* - c^*}} - H_{11}(\xi, x)$$

$$R_{12}(\xi, x) = \frac{1}{\xi - \frac{d^* - c^*}{a^*} x + \frac{a^* + d^* + c^*}{a^*}} + H_{12}(\xi, x)$$

$$R_{21}(\xi, x) = \frac{1}{\xi - \frac{a^*}{d^* - c^*} x - \frac{a^* + d^* + c^*}{d^* - c^*}} + H_{21}(\xi, x)$$

$$f_1(x) = \pi \left[\tau_1^{*+}(x) + \tau_1^{*-}(x) \right] + 2\pi h_1(x)$$

$$f_2(x) = \pi \mu \left[\tau_2^{*+}(x) + \tau_2^{*-}(x) \right] + 2\pi \mu h_2(x)$$

Для определения указанных выше $2n$ неизвестных коэффициентов, необходимо выбрать сеть точек коллокации, т.е. точек в которых приравниваются левая и правая части уравнения, и свести функциональные уравнения к системе линейных алгебраических уравнений. Согласно методу механических квадратур [116] в качестве точек коллокации следует выбрать корни многочлена Чебышева второго

рода $U_{n-1}(x)$ для первого уравнения и корни функции $q_n^{\left(\frac{1}{2}, -\alpha\right)}(\zeta)$ для второго уравнения. Нетрудно проверить, что в обоих случаях число корней равно $n-1$, т.е. в результате будем иметь $2(n-1)$ уравнений. Добавляя к этим уравнениям условия (1.1.56), записанные в квадратурах,

$$\frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n \Psi_1(\xi_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n w_i \Psi_2(\zeta_i) = 0$$

получим замкнутую систему линейных алгебраических уравнений относительно указанных выше $2n$ неизвестных коэффициентов.

После определения этих коэффициентов искомые функции в представлениях (1.1.65) могут быть записаны в виде:

$$\Psi_1(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Psi_1(\xi_i) \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} T_m(x) T_m(\xi_i) \right] \quad (1.1.70)$$

$$\Psi_2(x) = \sum_{i=1}^n w_i \Psi_2(\zeta_i) \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{h_m} P_m^{\left(\frac{1}{2}, -\alpha\right)}(\zeta_i) P_m^{\left(\frac{1}{2}, -\alpha\right)}(x) \quad (1.1.71)$$

а их интегралы, т.е. обезразмеренное смещение берегов трещин друг относительно друга, могут быть вычислены по формулам [83]:

$$w_1^*(+0, x) - w_1^*(-0, x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Psi_1(\xi_k) \left[\arcsin x + \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{1-x^2} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{T_m(\xi_k) U_{m-1}(x)}{m} \right] \quad (1.1.72)$$

$$w_2^*(+0, x) - w_2^*(-0, x) = \sum_{i=1}^n w_i \Psi_2(\zeta_i) \left[\frac{B_{1+x} \left(-\alpha + 1, \frac{1}{2} \right)}{2} \frac{1}{B \left(-\alpha + 1, \frac{1}{2} \right)} - \right. \\ \left. - (1-x)^{\frac{1}{2}} (1+x)^{-\alpha+1} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{P_m^{\left(\frac{1}{2}, -\alpha\right)}(\zeta_i) P_{m-1}^{\left(\frac{1}{2}, -\alpha+1\right)}(x)}{2m h_m} \right] \quad (1.1.73)$$

где

$$h_m = \frac{2^{-\alpha + \frac{1}{2}} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \Gamma(m - \alpha + 1)}{\left(2m - \alpha + \frac{1}{2}\right) \Gamma(m + 1) \Gamma\left(m - \alpha + \frac{1}{2}\right)} \quad (1.1.74)$$

Перейдем к определению коэффициента концентрации тангенциальных напряжений в окрестности концевой точки трещины. Для определенности выберем конец $y = -c$ (в безразмерных координатах $x = 1$) трещины, находящейся в слое. Очевидно, что правая часть уравнения (1.1.62) представляет собой тангенциальное напряжение на линии расположения трещин, при этом как на берегах трещины, так и вне ее. Полагая в указанном представлении $x > 1$ и устремляя $x \rightarrow 1 + 0$, получим поведение разрушающего тангенциального напряжения в вершине трещины, проявляющееся в стремлении его к бесконечности. Коэффициент концентрации этого напряжения определяется формулой [95]

$$K_{III}(-c) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \tau_1^*(x) \sqrt{x-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \psi_1(1) \quad (1.1.75)$$

Аналогичным образом получают формулы для коэффициентов концентрации напряжений и в других вершинах. Следует заметить, что эти коэффициенты определяются граничными значениями искоемых функций, которые определяются по формулам (1.1.70) и (1.1.71).

4. Численный анализ.

Для иллюстрации процесса решения определяющей системы уравнений (1.1.62) и (1.1.63) рассмотрим частный случай, когда трещина в слое отсутствует, а трещина внутри полупространства выходит на линию раздела материалов. Свободная грань слоя предполагается ненагруженной $\tau_H(x) = 0$, а внешняя нагрузка задана в виде одинаковых равномерно распределенных тангенциальных напряжений $(\tau_2^+(y) = \tau_2^-(y) \equiv \tau_0)$ по направлению оси Oz , приложенных к берегам трещины (Рис.1.1.2). При принятых предположениях задача сводится к решению одного сингулярного интегрального уравнения с неподвижной особенностью относительно производной разности смещений берегов трещины. Это уравнение имеет вид:

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\xi - x} + \frac{\gamma}{\xi + x + 2} + H_{22}(\xi, x) \right] g_2'(\xi) d\xi = \frac{\pi \tau_0}{G_2} \quad (-1 < x < 1) \quad (1.1.76)$$

где регулярное ядро $H_{22}(\xi, x)$ определяется по формулам (1.1.53) и (1.1.64) и в настоящем случае имеет вид:

$$H_{22}(\xi, x) = \frac{4\mu}{(1+\mu)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\gamma)^n}{4(n+1)H^* + \xi + x + 2}, \quad H^* = \frac{H}{a} \quad (1.1.77)$$

Кроме того, должно выполняться также и первое из условий (1.1.56).

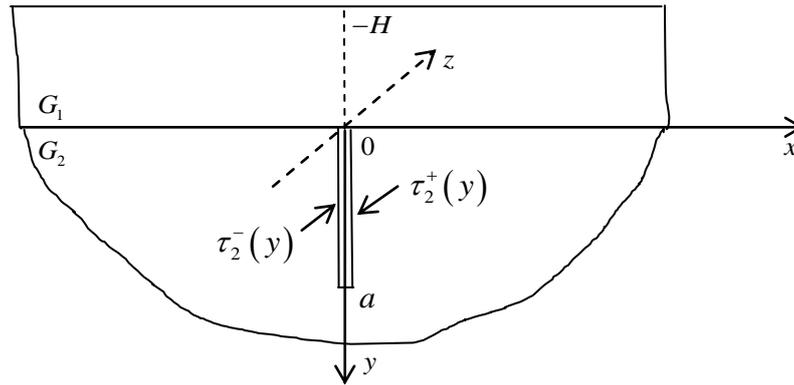


Рис. 1.1.2

Тангенциальные контактные напряжения, возникающие на линии раздела материалов, определяются формулой

$$\frac{1}{G_2} \tau_{yz}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{(1-\gamma)x}{x^2 + (1+\xi)^2} - R(x, \xi) \right] g_2'(\xi) d\xi \quad (1.1.78)$$

где

$$R(x, \xi) = \frac{4\mu}{1+\mu} \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma)^n \frac{4(n+1)H^* + \xi + 1}{x^2 + (4(n+1)H^* + \xi + 1)^2}$$

Численные расчеты проводились при порядке аппроксимации $n=10$, поскольку увеличение порядка аппроксимации не приводило к сколько-нибудь значимой поправке в результатах. Результаты расчетов приведены в виде таблиц и графиков.

Таблица 1.1.1 Значения коэффициента $K_{III}(-1)$

| H^* \ μ | 0.1 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 5 |
|---------------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|
| 0.01 | 0.0545 | 0.4710 | 1.5980 | 3.3743 | 5.6883 | 23.1034 |
| 0.1 | 0.0475 | 0.3228 | 0.9052 | 1.6538 | 2.4885 | 7.5853 |
| 1 | 0.0449 | 0.2736 | 0.7196 | 1.2741 | 1.889 | 5.8317 |
| 2 | 0.0448 | 0.2711 | 0.7111 | 1.2579 | 1.8646 | 5.7692 |
| 5 | 0.0448 | 0.2702 | 0.7079 | 1.2519 | 1.8554 | 5.7461 |

Таблица 1.1.2 Значения коэффициента $K_{III}(1)$

| H^* \ μ | 0.1 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 5 |
|---------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.01 | 0.8106 | 0.794 | 0.8392 | 0.9015 | 0.9668 | 1.2219 |
| 0.1 | 0.8074 | 0.7698 | 0.7715 | 0.7782 | 0.7835 | 0.7831 |
| 1 | 0.7997 | 0.7371 | 0.7159 | 0.7070 | 0.7020 | 0.6895 |
| 2 | 0.7985 | 0.7330 | 0.7104 | 0.7008 | 0.6956 | 0.684 |
| 5 | 0.7978 | 0.7311 | 0.7078 | 0.6981 | 0.6928 | 0.6816 |

В Табл. 1.1.1 и Табл. 1.1.2 приведены значения коэффициентов концентрации напряжений в концевых точках трещины для различных значений параметра $\mu = G_1/G_2$, представляющего отношение модулей сдвига и параметра $H^* = H/a$, представляющего отношение толщины слоя к длине трещины.

Сравнивая данные таблицы, можно сделать следующие выводы:

- с увеличением толщины слоя коэффициенты концентрации напряжений у обоих концов убывают;
- скорость убывания, особенно у конца на границе раздела материалов, существенно зависит от значений параметра μ и чем они выше, тем выше скорости;
- при малой толщине слоя коэффициент $K_{III}(1)$ у внутреннего конца трещины имеет минимум;

- все результаты для значений $H^* = 1, 2, 5$ отличаются друг от друга на доли процента, т.е. при $H^* > 1$, слой можно заменить полупространством.

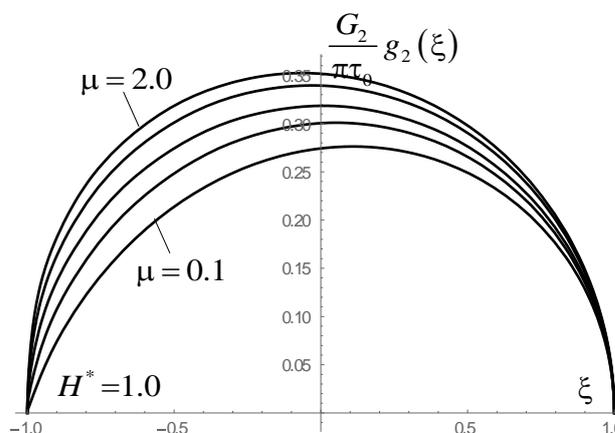


Рис. 1.1.3 $\mu = 0.1, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$

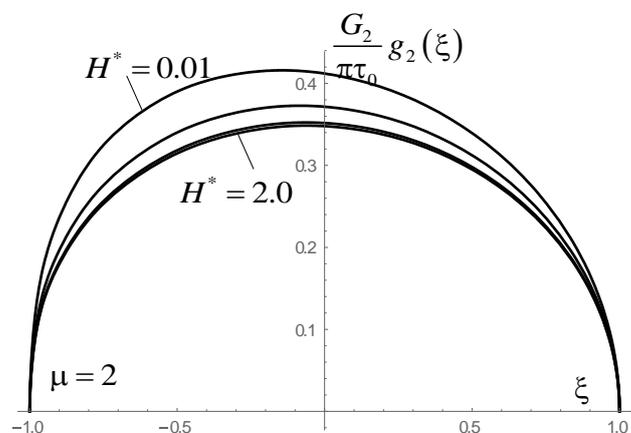


Рис. 1.1.4 $H^* = 0.01, 0.1, 1.0, 2.0$

На рисунках 1.1.3 и 1.1.4 представлены графики разности смещений берегов трещин $g_2(\xi)$ для различных значений параметра μ при фиксированном значении $H^* = 1$ (Рис. 1.1.3) и для различных значений параметра H^* при фиксированном значении $\mu = 2$ (Рис. 1.1.4). Последовательность графиков соответствует последовательности значений соответствующих параметров. Как замечаем из Рис. 1.1.4, кривые, соответствующие значениям $H^* = 1$ и $H^* = 2$, расположены очень близко друг к другу, что дополнительно подтверждает сделанный выше вывод о возможности замены слоя полупространством.

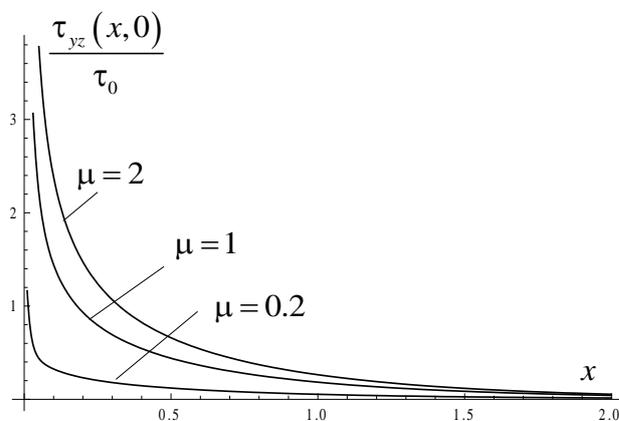


Рис. 1.1.5 $H^* = 1$

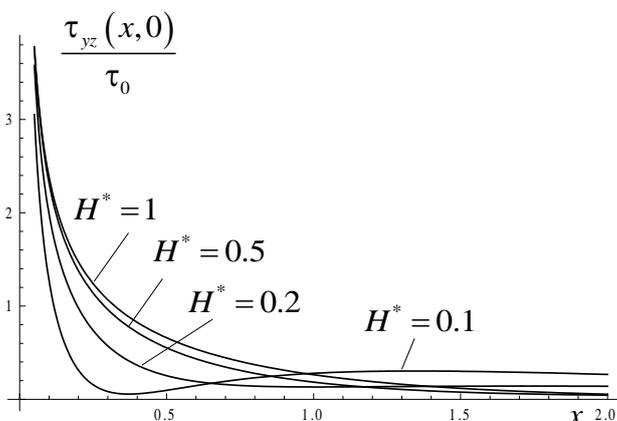


Рис. 1.1.6 $\mu = 2$

На рисунках 1.1.5 и 1.1.6 представлены графики распределения контактных тангенциальных напряжений, действующих на линии раздела материалов, опять-таки в зависимости от параметров μ и H^* .

§1.2 Антиплоская контактная задача для упругого составного полупространства с трещиной и штампом.

В этом параграфе рассматривается антиплоская контактная задача для той же области, что была рассмотрена в предыдущем параграфе, когда к границе слоя прикреплен жесткий ленточный штамп с плоским основанием конечной ширины. Решение задачи сведено к системе сингулярных интегральных уравнений.

1. Постановка задачи и вывод разрешающих уравнений.

Пусть составное полупространство, отнесенное к декартовой системе координат $ХОУ$, состоит из упругого бесконечного слоя толщины H и контактирующего с ним упругого полупространства. Слой занимает область $\Omega_1(|x, z| < \infty, -H < y < 0)$ и имеет модуль сдвига G_1 , а полупространство с модулем сдвига G_2 занимает область $\Omega_2(|x, z| < \infty, 0 < y < \infty)$. Слой ослаблен сквозной (туннельной) трещиной, расположенной по полосе $\Omega_0(x = 0, -d \leq y \leq -c, |z| < \infty)$. На участке $(-l_1, l_2)$ поверхности слоя $y = -H$ прикреплен жесткий ленточный штамп с плоским основанием конечной ширины (рис. 1.2.1). Родственная, к поставленной, задача для полупространства с полубесконечным разрезом, была рассмотрена в [92].

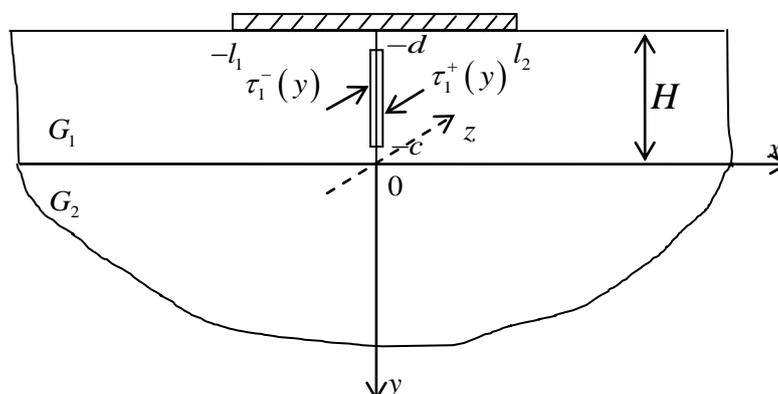


Рис. 1.2.1

Предполагается, что внешней нагрузкой, которая может быть приложена к штампу, к границе полупространства и к берегам трещины, являются равномерно распределенные по направлению оси OZ касательные силы, приводящие к антиплоской деформации заданной упругой системы. Требуется определить напряженно-деформированное состояние в составном полупространстве, а также контактные сдвигающие напряжения, возникающие под штампом.

Обозначим через $\tau_1^+(y)$ и $\tau_1^-(y)$ заданные напряжения, действующие на берегах трещины, а через $q_1(x)$ и $q_2(x)$ касательные напряжения, действующие на свободной поверхности слоя справа и слева от штампа соответственно. Предполагая, как уже отмечалось, что внешние силы равномерно распределены по направлению оси OZ , поставленную задачу можно трактовать как задачу антиплоской деформации с базовой плоскостью XOY .

При указанных условиях, рассматриваемая задача математически сводится к следующей краевой задаче для гармонического уравнения (1.1.1) в составной полуплоскости относительно перемещения $w_j(x, y)$ в областях Ω_1^* и Ω_2^* :

$$\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \Omega_1^* \cup \Omega_2^* \quad (1.2.1)$$

$$\Omega_1^* = \{|x| < \infty, -H < y < 0\}, \quad \Omega_2^* = \{|x| < \infty, 0 < y < \infty\}$$

с граничными и контактными условиями:

$$\begin{cases} w_1(x, -H) = C, & -l_1 < x < l_2 \end{cases} \quad (1.2.2)$$

$$\begin{cases} G_1 \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=-H} = \begin{cases} q_1(x), & x \in (-\infty, -l_1) \\ q_2(x), & x \in (l_2, \infty) \end{cases} \end{cases} \quad (1.2.3)$$

где C - жесткое смещение штампа,

$$\tau_{xz}^{(1)}(\pm 0, y) = \tau_1^\pm(y), \quad -d < y < -c \quad (1.2.4)$$

$$\begin{cases} w_1(x, -0) = w_2(x, +0) \\ \tau_{yz}^{(1)}(x, -0) = \tau_{yz}^{(2)}(x, +0) \end{cases}, \quad -\infty < x < \infty \quad (1.2.5)$$

Здесь $w_j(x, y)$ отличные от нуля компоненты упругого перемещения, которые связываются с компонентами напряжений законом Гука (1.1.8).

Отметим, что вместо граничных условий (1.2.4) могут быть заданы условия для перемещений $w_1(\pm 0, y)$ (жесткое включение), или же смешанные условия – перемещение и напряжение на разных берегах трещины (жесткое включение, одна грань которого не контактирует с матрицей).

Введем, как и раньше, скачки неизвестных перемещений через линию трещины

$$\begin{aligned} g_1(y) &= w_1(+0, y) - w_1(-0, y) \\ f_1(y) &= \frac{1}{G_1} \left[\tau_{xz}^{(1)}(+0, y) - \tau_{xz}^{(1)}(-0, y) \right] \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Решение поставленной задачи, конечно же, можно построить совершенно аналогичным путем, как это было сделано в предыдущем параграфе. Однако, решение задачи можно получить и используя полученное в предыдущем параграфе решение, следующим образом.

Обозначим через $\tau(x)$ подлежащее определению распределение контактных напряжений, возникающих под штампом. Относительно $\tau(x)$ известно только, что оно должно удовлетворять условию равновесия штампа, которое записывается в виде

$$\int_{-l_1}^{l_2} \tau(s) ds = P \quad (1.2.7)$$

где P - равнодействующая всех внешних сил, приложенных к штампу. Полагая, $\tau(x)$ известной, граничное условие (1.2.3) можно записать в виде:

$$G_1 \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=-H} = \tau_H(x) = \begin{cases} q_1(x); & x \in (-\infty, -l_1) \\ \tau(x); & x \in (-l_1, l_2) \\ q_2(x); & x \in (l_2, \infty) \end{cases} \quad (1.2.8)$$

Теперь, нетрудно заметить, что граничная задача (1.2.1), (1.2.5), (1.2.8) совпадает с граничной задачей (1.1.1), (1.1.4), (1.1.5). Формальное решение последней задачи нами было построено. Оно дается формулами (1.1.31), (1.1.32) в перемещениях или формулами (1.1.40)–(1.1.43) в деформациях (напряжениях). Следовательно, полагая в (1.1.40) и (1.1.41) $d = H$, $g_2'(y) = f_2(y) = 0$ и учитывая (1.2.6), для рассматриваемой здесь задачи получим следующие формулы для касательных напряжений в полосе (слое):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{G_1} \tau_{xz}^{(1)}(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{-c} \left[\frac{\eta - y}{x^2 + (\eta - y)^2} - \gamma \frac{\eta + y}{x^2 + (\eta + y)^2} + \frac{2H + \eta + y}{x^2 + (2H + \eta + y)^2} + \right. \\
& \left. + K_{11}^{(1)}(x, y, \eta) \right] g_1'(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi G_1} \int_{-l_1}^{l_2} F_1^{(1)}(x, y, t) \tau(t) dt + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{-c} \left[\frac{x}{x^2 + (\eta - y)^2} - \gamma \frac{x}{x^2 + (\eta + y)^2} + \frac{x}{x^2 + (2H + \eta + y)^2} + \right. \\
& \left. + K_{12}^{(1)}(x, y, \eta) \right] f_1(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi G_1} \int_{-\infty}^{-l_1} F_1^{(1)}(x, y, t) q_1(t) dt + \\
& + \frac{1}{\pi G_1} \int_{l_2}^{\infty} F_1^{(1)}(x, y, t) q_2(t) dt, \quad (x, y) \in \Omega_1^* \tag{1.2.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{G_1} \tau_{yz}^{(1)}(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{-c} \left[\frac{x}{x^2 + (\eta - y)^2} + \gamma \frac{x}{x^2 + (\eta + y)^2} - \frac{x}{x^2 + (2H + \eta + y)^2} + \right. \\
& \left. + K_{11}^{(2)}(x, y, \eta) \right] g_1'(\eta) d\eta + \frac{1}{2\pi G_1} \int_{-l_1}^{l_2} \left[\frac{H + y}{(t - x)^2 + (H + y)^2} + F_1^{(1)}(x, y, t) \right] \tau(t) dt + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{-c} \left[\frac{\eta - y}{x^2 + (\eta - y)^2} + \gamma \frac{\eta + y}{x^2 + (\eta + y)^2} - \frac{2H + \eta + y}{x^2 + (2H + \eta + y)^2} + \right. \\
& \left. + K_{12}^{(2)}(x, y, t) \right] f_1(\eta) d\eta + \frac{1}{2\pi G_1} \int_{-\infty}^{-l_1} \left[\frac{H + y}{(t - x)^2 + (H + y)^2} + F_1^{(2)}(x, y, t) \right] q_1(t) dt + \\
& + \frac{1}{2\pi G_1} \int_{l_2}^{\infty} \left[\frac{H + y}{(t - x)^2 + (H + y)^2} + F_1^{(2)}(x, y, t) \right] q_2(t) dt, \quad (x, y) \in \Omega_1^* \tag{1.2.10}
\end{aligned}$$

где ядра $K_{ij}^{(i)}(x, y, \eta)$ и $F_j^{(i)}(x, y, t)$ ($i, j = 1, 2$) даются формулами (1.1.44) и (1.1.47), а функции $g_1(\eta)$ и $f_1(\eta)$ - формулами (1.2.6). При этом по условиям задачи (условие (1.2.4)) $f_1(\eta)$ известна, а функции $g_1(y)$ и $\tau(x)$ неизвестны.

Из (1.1.42), (1.1.43) и (1.1.32) можно получить формулы, аналогичные формулам (1.2.9) и (1.2.10), представляющие напряженно-деформированное поле в полуплоскости.

Таким образом, чтобы завершить решение поставленной задачи, нам следует еще определить функции $g_1'(t)$ и $\tau(x)$. Для определения этих неизвестных функций, заметим, что при построении формального решения задачи в виде (1.2.9) и (1.2.10), остались неудовлетворенными условия (1.2.2) и (1.2.4).

Удовлетворяя, при помощи (1.2.9) и (1.2.10), этим условиям, предварительно продифференцировав условие (1.2.2) по x с целью исключения жесткого смещения C , для определения неизвестных $g_1'(t)$ и $\tau(x)$ получим следующие интегральные уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{-c} \left[\frac{1}{\eta - y} - \gamma \frac{1}{\eta + y} + \frac{1}{2H + \eta + y} + L_{11}(\eta, y) \right] g_1'(\eta) d\eta - \\ & - \frac{1}{\pi G_1} \int_{-l_1}^{l_2} \left[\frac{t}{t^2 + (H + y)^2} + L_{12}(t, y) \right] \tau(t) dt = \frac{\tau_1^+(y) + \tau_1^-(y)}{2G_1} - \\ & - \frac{1}{\pi G_1} \int_{-\infty}^{l_1} L_{12}(t, y) q_1(t) dt - \frac{1}{\pi G_1} \int_{l_2}^{\infty} L_{12}(t, y) q_2(t) dt, \quad -d < y < -c \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{-c} \left[\frac{2(\eta + H)}{x^2 + (\eta + H)^2} - \gamma \frac{\eta - H}{x^2 + (\eta - H)^2} + L_{21}(x, \eta) \right] g_1'(\eta) d\eta - \\ & - \frac{1}{\pi G_1} \int_{-l_1}^{l_2} \left[\frac{1}{t - x} + L_{22}(x, t) \right] \tau(t) dt = \frac{1}{\pi G_1} \int_{-\infty}^{-l_1} \left[\frac{1}{t - x} + L_{22}(x, t) \right] q_1(t) dt + \\ & + \frac{1}{\pi G_1} \int_{l_2}^{\infty} \left[\frac{1}{t - x} + L_{22}(x, t) \right] q_2(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{-c} \left[\frac{2x}{x^2 + (\eta + H)^2} - \gamma \frac{x}{x^2 + (H - \eta)^2} + \right. \\ & \left. + K_{12}^{(1)}(x, -H, \eta) \right] \frac{\tau_1^+(\eta) - \tau_1^-(\eta)}{2G_1} d\eta, \quad -l_1 < x < l_2, \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

где

$$\begin{aligned} L_{11}(\eta, y) &= K_{11}^{(1)}(0, \eta, y); \quad L_{21}(x, \eta) = K_{11}^{(1)}(x, -H, \eta); \\ L_{12}(t, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma)^{n+1} \left[\frac{t}{t^2 + ((2n+3)H + y)^2} + \frac{t}{t^2 + ((2n+1)H - y)^2} \right]; \\ L_{22}(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma)^{n+1} \frac{2(t-x)}{(t-x)^2 + ((2n+3)H)^2}. \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

а $K_{11}^{(1)}(x, y, \eta)$, $K_{12}^{(1)}(x, y, \eta)$ даются формулами (1.1.44).

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к системе сингулярных интегральных уравнений (1.2.11)-(1.2.12) относительно контактного напряжения под штампом $\tau(x)$ и производной скачка перемещений берегов трещины $g_1'(\eta)$. При этом, искомые функции $\tau(x)$ и $g_1'(y)$ должны удовлетворять условиям равновесия (1.2.7) и непрерывности скачка перемещений

$$\int_{-d}^{-c} g_1'(t) dt = 0 \quad (1.2.14)$$

2. Исследование определяющей системы интегральных уравнений и ее решение.

Приступим к решению системы интегральных уравнений (1.2.11)-(1.2.12) при условиях (1.2.7) и (1.2.14). В случаях, когда конец трещины не выходит под штамп, исследование системы уравнений проводится аналогично сделанному ранее и, поэтому, здесь оно не приводится, но ниже будут приведены численные результаты для этих случаев. Здесь же приведем исследование определяющих уравнений в случае, когда трещина выходит под штамп, и представим алгоритм их решений методом механических квадратур.

При этом, для определенности, сделаем следующие предположения

$$l_1 = l_2 = l, \quad d = H, \quad q_1(x) = 0, \quad q_2(x) = 0, \quad \tau_1^+(y) = \tau_1^-(y) = \tau_0 \quad (1.2.15)$$

Учитывая наличие неподвижной особенности в точке $(0, -H)$, которая не является конечной точкой для неизвестного контактного напряжения, последнее будем искать в виде двух самостоятельных функций $\tau_1(x)$ и $\tau_2(x)$, определенных соответственно на интервалах $(-l < x < 0)$ и $(0 < x < l)$. На соответствующих отрезках рассмотрим и уравнение (1.2.12), тем самым сведя исходную систему из двух уравнений к системе из трех уравнений:

$$\int_{-H}^{-c} \left[\frac{1}{\eta-y} - \frac{\gamma}{\eta+y} + \frac{1}{2H+\eta+y} + L_{11}(\eta, y) \right] g'_1(\eta) d\eta - \frac{2}{G_1} \int_{-l}^0 \left[\frac{t}{t^2+(H+y)^2} + L_{12}(t, y) \right] \tau_1(t) dt - \frac{2}{G_1} \int_0^l \left[\frac{t}{t^2+(H+y)^2} + L_{12}(t, y) \right] \tau_2(t) dt = \frac{2\pi}{G_1} \tau_0, \quad (-H < y < -c)$$

$$\int_{-H}^{-c} \left[\frac{2(\eta+H)}{x^2+(\eta+H)^2} - \gamma \frac{\eta-H}{x^2+(\eta-H)^2} + L_{21}(x, \eta) \right] g'_1(\eta) d\eta - \frac{2}{G_1} \int_{-l}^0 \left[\frac{1}{t-x} + L_{22}(x, t) \right] \tau_1(t) dt - \frac{2}{G_1} \int_0^l \left[\frac{1}{t-x} + L_{22}(x, t) \right] \tau_2(t) dt = 0 \quad (-l < x < 0)$$

$$\int_{-H}^{-c} \left[\frac{2(\eta+H)}{x^2+(\eta+H)^2} - \gamma \frac{\eta-H}{x^2+(\eta-H)^2} + L_{21}(x, \eta) \right] g'_1(\eta) d\eta - \frac{2}{G_1} \int_{-l}^0 \left[\frac{1}{t-x} + L_{22}(x, t) \right] \tau_1(t) dt - \frac{2}{G_1} \int_0^l \left[\frac{1}{t-x} + L_{22}(x, t) \right] \tau_2(t) dt = 0 \quad (0 < x < l)$$

Как и выше перейдем к безразмерным величинам и сведем все уравнения к интервалу $(-1, 1)$. Получим

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\xi-\zeta} + \frac{1}{\xi+\zeta+2} + R_{11}(\xi, \zeta) \right] g'_1(\xi) d\xi - \int_{-1}^1 \left[\frac{2(\xi-1)}{(\xi-1)^2 + a^2(\zeta+1)^2} + R_{12}(\xi, \zeta) \right] \tau_1(\xi) d\xi - \int_{-1}^1 \left[\frac{2(\xi+1)}{(\xi+1)^2 + a^2(\zeta+1)^2} + R_{13}(\xi, \zeta) \right] \tau_2(\xi) d\xi = 2\pi\tau_0, \quad |\xi| < 1$$

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{2(\xi+1)}{(\xi+1)^2 + \frac{(\zeta-1)^2}{a^2}} + R_{21}(\xi, \zeta) \right] g'_1(\xi) d\xi - \quad (1.2.16)$$

$$-2 \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\xi-\zeta} + R_{22}(\xi, \zeta) \right] \tau_1(\xi) d\xi - 2 \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\xi-\zeta+2} + R_{23}(\xi, \zeta) \right] \tau_2(\xi) d\xi = 0, \quad |\xi| < 1$$

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{2(\xi+1)}{(\xi+1)^2 + \frac{(\zeta+1)^2}{a^2}} + R_{31}(\xi, \zeta) \right] g'_1(\xi) d\xi -$$

$$-2 \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\xi-\zeta-2} + R_{32}(\xi, \zeta) \right] \tau_1(\xi) d\xi - 2 \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\xi-\zeta} + R_{23}(\xi, \zeta) \right] \tau_2(\xi) d\xi = 0, \quad |\xi| < 1$$

Здесь названия искомых функций оставлены неизменными, полагая при этом что функции, представляющие напряжения, отнесены к модулю сдвига G_1 . Кроме того:

$$R_{11}(\xi, \zeta) = -\frac{\gamma}{\xi + \zeta - 2\frac{H^* + c^*}{a}} + \frac{H-c}{2} L_{11}\left(\frac{H-c}{2}\left(\xi - \frac{H^* + c^*}{a}\right), \frac{H-c}{2}\left(\zeta - \frac{H^* + c^*}{a}\right)\right);$$

$$R_{12}(\xi, \zeta) = \frac{l}{2} L_{22}\left(\frac{l}{2}(\xi-1), \frac{a}{2}\left(\zeta - \frac{H^* + c^*}{a}\right)\right); \quad R_{13}(\xi, \zeta) = \frac{l}{2} L_{22}\left(\frac{l}{2}(\xi+1), \frac{a}{2}\left(\zeta - \frac{H^* + c^*}{a}\right)\right).$$

Остальные регулярные ядра выписываются аналогичным образом.

Исследуя, как и выше, поведение уравнений у концов отрезков интегрирования, находим, что решения следует искать в виде [69]:

$$g_1'(\xi) = \frac{A}{\sqrt{1-\xi}} + \varphi_1(\xi) \frac{1+\xi}{\sqrt{1-\xi}}$$

$$\tau_1(\xi) = -\frac{A}{2\sqrt{1+\xi}} + \varphi_2(\xi) \frac{1-\xi}{\sqrt{1+\xi}} \tag{1.2.17}$$

$$\tau_2(\xi) = \frac{A}{2\sqrt{1-\xi}} + \varphi_3(\xi) \frac{1+\xi}{\sqrt{1-\xi}}$$

Согласно методу механических квадратур будем иметь $3n+1$ неизвестных коэффициентов: по n для каждой из функций и постоянная A , для определения которых будем иметь $3n$ уравнений, полученных из системы (1.2.16) в точках коллокации, число которых равно по n для каждого уравнения, и дополнительное условие (1.2.14), которое запишется в виде

$$\int_{-1}^1 g_1'(\xi) d\xi = 0 \tag{1.2.18}$$

Таким образом, будем иметь замкнутую систему линейных алгебраических уравнений для определения всех неизвестных.

Численный анализ.

Проведен численный анализ для случаев, когда трещина полностью находится внутри слоя либо один ее конец выходит на линию раздела материалов. На рис. 1.2.2 представлены графики смещения берегов трещины в зависимости от параметра $c^* = c/l$, описывающего расстояние от конца трещины до линии раздела материалов,

когда внешняя, равномерно распределенная, нагрузка действует только на берега трещины, а отношение модулей сдвига слоя и полупространства принято $\mu = 3$. На рис. 1.2.3 представлены соответствующие этому случаю обезразмеренные контактные напряжения под штампом.

На рис. 1.2.4 и рис. 1.2.5 приведены такие же графики для разных значений отношения модулей сдвига слоя и полупространства в случае, когда конец трещины выходит на линию раздела материалов.

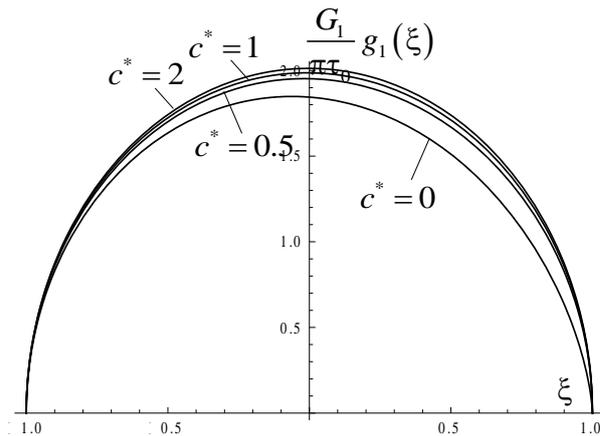


Рис. 1.2.2 Смещение

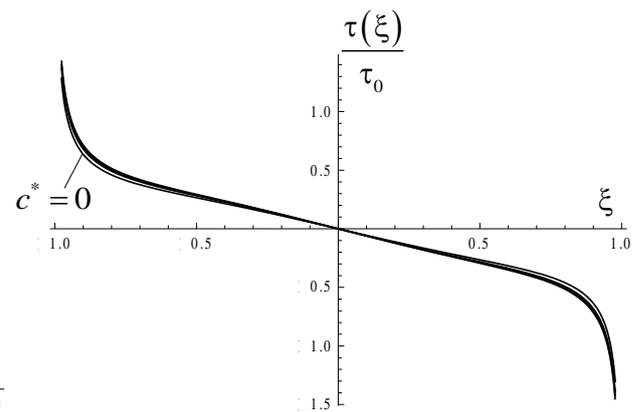


Рис. 1.2.3 Контактное напряжение

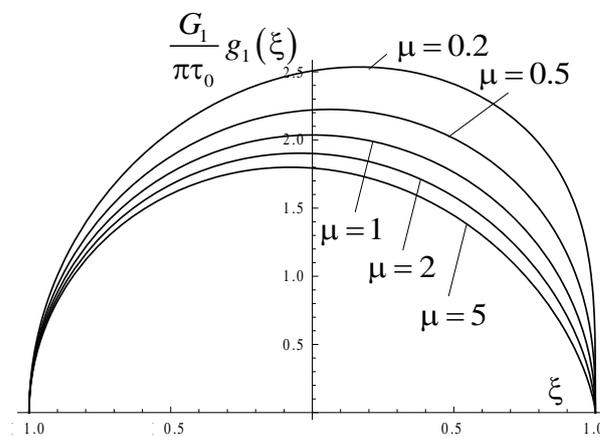


Рис. 1.2.4 Смещение

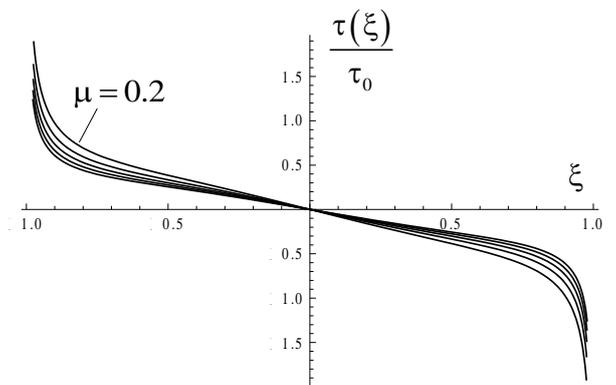


Рис. 1.2.5 Контактное напряжение

На рисунках 1.2.2 и 1.2.3 близость трех графиков, соответствующих внутренним трещинам, указывает на существенное отличие их от случая выхода трещины на линию раздела. Рисунки 1.2.4 и 1.2.5 показывают на существенную зависимость, особенно для смещения, от отношения модулей сдвига μ . Следует отметить, что

указанная зависимость в случае внутренней трещины тем, меньше, чем дальше конец трещины от линии раздела материалов.

Представляет интерес также случай, когда конец трещины приближается к штампу. На рис. 1.2.6 и рис. 1.2.7 представлены аналогичные графики в зависимости от расстояния между вершиной трещины и основанием штампа, описываемого параметром $d^* = d/l$, в случае, когда $\mu = 0.8$, а вторая вершина трещины находится на линии раздела материалов, т.е. $c^* = 0$.

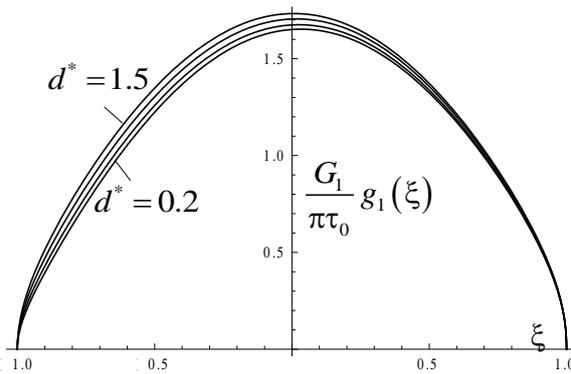


Рис. 1.2.6

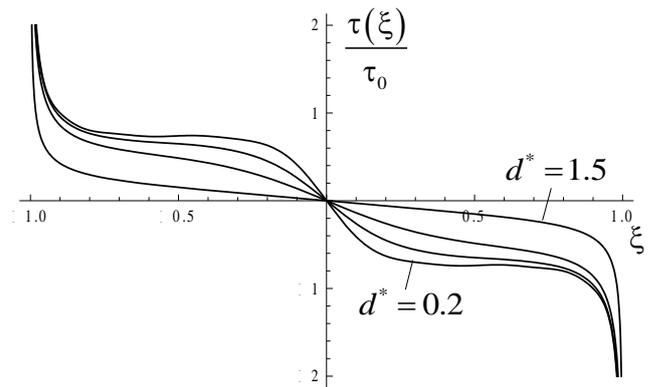


Рис. 1.2.7

Указанный параметр принимает значения $d^* = 1.5; 0.5; 0.3; 0.2$. Вычисления для меньших значений на основе имеющейся системы уравнений проводить невозможно, так как существенную роль начинают играть регулярные ядра, которые в пределе $d^* \rightarrow 0$ порождают неподвижную особенность и меняют показатель особенности производной смещения берегов трещины. Анализируя графики на Рис. 1.2.7, нетрудно заметить, что в пределе при $d^* \rightarrow 0$ распределение контактных напряжений в центральной части зоны контакта будет носить ступенчатый характер. Этого следовало ожидать, поскольку одинаковая равномерно распределенная нагрузка, приложенная к берегам трещины и вызывающая их взаимосмещение, при выходе трещины под штамп порождает возникновение в этой точке разнонаправленных напряжений.

Проведен численный анализ и для частного случая, когда штамп отсутствует, а трещина занимает всю ширину слоя (Рис. 1.2.8). В этом случае для параметров задачи будем иметь:

$$l_1 = l_2 = 0; \quad c = 0; \quad d = H \quad (1.2.19)$$

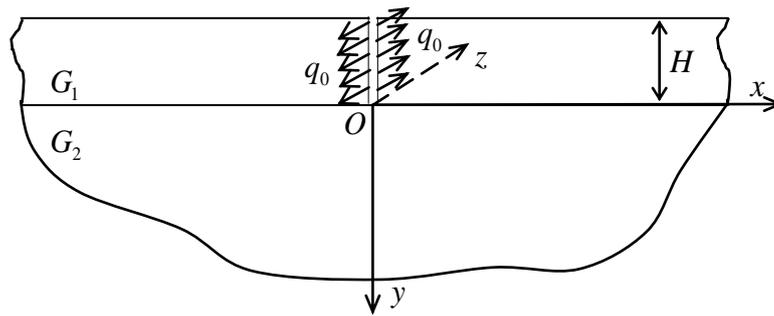


Рис. 1.2.8

Вместо системы определяющих уравнений будем иметь только одно сингулярное интегральное уравнение с неподвижной особенностью относительно относительно производной скачка перемещения.

На Рис. 1.2.9 представлены графики взаимосмещения берегов трещины для различных значений отношения модулей сдвига $\mu = 0.2; 0.5; 1; 2; 5$.

В Таблице 1.2.1 приведены значения коэффициента интенсивности тангенциальных напряжений на линии трещины в окрестности ее вершины $K_{III}(1)$ и показателя особенности α для тех же значений отношения модулей сдвига μ .

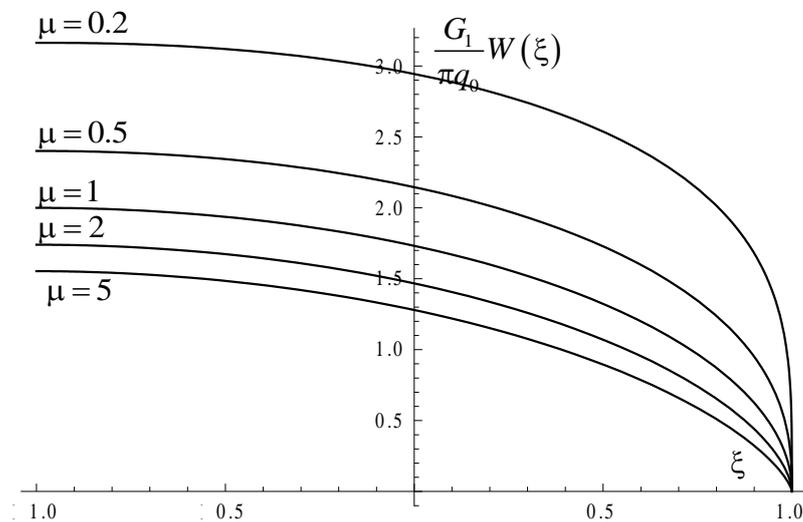


Рис. 1.2.9

Таблица 1.2.1 Значения коэффициента $K_{III}(1)$

| μ | 0.2 | 0.5 | 1 | 2 | 5 |
|--------------|--------|--------|-----|--------|--------|
| $K_{III}(1)$ | 0.4172 | 0.4613 | 0.5 | 0.56 | 0.6929 |
| α | 0.7323 | 0.6082 | 0.5 | 0.3918 | 0.2677 |

К сожалению, данные Табл. 1.2.1 не позволяют сделать какой-либо определенный вывод о напряженности в окрестности вершины трещины, поскольку изменяются как показатель особенности, так и коэффициент интенсивности, причем в обратном порядке.

§1.3 Продольный сдвиг составного полупространства с штампом и включением

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений.

Здесь опять рассматривается антиплоская задача для упругой системы слой-полупространство, рассмотренной в предыдущем параграфе. Постановка задачи в обозначениях §1.2 и принятой там системе координат заключается в следующем. К поверхности $y = -H$ слоя прикреплен ленточный штамп конечной ширины, а сам слой по полосе $\Omega_0(x=0, -d < y < -c, |z| < \infty)$ ослаблен туннельной трещиной, на берегах которой заданы перемещения $w_1(\pm 0, y) = w_1^\pm(y)$ (рис. 1.3.1).

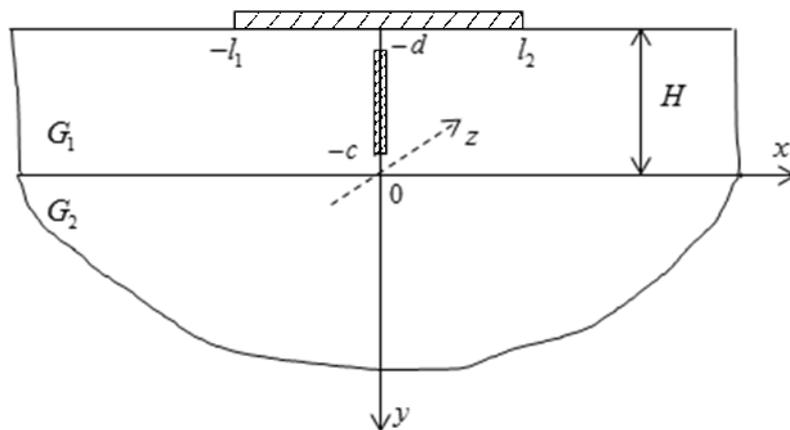


Рис. 1.3.1

Внешние воздействия приложены на штамп и на границе полупространства в виде касательных сил и, как было отмечено, на берегах трещины в виде заданных перемещений. Требуется определить напряженное состояние в составном полупространстве, а также контактные напряжения под штампом и на линиях берегов трещины где заданы перемещения.

Поставленная задача математически сводится к следующей краевой задаче для двумерного уравнения Лапласа в областях Ω_1^* и Ω_2^* :

$$\Delta w_1(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_1^* = \{|x| < \infty, -H < y < 0\}, \quad (1.3.1)$$

$$\begin{cases} w_1(x, -H) = C, & x \in [-l_1, l_2], \end{cases} \quad (1.3.2)$$

$$\begin{cases} \tau_{yz}(x, -H) = \tau_0(x), & x \in L, \end{cases} \quad (1.3.3)$$

$$w_1(\pm 0, y) = w_1^\pm(y), \quad y \in [-d, -c], \quad (1.3.4)$$

$$\Delta w_2(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_2^* = \{|x| < \infty, 0 < y < \infty\}, \quad (1.3.5)$$

при условиях исчезновения напряжений на бесконечности и полного контакта на линии $y = 0$:

$$w_1(x, -0) = w_2(x, 0), \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1.3.6)$$

$$\tau_{yz}(x, +0) = \tau_{yz}(x, -0), \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1.3.7)$$

Здесь $w_j(x, y)$ ($j = 1, 2$) - упругое перемещение, связанное с напряжениями законом Гука (1.1.8), C - жесткое перемещение штампа, L - область действия внешней нагрузки приложенной на границе слоя.

Отметим теперь, что если имеем

$$w_1^+(y) = w_1^-(y) = const, \quad (1.3.8)$$

то поставленная задача соответствует случаю, когда на месте трещины вставлено жесткое включение малой толщины, т. е. приходим к задаче соответствующее зоглавию параграфа.

Обозначим через $\tau(x)$ подлежащее определению контактное напряжение под штампом и введем, как и в предыдущем параграфе, функции скачков на линии трещины

$$g_1(y) = w_1(+0, y) - w_1(-0, y); \quad f_1(y) = \frac{\tau_{xz}(+0, y) - \tau_{xz}(-0, y)}{G_1} \quad (-d < y < -c) \quad (1.3.9)$$

Теперь сопоставлением граничных задач (1.1.1)-(1.1.5) и (1.3.1)-(1.3.6) нетрудно убедиться, что решение поставленной задачи может быть получено при помощи формул (1.1.40)-(1.1.43), принимая в этих формулах

$$g'_1(\eta) = g'_2(\eta) = f_2(\eta) = 0 \quad (1.3.10)$$

Тогда для определения напряженного поля в области Ω_1^* из (1.1.40) и (1.1.41), имея при этом, что

$$\tau_H(x) = \begin{cases} \tau(s), & x \in (-l_1, l_2) \\ \tau_0(s), & x \in L \end{cases} \quad (1.3.11)$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_1} \tau_{xz}^{(1)}(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{-c} \left[\frac{x}{x^2 + (\eta - y)^2} - \gamma \frac{x}{x^2 + (\eta + y)^2} + \frac{x}{x^2 + (2H + \eta + y)^2} + \right. \\ & \left. + K_{11}^{(1)}(x, y, \eta) \right] f_1(\eta) d\eta - \frac{1}{\pi G_1} \int_{-l_1}^{l_2} F_1^{(1)}(x, y, t) \tau(t) dt - \frac{1}{\pi G_1} \int_L F_1^{(1)}(x, y, t) \tau_0(t) dt \\ & (x, y) \in \Omega_1^*, \quad (1.3.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_1} \tau_{yz}^{(1)}(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{-c} \left[\frac{\eta - y}{x^2 + (\eta - y)^2} + \frac{\gamma(\eta + y)}{x^2 + (\eta + y)^2} - \frac{2H + \eta + y}{x^2 + (2H + \eta + y)^2} + \right. \\ & \left. + K_{12}^{(2)}(x, y, \eta) \right] f_1(\eta) d\eta + \frac{1}{2\pi G_1} \int_{-l_1}^{l_2} \left[\frac{H + y}{(t - x)^2 + (H + y)^2} + F_1^{(2)}(x, y, t) \right] \tau(t) dt + \\ & + \frac{1}{2\pi G_1} \int_L \left[\frac{H + y}{(t - x)^2 + (H + y)^2} + F_1^{(2)}(x, y, t) \right] \tau_0(t) dt, \quad (x, y) \in \Omega_1^* \quad (1.3.13) \end{aligned}$$

где ядра $K_{ij}^{(i)}(x, y, \eta)$, $F_1^{(j)}(x, y, t)$, ($i, j = 1, 2$) даются формулами (1.1.44), (1.1.45) и (1.1.48).

Аналогичные формулы, определяющие напряжения в области Ω_2^* , можно получить из (1.1.42) и (1.1.43), имея при этом в виду (1.3.10) и (1.3.11).

Таким образом, решение поставленной задачи (в области Ω_1^*) дается формулами (1.3.12) и (1.3.13), где функции $f_1(y)$ и $\tau(x)$ пока неизвестны. Для определения этих неизвестных удовлетворим условиям (1.3.2) и (1.3.8). Эти условия эквивалентны следующим условиям

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{y=-H} = 0, \quad -l_1 < x < l_2; \quad \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{x=+0} = 0, \quad -d < y < -c \quad (1.3.14)$$

Теперь, удовлетворяя при помощи (1.3.12) и (1.3.13) условиям (1.3.14), для определения неизвестных функций $\tau(x)$ и $f_1(y)$ получим следующую систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{-c} \left[\frac{2x}{x^2 + (H + \eta)^2} - \frac{\gamma x}{x^2 + (H - \eta)^2} + L_{11}^{(b)}(x, \eta) \right] f_1(\eta) d\eta - \\ & - \frac{1}{\pi G_1} \int_{-l_1}^{l_2} \left[\frac{1}{t-x} + L_{22}^{(b)}(y, t) \right] \tau(t) dt = \frac{1}{\pi G_1} \int_L \left[\frac{1}{t-x} + L_{22}^{(b)}(y, t) \right] \tau_0(t) dt, \quad (-l_1 < x < l_2) \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{-c} \left[\frac{1}{\eta-y} + \frac{\gamma}{\eta+y} - \frac{1}{2H + \eta + y} + L_{21}^{(b)}(y, \eta) \right] f_1(\eta) d\eta + \\ & + \frac{1}{2\pi G_1} \int_{-l_1}^{l_2} \left[\frac{H+y}{t^2 + (H+y)^2} + L_{22}^{(b)}(y, t) \right] \tau(t) dt = - \frac{1}{2\pi G_1} \int_L \left[\frac{H+y}{t^2 + (H+y)^2} + \right. \\ & \left. + L_{22}^{(b)}(y, t) \right] \tau_0(t) dt, \quad (-d < y < -c) \end{aligned} \quad (1.3.16)$$

где $L_{11}^{(b)}(x, \eta) = K_{12}^{(1)}(x, -H, \eta)$, $L_{21}^{(b)}(y, \eta) = K_{12}^{(2)}(0, y, \eta)$,

$$L_{12}^{(b)}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma)^n \frac{2(t-x)}{(t-x)^2 + (2(n+1)H)^2},$$

$$L_{22}^{(b)}(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma)^{n+1} \left[\frac{(2n+3)H+y}{t^2 + ((2n+3)H+y)^2} - \frac{(2n+1)H-y}{t^2 + ((2n+1)H-y)^2} \right] \quad (1.3.17)$$

а $K_{12}^{(1)}(x, y, \eta)$ и $K_{12}^{(2)}(x, y, \eta)$ даются формулами (1.1.44) и (1.1.45).

Таким образом, решение выше поставленной контактной задачи свелось к системе сингулярных интегральных уравнений (1.3.15) и (1.3.16) относительно контактных напряжений $\tau(x)$ и скачка напряжений на краях жесткого включения.

Уравнения, входящие в систему определяющих уравнений (1.3.15) и (1.3.16), представляют собой сингулярные интегральные уравнения первого рода. Ядра этих уравнений представляются в виде суммы сингулярного ядра Коши, ядер, которые в случае $d = H$ выделяют неподвижную особенность, и регулярных частей.

Из физической постановки задачи следует, что контактные напряжения должны удовлетворять условию равновесия штампа и жесткого включения

$$\int_{-l_1}^{l_2} \tau(s) ds = P_1, \quad \int_{-d}^{-c} f_1(\eta) d\eta = P_2 \quad (1.3.18)$$

где P_1 равнодействующая внешних сил, действующих на штамп, а P_2 - сил, действующих на жесткое включение.

В случае, когда жесткое включение выходит под штамп ($d = H$), разрешающие уравнения обращаются в сингулярное интегральное уравнение с обобщенным ядром Коши. Алгоритм решения разрешающей системы для этого случая описан в предыдущем параграфе.

Численный анализ.

Проведен численный анализ, как и в предыдущем параграфе, для случаев, когда включение полностью находится внутри слоя либо один ее конец выходит на линию раздела материалов.

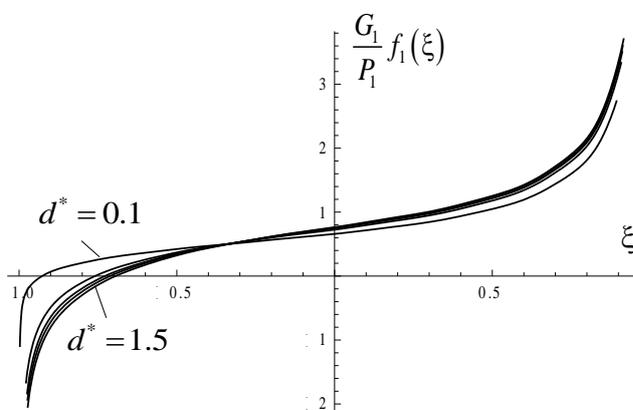


Рис.1.3.2

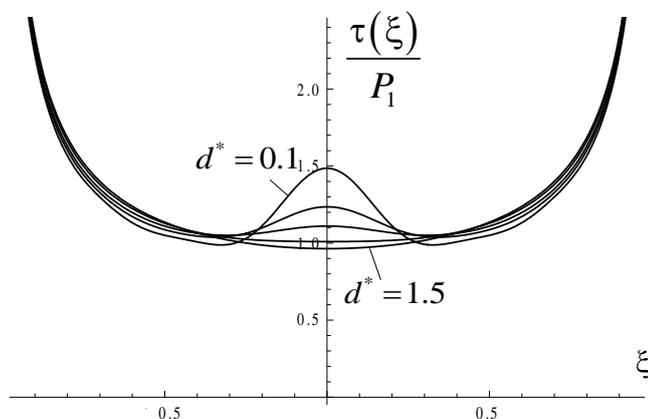


Рис. 1.3.3

На рис. 1.3.2 представлены графики распределения обезразмеренных контактных тангенциальных напряжений на сторонах включения в зависимости от параметра $d^* = d/l = 1.5; 0.5; 0.3; 0.2; 0.1$, представляющего расстояние от конца включения до штампа, когда к штампу и включению приложена одинаково направленная внешняя нагрузка одинаковой интенсивности, другой конец включения выходит на линию раздела материалов, а отношение модулей сдвига слоя и полупространства принято $\mu = 2$. На рис. 1.3.3 представлены соответствующие этому случаю обезразмеренные контактные напряжения под штампом.

Наличие горба на рис. 1.3.3 указывает на то, что в пределе $d^* \rightarrow 0$ штамп и включение можно трактовать как одно целое, а именно, описанный выше тавр, а в этом случае в угловых точках тавра напряжения принимают одинаковые значения, а в самой точке соединения шляпки тавра с ножкой они неопределены.

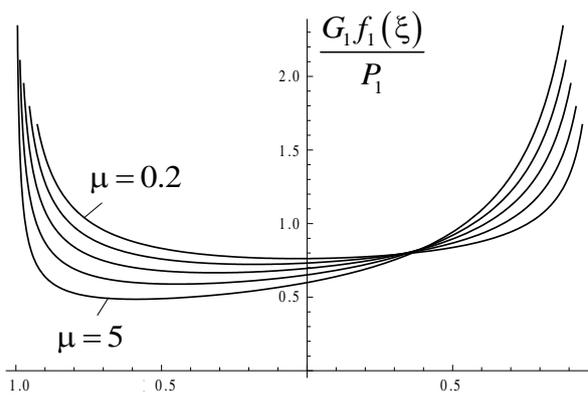


Рис. 1.3.4

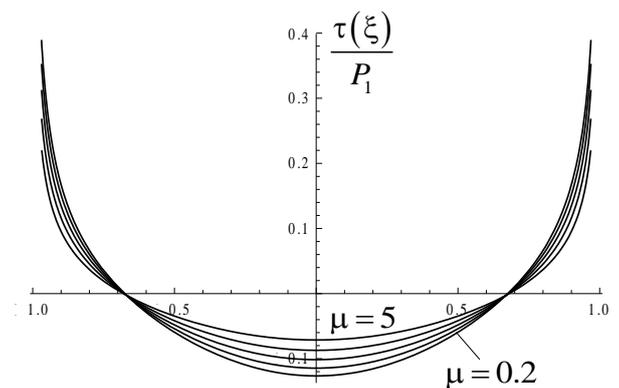


Рис. 1.3.5

На рис. 1.3.4 и рис. 1.3.5 приведены такие же графики для разных значений отношения модулей сдвига слоя и полупространства в случае, когда включение находится внутри слоя и $d^* = 1.1, c^* = 0.2$, а сдвигающая нагрузка действует только на включение.

ГЛАВА II. ПРОДОЛЬНЫЙ СДВИГ СОСТАВНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ТРЕЩИНАМИ, ВКЛЮЧЕНИЯМИ И СТРИНГЕРАМИ

В настоящей главе исследуются две антиплоские смешанные задачи для упругого составного полупространства (полуплоскости). В первой задаче исследуется напряженно-деформированное состояние составного полупространства, содержащего две параллельные трещины (или два жестких включения) конечной длины, перпендикулярные к линии раздела материалов. Во второй рассматривается антиплоская контактная задача о передаче нагрузки от системы тонких упругих пластин (накладок) к упругому полупространству, когда полупространство ослаблено системой параллельных туннельных трещин, линии расположения которых перпендикулярны к границе полупространства.

§2.1 Две параллельные трещины (включения) в упругом полупространстве с бесконечным усиливающим слоем

Рассматривается напряженное состояние составного полупространства, когда полупространство содержит две параллельные трещины (жестких включения) конечной длины, выходящие под прямым углом на линию раздела материалов. В зависимости от заданных на берегах трещин условий, решение задачи сводится к системе из 2-4 сингулярных интегральных уравнений относительно производной скачка перемещений и скачка напряжений на берегах трещин.

1. Постановка задачи и построение решения основных уравнений

Рассмотрим составное упругое полупространство, состоящее из упругого слоя и полупространства. В правосторонней декартовой системе координат $Oxyz$ слой занимает область $\Omega_1 (|x, z| < \infty; -H < y < 0)$, а полупространство – $\Omega_2 (|x, z| < \infty; y > 0)$ с модулями сдвигов G_1 и G_2 , соответственно.

Слой и полупространство контактируют по плоскости $y=0$ и находятся в условиях полного контакта. Полупространство на отрезках $L_1 = A_1 B_1 \{(a_1, 0), (a_1, b_1)\}$ и $L_2 = A_2 B_2 \{(a_2, 0), (a_2, b_2)\}$, где $a_1 < a_2$, в направлении оси Oz ослаблено туннельными полосами-трещинами. Внешние нагрузки, обеспечивающие антиплоскую дефор-

мацию в рассматриваемых областях Ω_1 и Ω_2 , могут быть приложены на верхней свободной поверхности слоя $y = -H$ в виде распределенной тангенциальной нагрузки $\tau_{yz}^{(1)}(x, -H) = \tau_H(x)$, на берегах трещин в виде заданных касательных напряжений, или же непосредственно на включения в виде равномерно распределенных в направлении оси Oz сосредоточенных сил (рис. 2.1.1).

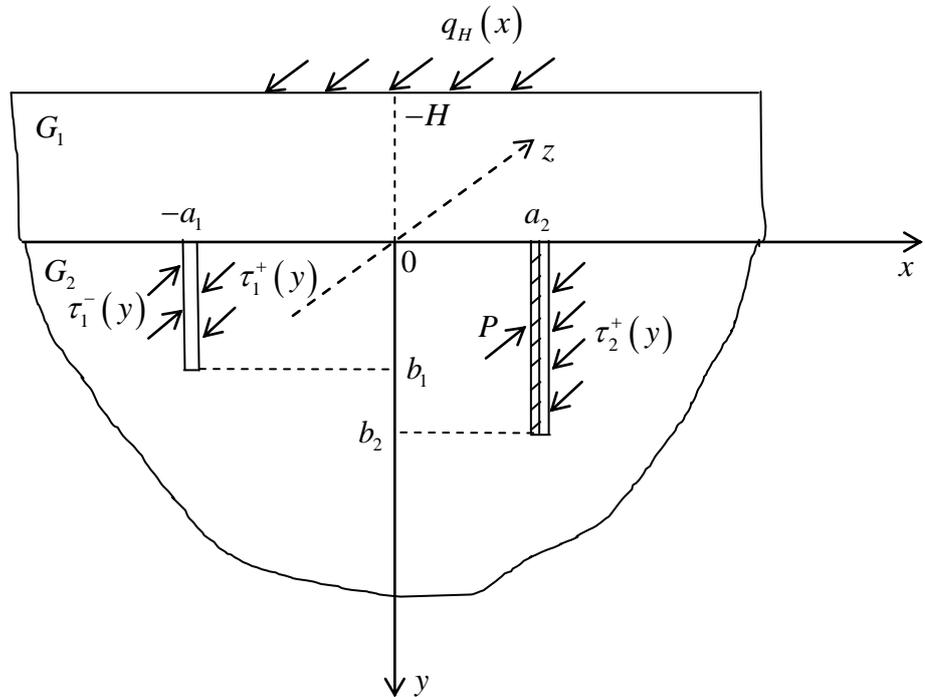


Рис. 2.1.1

Требуется определить основные механические характеристики рассматриваемой задачи: контактные напряжения на защемлённых берегах трещин, на контактной поверхности $y = 0$, коэффициенты интенсивности напряжений на концах трещины, раскрытие берегов трещин.

Поставленная антиплоская, как и в §1.1, в базовой плоскости Oxy задача сводится к решению уравнений (1.1.1)

$$\Delta w_j(x, y) = \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \omega_j, \quad (j=1,2) \quad (2.1.1)$$

$$\omega_1 = \{|x| < \infty; -H < y < 0\}, \quad \omega_2 = \{|x| < \infty; 0 < y < \infty\} / L_1 \cup L_2,$$

при соответствующих граничных условиях на берегах трещин и на свободной поверхности слоя, подробно описанных в §1.1.

Здесь $w_j(x, y)$ - компонента упругих перемещений, связанная с напряжениями $\tau_{xz}^{(j)}(x, y)$ и $\tau_{yz}^{(j)}(x, y)$ по закону Гука (1.1.8). Решение уравнений (2.1.1), независимо от условий на берегах трещин должно удовлетворять следующим условиям контакта:

$$w_1(x, -0) = w_2(x, +0), \quad G_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} \Big|_{y=-0} = G_2 \frac{\partial w_2}{\partial y} \Big|_{y=+0} \equiv \tau(x), \quad |x| < \infty, \quad (2.1.2)$$

и условию на поверхности полосы

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} \Big|_{y=-H} = \frac{1}{G_1} \tau_H(x), \quad |x| < \infty, \quad (2.1.3)$$

Граничные условия, заданные на берегах трещин, могут быть разнообразными. Здесь, в основном, будут рассматриваться следующие три типа граничных условий:

1) на берегах трещин заданы напряжения

$$\tau_{xz}^{(2)}(a_j \pm 0, y) = \tau_j^{(\pm)}(y), \quad y \in L_j, \quad (j = 1, 2), \quad (2.1.4)$$

2) на берегах трещин заданы перемещения

$$w_2(a_j \pm 0, y) = g_j^{(\pm)}(y), \quad y \in L_j, \quad (2.1.5)$$

3) на одном берегу трещин заданы напряжения, а на другом - перемещение, например -

$$w_2(a_j + 0, y) = g_j^{(+)}(y), \quad \tau_{xz}^{(2)}(a_j - 0, y) = \tau_2^{(-)}(y), \quad (j = 1, 2), \quad (2.1.6)$$

где $\tau_j^{(\pm)}(y)$, $g_j^{(\pm)}(y)$ - заданные напряжения и перемещения на соответствующих берегах трещин.

Следует отметить, что указание типа граничных условий на обоих трещинах не означает, что обе трещины должны быть в одинаковых условиях. Для каждой из трещин могут быть поставлены условия какого-либо типа. Например, на рис. (2.1.1) показан один из вариантов поставленной задачи, когда на одной трещине заданы условия первого типа, а на второй – третьего типа.

Условие $g_j^{(\pm)}(y) = const$ в граничных условиях (2.1.5) или (2.1.6) соответствует наличию на месте трещины жесткого включения. При этом граничные условия (2.1.6), взятые, например, для $j = 1$, физически можно трактовать как граничные

условия задачи для массивного тела с жестким включением, одна сторона которого оторвана от матрицы.

Для решения поставленной задачи, сначала построим общее решение следующей вспомогательной задачи: построим решение уравнения (2.1.1) в полупространстве $y > 0$, предполагая, что на ее границе $y = 0$ заданы напряжения

$$\tau_{yz}^{(2)}(x, 0) = \tau(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.1.7)$$

а на берегах трещин заданы условия (2.1.4) и (2.1.5), пока что, совместно.

Введем обобщенное перемещение $\varphi_2(x, y)$, связанное с упругим перемещением $w_2(x, y)$ формулой

$$\varphi_2(x, y) = A(x)w_2(x, y) = \left[\mathfrak{G}(-x + a_1 - 0) + \mathfrak{G}(x - a_1 - 0) - \right. \\ \left. - \mathfrak{G}(x - a_2 + 0) + \mathfrak{G}(x - a_2 - 0) \right] w_2(x, y) \quad (2.1.8)$$

где $\mathfrak{G}(x)$ - функция Хевисайда (1.1.12).

Вычислим значения $\partial^2 \varphi_2 / \partial x^2$ и $\partial^2 \varphi_2 / \partial y^2$ из (2.1.8), учитывая при этом граничные условия (2.1.4) и (2.1.5):

$$\frac{\partial^2 \varphi_2(x, y)}{\partial x^2} = B(x, y) + A(x) \frac{\partial^2 w_2(x, y)}{\partial x^2} \\ B(x, y) = g_1(y) \delta'(x - a_1) + g_2(y) \delta'(x - a_2) + f_1(y) \delta(x - a_1) + f_2(y) \delta(x - a_2) \\ \frac{\partial^2 \varphi_2(x, y)}{\partial y^2} = A(x) \frac{\partial^2 w_2(x, y)}{\partial y^2} \quad (2.1.9)$$

где $\delta(x) = \mathfrak{G}'(x)$ - функция Дирака, а

$$g_j(y) = w_2(a_j + 0, y) - w_2(a_j - 0, y) \quad (2.1.10)$$

$$f_j(y) = \left. \frac{\partial w_2}{\partial x} \right|_{x=a_j+0} - \left. \frac{\partial w_2}{\partial x} \right|_{x=a_j-0} = \frac{1}{G_2} \left[\tau_{xz}^{(2)}(a_j + 0, y) - \tau_{xz}^{(2)}(a_j - 0, y) \right], \quad (2.1.11)$$

скачки перемещения $w_2(x, y)$ и напряжения $\tau_{xz}^{(2)}(x, y)$ через линии трещин $x = a_j$ ($j = 1, 2$).

При получении (2.1.9) было использовано известное свойство обобщенной функции $\delta(x)$ [103]:

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a), \quad (2.1.12)$$

Тогда из (2.1.9) и (2.1.1) нетрудно убедиться, что $\varphi_2(x, y)$ должно удовлетворять следующему уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi_2(x, y) = B(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_2 / (L_1 \cup L_2) \quad (2.1.13)$$

с граничным условием

$$\left. \frac{\partial\varphi_2(x, y)}{\partial y} \right|_{y=+0} = \frac{1}{G_2} \tau(x) \quad (-\infty < x < \infty), \quad (2.1.14)$$

вытекающим из (2.1.2).

Применив теперь к (2.1.13) и (2.1.14) преобразование Фурье (1.1.18), для определения трансформанты Фурье $\bar{\varphi}_2(\alpha, y)$ придем к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\bar{\varphi}_2(\alpha, y)}{dy^2} - \alpha^2\bar{\varphi}_2(\alpha, y) = i\alpha g_a(\alpha, y) + f_a(\alpha, y), \quad y > 0 \quad (2.1.15)$$

$$g_a(\alpha, y) = g_1(y)e^{i\alpha_1 y} + g_2(y)e^{i\alpha_2 y}$$

$$f_a(\alpha, y) = f_1(y)e^{i\alpha_1 y} + f_2(y)e^{i\alpha_2 y}$$

при граничном условии

$$\left. \frac{\partial\bar{\varphi}_2(\alpha, y)}{\partial y} \right|_{y=+0} = \frac{1}{G_2} \bar{\tau}(\alpha) = \frac{1}{G_2} \int_{-\infty}^{\infty} \tau(x)e^{i\alpha x} dx \quad (2.1.16)$$

Общее решение граничной задачи (2.1.15) - (2.1.16), исчезающее при $y \rightarrow \infty$, представляется в виде [74]

$$\bar{\varphi}_2(\alpha, y) = -\frac{\bar{\tau}(\alpha)}{G_2|\alpha|} e^{-|\alpha|y} + \tilde{A}(\alpha, y) \quad (2.1.17)$$

$$\tilde{A}(\alpha, y) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[i \operatorname{sgn} \alpha g_a(\alpha, \eta) - \frac{1}{|\alpha|} f_a(\alpha, \eta) \right] E(\alpha, \eta, y) d\eta$$

где $g_a(\alpha, y)$ и $f_a(\alpha, y)$ даются формулами (2.1.15), а $E(\alpha, \eta, y)$ - формулой (1.1.21).

С другой стороны, для $\bar{\varphi}_1(\alpha, y)$ в слое $-H < y < 0$ будем иметь

$$\bar{\varphi}_1(\alpha, y) = A_1 ch \alpha y + B_1 sh \alpha y \quad (-H < y < 0) \quad (2.1.18)$$

Теперь, применив к условиям (2.1.2) и (2.1.3) преобразование Фурье (1.1.18) и удовлетворяя после этого полученным преобразованным условиям, аналогичным путем, как в §1.1, для образов потенциалов рассматриваемой здесь общей задачи получим

$$\bar{\varphi}_1(\alpha, y) = \frac{1}{(1+\mu)\Delta(\alpha, \gamma)} \left\{ \left[\Delta(\alpha, 1)ch\alpha y + \Delta(\alpha, -1)sh|\alpha|y \right] \tilde{A}(\alpha, y) - \frac{2e^{-|\alpha|H}}{|\alpha|H} \left[\mu ch\alpha y - sh|\alpha|y \right] \bar{\tau}_H(\alpha) \right\}, \quad -H < y < 0 \quad (2.1.19)$$

$$\bar{\varphi}_2(\alpha, y) = \tilde{A}(\alpha, y) - \frac{\mu e^{-|\alpha|(H+y)}}{(1+\mu)\Delta(\alpha, \gamma)} \left[\tilde{A}(\alpha, 0)e^{-|\alpha|H} + \frac{2}{|\alpha|G_1} \bar{\tau}_H(\alpha) \right], \quad y > 0, \quad (2.1.20)$$

$$\tilde{A}(\alpha, y) = \int_0^\infty \left[\frac{i \operatorname{sgn} \alpha}{2} g_a(\alpha, \eta) - \frac{1}{2|\alpha|} f_a(\alpha, \eta) \right] E(\alpha, \eta, y) d\eta \quad (2.1.21)$$

а γ , μ и $\Delta(\alpha, \gamma)$ - даются формулой (1.1.25).

Таким образом, потенциалами (2.1.19) и (2.1.20) дается решение антиплоской задачи для указанного выше составного полупространства, когда на параллельных линиях $x = a_i$ ($i = 1, 2$) заданы скачки перемещений и напряжений при переходе через них.

2. Вывод определяющей системы уравнений для одного частного случая.

Обращаясь к поставленной в начале параграфа общей задаче, следует отметить, что при разумном выборе различных вариантов из граничных условий (2.1.4) - (2.1.6) можно получить решение ряда новых, самостоятельных и интересных в практическом аспекте, задач как при наличии, так и при отсутствии усиливающего слоя. В этих задачах, как нетрудно убедиться, определяющие уравнения будут разными. Это следует из того, что при построении потенциалов $\varphi_j(x, y)$ из (2.1.19) и (2.1.20), мы предполагали, что все четыре скачка $g_j(y)$, $f_j(y)$ ($j = 1, 2$) присутствуют. Однако из граничных условий (2.1.4) - (2.1.6) нетрудно видеть, что в первых двух случаях две из них бывают заданы, а две остаются неизвестными. При задании условий третьего типа на одной или на обеих трещинах число неизвестных функций будет 3 или 4.

Далее будем рассматривать случай, когда только на одной из трещин заданы смешанные условия.

Таким образом, для завершения решения задачи нам следует определить указанные неизвестные функции. Для определения этих неизвестных следует обратиться к граничным условиям из (2.1.4) - (2.1.6), которые до сих пор оставались вне внимания. Задав эти условия применительно к конкретно поставленной задаче и удовлетворяя им, получим уравнения, позволяющие определить оставшиеся неизвестными функции.

Переходя к выводу определяющих уравнений, предположим, как это обычно делается, что в граничных условиях типа (2.1.5) вместо перемещений заданы их производные. Тогда, очевидно, что для удовлетворения граничным условиям нам следует иметь выражения и для $\partial\varphi_2(x, y)/\partial x$, и для $\partial\varphi_2(x, y)/\partial y$. Обращаясь к (2.1.20), после несложных, но довольно громоздких расчетов будем иметь

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi_2(x, y)}{\partial x} = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{b_1} \left\{ \left[\frac{Z_-}{Z_-^2 + (X_1^-)^2} + \gamma \frac{Z_+}{Z_+^2 + (X_1^-)^2} + R_2(X_1^-, Z_+) \right] g'_1(\eta) + \right. \\
& \left. + \left[\frac{X_1^-}{Z_-^2 + (X_1^-)^2} + \gamma \frac{X_1^-}{Z_+^2 + (X_1^-)^2} + R_1(X_1^-, Z_+) \right] f_1(\eta) \right\} d\eta + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_0^{b_2} \left\{ \left[\frac{Z_-}{Z_-^2 + (X_2^-)^2} + \gamma \frac{Z_+}{Z_+^2 + (X_2^-)^2} + R_2(X_2^-, Z_+) \right] g'_2(\eta) + \right. \\
& \left. + \left[\frac{X_2^-}{Z_-^2 + (X_2^-)^2} + \gamma \frac{X_2^-}{Z_+^2 + (X_2^-)^2} + R_1(X_2^-, Z_+) \right] f_2(\eta) \right\} d\eta + \\
& + \frac{1+\mu}{\pi G_1} \int_{-\infty}^{\infty} R_1(x-t, y) \tau_H(t) dt
\end{aligned} \tag{2.1.22}$$

$$\frac{\partial\varphi_2(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{b_1} \left\{ \left[\frac{X_1^-}{Z_-^2 + (X_1^-)^2} - \gamma \frac{X_1^-}{Z_+^2 + (X_1^-)^2} - R_1(X_1^-, Z_+) \right] g'_1(\eta) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{Z_-}{Z_-^2 + (X_1^-)^2} + \gamma \frac{Z_-}{Z_+^2 + (X_1^-)^2} - R_2(X_1^-, Z_+) \right] f_1(\eta) \Big\} d\eta + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_0^{b_2} \left\{ \left[\frac{X_2^-}{Z_-^2 + (X_2^-)^2} - \gamma \frac{X_2^-}{Z_+^2 + (X_2^-)^2} - R_1(X_2^-, Z_+) \right] g'_2(\eta) - \right. \\
& \left. - \left[\frac{Z_-}{Z_-^2 + (X_2^-)^2} - \gamma \frac{Z_+}{Z_+^2 + (X_2^-)^2} - R_2(X_2^-, Z_+) \right] f_2(\eta) \right\} d\eta + \\
& + \frac{1+\mu}{\pi G_1} \int_{-\infty}^{\infty} R_2(x-t, y) \tau_H(t) dt
\end{aligned} \tag{2.1.23}$$

где

$$\begin{aligned}
R_1(X_i^\pm, Z_\pm) &= \frac{4\mu}{(1+\mu)^2} \sum_{K=1}^{\infty} (-\gamma)^K \frac{X_i^\pm}{(2(K+1)H + Z_\pm)^2 + (X_1^\pm)^2} \\
R_2(X_i^\pm, Z_\pm) &= \frac{4\mu}{(1+\mu)^2} \sum_{K=1}^{\infty} (-\gamma)^K \frac{2(K+1)H + Z_\pm}{(2(K+1)H + Z_\pm)^2 + (X_1^\pm)^2} \\
X_i^\pm &= x \pm a_i, \quad (i=1,2), \quad Z_\pm = \eta \pm y
\end{aligned} \tag{2.1.24}$$

Теперь, имея выражения (2.1.22) и (2.1.23), мы можем непосредственно удовлетворить граничным условиям (2.1.4) – (2.1.6) при всяких возможных вариантах, и получить соответствующие системы определяющих уравнений для завершения решения задачи. Так, для показанной на рис. (2.1.1) задачи соответствующие граничные условия будут

$$\begin{aligned}
\tau_{xz}(a_1 \pm 0, y) &= \tau_1^\pm(y), & 0 < y < b_1, \\
\tau_{xz}(a_2 + 0, y) &= \tau_2^+(y), & \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{x=a_2-0} &= 0, & 0 < y < b_2,
\end{aligned} \tag{2.1.25}$$

Удовлетворяя этим условиям, получим систему из трех сингулярных интегральных уравнений для определения $g'_1(y)$, $\tau_2^-(y)$ и $g'_2(y)$.

Остановимся на более простом варианте рассмотренной задачи и получим определяющую систему в случае, когда имеется одна трещина ($a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = b_2 = b$), отмечая при этом, что все основные особенности задачи сохраняются и в этом случае. Рассмотрим два частных случая.

Случай 1. Пусть имеется одна трещина и на её берегах заданы условия типа (2.1.6), (рис.2.1.2) :

$$g_2(-0, y) = \text{const}, \quad \tau_2(+0, y) = \tau_0(y), \quad (2.1.26)$$

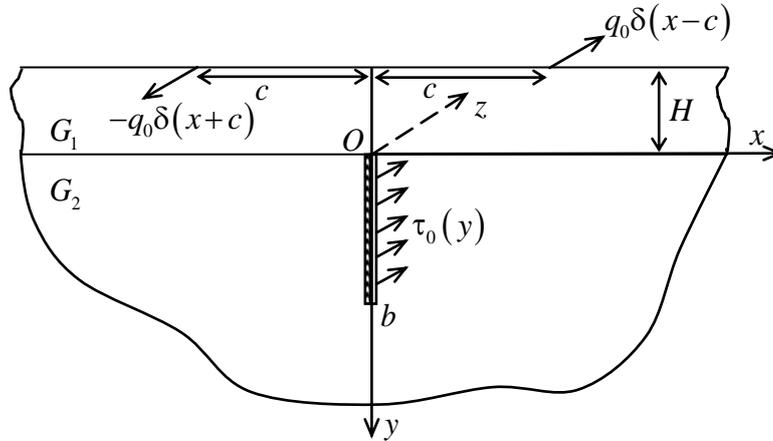


Рис. 2.1.2

Граничные условия (2.1.26) фактически соответствуют условиям контактной задачи, когда в месте трещины вставлено жёсткое включение, одна сторона которой свободна, а другая соединена с полуплоскостью.

Удовлетворяя теперь, при помощи (2.1.22) и (2.1.23) условиям (2.1.26), получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^b \left[\frac{1}{\eta - y} + \frac{\gamma}{\eta + y} + K_{11}(\eta, y) \right] g_2'(\eta) d\eta - \tau_2(y) &= f_1(y), \quad (0 < y < b) \\ \frac{1}{\pi} \int_0^b \left[\frac{1}{\eta - y} - \frac{\gamma}{\eta + y} - K_{11}(\eta, y) \right] \tau_2(\eta) d\eta - g_2'(y) &= f_2(y), \quad (0 < y < b) \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

$$f_1(y) = \frac{4\mu}{\pi G_1(1+\mu)} \int_{-\infty}^{\infty} R_2(t, y) q_H(t) dt + \frac{\tau_0(y)}{G_2},$$

$$f_2(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^b \left[\frac{1}{\eta - y} - \frac{\gamma}{\eta + y} - K_{11}(\eta, y) \right] \frac{\tau_0(\eta) d\eta}{G_2},$$

$$K_{11}(\eta, y) = R_2(0, y + \eta),$$

где $g_2(y) = w_2(+0, y)$ – неизвестное раскрытие свободного края трещины, а $G_2 \tau_2(y) = \tau_{xz}^{(2)}(-0, y)$ – неизвестное сдвигающее контактное напряжение, возникшее под включением.

Решения системы (2.1.26) должны ещё удовлетворять условиям

$$\int_0^b g_2'(t) dt = 0, \quad \int_0^b \tau_2(t) dt = \frac{P}{G_2}, \quad (2.1.28)$$

где P – равнодействующая касательных сил, приложенных к свободной поверхности включения.

Таким образом, решение задачи свелось к системе сингулярных интегральных уравнений (2.1.27) при условиях (2.1.28). Имея решение системы (2.1.27) и подставляя их выражения опять в (2.1.22), (2.1.23), можем определить напряженное поле в полуплоскости $y > 0$.

Приступим к решению системы интегральных уравнений (2.1.27) при условиях (2.1.28).

Чтобы решить систему интегральных уравнений (2.1.27) методом механических квадратур, необходимо свести уравнения к интервалу $(-1,1)$.

Для этого в системе (2.1.27) перейдем к новым переменным $\eta = b(\zeta + 1)/2$ и $y = b(\xi + 1)/2$, а также введем обозначения

$$g(\xi) = g_2' \left(\frac{b(\xi + 1)}{2} \right) = \frac{\varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)}{2}$$

$$\tau(\xi) = \tau_2 \left(\frac{b(\xi + 1)}{2} \right) = \frac{\varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi)}{2} \quad (2.1.29)$$

Придем к следующей системе сингулярных интегральных уравнений

$$\varphi_1(\xi) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(\zeta)}{\zeta - \xi} d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{\gamma}{\zeta + \xi + 2} + K_{11}^*(\zeta, \xi) \right] \varphi_2(\zeta) d\zeta = -[f_1^*(\xi) + f_2^*(\xi)]$$

$$\varphi_2(\xi) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_2(\zeta)}{\zeta - \xi} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{\gamma}{\zeta + \xi + 2} + K_{11}^*(\zeta, \xi) \right] \varphi_1(\zeta) d\zeta = -[f_1^*(\xi) - f_2^*(\xi)] \quad (2.1.30)$$

где

$$K_{11}^*(\zeta, \xi) = \frac{4\mu}{(1 + \mu)^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-\gamma)^k \frac{1}{4\beta(k + 1) + \zeta + \xi + 2},$$

$$f_1^*(\xi) = \frac{\tau_2^{(+)}(\xi)}{G_2} + \frac{1}{\pi G_1} \int_{-\infty}^{\infty} R_1(t, \xi) q_1(t) dt$$

$$\begin{aligned}
f_2^*(\xi) &= \frac{1}{\pi G_2} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\zeta - \xi} - \frac{\gamma}{\zeta + \xi + 2} - K_{11}^*(\zeta, \xi) \right] \tau_0(\zeta) d\zeta - \frac{1}{\pi G_1} \int_{-\infty}^{\infty} R_2(t, \xi) q_1(t) dt \\
R_1(t, \xi) &= \frac{4\mu}{(1+\mu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\gamma)^k t}{t^2 + \left(\beta(2k+1) + \frac{\xi+1}{2} \right)^2} \\
R_2(t, \xi) &= \frac{4\mu}{(1+\mu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\gamma)^k \left(\beta(2k+1) + \frac{\xi+1}{2} \right)}{t^2 + \left(\beta(2k+1) + \frac{\xi+1}{2} \right)^2} \\
\mu &= \frac{G_1}{G_2}, \quad \gamma = \frac{1-\mu}{1+\mu}, \quad \beta = \frac{H}{b},
\end{aligned} \tag{2.1.31}$$

В формулах (2.1.31) $q_1(x) = q(bx)$ - заданное сдвиговое напряжение, приложенное на поверхности слоя $y = -H$.

Условия же (2.1.28), записанные при помощи функций $\varphi_j(\xi)$ ($j=1,2$), будут иметь вид

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{\varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)}{2} \right] d\xi = 0, \quad \int_{-1}^1 \left[\frac{\varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi)}{2} \right] d\xi = \frac{P}{G_2}, \tag{2.1.32}$$

Разыскивая искомые функции в виде (1.1.57) и исследуя поведение уравнений системы у концов линии интегрирования, получим трансцендентные уравнения для определения показателей особенности. Таким образом, для искомых функций получим следующие представления:

$$\varphi_1(x) = \frac{\varphi_1^*(x)}{(1+x)^{\delta_1} (1-x)^{0.25}}; \quad \varphi_2(x) = \frac{\varphi_2^*(x)}{(1+x)^{\delta_2} (1-x)^{0.75}} \quad (0 < \delta_1, \delta_2 < 1), \tag{2.1.33}$$

где δ_1 и δ_2 - корни уравнения

$$\operatorname{ctg}^2 \pi \delta - \frac{\gamma^2}{\sin^2 \pi \delta} = 1, \quad (0 < \delta_2 < \delta_1 < 1), \tag{2.1.34}$$

Коэффициенты концентрации напряжений в окрестности концов включения-трещины, по аналогии с (1.1.75), определяются формулами:

$$K_{III}(-1) = \frac{2^{\frac{5}{4}}}{\sin \pi \delta_1} \varphi_1^*(-1); \quad K_{III}(1) = -2^{-1-\delta_2} \varphi_2^*(1) \quad (2.1.35)$$

Для достаточно большого диапазона изменения параметров задачи были проведены численные расчеты. В частности, получены результаты для случая, когда нагрузка на берегу трещины задана квадратичной функцией, т.е. в безразмерных координатах $\tau_0(\xi) = 0.1(1-\xi^2)$, а нагрузка на поверхности слоя задана в виде двух сосредоточенных сил, как это показано на рис.2.1.2, т.е. $q(t) = q_0 [\delta(t-c^*) - \delta(t+c^*)]$ $\left(c^* = \frac{c}{H} \right)$.

На рис. 2.1.3 и рис. 2.1.4 представлены графики распределения контактных напряжений под включением и смещения свободного берега трещины для различных значений расстояния точки приложения сосредоточенной силы q_0 при следующих значениях других параметров: $\mu = 1.5$, $b^* = b/H = 2$.

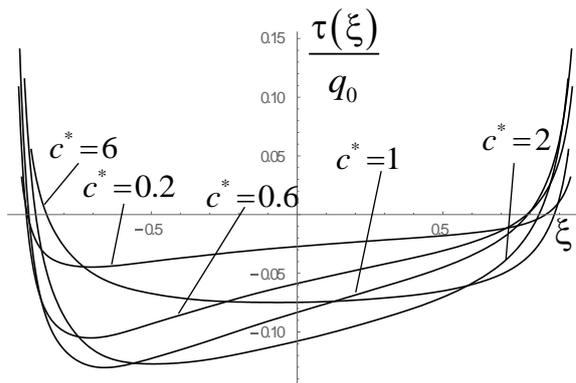


Рис. 2.1.3

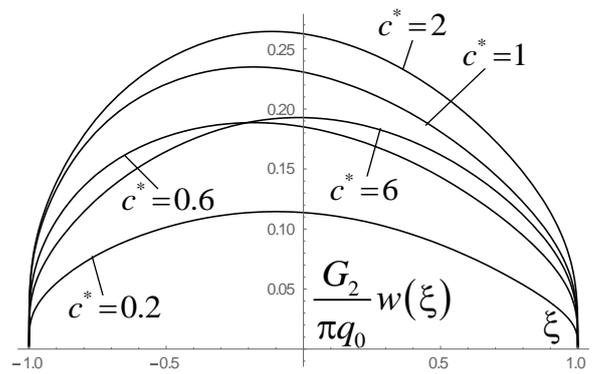


Рис. 2.1.4

В табл. 2.1.1. приведены значения коэффициентов концентрации тангенциальных напряжений (2.1.35) для различных значений c^* .

Таблица 2.1.1 $\mu = 1.5$, $b^* = 2$

| c^* | 0.2 | 0.6 | 1 | 2 | 6 | 10 | 20 |
|---------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $K_{III}(-1)$ | 0.0261 | 0.0531 | 0.067 | 0.071 | 0.0445 | 0.0321 | 0.021 |
| $K_{III}(1)$ | -0.0121 | -0.0249 | -0.0334 | -0.0406 | -0.0294 | -0.0213 | -0.0135 |

На рисунках 2.1.5-2.1.8 и в таблицах 2.1.2 и 2.1.3 приведены изменения тех же величин в зависимости от длины b^* трещины-включения и от отношения μ модулей сдвига слоя и полупространства.

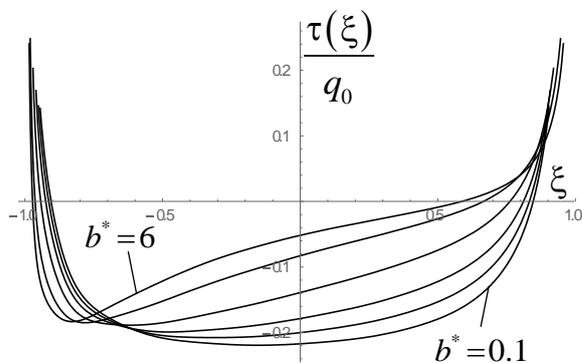


Рис. 2.1.5 $\mu = 0.5, c^* = 2$

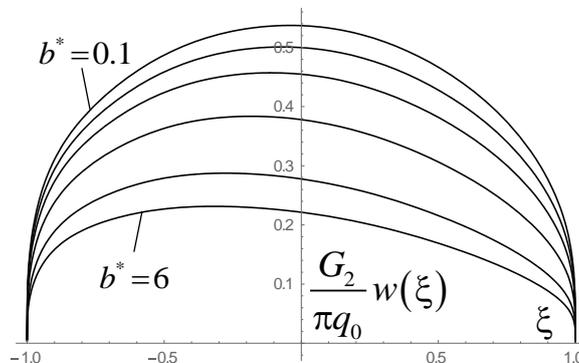


Рис. 2.1.6 $\mu = 0.5, c^* = 2$

Очередность расположения графиков на рис. 2.1.5 и 2.1.6 соответствует последовательности значений $b^* = \{0.1, 0.5, 1, 2, 4, 6\}$.

Таблица 2.1.2 $\mu = 0.5, c^* = 2$

| b^* | 0.1 | 0.5 | 1 | 2 | 6 | 10 | 20 |
|---------------|---------|---------|--------|--------|---------|---------|---------|
| $K_{III}(-1)$ | 0.1374 | 0.1297 | 0.1202 | 0.1038 | 0.0676 | 0.0517 | 0.0349 |
| $K_{III}(1)$ | -0.1027 | -0.0932 | -0.082 | -0.064 | -0.0328 | -0.0229 | -0.0149 |

На рисунках 2.1.7 и 2.1.8 также графики расположены в соответствии со значениями $\mu = \{0.3, 0.5, 1, 2, 4\}$.

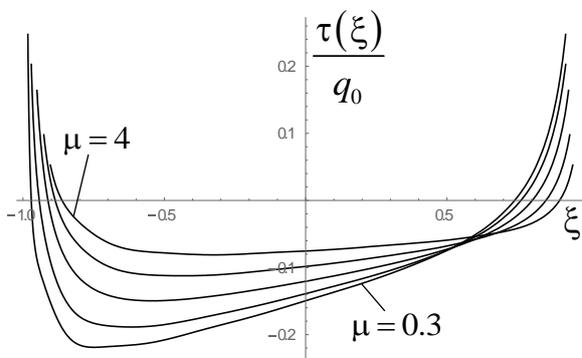


Рис. 2.1.7 $b^* = 2, c^* = 2$

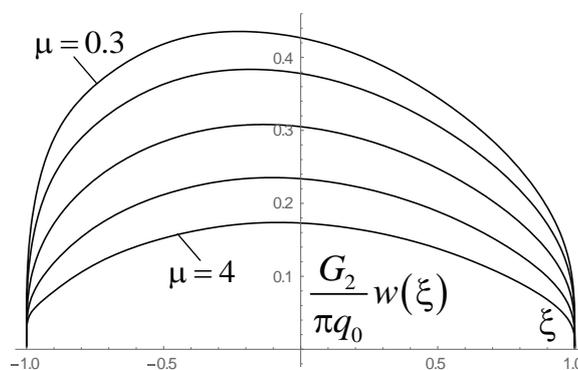


Рис. 2.1.8 $b^* = 2, c^* = 2$

Таблица 2.1.3 $b^* = 2, c^* = 2$

| μ | 0.3 | 0.5 | 1 | 2 | 4 | 10 | 20 |
|---------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $K_{III}(-1)$ | 0.1064 | 0.1038 | 0.0865 | 0.0596 | 0.0365 | 0.0186 | 0.0119 |
| $K_{III}(1)$ | -0.0735 | -0.0641 | -0.0494 | -0.0347 | -0.0222 | -0.0109 | -0.0058 |

Сравнивая представленные результаты, замечаем, что наиболее интересным является зависимость от расстояния c^* точки приложения сосредоточенной силы на внешней поверхности слоя от линии расположения включения-трещины. Из данных таблицы 2.1.1 замечаем, что при $c^* = 2$ оба коэффициента концентрации принимают максимальное значение. Поскольку этот максимум был замечен при определенных значениях двух других параметров $\mu = 1.5, b^* = 2$, то возникает вопрос о зависимости значения c^* , приводящего к максимуму коэффициентов концентрации напряжений, от этих параметров. Целенаправленные численные расчеты показали, что при изменении параметров μ и b^* параметр c^* изменяется, причем в большей степени при изменении второго параметра, по-разному для каждого коэффициента – если для ближнего конца включения-трещины c^* практически остается в окрестности интервала (1,2), то для дальнего конца он возрастает.

Случай 2. Рассмотрим теперь случай, когда на берегах трещины заданы условия в виде (2.1.5) $g_2(\pm 0, y) = \text{const}$, которые соответствуют контактной задаче, когда вместо трещины имеем жёсткое включение, обе грани которого сцеплены с полупространством (рис.2.1.9).

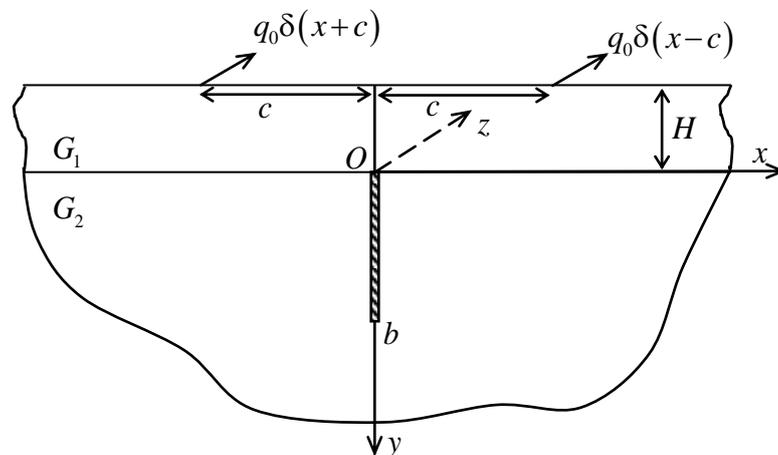


Рис. 2.1.9

Внешней нагрузкой является пара сонаправленных сосредоточенных сил, приложенных к свободной грани слоя симметрично относительно линии расположения включения.

В этом случае решение задачи сводится к одному интегральному уравнению относительно скачка неизвестных контактных напряжений:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\eta - y} - \frac{\gamma}{\eta + y + 2} - K_{11}^*(\eta, y) \right] \tau(\eta) d\eta = f_{21}(y), \quad (2.1.36)$$

$$\tau(\eta) = \frac{1}{G_2} \left[\tau_{xz}^{(2)} \left(+0, \frac{b}{2}(\eta + 1) \right) - \tau_{xz}^{(2)} \left(-0, \frac{b}{2}(\eta + 1) \right) \right]$$

при условии

$$\int_{-1}^1 \tau(\eta) d\eta = 0, \quad (2.1.37)$$

Здесь $K_{11}^*(\eta, y)$ даётся формулой (2.1.31), а

$$f_{21}(\xi) = \frac{1}{\pi G_1} \int_{-\infty}^{\infty} R_2(t, \xi) q_1(t) dt \quad (2.1.38)$$

Опять-таки, на основе исследования поведения уравнения в окрестности концов интервала интегрирования, находятся показатели особенности функции $\tau(\eta)$ на концах и решение ищется в виде:

$$\tau(\eta) = \frac{\varphi(\eta)}{(1+x)^\delta \sqrt{1-x}}; \quad (0 < \delta < 1), \quad (2.1.39)$$

где δ определяется из уравнения:

$$\cos \pi \delta = \gamma \quad (0 < \delta < 1)$$

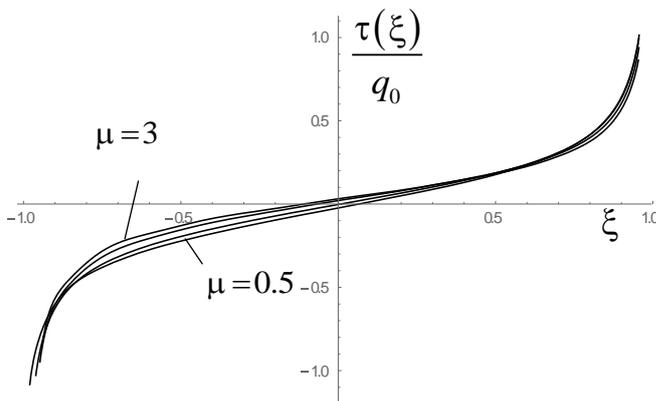
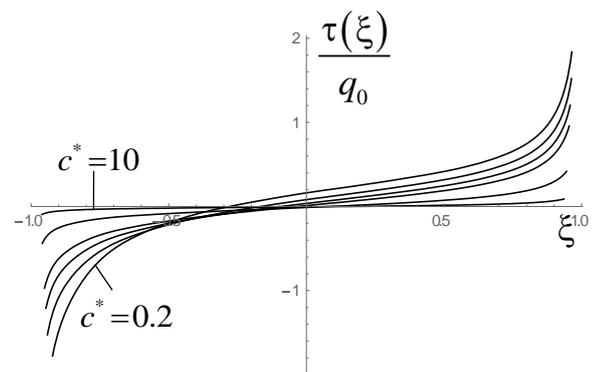
Здесь также проведен численный анализ и выявлена зависимость контактных напряжений и коэффициентов их концентрации у концов включения от отношения модулей сдвига μ и координаты точки приложения сосредоточенной силы c^* . Результаты представлены в виде графиков на рисунках 2.1.10 и 2.1.11 и таблиц 2.1.4 и 2.1.5.

Таблица 2.1.4 $c^* = 2, b^* = 2$

| μ | 0.2 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 3 | 10 |
|---------------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $K_{III}(-1)$ | -0.004 | -0.0161 | -0.0512 | -0.0979 | -0.1505 | -0.2591 | -0.7625 |
| $K_{III}(1)$ | 0.0547 | 0.0547 | 0.0538 | 0.0523 | 0.0508 | 0.0477 | 0.0326 |

Таблица 2.1.5 $\mu = 1.5, b^* = 2$

| c^* | 0.1 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 3 | 10 |
|---------------|--------|---------|---------|---------|--------|---------|---------|
| $K_{III}(-1)$ | -0.273 | -0.2405 | -0.1801 | -0.1315 | -0.098 | -0.0590 | -0.0082 |
| $K_{III}(1)$ | 0.0886 | 0.0844 | 0.0742 | 0.0628 | 0.0523 | 0.0363 | 0.0061 |

Рис. 2.1.10 $b^* = 2, c^* = 2$ Рис. 2.1.11 $\mu = 1.5, b^* = 2$

Графики на рис. 2.1.10 построены для $\mu = \{0.5, 1, 2, 3\}$, а на рис. 2.1.11 построены для $c^* = \{0.2, 1, 1.5, 2, 4, 10\}$.

Здесь также наблюдается сильная зависимость контактных напряжений от расстояния точки приложения внешней силы от линии включения.

Из (2.1.36) - (2.1.38) нетрудно заметить, что при противоположно направленных сосредоточенных силах, как в предыдущем частном случае (рис.2.1.2), будем иметь однородное уравнение с однородным дополнительным условием, решением которого, очевидно, является нулевая функция $\tau(\eta) \equiv 0$, т.е. скачок напряжений на гранях включения отсутствует, что полностью согласуется с постановкой задачи.

§2.2 Контактная задача для упругого полупространства с трещинами и накладками при антиплоской деформации.

В этом параграфе рассматривается антиплоская контактная задача о передаче нагрузки от тонких упругих пластин (накладки) к упругому полупространству. Полупространство ослаблено системой туннельных трещин, перпендикулярных к границе полупространства. В рамках известной модели Мелана для накладок решение задачи сведено к системе сингулярных интегральных уравнений, решение которых построено методом механических квадратур.

1. Постановка задачи и построение функции влияния для рассматриваемой задачи.

Пусть упругое полупространство с модулем сдвига G , занимающее область $y > 0$, отнесено к правосторонней декартовой системе координат $Oxuz$. Полупространство по полосам $\Omega_j = \{x = a_j; l_j^{(1)} < y < l_j^{(2)}; |z| < \infty\}$ ($l_j^{(1)} \geq 0; j = \overline{1, n}$), ослаблено туннельными трещинами, а на границе $y = 0$, по полосам $\omega_k = \{c_k \leq x \leq b_k; y = 0; |z| < \infty\}$, ($a_k < c_k < b_k < a_{k+1}$) усилена упругими пластинами (накладками) малой толщины $h_s^{(k)}$ и модулем упругости $G_s^{(k)}, k = 1, 2, \dots, (n-1)$ (рис. 2.2.1).

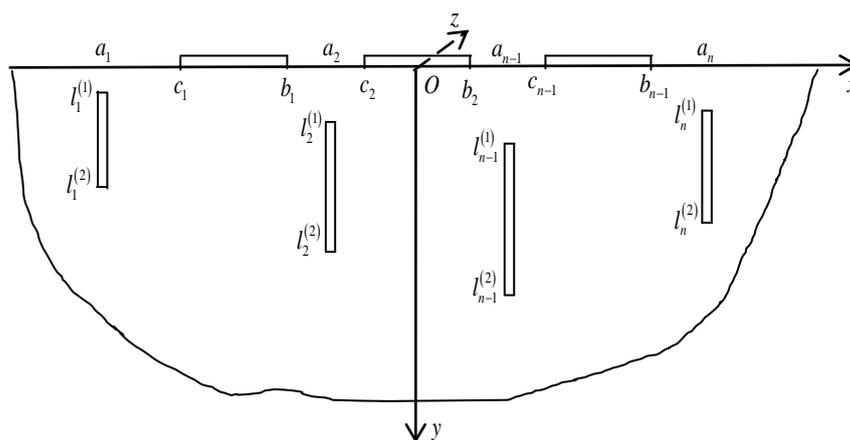


Рис. 2.2.1

Предполагается, что внешние воздействия приложены: а) на берегах трещин в виде заданных касательных напряжений $\tau_{xz}(a_j \pm 0)$ или заданных перемещений

$w(a_j \pm 0)$; б) на верхних гранях накладок в виде распределенных напряжений $\tau_{yz}(x, -h_s^{(k)})$, в) на боковых гранях $x = c_k$ и $x = b_k$ усиливающей пластины в виде сосредоточенных сил $T_c^{(k)}$ и $T_b^{(k)}$. При этом предполагается, что указанные воздействия равномерно распределены в направлении оси Oz ($|z| < \infty$).

Относительно усиливающих пластин-накладок предполагается, что $G_s^{(k)} > G$, а $h_s^{(k)} \ll b_k - c_k$. Это позволяет для усиливающей накладки принять известную в области контактных задач с тонкостенными элементами физическую модель Мелана при антиплоской деформации. Другими словами, предполагается, что по толщине накладки перемещение $w_s(x, y)$ не меняется, т.е. $w_s(x, y) = w_s(x)$.

При этих предположениях требуется определить закон распределения контактных касательных напряжений, возникающих под стрингерами, а также коэффициенты интенсивности напряжений на концах трещин.

Отметим, что под действием указанных выше воздействий, рассматриваемая упругая система пластина-полупространство деформируется в условиях продольного сдвига с базовой плоскостью Oxy . Тогда, очевидно, что поставленную выше контактную задачу можно рассматривать как антиплоскую контактную задачу для полуплоскости $y > 0$, ослабленной системой вертикальных трещин на линиях $x = a_j$ ($j = \overline{1, n}$) и усиленной на границе $y = 0$ упругими стрингерами.

При отсутствии трещин, т.е. при $l_n^{(1)} = l_n^{(2)}$ задача была рассмотрена в [41].

При таком подходе, поставленная контактная задача эквивалентна следующей краевой задаче для полуплоскости $y > 0$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0, \quad (2.2.1)$$

$$\begin{cases} G \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=a_j \pm 0} = \tau_j^\pm(y), & y \in L_j, \\ w(a_j \pm 0, y) = w_j^\pm(y), & y \in L_j, \end{cases} \quad (j = \overline{1, n}), \quad (2.2.2)$$

$$G \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = \tau(x) = \begin{cases} \tau_k(x), & x \in \Gamma_k \\ 0, & x \in \bigcup_{k=1}^{n-1} (\Gamma_k) \end{cases} \quad (k = \overline{1, n-1}), \quad (2.2.3)$$

$$L_j = \{l_j^{(1)} < y < l_j^{(2)}, x = a_j\}, \quad \Gamma_k = \{y = 0, c_k < x < b_k\},$$

с дополнительным условием контакта [9]

$$\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \Big|_{y=0} = \frac{1}{h_s^{(k)} G_s^{(k)}} \int_{c_k}^x [q_s^{(k)}(s) - \tau_k(s)] ds + \frac{T_c^{(k)}}{h_s^{(k)} G_s^{(k)}}, \quad (2.2.4)$$

$$x \in \Gamma_k, k = \overline{1, n-1}$$

обеспечивающим совместное деформирование граничных точек полуплоскости и накладок в рамках принятой модели на каждом участке контакта.

Здесь $w(x, y)$ - единственная, отличная от нуля, компонента упругого перемещения, $\tau_j^\pm(y)$ - заданные касательные напряжения на правом и левом берегах j -ой трещины, $w_j^\pm(y)$ - заданные смещения точек соответствующих берегов j -ой трещины, $\tau_k(x)$ - неизвестные контактные касательные напряжения, возникающие под каждой накладкой, $q_s^{(k)}(x)$ - заданные касательные напряжения, действующие на верхней границе накладки.

Приступим к построению разрывного решения краевой задачи (2.2.1) - (2.2.3), полагая $\tau(x)$ заданной, т.е. основные компоненты напряженно-деформированного состояния полупространства выразим через скачки тангенциального напряжения и смещения, неизменно присутствующих при наличии трещин или включений. Очевидно, что полученное решение, являясь функций влияния, в дальнейшем будет непосредственно использовано для получения определяющего уравнения поставленной выше контактной задачи. Решение (2.2.1) - (2.2.3) построим методом интегрального преобразования Фурье.

Применим к уравнению (2.2.1) преобразование Фурье (1.1.18), т.е. умножим (2.2.1) на $e^{i\alpha x}$ и проинтегрируем от $-\infty$ до ∞ . Тогда, имея в виду условия (2.2.2), для определения $\bar{w}(\sigma, y)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2 \bar{w}(\sigma, y)}{dy^2} - \sigma^2 \bar{w}(\sigma, y) = \sum_{k=1}^n [-i\sigma g_k(y) + f_k(y)] e^{i\sigma a_k}, \quad y > 0,$$

$$\bar{w}(\sigma, y) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) e^{i\sigma x} dx, \quad (2.2.5)$$

где

$$g_k(y) = w(a_k + 0, y) - w(a_k - 0, y), \quad (2.2.6)$$

$$f_k(y) = \frac{1}{G} [\tau_k^+(y) - \tau_k^-(y)], \quad (2.2.7)$$

указанные выше скачки перемещения и напряжения через линию k -той трещины.

Условие (2.2.3), после преобразования Фурье, примет вид

$$\left. \frac{d\bar{w}(\sigma, y)}{dy} \right|_{y=0} = \frac{1}{G} \bar{\tau}(\sigma), \quad (2.2.8)$$

Считая, что функции $f_k(y)$, $g_k(y)$ и $\tau(x)$ известны, решение уравнения (2.2.5), удовлетворяющее условию (2.2.8) и исчезающее при $y \rightarrow \infty$, получим в виде

$$\bar{w}(\sigma, y) = \sum_{k=1}^n \int_0^{\infty} (e^{-|\sigma||\eta-y|} + e^{-|\sigma||\eta+y|}) \left[\frac{i}{2} \operatorname{sgn} \sigma g_k(\eta) - \frac{1}{2|\sigma|} f_k(\eta) \right] e^{i\sigma a_k} d\eta - \frac{e^{-|\sigma|y}}{|\sigma|G} \bar{\tau}(\sigma) \quad (2.2.9)$$

Теперь, имея в виду условие непрерывности на продолжении трещин:

$$g_k(y) = f_k(y) = 0, \quad y \in L_k, \quad k = \overline{1, n} \quad (2.2.10)$$

после обратного преобразования, из (2.2.9) получим решение антиплоской задачи (2.2.1) - (2.2.3) в виде

$$\begin{aligned} w(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_{L_k} \left[\frac{x - a_k}{(x - a_k)^2 + (\eta - y)^2} + \frac{x - a_k}{(x - a_k)^2 + (\eta + y)^2} \right] g_k(\eta) d\eta - \\ & - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_{L_k} \left[\ln \frac{1}{(x - a_k)^2 + (\eta - y)^2} + \ln \frac{1}{(x - a_k)^2 + (\eta + y)^2} \right] f_k(\eta) d\eta - \\ & - \frac{1}{2\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{y^2}{(t - x)^2 + y^2} \tau(t) dt + const \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Очевидно, что только часть из скачков $g_j(y)$ и $f_j(y)$, входящих в (2.2.11), может быть неизвестной, причем каждая из них определяется граничными условиями на

берегах трещин. При этом, в каждом конкретном случае, в зависимости от граничных условий, т.е. выбора пары, непротиворечащих друг другу, условий, фигурирующих в (2.2.2), число неизвестных может быть от n до $2n$.

Учитывая, что обычно второе из условий (2.2.2) заменяется производной по y , для удовлетворения этим условиям необходимо иметь производные по x и по y от выражения (2.2.11), которые представляются формулами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a_j \pm 0} &= \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} \left[\frac{1}{\eta - y} + \frac{1}{\eta + y} \right] g'_j(\eta) d\eta \pm \frac{1}{2} f_j(y) + \frac{1}{\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_j - t}{(a_j - t)^2 + y^2} \tau(t) dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n (1 - \delta_{ik}) \int_{L_k} \left[K_{jk}^+(\eta, y) g'_k(\eta) - R_{jk}^+(\eta, y) f_k(\eta) \right] d\eta, \quad y \in L_j, \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{x=a_j \pm 0} &= \pm \frac{1}{2} g'_j(y) - \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} \left[\frac{1}{\eta - y} + \frac{1}{\eta + y} \right] f_j(\eta) d\eta + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n (1 - \delta_{jk}) \int_{L_k} \left[R_{jk}^{(\pm)}(\eta, y) g'_k(\eta) d\eta + K_{jk}^{(\pm)} f_k(\eta) \right] d\eta + \frac{1}{\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y \tau(\eta) d\eta}{(\eta - a_j)^2 + y^2}, \\ & \qquad \qquad \qquad y \in L_j \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

$$K_{jk}^{\pm}(\eta, y) = \frac{\eta - y}{(\eta - y)^2 + (a_j - a_k)^2} \pm \frac{\eta + y}{(\eta + y)^2 + (a_j - a_k)^2}, \quad (2.2.14)$$

$$R_{jk}^{\pm}(\eta, y) = \frac{a_j - a_k}{(\eta - y)^2 + (a_j - a_k)^2} \pm \frac{a_j - a_k}{(\eta + y)^2 + (a_j - a_k)^2}, \quad (2.2.15)$$

где $g'_k(t) = dg_k/dt$, δ_{ij} - символ Кронекера.

Теперь, при помощи (2.2.12), (2.2.13), удовлетворяя конкретно заданным на берегах трещин граничным условиям из (2.2.2), получим определяющую систему сингулярных интегральных уравнений, содержащей, максимально, $2n$ уравнений. Очевидно, что при одноименных граничных условиях на берегах трещин и при определенной геометрической и физической симметрии задачи, число неизвестных, а, следовательно, и число определяющих уравнений уменьшаются соответствующим образом.

Следует отметить, что решение (2.2.11) с выражениями (2.2.12) и (2.2.13), позволяет непосредственно выписать определяющие системы интегральных уравнений и для антиплоских контактных задач, когда в трещины вставлены тонкие жесткие включения. При этом можно рассматривать случаи, когда: обе грани включения жестко соединены с берегами трещины; одна грань жестко соединена, а другая свободна; длина жесткого включения короче длины трещины.

2. Система определяющих уравнений контактной задачи.

Обратимся теперь к контактной задаче, сформулированной в начале параграфа. Здесь уже касательная нагрузка на поверхности упругого полупространства является неизвестной и должна быть найдена из условия (2.2.4) контакта стрингера с полупространством. Для удовлетворения этому условию необходимо иметь представление производной смещения граничных точек полупространства по x , которая, исходя из (2.2.11), имеет вид:

$$\left. \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \right|_{y=+0} = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{L_k} \left[\frac{\eta}{\eta^2 + (a_k - x)^2} g'_k(\eta) + \frac{a_k - x}{(a_k - x)^2 + \eta^2} f_k(\eta) \right] d\eta - \frac{1}{\pi G} \int_{\Gamma_j} \frac{\tau_j(t)}{t - x} dt, \quad (2.2.16)$$

где $\tau_j(x)$ - интенсивность неизвестных контактных касательных напряжений, возникающих под накладками на участках контакта Γ_j ($j = 1, 2, \dots, n-1$).

Удовлетворяя, при помощи (2.2.16), условиям контакта (2.2.4) на каждом контактном участке, в итоге, получим соответствующее число дополнительных интегральных уравнений. Объединяя последние с уравнениями, указанными в пункте 1, получим окончательную систему определяющих интегральных уравнений, разрешающую поставленную контактную задачу.

Для случая, когда имеются две трещины ($n = 2$), на берегах которых заданы первые из условий (2.2.2) (рис. 2.2.1), по вышеуказанной процедуре из (2.2.12) и (2.2.16) получим следующую систему определяющих интегральных уравнений относительно неизвестных скачков $g'_k(t)$, ($k = 1, 2$) и контактного напряжения $\tau_1(x)$.

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{a_1 - t}{(a_1 - t)^2 + y^2} \frac{\tau_1(t)}{G} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \left[\frac{1}{t - y} + \frac{1}{t + y} \right] g_1'(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{L_2} K_{12}^+(t, y) g_2'(t) dt = \\
& = \frac{1}{2} \frac{\tau_1^+(y) + \tau_1^-(y)}{G} + \frac{1}{\pi} \int_{L_2} R_{12}^+(t, y) f_2(t) dt, \quad y \in \Gamma_1 = (l_1^{(1)} < y < l_1^{(2)}), \quad (2.2.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{a_2 - t}{(a_2 - t)^2 + y^2} \frac{\tau_1(t)}{G} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} K_{21}^+(t, y) g_1'(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{L_2} \left[\frac{1}{t - y} + \frac{1}{t + y} \right] g'(t) dt = \\
& = \frac{1}{2} \frac{\tau_2^+(y) + \tau_2^-(y)}{G} + \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} R_{21}^+(t, y) f_1(t) dt, \quad y \in \Gamma_2 = (l_2^{(1)} < y < l_2^{(2)}), \quad (2.2.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_1} \left[\frac{1}{t - x} - \lambda_1 \theta(x - t) \right] \frac{\tau(t)}{G} dt + \sum_{k=1}^2 \int_{L_k} \frac{t g_k'(t) dt}{t^2 + (a_k - x)^2} = \sum_{k=1}^2 \int_{L_k} \frac{x - a_k}{(x - a_k)^2 + t^2} f_k(t) dt - \\
& - \lambda_1 \int_{\Gamma_1} \theta(x - t) q_s^{(1)}(t) dt - \frac{\pi T_{c_1}}{h_s^{(1)} G_s^{(1)}}, \quad x \in \Gamma_1 = (c_1 < x < b_1), \quad (2.2.19)
\end{aligned}$$

где $\lambda_1 = \pi G / h_s^{(1)} G_s^{(1)}$, $q_s^{(1)}(t)$ - внешняя нагрузка, приложенная к верхней грани стрингера, $f_k(t)$ - известная функция, определяемая из (2.2.7), а ядра $K_{ij}^+(t, y)$, $R_{ij}^+(t, y)$ даются формулами (2.2.14), (2.2.15).

Неизвестные функции из (2.2.17)-(2.2.19) должны удовлетворять еще условиям

$$\int_{\Gamma_1} \tau(s) ds = \int_{\Gamma_1} q_s^{(1)}(s) ds + T_{c_1} - T_{b_1}, \quad \int_{L_j} g_j'(s) ds = 0, \quad (2.2.20)$$

Здесь первое из условий отражает условие равновесия накладки в целом, а второе - непрерывность перемещений на концах трещины. В случае, когда трещина выходит на край полуплоскости, т.е. $l_k^{(1)} = 0$, необходимость в удовлетворении второго условия отпадает, поскольку оно не выполняется.

3. Рассмотрим частный случай задачи, когда полуплоскость ослаблена двумя трещинами, выходящими на границу полуплоскости и расположенными симметрично относительно стрингера (рис. 2.2.2). В таком случае, если принять

$$l_j^{(1)} = 0, \quad l_j^{(2)} = l, \quad (j = 1, 2), \quad a_2 = a = -a_1, \quad c_1 = -c, \quad b_1 = c,$$

$$\tau_{xz}(-a + 0, y) = \tau_{-a}^+(y) = P(y), \quad \tau_{xz}(-a - 0, y) = \tau_{-a}^-(y) = Q(y),$$

$$\tau_{xz}(a+0, y) = \tau_a^+(y) = -Q(y), \quad \tau_{xz}(a-0, y) = \tau_a^-(y) = -P(y),$$

$$q_s^{(1)}(x) = q_0(x), \quad q_0(x) = q_0(-x), \quad T_c = -T_{-c} = T_0$$

то задача будет симметрична относительно оси Oy и, следовательно, раскрытия трещин будут одинаковыми $g(y) = g_1(y) = -g_2(y)$ и в качестве неизвестной будет выступать только $g(y)$.

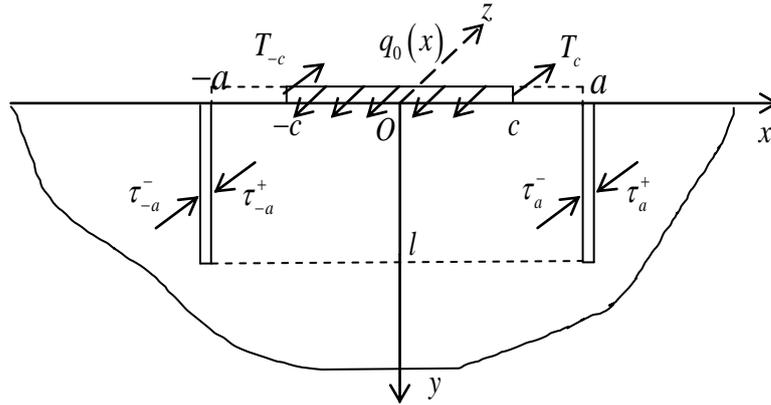


Рис. 2.2.2

Тогда из системы уравнений (2.2.17) - (2.2.19) получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений относительно контактных напряжений $\tau_1(x)$ под накладкой и производной скачка перемещения $g'(y)$.

$$\begin{aligned} & \int_{-c}^c \left[\frac{1}{s-x} + \lambda \theta(x-s) \right] \tau_1(s) ds - \int_0^l \left[\frac{\eta}{\eta^2 + (a+x)^2} - \frac{\eta}{\eta^2 + (a-x)^2} \right] g'(\eta) d\eta = \\ & = \int_0^l \left[\frac{a+x}{\eta^2 + (a+x)^2} - \frac{a-x}{\eta^2 + (a-x)^2} \right] R^-(\eta) d\eta - \lambda \int_{-c}^c \theta(x-s) q_0(s) ds + \frac{\pi T_0}{h_s^{(1)} G_s^{(1)}}, \\ & \qquad \qquad \qquad (-c < x < c) \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{-c}^c \frac{(a-t)\tau_1(t)}{(a-t)^2 + y^2} dt + \int_0^l \left[\frac{1}{t-y} + \frac{1}{t+y} - \frac{t-y}{4a^2 + (t-y)^2} - \frac{t+y}{4a^2 + (t+y)^2} \right] g'(t) dt = \\ & = \int_0^l \left[\frac{a}{4a^2 + (t-y)^2} + \frac{a}{4a^2 + (t+y)^2} \right] R^-(t) dt - \frac{\pi}{2} R^+(y), \quad (0 < y < l), \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

$$R^{\pm}(y) = \frac{1}{G} [P(y) \pm Q(y)], \quad \lambda = \pi \frac{G}{h_s^{(1)} G_s^{(1)}},$$

Условие равновесия стрингера (2.2.20) теперь запишется в виде

$$\int_{-c}^c \tau(s) ds = \int_{-c}^c q_0(x) dx - 2T_0, \quad (2.2.23)$$

Обращаясь теперь к решению системы сингулярных интегральных уравнений (2.2.21), (2.2.22) с условием (2.2.23) заметим следующее. В зависимости от взаимного расположения стрингера и трещин следует уточнить постановку задачи и класс функций, в котором ищется решение задачи.

Из рис.2.2.2 видно, что здесь возможны следующие случаи взаимного расположения стрингера и трещин: 1) $c < a$ - стрингер и трещина не пересекаются; 2) $c = a - 0$ - стрингер достигает края ближнего берега трещины; 3) $c \geq a + 0$, стрингер проходит через трещину, достигая лишь края дальнего берега трещины, либо далее на конечную величину. Рассмотрим только первые два случая.

В первом случае контактные напряжения на концах линии интегрирования имеют корневую особенность, а $g'(y)$ имеет корневую особенность при $y = l$ и принимает конечное значение при $y = 0$.

Во втором случае, как показывают исследования, функции $\tau(x)$ и $g'(y)$ имеют конечные значения в точке пересечения стрингера и трещины. При этом оказывается, что $\tau(c) = \tau(-c) = Gg'(0)$, а при $y = l$ - $g'(y)$ имеет корневую особенность.

Решение системы (3.1), (3.2) с условиями (3.3), предварительно сведя ее на интервал $(-1,1)$, построено методом механических квадратур.

Численная реализация задачи для двух рассмотренных выше частных случаев, когда $c < a$ и $c = a - 0$, была проведена при предположении, что берега трещины и боковые грани накладки свободны от напряжений, а на верхней границе накладки приложена равномерно распределенная нагрузка, т. е. $P(t) = Q(t) = 0$; $T_{\pm c} = 0$, $q_0 / G = 1$, $\lambda = 0.5\pi$.

Численный анализ проведен в зависимости от параметра $\alpha = 2c / l$, представляющего отношение длины стрингера к длине трещины.

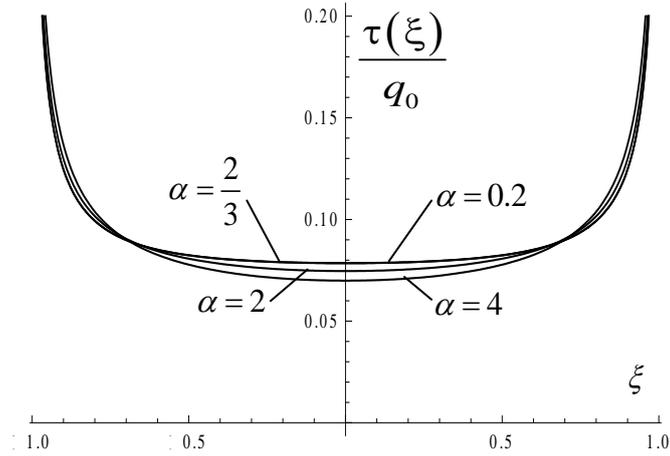


Рис.2.2.3 Контактные напряжения в случае $c < a$

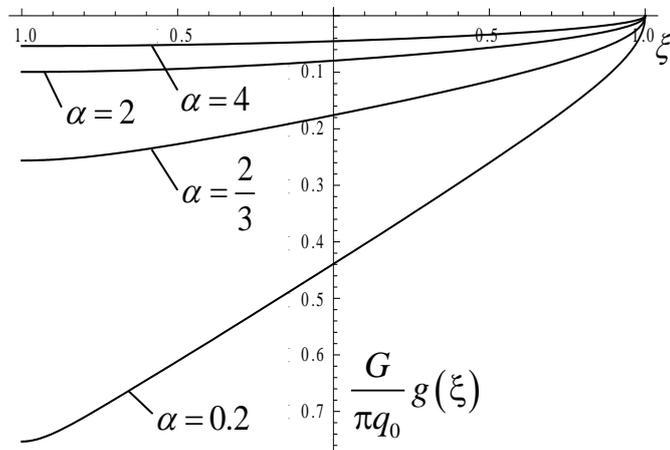


Рис. 2.2.4 Раскрытие трещины в случае $c < a$

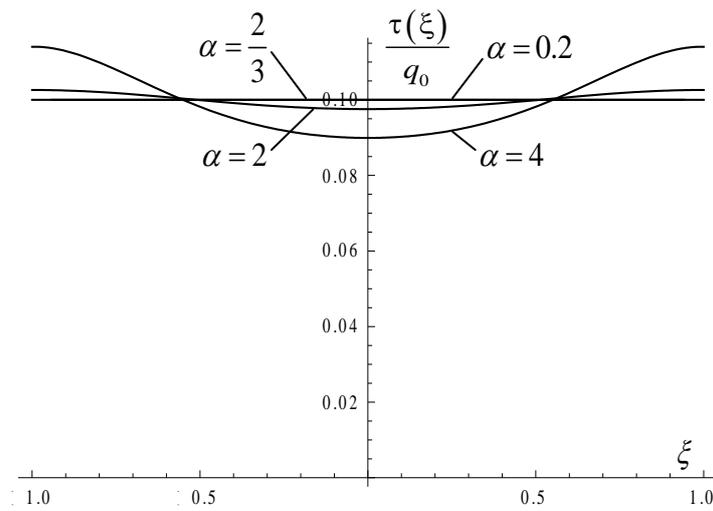


Рис 2.2.5 Контактные напряжения в случае $c = a - 0$

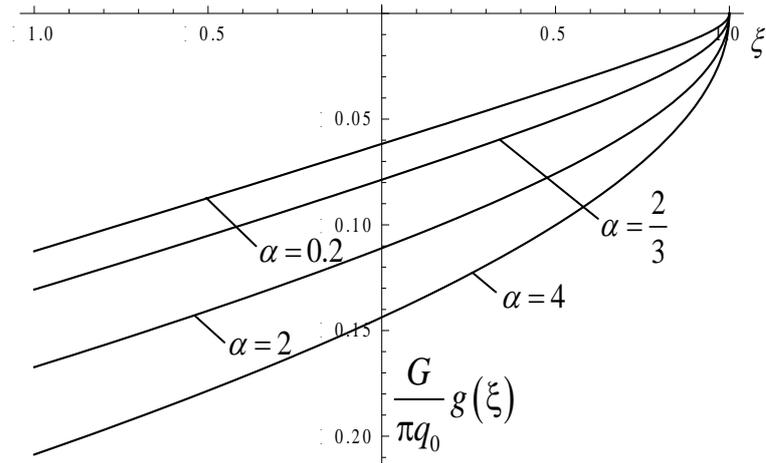


Рис. 2.2.6 Раскрытие трещины в случае $c = a - 0$

Таблица 2.2.1 Коэффициент K_{III}

| α | 4 | 2 | 0.67 | 0.2 |
|----------|---------|---------|---------|---------|
| $c < a$ | -0.0974 | -0.0796 | -0.0504 | -0.0285 |
| $c = a$ | -0.1504 | -0.1241 | -0.102 | -0.0883 |

На Рис. 2.2.3 и Рис.2.2.5 показано изменение контактных напряжений, а на Рис. 2.2.4 и Рис. 2.2.6 – относительное смещение берегов трещин. При предположении длины стрингера неизменной уменьшение параметра $\alpha = 2c/l$ указывает на возрастание длины трещины. В таблице 2.2.1 приведены значения коэффициентов интенсивности напряжений K_{III} на конце трещины. Анализ численных результатов во втором случае показывает, что при увеличении длины трещин распределение контактных напряжений под стрингером стремится к равномерному.

ГЛАВА III. ПРОДОЛЬНЫЙ СДВИГ СОСТАВНОГО УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА С ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ И ТРЕЩИНАМИ

Настоящая глава посвящена исследованию напряженно – деформированного состояния составного упругого пространства, содержащего трещины и жесткие включения. Предполагается, что составное пространство состоит или из двух упругих полупространств, или из двух разных упругих полупространств, соединенных между собой посредством упругого слоя. В каждом случае в общей постановке построено решение поставленных задач при различных расположениях трещин и жестких включений. Рассматриваются сингулярные случаи, когда концы трещин и включений отдельно или вместе выходят на линию раздела материалов. Решения всех рассмотренных задач, сводятся к системам сингулярных интегральных уравнений с обобщенными ядрами Коши. Изучаются поведения искомым функции в концевых точках трещин и включений. При помощи метода механических квадратур получены решения определяющих систем интегральных уравнений, которые в явном виде содержат соответствующие особенности, характерные для конкретно поставленной механической задачи.

§3.1 Построение разрывных решений антиплоской задачи для двухкомпонентного составного упругого пространства с трещинами и включениями

Исследуется антиплоская смешанная задача о контактном взаимодействии двух упругих полупространств, ослабленных прямолинейными туннельными трещинами, при общих граничных условиях на их берегах. Отрезки, занимаемые концентраторами напряжений, расположены и на линии, перпендикулярной к линии раздела материалов, и на самой линии раздела материалов. Построены разрывные решения задачи, т.е. получены явные представления перемещения и тангенциальных напряжений через их скачки, имеющие место при переходе через концентратор. Полученные выражения позволяют для каждой конкретно сформулированной задачи непосредственно выписать определяющую систему сингулярных интегральных уравнений и решить ее наиболее эффективным методом.

Постановка задачи.

Рассмотрим составное упругое пространство, состоящее из двух разных упругих полупространств, с модулями сдвига G_1 и G_2 . В правосторонней декартовой системе координат $Oxyz$ полупространства занимают области $\Omega_1(y>0)$ и $\Omega_2(y<0)$. Полупространства соединены между собой по плоскости $y=0$ и находятся в условиях полного контакта. Составное полупространство по отрезкам $L_1(a, b)$ и $L_2(-d, -c)$ оси Oy и $L_3(-l_1, l_2)$ оси Ox (линия разнородности) ослаблена туннельными полосами-трещинами, простирающимися в направлении оси Oz . Описанная упругая система деформируется в условиях продольного сдвига, предполагая, что на берегах трещин, в виде граничных условий, действуют или заданы: а) касательные напряжения $\tau_{xz}^{(j)}(\pm 0, y)$ ($j=1, 2$; здесь, и в дальнейшем, индексом $j=1$ будут помечены величины, соответствующие области Ω_1 , а индексом $j=2$ – области Ω_2), $\tau_{yz}^+(x, +0)$, $\tau_{yz}^-(x, -0)$; б) перемещения $U_z^{(j)}(\pm 0, y)$, $U_z^+(x, +0)$, $U_z^-(x, -0)$, или в) любая корректно подобранная смешанная комбинация шести условий из а) и б).

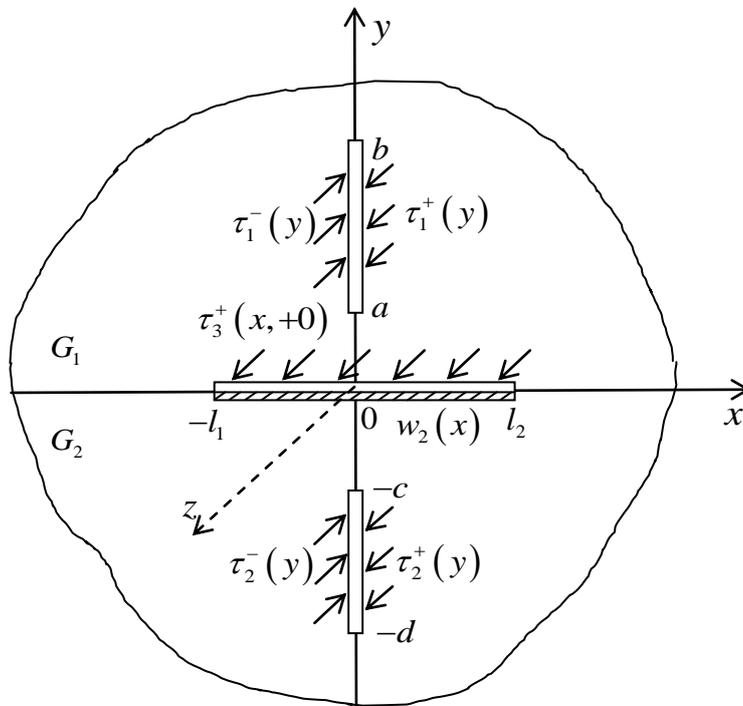


Рис. 3.1.1

На рис. 3.1.1 показан один из возможных вариантов постановки задачи для рассматриваемой области, когда на берегах вертикальных трещин заданы касательные напряжения, а на берегах горизонтальной трещины заданы смешанные условия – напряжение и перемещение. Для этого конкретного случая далее и будет построена система определяющих интегральных уравнений.

Предположим, как и раньше, что заданные внешние воздействия равномерно распределены по направлению оси Oz и следовательно, рассматриваемая упругая система будет деформироваться в условиях продольного сдвига с базовой плоскостью Oxy . Тогда решение задачи, т.е. определение напряженно – деформированного состояния и основных механических характеристик в составном пространстве сводится к решению гармонического уравнения (1.1.1) в областях Ω_1 и Ω_2 . Математически оно формулируется в виде следующих граничных задач относительно упругого перемещения $U_z^{(j)}(x, y)$ в полуплоскостях $\omega_1(y > 0)$ и $\omega_2(y < 0)$:

$$\frac{\partial^2 U_z^{(j)}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_z^{(j)}(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \omega_j, \quad (3.1.1)$$

при граничных условиях

$$\left. \frac{\partial U_z^{(1)}}{\partial x} \right|_{x=\pm 0} = \frac{1}{G_1} \tau_1^\pm(y), \quad y \in L_1, \quad (3.1.2)$$

$$\left. \frac{\partial U_z^{(2)}}{\partial x} \right|_{x=\pm 0} = \frac{1}{G_2} \tau_2^\pm(y), \quad y \in L_2, \quad (3.1.3)$$

$$\left. \frac{\partial U_z^{(1)}(x, y)}{\partial y} \right|_{y=+0} = \frac{1}{G_1} \tau_3^+(x), \quad x \in L_3, \quad (3.1.4)$$

$$U_z^{(2)}(x, y) \Big|_{y=-0} = w_2(x), \quad x \in L_3, \quad (3.1.5)$$

$$\left\{ \tau_{xz}^{(j)}(x, y), \tau_{yz}^{(j)}(x, y) \right\} \rightarrow 0, \text{ при } x^2 + y^2 \rightarrow \infty, \quad (3.1.6)$$

и контактных условиях на линии раздела материалов

$$U_z^{(1)}(x, +0) = U_z^{(2)}(x, -0), \quad x \in (-\infty, -l_1] \cup [l_2, \infty), \quad (3.1.7)$$

$$G_1 \left. \frac{\partial U_z^{(1)}}{\partial y} \right|_{y=+0} = G_2 \left. \frac{\partial U_z^{(2)}}{\partial y} \right|_{y=-0}, \quad x \in (-\infty, -l_1) \cup (l_2, \infty), \quad (3.1.8)$$

обеспечивающих совместную деформацию обоих полупространств.

В формулах (3.1.1) – (3.1.8) $U_z^{(j)}(x, y)$ и $\tau_{xz}^{(j)}(x, y)$ ($j=1, 2$) компоненты упругого перемещения и тангенциальных напряжений полуплоскостей $y > 0$ и $y < 0$ соответственно по направлению оси Oz , связанные соотношениями (1.1.8) – законом Гука.

Отметим, что при $w_2(x) = const$, граничное условие (3.1.5) означает, что на нижнем берегу трещины вставлена тонкая жесткая накладка (рис. 3.1.1).

Построение разрывного решения.

Перейдем к решению краевой задачи (3.1.1) – (3.1.8). Для этого сначала построим разрывное решение уравнений (3.1.1) при более общих условиях на линиях, на которых заданы граничные условия.

Предположим, что на этих линиях вместо конкретных граничных условий (3.1.2) – (3.1.6), заданы скачки – разрывы соответствующих перемещений и напряжений. Далее, введем функции, связанные с граничными функциями на этих линиях следующим образом:

$$f_j(y) = \frac{1}{G_j} [\tau_{xz}^{(j)}(+0, y) - \tau_{xz}^{(j)}(-0, y)], \quad y \neq 0, \quad (3.1.9)$$

$$g_j(y) = U_z^{(j)}(+0, y) - U_z^{(j)}(-0, y), \quad y \neq 0, \quad (3.1.10)$$

где $f_j(y)$ и $g_j(y)$ представляют соответствующие скачки напряжений $\tau_{xz}(x, y)$ и перемещений $U_z(x, y)$ через линию $x = 0$.

Введем еще функции

$$f_3(x) = \tau_{yz}^{(1)}(x, +0) - \tau_{yz}^{(2)}(x, -0), \quad |x| < \infty, \quad (3.1.11)$$

$$g_3(x) = U_z^{(1)}(x, +0) - U_z^{(2)}(x, -0), \quad |x| < \infty, \quad (3.1.12)$$

где $f_3(x)$ и $g_3(x)$ скачки напряжения и перемещения через линию $y = 0$.

Разумеется, что в соответствии с поставленными задачами, скачки граничных и контактных условий из (3.1.9) – (3.1.12) имеют место только на интервалах $-d < y < -c$ и $a < y < b$ оси Oy и $-l_1 < x < l_2$ оси Ox . Так что имеют место следующие условия:

$$g_j(y) = f_j(y) = 0, \quad y \in \bar{\in}(L_1 \cup L_2), \quad (3.1.13)$$

$$g_3(x) = f_3(x) = 0, \quad x \in \bar{\in}(L_3), \quad (3.1.14)$$

обеспечивающие условие непрерывности вне трещин.

Теперь, предполагая, что скачки $f_j(y)$, $g_j(y)$ ($j=1,2$) и $f_3(x)$, $g_3(x)$ известны, при помощи интегрального преобразования Фурье, как это было сделано и в предыдущих параграфах, получим решение краевой задачи (3.1.1), (3.1.7) – (3.1.8).

В итоге, для величин, необходимых для удовлетворения граничным условиям (3.1.2) – (3.1.6), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_z^{(1)}}{\partial x} = & \frac{1}{2\pi} \int_a^b \left[\frac{\eta - y}{x^2 + (\eta - y)^2} + \gamma \frac{\eta + y}{x^2 + (\eta + y)^2} \right] g'_1(\eta) d\eta + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_a^b \left[\frac{x}{x^2 + (\eta - y)^2} + \gamma \frac{x}{x^2 + (\eta + y)^2} \right] f_1(\eta) d\eta + \\ & + \frac{1}{\pi(1+\mu)} \int_{-d}^{-c} \frac{\eta - y}{x^2 + (\eta - y)^2} g'_2(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi(1+\mu)} \int_{-d}^{-c} \frac{x}{x^2 + (\eta - y)^2} f_2(\eta) d\eta + \\ & + \frac{1}{\pi(1+\mu)} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{y}{y^2 + (x-t)^2} g'_3(t) dt + \frac{1}{\pi G_1(1+\mu)} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{x-t}{y^2 + (x-t)^2} f_3(t) dt \end{aligned} \quad (x, y) \in \omega_1, \quad (3.1.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_z^{(1)}}{\partial y} = & \frac{1}{2\pi} \int_a^b \left[\frac{x}{x^2 + (\eta - y)^2} - \gamma \frac{x}{x^2 + (\eta + y)^2} \right] g'_1(\eta) d\eta - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_a^b \left[\frac{\eta - y}{x^2 + (\eta - y)^2} - \gamma \frac{\eta + y}{x^2 + (\eta + y)^2} \right] f_1(\eta) d\eta + \\ & + \frac{1}{\pi(1+\mu)} \int_{-d}^{-c} \frac{x}{x^2 + (\eta - y)^2} g'_2(\eta) d\eta - \frac{1}{\pi(1+\mu)} \int_{-d}^{-c} \frac{\eta - y}{x^2 + (\eta - y)^2} f_2(\eta) d\eta + \\ & + \frac{1}{\pi(1+\mu)} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{x-t}{y^2 + (x-t)^2} g'_3(t) dt + \frac{1}{\pi G_1(1+\mu)} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{y}{y^2 + (x-t)^2} f_3(t) dt \end{aligned} \quad (x, y) \in \omega_1, \quad (3.1.16)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_z^{(2)}}{\partial x} = & \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{-c} \left[\frac{\eta - y}{x^2 + (\eta - y)^2} - \gamma \frac{\eta + y}{x^2 + (\eta + y)^2} \right] g_2'(\eta) d\eta + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{-c} \left[\frac{x}{x^2 + (\eta - y)^2} - \gamma \frac{x}{x^2 + (\eta + y)^2} \right] f_2(\eta) d\eta + \\
& + \frac{1}{\pi} \frac{\mu}{1 + \mu} \int_a^b \frac{\eta - y}{x^2 + (\eta - y)^2} g_1'(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \frac{\mu}{1 + \mu} \int_{-d}^{-c} \frac{x}{x^2 + (\eta - y)^2} f_1(\eta) d\eta - \\
& - \frac{1}{\pi} \frac{\mu}{1 + \mu} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{y}{y^2 + (x - t)^2} g_3'(t) dt + \frac{1}{\pi} \frac{\mu}{G_1(1 + \mu)} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{x - t}{y^2 + (x - t)^2} f_3(t) dt \\
& (x, y) \in \omega_2, \tag{3.1.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_z^{(2)}}{\partial y} = & -\frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{-c} \left[\frac{x}{x^2 + (\eta - y)^2} + \gamma \frac{x}{x^2 + (\eta + y)^2} \right] g_2'(\eta) d\eta + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{-c} \left[\frac{\eta - y}{x^2 + (\eta - y)^2} + \gamma \frac{\eta + y}{x^2 + (\eta + y)^2} \right] f_2(\eta) d\eta + \\
& + \frac{1}{\pi} \frac{\mu}{1 + \mu} \int_a^b \frac{x}{x^2 + (\eta - y)^2} g_1'(\eta) d\eta - \frac{1}{\pi} \frac{\mu}{1 + \mu} \int_a^b \frac{\eta - y}{x^2 + (\eta - y)^2} f_1(\eta) d\eta + \\
& + \frac{1}{\pi} \frac{\mu}{1 + \mu} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{x - t}{y^2 + (x - t)^2} g_3'(t) dt - \frac{1}{\pi} \frac{\mu}{G_1(1 + \mu)} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{y}{y^2 + (x - t)^2} f_3(t) dt \\
& (x, y) \in \omega_2, \tag{3.1.18}
\end{aligned}$$

Формулами (3.1.15) – (3.1.18), при известных граничных значениях $\tau_{xz}(\pm 0, y)$, $U_z(\pm 0, y)$, $\tau_{yz}(x, \pm 0)$ и $U_z(x, \pm 0)$ на участках L_j ($j=1,2,3$), т.е. при, согласно обозначениям (3.1.9) – (3.1.12), известных $f_j(t)$, $g_j'(t)$, можно определить напряженно – деформированное состояние составного плоскости в целом.

Однако, при обычной постановке задачи теории упругости, задавать функции $f_j(t)$, $g_j(t)$ одновременно на одном и том же участке, вообще говоря, невозможно. Так что, в выражения (3.1.15) – (3.1.18) входит определенное число неизвестных функций, которые еще следует определить и, тем самым, завершить решение задачи.

Вывод определяющей системы уравнений.

Поставив задачу в соответствии с рис. 3.1.1, т.е. считая все показанные величины заданными, будем иметь, что функции $f_j(y)$ ($j=1,2$), согласно (3.1.9), известны, а функции $g'_j(t)$ ($j=1,2$), $g'_3(x)$ и $f_3(x)$ неизвестны.

Теперь, удовлетворяя при помощи формул (3.1.15) – (3.1.18) граничным условиям (3.1.2) – (3.1.5), получим систему из четырех интегральных уравнений для определения четырех неизвестных функций $g'_j(y)$ ($j=1,2$), $f_3(x)$ и $g'_3(x)$.

Таким образом, для составления определяющих уравнений следует в выражениях (3.1.15), (3.1.17), в соответствии с граничными условиями (3.1.2) – (3.1.3), перейти к пределу $x \rightarrow +0$, в (3.1.16) (граничное условие (3.1.4)) – к пределу $y \rightarrow +0$, а в (3.1.17) (продифференцированное по x граничное условие (3.1.5)) – к пределу $y \rightarrow -0$. После этого, используя условия (3.1.2) – (3.1.5), получим требуемую систему уравнений.

Осуществляя указанные предельные переходы и удовлетворяя условиям (3.1.2) – (3.1.5), приходим к следующей системе сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных скачков производных перемещений $g'_j(y)$ ($j=1,2$), $g'_3(x)$ и напряжения $f_3(x)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_a^b \left[\frac{1}{\eta - y} + \frac{\gamma}{\eta + y} \right] g'_1(\eta) d\eta + \frac{1}{1 + \mu} \int_{-d}^{-c} \frac{1}{\eta - y} g'_2(\eta) d\eta - \frac{\mu}{(1 + \mu) G_1} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{t}{y^2 + t^2} f_3(t) dt + \\ & + \frac{1}{1 + \mu} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{y}{y^2 + t^2} g'_3(t) dt = \frac{\pi}{G_1} \tau_1^+(y), \quad (a < y < b) \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-d}^{-c} \left[\frac{1}{\eta - y} - \frac{\gamma}{\eta + y} \right] g'_2(\eta) d\eta + \frac{\mu}{1 + \mu} \int_a^b \frac{1}{\eta - y} g'_1(\eta) d\eta - \frac{\mu}{(1 + \mu) G_1} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{t}{y^2 + t^2} f_3(t) dt - \\ & - \frac{\mu}{1 + \mu} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{y}{y^2 + t^2} g'_3(t) dt = \frac{\pi}{G_2} \tau_2^+(y), \quad (-d < y < -c) \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

$$\mu \int_a^b \frac{x}{x^2 + \eta^2} g'_1(\eta) d\eta + \int_{-d}^{-c} \frac{x}{x^2 + \eta^2} g'_2(\eta) d\eta - \int_{-l_1}^{l_2} \frac{1}{t - x} g'_3(t) dt + \frac{\pi \mu}{G_1} f_3(x) =$$

$$= \mu \int_a^b \frac{\eta}{x^2 + \eta^2} f_1(\eta) d\eta + \int_{-d}^{-c} \frac{\eta}{x^2 + \eta^2} f_2(\eta) d\eta + \frac{\pi(1+\mu)}{G_1} \tau_3^+(x), \quad (-l_1 < x < l_2) \quad (3.1.21)$$

$$\int_a^b \frac{\eta}{x^2 + \eta^2} g_1'(\eta) d\eta + \frac{\pi(1+\mu)}{2} f_1(y) + \int_{-d}^{-c} \frac{\eta}{x^2 + \eta^2} g_2'(\eta) d\eta + \int_{-d}^{-c} \frac{x}{x^2 + \eta^2} f_2(\eta) d\eta +$$

$$+ \pi g_3'(x) + \frac{\mu}{G_1} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{1}{t-x} f_3(t) dt = \pi(1+\mu) w_2'(x) \quad (-l_1 < x < l_2) \quad (3.1.22)$$

где $\gamma = (1-\mu)/(1+\mu)$, $\mu = G_1/G_2$.

Отметим, что при получении правых частей (3.1.19) - (3.1.21) было использовано известное [33] соотношение для функций $\delta(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} \int_{-a}^a \frac{x}{x^2 + (t-y)^2} f(t) dt = \pm \pi f(y)$$

Таким образом, решение задачи свелось к системе сингулярных интегральных уравнений (3.1.19) - (3.1.22).

При этом искомые функции системы $g_j'(y)$ ($j=1,2,3$) и $f_3(x)$ должны удовлетворять условиям

$$\int_a^b g_1'(t) dt = 0, \quad \int_{-d}^{-c} g_2'(t) dt = 0, \quad \int_{-l_1}^{l_2} g_3'(t) dt = 0, \quad \int_{-l_1}^{l_2} f_3(t) dt = 0, \quad (3.1.23)$$

первое три из которых обеспечивают непрерывность перемещений на концах трещин, а четвертое – равновесие жесткого включения.

Имея решение системы $g_j'(y)$ и $f_3(x)$ ($j=1,2,3$), при помощи формул (3.1.15) – (3.1.18) и закона Гука (1.1.8), можно определить напряженно-деформированное состояние в любой точке рассматриваемых областей.

§3.2 Численный анализ некоторых частных случаев.

На примере трех конкретных задач, которые можно получить из постановки общей задачи, представленной в предыдущем параграфе, соответствующим подбором геометрических параметров и граничных условий, показана реализация разрывных решений и проведен численный анализ систем определяющих уравнений методом механических квадратур.

Частный случай 1. Рассмотрим задачу, когда трещина в нижнем полупространстве отсутствует, а верхняя трещина выходит на середину свободного берега горизонтальной трещины-включения (Рис. 3.2.1), т.е. имеем

$$g_2(y) \equiv 0, \quad f_2(y) \equiv 0, \quad l_1 = l_2 = l, \quad a = 0 \quad (3.2.1)$$

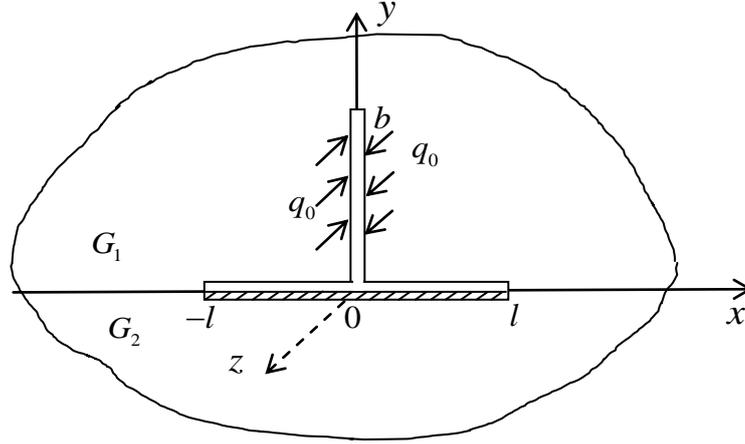


Рис. 3.2.1

Полагая, что внешняя нагрузка в виде равномерно распределенной нагрузки действует только на берегах вертикальной трещины, будем иметь

$$f_1(y) \equiv 0, \quad \tau_1^+(+0, y) = q_0, \quad \tau_3^+(x, +0) = 0 \quad (3.2.2)$$

Учитывая представленный в §1.2 алгоритм решения уравнений с неподвижной особенностью во внутренней точке интервала определения одной из искомых функций, а также присутствие в постановке задачи симметрии относительно оси Oy , систему сингулярных интегральных уравнений (3.1.19) - (3.1.22) можно выписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\tau(x)}{G_1} - \frac{1}{\pi\mu} \int_0^l \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x} \right) W'(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^b \frac{2x}{x^2 + \eta^2} U'(\eta) d\eta &= 0 \quad (0 < x < l) \\ W'(x) - \frac{\mu}{\pi G_1} \int_0^l \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right) \tau(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_0^b \frac{2\eta}{x^2 + \eta^2} U'(\eta) d\eta &= 0 \quad (0 < x < l) \quad (3.2.3) \\ \int_0^b \left[\frac{1}{\eta-y} + \frac{\gamma}{\eta+y} \right] U'(\eta) d\eta + \frac{2\mu}{(1+\mu)G_1} \int_0^l \frac{t}{y^2 + t^2} \tau(t) dt + \frac{2}{1+\mu} \int_0^l \frac{y}{y^2 + t^2} W'(t) dt &= \frac{\pi q_0}{G_1} \\ & \quad (0 < y < b) \end{aligned}$$

где $\tau(x)$ - контактные тангенциальные напряжения под включением, $W(x)$ - смещение свободного берега горизонтальной трещины относительно включения, $U(x)$ - взаимосмещение берегов вертикальной трещины.

Учитывая, что точка $(+0, +0)$ одновременно является концом для двух неизвестных функций, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$W(0) = U(0) \quad (3.2.4)$$

Как и выше, переходя к безразмерным величинам, с параллельным сведением уравнений к интервалу $(-1, 1)$, и вводя новые неизвестные функции

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{1}{G_1} \tau\left(\frac{l}{2}(x+1)\right) + W'\left(\frac{l}{2}(x+1)\right); \\ \varphi_2(x) &= \frac{1}{G_1} \tau\left(\frac{l}{2}(x+1)\right) - W'\left(\frac{l}{2}(x+1)\right); \quad \varphi_3(x) = U'\left(\frac{b}{2}(x+1)\right); \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

после исследования поведения уравнений у концов отрезков интегрирования находим, что искомые функции следует искать в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= (1-x)^{\alpha_1} \left[-2^{\alpha_2 - \alpha_1} B + \varphi_1^*(x)(1+x) \right]; \\ \varphi_2(x) &= (1-x)^{\alpha_2} \left[B + \varphi_2^*(x)(1+x) \right]; \\ \varphi_3(x) &= (1-x)^{\frac{1}{2}} \varphi_3^*(x)(1+x); \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{1}{\pi} \arctg \mu - 1; \quad \alpha_2 = -\frac{1}{\pi} \arctg \mu \quad (3.2.7)$$

а $\varphi_i^*(x)$ ($i=1, 2, 3$) - ограниченные на отрезке $[-1, 1]$ гильдеровские функции.

Опуская подробности решения системы (3.2.3) при дополнительном условии (3.2.4), приведем лишь результаты численного анализа.

На рис. 3.2.2 представлены графики смещения свободного берега горизонтальной трещины, а на рис. 3.2.3 – графики взаимосмещения берегов вертикальной трещины при различных значениях отношения модулей сдвига $\mu = 0.6; 0.8; 0.9; 1; 1.1$.

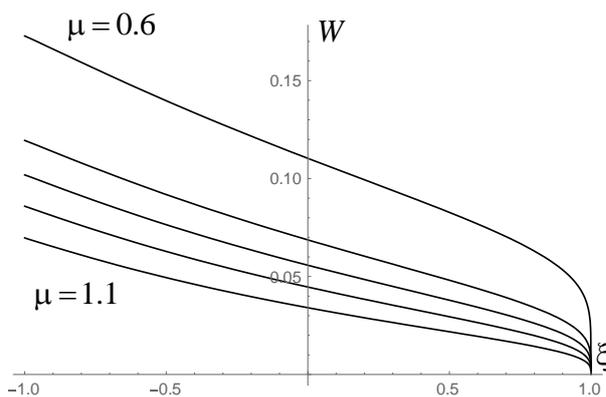


Рис. 3.2.2

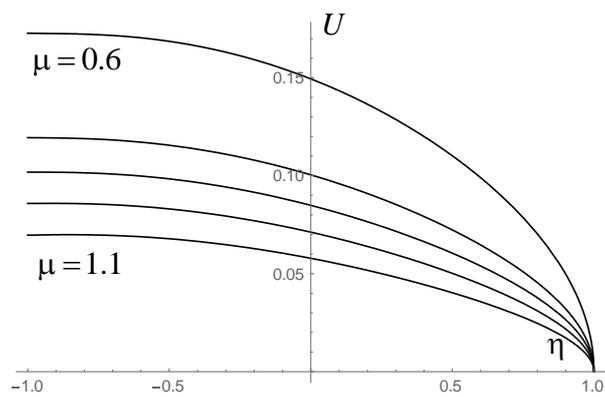


Рис. 3.2.3

На рис. 3.2.4 представлены графики распределения контактных тангенциальных напряжений под включением для тех же значений параметра $\mu = 0.6; 0.8; 0.9; 1; 1.1$.

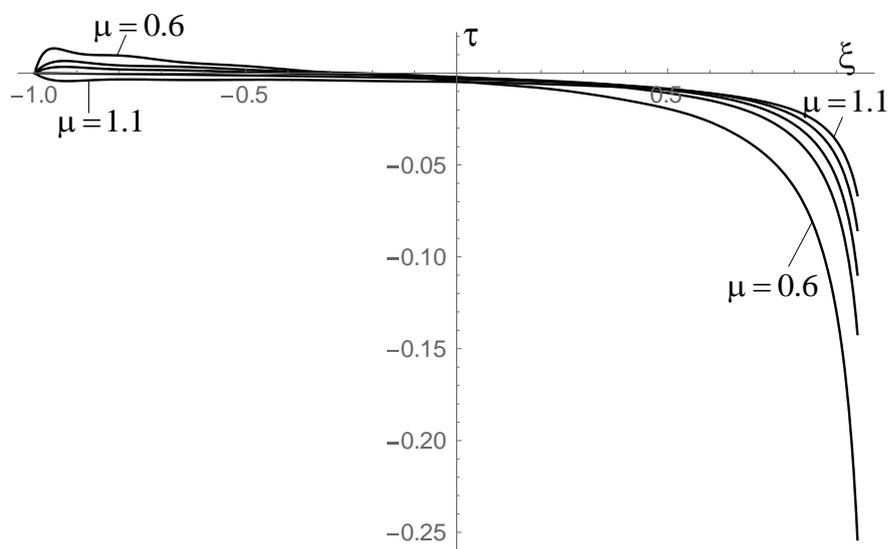


Рис. 3.2.4

Отметим, что очередность расположения графиков соответствует последовательности значений параметра μ , поэтому на рисунках отмечены только крайние графики.

Как замечаем из рис. 3.2.4, при малых значениях отношения μ контактные напряжения под средней частью включения меняют знак, т.е. изменяется направление их действия.

Следует отметить, что результаты, соответствующие случаю $\mu = 1$ полностью совпадают с результатами работы [17], где решена аналогичная задача для однородного пространства.

Частный случай 2. Предположим, что в описанной в предыдущем параграфе задаче (Рис. 3.1.1) межфазовая трещина отсутствует, а две другие трещины достигают линии раздела материалов (рис. 3.2.5), т.е. имеем следующие значения параметров:

$$l_1 = l_2 = 0, \quad a = 0, \quad c = 0 \quad (3.2.8)$$

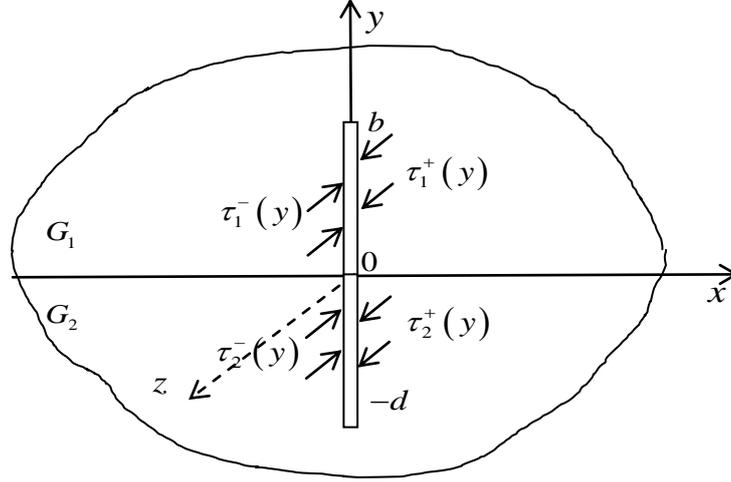


Рис. 3.2.5

Удовлетворяя, при помощи представлений (3.1.15) – (3.1.18), граничным условиям (3.1.2) и (3.1.3), которые в данном случае задаются формулами

$$\left. \frac{\partial U^{(1)}}{\partial x} \right|_{x=\pm 0} = \frac{1}{G_1} \tau_1^\pm(y), \quad y \in (0, b); \quad (3.2.9)$$

$$\left. \frac{\partial U^{(2)}}{\partial x} \right|_{x=\pm 0} = \frac{1}{G_2} \tau_2^\pm(y), \quad y \in (-d, 0);$$

получим следующую систему уравнений

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^b \left[\frac{1}{\eta - y} + \frac{\gamma}{\eta + y} \right] g_1'(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi(1+\mu)} \int_{-d}^0 \frac{1}{\eta - y} g_2'(\eta) d\eta = \frac{\tau_1^+(y) + \tau_1^-(y)}{2G_1}, \quad (0 < y < b) \quad (3.2.10)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-d}^0 \left[\frac{1}{\eta - y} - \frac{\gamma}{\eta + y} \right] g_2'(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi(1+\mu)} \int_0^b \frac{1}{\eta - y} g_1'(\eta) d\eta = \frac{\tau_2^+(y) + \tau_2^-(y)}{2G_2}, \quad (-d < y < 0) \quad (3.2.11)$$

Таким образом решение задачи свелось к системе из двух сингулярных уравнений (3.2.10) и (3.2.11) относительно производных неизвестных смещений берегов трещин $g_1'(y)$ и $g_2'(y)$.

При этом, искомые функции $g_j'(y)$ должны удовлетворять условию

$$-\int_0^b g_1'(t) dt + \int_{-d}^0 g_2'(t) dt = 0, \quad (3.2.12)$$

которое представляет собой условие непрерывности берегов трещин в точке их соединения и вытекает, с учетом (3.1.10), из очевидного условия $g_1(0) = g_2(0)$.

Имея решение системы $g_j'(y)$, при помощи формул (3.1.15) – (3.1.18) и закона Гука (1.1.8), можно определить напряженно – деформированное состояние в любой точке рассматриваемых областей.

Исследование системы (3.2.10) и (3.2.11) показывает, что подлежащие определению функции $g_1'(y)$ и $g_2'(y)$ имеют корневую особенность в точках $y = b$ и $y = -d$, а в точке $y = 0$ имеют конечные значения. При этом оказывается, что

$$g_1'(0) = -g_2'(0) \quad (3.2.13)$$

Следовательно решение системы (3.2.10) и (3.2.11) следует представить в виде

$$\begin{aligned} g_1'(y) &= \frac{A + \tilde{g}_1(y) \cdot y}{\sqrt{b-y}} & (0 < y < b), \\ g_2'(y) &= \frac{-A + \tilde{g}_2(y) \cdot y}{\sqrt{y+d}} & (-d < y < 0), \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Далее, с учетом указанного поведения искомых функций, решение системы (3.2.10)-(3.2.11), вместе с условием (3.2.12), методом механических квадратур сведено к решению соответствующей системы линейных алгебраических уравнений.

Проведен численный анализ и рассчитано взаимосмещение берегов объединенной трещины для различных значений отношения модулей сдвига μ . Результаты представлены на Рис. 3.2.6.

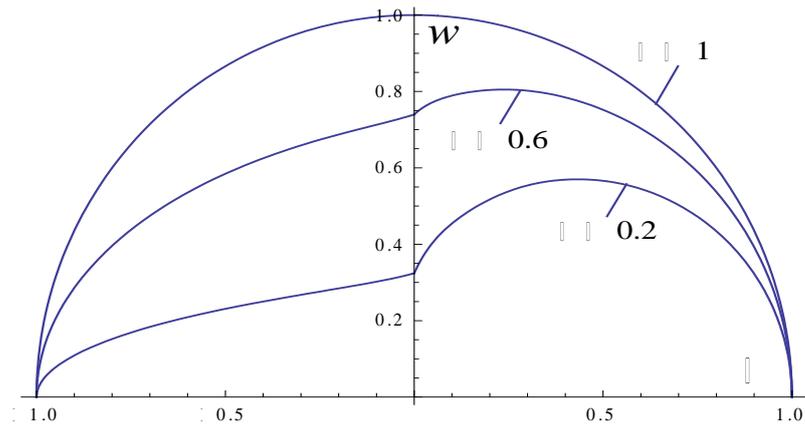


Рис. 3.2.6

Отметим, что на рис. 3.2.6 показаны графики только для значений отношения $\mu \leq 1$ потому, что для больших значений этого отношения будем иметь зеркальное, относительно оси ординат, отображение представленных графиков.

Частный случай 3. Теперь рассмотрим предыдущую задачу, полагая, что трещина в нижнем полупространстве отсутствует, а на берегах верхней трещины заданы смешанные условия. Фактически, в верхнем полупространстве имеем жесткое включение, одна сторона которого свободна от напряжений, а конец выходит на линию раздела материалов (рис. 3.2.7)

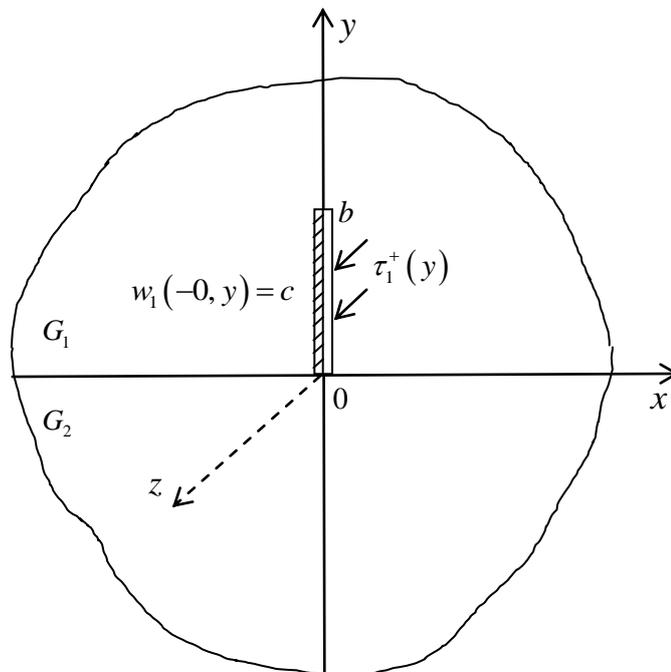


Рис. 3.2.7

Таким образом, на отрезке $0 < y < b$ имеем следующие граничные условия:

$$U_z(-0, y) = const, \quad 0 \leq y \leq b, \quad (3.2.15)$$

$$\tau_{xz}(+0, y) = \tau_1^+(y), \quad 0 < y < b,$$

Теперь, удовлетворяя при помощи представлений (3.1.15), (3.1.16) граничным условиям (3.2.15), получим разрешающую систему интегральных уравнений в следующем виде

$$g_1'(y) - \frac{1}{\pi G_1} \int_0^b \left[\frac{1}{\eta - y} - \gamma \frac{1}{\eta + y} \right] f_1(\eta) d\eta = F_1(y), \quad (0 < y < b), \quad (3.2.16)$$

$$f_1(y) - \frac{1}{\pi} \int_0^b \left[\frac{1}{\eta - y} + \gamma \frac{1}{\eta + y} \right] g_1'(\eta) d\eta = -\frac{1}{G_1} \tau_1^+(y), \quad (0 < y < b), \quad (3.2.17)$$

$$\text{где } F_1(y) = -\frac{1}{\pi G_1} \int_0^b \left[\frac{1}{\eta - y} - \gamma \frac{1}{\eta + y} \right] \tau_1^+(\eta) d\eta, \quad (3.2.18)$$

$$g_1'(y) = \left. \frac{\partial U_z}{\partial y} \right|_{x=+0}, \quad f_1(y) = \frac{1}{G_1} \tau_{xz}^{(1)}(-0, y), \quad (3.2.19)$$

При этом неизвестные функции $g_1'(y)$ и $f_1(y)$ должны удовлетворять еще и условиям

$$\int_0^b f_1(\eta) d\eta = \frac{P}{G_1}, \quad \int_0^b g_1'(t) dt = 0, \quad (3.2.20)$$

где P - равнодействующая касательных сил, приложенных к свободной поверхности включения, если они есть.

Приступим к решению системы интегральных уравнений (3.2.16) и (3.2.17) при условиях (3.2.20). Перейдем к новым переменным $\eta = b(\xi + 1)/2$, $y = b(\zeta + 1)/2$ и сформулируем систему определяющих уравнений на интервале $(-1, 1)$

$$\varphi_1(\zeta) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\xi - \zeta} \varphi_1(\xi) d\xi - \frac{\gamma}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\xi + \zeta + 2} \varphi_2(\xi) d\xi = f_1(\zeta) + f_2(\zeta) \quad (-1 < \zeta < 1) \quad (3.2.21)$$

$$\varphi_2(\zeta) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\xi - \zeta} \varphi_2(\xi) d\xi + \frac{\gamma}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\xi + \zeta + 2} \varphi_1(\xi) d\xi = f_1(\zeta) - f_2(\zeta)$$

где

$$\varphi_1(\zeta) = g_1' \left(\frac{(\zeta+1)b}{2} \right) + f_1 \left(\frac{(\zeta+1)b}{2} \right),$$

$$\varphi_2(\zeta) = g_1' \left(\frac{(\zeta+1)b}{2} \right) - f_1 \left(\frac{(\zeta+1)b}{2} \right),$$

$$f_1(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\xi - \zeta} - \gamma \frac{1}{\xi + \zeta + 2} \right] \frac{\tau_1^+ \left(\frac{(\xi+1)b}{2} \right)}{G_1} d\xi,$$

$$f_2(\zeta) = -\frac{1}{G_1} \tau_1^+ \left(\frac{(\zeta+1)b}{2} \right),$$

Дополнительные условия теперь запишутся в виде

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 [\varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi)] d\xi = 0, \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [\varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)] d\xi = \frac{P}{G_1}, \quad (3.2.22)$$

Исследуя поведение системы (3.2.21) у концов отрезка интегрирования, нетрудно убедиться, что решения системы следует искать в классе функций

$$\varphi_1(\xi) = \frac{\phi_1(\xi)}{(\xi+1)^{\delta_1} (1-\xi)^{\frac{3}{4}}}; \quad \varphi_2(\xi) = \frac{\phi_2(\xi)}{(\xi+1)^{\delta_3} (1-\xi)^{\frac{1}{4}}} \quad (3.2.23)$$

где $\phi_j(\xi)$ - гельдеровские функции, ограниченные на отрезке $[-1, 1]$, а показатели δ_1 и δ_3 - являются корнями уравнения

$$\operatorname{ctg}^2 \pi \delta - \frac{\gamma^2}{\sin^2 \pi \delta} = 1 \quad (0 < \delta_1 < \delta_3 < 1) \quad (3.2.24)$$

Используя соответствующие весовым функциям в (3.2.23) квадратурные формулы, при помощи метода механических квадратур решение системы (3.2.21)-(3.2.22) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

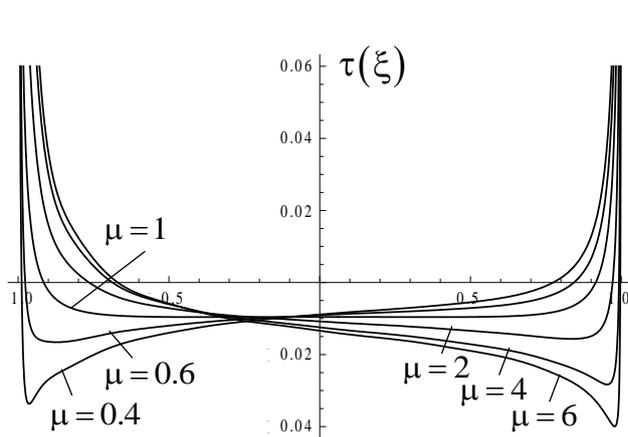


Рис. 3.2.8

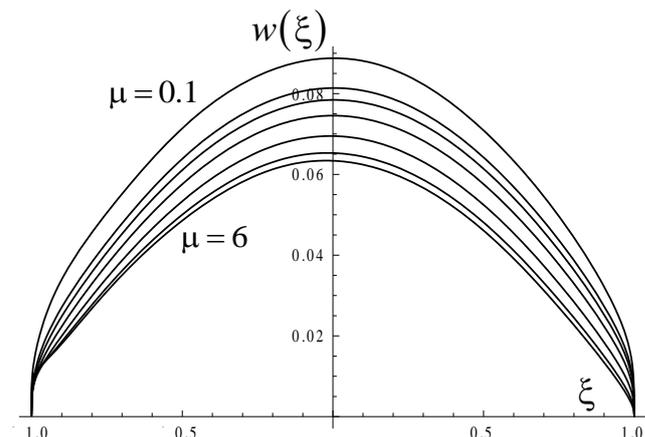


Рис. 3.2.9

На рисунках 3.2.8 и 3.2.9 представлены графики распределения контактных напряжений под включением и смещения свободного берега трещины для различных значений отношения модулей сдвига μ .

§3.3 Антиплоское напряженное состояние кусочно-однородного пространства с трещинами и жесткими включениями

Исследуется антиплоская смешанная задача теории упругости для составного пространства, состоящего из двух разных упругих полупространств и упругого слоя между ними и содержащего трещины и включения. Задача относится к классу смешанных и контактных задач теории упругости, касающихся определения напряженно-деформированного состояния массивных упругих тел, содержащих трещины и частично оторванные от матрицы жесткие включения. После выделения характерных особенностей поведения искомых функций у концов, решение разрешающих уравнений построено численно-аналитическим методом механических квадратур. Исследовано поведение основных характерных механических величин поставленной задачи в зависимости от геометрических и механических параметров задачи.

1. Постановка задачи и построение разрывного решения.

Рассмотрим упругое составное пространство, состоящее из двух разных упругих полупространств и упругого слоя.

В правосторонней декартовой системе координат $Oxyz$ полупространства занимают области $\Omega_1 (|x, z| < \infty, y > h)$ и $\Omega_2 (|x, z| < \infty, y < -h)$ с модулями сдвигов G_1 и G_2 , а слой занимает область $\Omega_0 (-\infty < x, z < \infty, -h < y < h)$ с модулем сдвига G_0 . Полупространства соединены со слоем по плоскостям $y = h$ и $y = -h$ и находятся в условиях полного контакта.

Составное пространство, в направлении оси Oz , ослаблено туннельными трещинами по отрезкам: $L_1 = \{x = 0; a < y < b\}$, $L_2 = \{x = 0; -d < y < -c\}$ оси Oy и $L_3 = \{-l_1^{(3)} < x < l_2^{(3)}; y = h\}$, $L_4 = \{-l_1^{(4)} < x < l_2^{(4)}; y = -h\}$ линий контакта $y = \pm h$. Полученная упругая система деформируется заданными внешними воздействиями, действующими на свободных поверхностях трещин (рис.3.3.1).

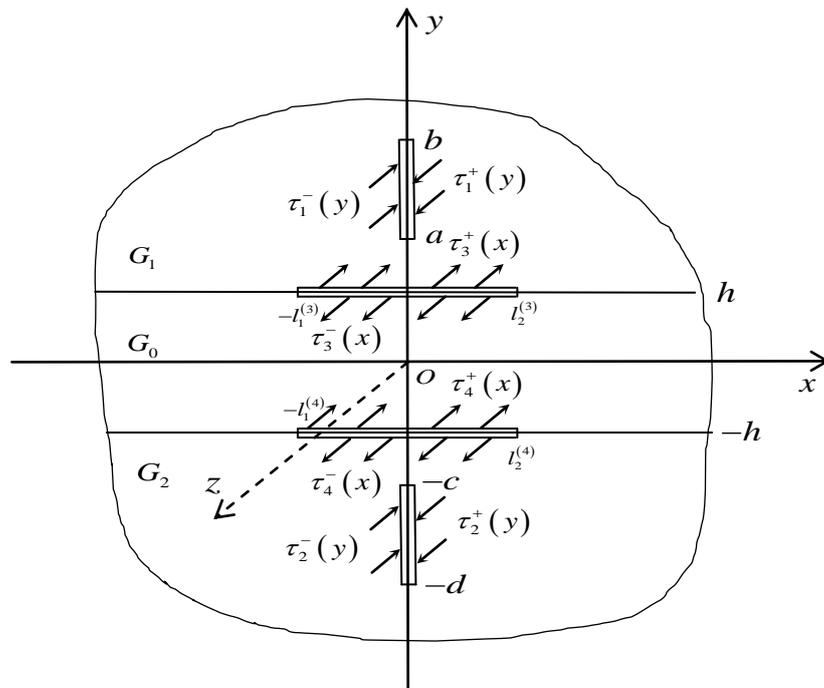


Рис.3.3.1

Предполагается, что на берегах трещин могут быть заданы и смешанные граничные условия, т.е. вместо напряжений могут быть заданы перемещения или же, на одном берегу трещины напряжение, а на другом перемещение. При этом предполагается также, что заданные внешние воздействия равномерно распределены по направлению оси $Oz (|z| < \infty)$, обеспечивающие антиплоское деформирование системы.

При таких, довольно общих, граничных условиях ставится задача: определить напряженно-деформированное состояние упругой системы и определить основные механические характеристики поставленной задачи - распределение контактных напряжений в зонах контакта и коэффициенты интенсивности напряжений на концах разрезов, раскрытие берегов трещин.

Так как пространство находится в условиях антиплоской деформации, то поставленную задачу сформулируем как антиплоскую задачу с базовой составной плоскостью Oxy .

Тогда поставленная задача математически формулируется в виде следующих граничных задач для полуплоскостей $\omega_1 (y > h)$, $\omega_2 (y < -h)$ и полосы $\omega_0 (|y| < h)$

$$\frac{\partial^2 w_j(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_j(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \omega_j, \quad (j = 0, 1, 2), \quad (3.3.1)$$

при граничных условиях на берегах трещин:

$$\left. \frac{\partial w_1}{\partial x} \right|_{x=\pm 0} = \frac{1}{G_1} \tau_1^\pm(x, y), \quad y \in L_1, \quad (3.3.2)$$

$$\left. \frac{\partial w_2}{\partial x} \right|_{x=\pm 0} = \frac{1}{G_2} \tau_2^\pm(x, y), \quad y \in L_2, \quad (3.3.3)$$

$$\left. \frac{\partial w_1}{\partial y} \right|_{y=h+0} = \frac{1}{G_1} \tau_3^+(x, y), \quad x \in L_3, \quad (3.3.4)$$

$$\left. \frac{\partial w_0}{\partial y} \right|_{y=h-0} = \frac{1}{G_0} \tau_3^-(x, y), \quad x \in L_3, \quad (3.3.5)$$

$$\left. \frac{\partial w_2}{\partial y} \right|_{y=-h-0} = \frac{1}{G_2} \tau_4^-(x, y), \quad x \in L_4, \quad (3.3.6)$$

$$\left. \frac{\partial w_0}{\partial y} \right|_{y=-h+0} = \frac{1}{G_0} \tau_4^+(x, y), \quad x \in L_4, \quad (3.3.7)$$

и контактными условиями

$$w_1(x, h+0) = w_0(x, h-0), \quad x \in (-\infty, -l_1^3] \cup [l_2^3, \infty) \quad (3.3.8)$$

$$G_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} \Big|_{y=h+0} = G_0 \frac{\partial w_0}{\partial y} \Big|_{y=h-0}, \quad x \in (-\infty, -l_1^3] \cup [l_2^3, \infty)$$

$$w_0(x, -h+0) = w_2(x, -h-0), \quad x \in (-\infty, -l_1^4] \cup [l_2^4, \infty) \quad (3.3.9)$$

$$G_0 \frac{\partial w_0}{\partial y} \Big|_{y=-h+0} = G_2 \frac{\partial w_2}{\partial y} \Big|_{y=-h-0}, \quad x \in (-\infty, -l_1^4] \cup [l_2^4, \infty)$$

обеспечивающим совместную деформацию слоя с обеими полуплоскостями.

Здесь следует отметить, что в тех случаях, когда на берегах трещин будут заданы перемещения, то вместо условий (3.3.2) - (3.3.7) следует принять условия

$$w_1(\pm 0, y) = w_1(y), \quad y \in L_1, \quad (3.3.10)$$

$$w_2(\pm 0, y) = w_2(y), \quad y \in L_2 \quad (3.3.11)$$

$$w_1(x, h+0) = w_1(x, h), \quad x \in L_3, \quad (3.3.12)$$

$$w_0(x, h-0) = w_0(x, h), \quad x \in L_3, \quad (3.3.13)$$

$$w_0(x, -h+0) = w_0(x, -h) \quad x \in L_4 \quad (3.3.14)$$

$$w_2(x, -h-0) = w_2(x, -h) \quad x \in L_4 \quad (3.3.15)$$

А если на берегах трещин заданы условия смешанного типа, то из условий (3.3.2)-(3.3.7) и (3.3.10)-(3.3.15) следует выбрать соответствующую восьмерку условий, обусловленных конкретно заданными граничными условиями.

В формулах (3.3.1)-(3.3.15) $w(x, y)$ - единственная, отличная от нуля, компонента упругого перемещения по направлению оси Oz , связанная с напряжениями по закону Гука (1.1.8)

Для решения краевой задачи (3.3.1)-(3.3.7) сначала построим, так называемое, разрывное решение уравнений (3.3.1) при более общих условиях на линиях, на которых мы планируем поместить трещины или включения, полагая, что на этих линиях заданы скачки (разрывы) перемещений и напряжений. Введем функции, связанные с граничными функциями следующим образом:

$$f_j(y) = \frac{1}{G_j} \tau_{xz}^{(j)}(+0, y) - \frac{1}{G_j} \tau_{xz}^{(j)}(-0, y), \quad (3.3.16)$$

$$g_j(y) = w_j(+0, y) - w_j(-0, y), \quad (3.3.17)$$

на отрезках $y \in L_j$, ($j=1,2$), которые представляют соответствующие скачки напряжений $\tau_{xz}(x, y)$ и перемещений $w(x, y)$ через линию $x=0$, и

$$f_3(x) = \tau_{yz}^{(1)}(x, h+0) - \tau_{yz}^{(0)}(x, h-0), \quad -l_1^{(3)} < x < l_2^{(3)}, \quad (3.3.18)$$

$$g_3(x) = w_1(x, h+0) - w_0(x, h-0), \quad -l_1^{(3)} < x < l_2^{(3)} \quad (3.3.19)$$

$$f_4(x) = \tau_{yz}^{(0)}(x, -h+0) - \tau_{yz}^{(2)}(x, -h-0), \quad -l_1^{(4)} < x < l_2^{(4)} \quad (3.3.20)$$

$$g_4(x) = w_0(x, -h+0) - w_2(x, -h-0), \quad -l_1^{(4)} < x < l_2^{(4)} \quad (3.3.21)$$

где $f_3(x)$ и $g_3(x)$ скачки напряжений и перемещений через линию $y=h$, а $f_4(x)$ и $g_4(x)$ через линию $y=-h$.

Теперь, согласно (1.1.11), введя обобщенное перемещение $U_j(x, y)$ ($j=1,2$) и предполагая при этом, что скачки перемещений $g_j(t)$ и напряжений $f_j(t)$ через линии L_j ($j=\overline{1,4}$) известны, после преобразования Фурье (1.1.18), аналогичным путем, как это было сделано в §1.1, придем к следующим граничным задачам

$$\frac{d^2 \bar{U}_0(\alpha, y)}{dy^2} - \alpha^2 \bar{U}_0(\alpha, y) = 0, \quad |y| < h \quad (3.3.22)$$

$$\frac{d^2 \bar{U}_j(\alpha, y)}{dy^2} - \alpha^2 \bar{U}_j(\alpha, y) = -i\alpha g_j(y) + f_j(y), \quad (j=1,2) \quad (3.3.23)$$

$$\bar{U}_1(\alpha, h+0) - \bar{U}_0(\alpha, h-0) = \bar{g}_3(\alpha, h), \quad (3.3.24)$$

$$G_1 \left. \frac{d\bar{U}_1(\alpha, y)}{dy} \right|_{y=h+0} - G_0 \left. \frac{d\bar{U}_0(\alpha, y)}{dy} \right|_{y=h-0} = \bar{f}_3(\alpha, h), \quad (3.3.25)$$

$$\bar{U}_0(\alpha, -h+0) - \bar{U}_2(\alpha, -h-0) = \bar{g}_4(\alpha, -h) \quad (3.3.26)$$

$$G_0 \left. \frac{d\bar{U}_0(\alpha, y)}{dy} \right|_{y=-h+0} - G_2 \left. \frac{d\bar{U}_2(\alpha, y)}{dy} \right|_{y=-h-0} = \bar{f}_4(\alpha, -h) \quad (3.3.27)$$

Общее решение уравнений (3.3.22) и (3.3.23), исчезающее при $y \rightarrow +\infty$, представим в виде

$$\bar{U}_1(\alpha, y) = A_1 e^{-|\alpha|y} + \frac{i \operatorname{sgn} \alpha}{2} \int_0^{\infty} E(\alpha, \eta, y) g_1(\eta) d\eta - \frac{1}{2|\alpha|} \int_0^{\infty} E(\alpha, \eta, y) f_1(\eta) d\eta, \quad y > h, \quad (3.3.28)$$

$$\bar{U}_2(\alpha, y) = A_2 e^{|\alpha|y} + \frac{i \operatorname{sgn} \alpha}{2} \int_{-\infty}^0 E(\alpha, \eta, y) g_2(\eta) d\eta - \frac{1}{2|\alpha|} \int_{-\infty}^0 E(\alpha, \eta, y) f_2(\eta) d\eta, \quad y < -h, \quad (3.3.29)$$

$$\bar{U}_0(\alpha, y) = C \operatorname{ch}(\alpha h) + D \operatorname{sh}(\alpha h), \quad -h < y < h, \quad (3.3.30)$$

где $E(\alpha, \eta, y) = e^{-|\alpha||\eta-y|} + e^{-|\alpha||\eta+y|}$, а A_1 , A_2 , C и D - неизвестные постоянные.

Удовлетворяя условиям (3.3.24) - (3.3.27), выразим коэффициенты A_1 , A_2 , C и D через функции $g_j(y)$, $f_j(y)$, $\bar{g}_3(\alpha)$ и $\bar{f}_3(\alpha)$:

$$\begin{aligned} A_1 &= e^{|\alpha|h} \left\{ \frac{G_0 E_1^{(1)}(\alpha, h)}{\Delta} \bar{F}_1(\alpha, \eta, h) + \frac{G_2 G_0}{\Delta} \bar{F}_2(\alpha, \eta, h) - \frac{E_1^{(2)}(\alpha, h)}{|\alpha|\Delta} \bar{F}_3(\alpha, \eta, h) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{G_0}{|\alpha|\Delta} F_4(\alpha, \eta, h) \right\} \\ A_2 &= -e^{|\alpha|h} \left\{ \frac{G_1 G_0}{\Delta} \bar{F}_1(\alpha, \eta, h) + \frac{G_0 E_2^{(1)}(\alpha, h)}{\Delta} \bar{F}_2(\alpha, \eta, h) + \frac{G_0}{|\alpha|\Delta} \bar{F}_3(\alpha, \eta, h) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{E_2^{(2)}(\alpha, h)}{|\alpha|\Delta} \bar{F}_4(\alpha, \eta, h) \right\} \\ C &= -\frac{G_1 E_0^{(1)}(\alpha, h)}{\Delta} \bar{F}_1(\alpha, \eta, h) + \frac{G_2 E_0^{(2)}(\alpha, h)}{\Delta} \bar{F}_2(\alpha, \eta, h) - \frac{E_0^{(1)}(\alpha, h)}{|\alpha|\Delta} \bar{F}_3(\alpha, \eta, h) - \\ &\quad - \frac{E_0^{(2)}(\alpha, h)}{|\alpha|\Delta} \bar{F}_4(\alpha, \eta, h) \\ D &= -\frac{G_1 E_0^{(3)}(\alpha, h)}{\Delta} \bar{F}_1(\alpha, \eta, h) - \frac{G_2 E_0^{(4)}(\alpha, h)}{\Delta} \bar{F}_2(\alpha, \eta, h) - \frac{E_0^{(3)}(\alpha, h)}{|\alpha|\Delta} \bar{F}_3(\alpha, \eta, h) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{E_0^{(4)}(\alpha, h)}{|\alpha|\Delta} \bar{F}_4(\alpha, \eta, h) \quad (3.3.31)$$

где $E_1^{(1)}(\alpha, h) = G_0 \operatorname{sh}(2|\alpha|h) + G_2 \operatorname{ch}(2\alpha h)$

$$E_1^{(2)}(\alpha, h) = G_2 \operatorname{sh}(2|\alpha|h) + G_0 \operatorname{ch}(2\alpha h)$$

$$E_2^{(1)}(\alpha, h) = G_0 \operatorname{sh}(2|\alpha|h) + G_1 \operatorname{ch}(2\alpha h)$$

$$E_2^{(2)}(\alpha, h) = G_1 \operatorname{sh}(2|\alpha|h) + G_0 \operatorname{ch}(2\alpha h)$$

$$E_0^{(1)}(\alpha, h) = G_2 \operatorname{sh}|\alpha|h + G_0 \operatorname{ch}\alpha h$$

$$E_0^{(2)}(\alpha, h) = G_1 \operatorname{sh}|\alpha|h + G_0 \operatorname{ch}\alpha h$$

$$E_0^{(3)}(\alpha, h) = G_2 \operatorname{ch}\alpha h + G_0 \operatorname{sh}|\alpha|h$$

$$E_0^{(4)}(\alpha, h) = G_1 \operatorname{ch}\alpha h + G_0 \operatorname{sh}|\alpha|h, \quad \tilde{A} = \frac{G_0(G_1 + G_2)}{G_0^2 + G_1 G_2}$$

$$\Delta(\alpha, h) = (G_0^2 + G_1 G_2) [\operatorname{sh}(2|\alpha|h) + \tilde{A} \operatorname{ch}(2\alpha h)] \quad (3.3.32)$$

$$\bar{F}_1(\alpha, \eta, h) = \bar{g}_3(\alpha) - \frac{i\alpha}{2|\alpha|} \int_0^\infty E(\alpha, \eta, h) g_1(\eta) d\eta + \frac{1}{2|\alpha|} \int_0^\infty E(\alpha, \eta, h) f_1(\eta) d\eta$$

$$\bar{F}_2(\alpha, \eta, h) = \bar{g}_4(\alpha) + \frac{i\alpha}{2|\alpha|} \int_{-\infty}^0 E(\alpha, \eta, h) g_2(\eta) d\eta - \frac{1}{2|\alpha|} \int_{-\infty}^0 E(\alpha, \eta, h) f_2(\eta) d\eta$$

$$\bar{F}_3(\alpha, \eta, h) = \bar{f}_3(\alpha) - G_1 \left\{ \frac{i\alpha}{2} \int_0^\infty E^*(\alpha, \eta, h) g_1(\eta) d\eta - \frac{1}{2} \int_0^\infty E^*(\alpha, \eta, h) f_1(\eta) d\eta \right\}$$

$$\bar{F}_4(\alpha, \eta, h) = \bar{f}_4(\alpha) - G_2 \left\{ \frac{i\alpha}{2} \int_{-\infty}^0 E^*(\alpha, \eta, h) g_2(\eta) d\eta - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 E^*(\alpha, \eta, h) f_2(\eta) d\eta \right\}$$

$$E(\alpha, \eta, h) = \left[e^{-|\alpha||\eta-h|} + e^{-|\alpha||\eta+h|} \right]$$

$$E^*(\alpha, \eta, h) = \left[e^{-|\alpha||\eta-h|} \operatorname{sgn}(\eta-h) - e^{-|\alpha||\eta+h|} \operatorname{sgn}(\eta+h) \right] \quad (3.3.33)$$

Подставляя значения постоянных A_1 , A_2 , C и D из (3.3.31) в (3.3.28), (3.3.29) и (3.3.30), после обратного преобразования для $U_j(x, y)$ получим следующее представления

$$\begin{aligned}
U_1(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\alpha|(y-h)} \left\{ \frac{G_0 E_1^{(1)}(\alpha, h)}{\Delta} F_1(\alpha, \eta, h) + \frac{G_2 G_0}{\Delta} F_2(\alpha, \eta, h) - \right. \\
& \left. - \frac{E_1^{(2)}(\alpha, h)}{|\alpha| \Delta} F_3(\alpha, \eta, h) - \frac{G_0}{|\alpha| \Delta} F_4(\alpha, \eta, h) \right\} e^{-i\alpha x} d\alpha + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{i \operatorname{sgn} \alpha}{2} \int_a^b E(\alpha, \eta, y) g_1(\eta) d\eta - \frac{1}{2|\alpha|} \int_a^b E(\alpha, \eta, y) f_1(\eta) d\eta \right\} e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad y > h
\end{aligned} \tag{3.3.34}$$

$$\begin{aligned}
U_2(x, y) = & -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{|\alpha|(y+h)} \left\{ \frac{G_1 G_0}{\Delta} F_1(\alpha, \eta, h) + \frac{G_0 E_2^{(1)}(\alpha, h)}{\Delta} F_2(\alpha, \eta, h) + \right. \\
& \left. + \frac{G_0}{|\alpha| \Delta} F_3(\alpha, \eta, h) + \frac{E_2^{(2)}(\alpha, h)}{|\alpha| \Delta} F_4(\alpha, \eta, h) \right\} e^{-i\alpha x} d\alpha + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{i \operatorname{sgn} \alpha}{2} \int_{-d}^{-c} E(\alpha, \eta, y) g_2(\eta) d\eta - \frac{1}{2|\alpha|} \int_{-d}^{-c} E(\alpha, \eta, y) f_2(\eta) d\eta \right\} e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad y < -h
\end{aligned} \tag{3.3.35}$$

$$\begin{aligned}
U_0(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{G_1 E_0^{(1)}(\alpha, y, h)}{\Delta} F_1(\alpha, \eta, h) - \frac{G_2 E_0^{(2)}(\alpha, y, h)}{\Delta} F_2(\alpha, \eta, h) - \right. \\
& \left. - \frac{E_0^{(1)}(\alpha, y, h)}{|\alpha| \Delta} F_3(\alpha, \eta, h) + \frac{E_0^{(2)}(\alpha, y, h)}{|\alpha| \Delta} F_4(\alpha, \eta, h) \right\} e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad -h < y < h
\end{aligned} \tag{3.3.36}$$

где $E_0^{(1)}(\alpha, y, h) = G_2 sh|\alpha|(y+h) + G_0 ch\alpha(y+h)$

$E_0^{(2)}(\alpha, y, h) = G_1 sh|\alpha|(y-h) - G_0 ch\alpha(y-h)$

Функции $U_j(x, y)$ из (3.3.34), (3.3.35) и (3.3.36), связанные с упругими перемещениями $w_j(x, y)$ формулой (1.1.11), фактически представляют решение антиплоской контактной задачи для составного упругого пространства, когда на отрезках линий $x=0$, $y=h$ и $y=-h$ заданы скачки перемещений и напряжений.

Теперь, определяя, при помощи (3.3.34) – (3.3.36), выражения для напряжений $\tau_{xz}^{(j)}(x, y)$ и $\tau_{yz}^{(j)}(x, y)$ из (1.1.8) и удовлетворяя граничным условиям (3.3.2) – (3.3.7),

получим определяющую систему сингулярных интегральных уравнений, относительно теперь уже неизвестных скачков $g'_j(t)$ ($f_j(t)$ - в данном случае известны).

Соответствующая система определяющих интегральных уравнений будет приведена ниже для конкретного случая.

2. Рассмотрим частный случай задачи, когда имеем составное полупространство, состоящее из двух упругих полупространств, имеющих одинаковые модули сдвига ($G_1 = G_2 = G_1$) и упругого слоя между ними с модулем упругости G_0 . На линиях соединения материалов имеются жесткие включения одинаковой длины $l_1^{(j)} = l_2^{(j)} = l$ ($j = 3, 4$), которые по одной грани сцеплены с полупространствами, а со слоем образуют трещину, то есть на отрезках $(-l, l)$ линий раздела материалов заданы условия смешанного типа (рис. 3.3.2)

$$\begin{aligned} g_1(x, h-0) = c, \quad \tau_{xz}^{(0)}(x, h-0) = \tau^{(0)}(x) & \quad (-l < x < l) \\ g_1(x, -h-0) = c, \quad \tau_{xz}^{(0)}(x, -h+0) = \tau^{(0)}(x) & \quad (-l < x < l) \end{aligned} \quad (3.3.37)$$

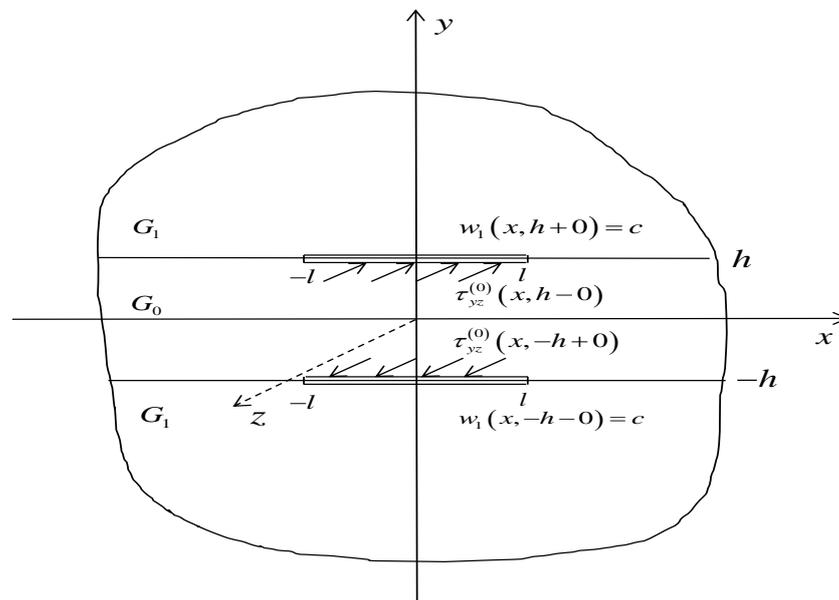


Рис. 3.3.2

Граничные условия (3.3.37) фактически соответствуют условиям контактной задачи, когда одна из берегов трещины закреплена жесткой накладкой, а на другом

задано напряжение. Отметим, что в общем случае мы должны иметь четыре неизвестные (две - контактные напряжения, две - производные смещения), однако в рассматриваемом случае, ввиду симметрии в постановке задачи, имеем $g'_3(x) = -g'_4(x)$, $q_3(x) = -q_4(x)$.

Определяющие сингулярные интегральные уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \varphi_1(\zeta) - \frac{\sqrt{G_{01}}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\xi - \zeta} \varphi_1(\xi) d\xi - \frac{\sqrt{G_{01}}}{\pi} \int_{-1}^1 R_{11}(\xi, \zeta) \varphi_1(\xi) d\xi - \\ - \frac{\sqrt{G_{01}}}{\pi} \int_{-1}^1 R_{12}(\xi, \zeta) \varphi_2(\xi) d\xi = f_1(\zeta) + \frac{1}{\sqrt{G_1 G_0}} f_2(\zeta), \quad -1 < (\xi, \zeta) < 1 \end{aligned} \quad (3.3.38)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(\zeta) + \frac{\sqrt{G_{01}}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\xi - \zeta} \varphi_2(\xi) d\xi + \frac{\sqrt{G_{01}}}{\pi} \int_{-1}^1 R_{22}(\xi, \zeta) \varphi_2(\xi) d\xi + \\ + \frac{\sqrt{G_{01}}}{\pi} \int_{-1}^1 R_{21}(\xi, \zeta) \varphi_1(\xi) d\xi = f_1(\zeta) - \frac{1}{\sqrt{G_1 G_0}} f_2(\zeta), \quad -1 < (\xi, \zeta) < 1 \end{aligned} \quad (3.3.39)$$

где $\varphi_1(\zeta) = w'_0(\zeta) + \frac{1}{\sqrt{G_0 G_1}} \tau(\zeta); \quad \varphi_2(\zeta) = w'_0(\zeta) - \frac{1}{\sqrt{G_0 G_1}} \tau(\zeta);$

$$\begin{aligned} f_1(\zeta) = \frac{1}{\pi G_0} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\xi - \zeta} + K_{12}(\xi, \zeta) \right] \tau^{(0)}(\xi) d\xi \\ f_2(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 K_{21}(\xi, \zeta) \tau^{(0)}(\xi) d\xi - G_{01} \tau^{(0)}(\zeta) \end{aligned} \quad (3.3.40)$$

$$R_{11}(\xi, \zeta) = \frac{1}{2} [K_{22}(\xi, \zeta) - K_{12}(\xi, \zeta)] - \frac{1}{4\sqrt{G_{01}}} [K_{11}(\xi, \zeta) + K_{21}(\xi, \zeta)]$$

$$R_{12}(\xi, \zeta) = \frac{1}{2} [K_{12}(\xi, \zeta) + K_{22}(\xi, \zeta)] + \frac{1}{4\sqrt{G_{01}}} [K_{21}(\xi, \zeta) - K_{11}(\xi, \zeta)]$$

$$R_{21}(\xi, \zeta) = \frac{1}{2} [K_{12}(\xi, \zeta) + K_{22}(\xi, \zeta)] + \frac{1}{4\sqrt{G_{01}}} [K_{11}(\xi, \zeta) - K_{21}(\xi, \zeta)]$$

$$R_{22}(\xi, \zeta) = \frac{1}{2} [K_{22}(\xi, \zeta) - K_{12}(\xi, \zeta)] + \frac{1}{4\sqrt{G_{01}}} [K_{11}(\xi, \zeta) + K_{21}(\xi, \zeta)]$$

$$K_{11}(\xi, \zeta) = 4G_{01}a_1 \frac{4\alpha}{(4\alpha)^2 + (\xi - \zeta)^2} + 2G_{01}a_2 \frac{2\alpha}{(2\alpha)^2 + (\xi - \zeta)^2} + 2G_{01}a_3 \frac{6\alpha}{(6\alpha)^2 + (\xi - \zeta)^2}$$

$$K_{12}(\xi, \zeta) = 4a_1 \frac{\xi - \zeta}{(4\alpha)^2 + (\xi - \zeta)^2} + 2a_2 \frac{\xi - \zeta}{(2\alpha)^2 + (\xi - \zeta)^2} + 2a_3 \frac{\xi - \zeta}{(6\alpha)^2 + (\xi - \zeta)^2}$$

$$K_{21}(\xi, \zeta) = 4G_{01}a_1 \frac{4\alpha}{(4\alpha)^2 + (\xi - \zeta)^2} - 2G_{01}a_2 \frac{2\alpha}{(2\alpha)^2 + (\xi - \zeta)^2} - 2G_{01}a_3 \frac{6\alpha}{(6\alpha)^2 + (\xi - \zeta)^2}$$

$$K_{22}(\xi, \zeta) = 4a_1 \frac{\xi - \zeta}{(4\alpha)^2 + (\xi - \zeta)^2} - 2a_2 \frac{\xi - \zeta}{(2\alpha)^2 + (\xi - \zeta)^2} - 2a_3 \frac{\xi - \zeta}{(6\alpha)^2 + (\xi - \zeta)^2}$$

$$a_1 = \frac{1 - G_{01}}{(G_{01} + 1)^2}, \quad a_2 = \frac{1}{G_{01} + 1}, \quad a_3 = \frac{(1 - G_{01})^2}{(G_{01} + 1)^3}, \quad G_{01} = \frac{G_1}{G_0}, \quad \alpha = \frac{h}{l}$$

Отметим, что указанные ядра представляют собой первые три члена разложения в ряд соответствующих интегралов Фурье, фигурирующих в формулах (3.3.34)-(3.3.36), после выделения в них главной части.

Решения (3.3.38)-(3.3.39) должны еще удовлетворять условиям

$$\int_{-1}^1 \varphi_1(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 \varphi_2(\xi) d\xi = 0 \quad (3.3.41)$$

Решение системы (3.3.38), (3.3.39) при условиях (3.3.41) построено методом механических квадратур [84]. Решение ищем в классе функций со степенной особенностью на концах

$$\varphi_i(x) = (1-x)^{\alpha_i} (1+x)^{\beta_i} \varphi_i^*(x) \quad (i=1,2)$$

Исследуя поведение уравнений в окрестности концов интервала интегрирования, для показателей особенности будем иметь:

$$\alpha_1 = -0.5 - \gamma; \quad \beta_1 = -0.5 + \gamma;$$

$$\gamma = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{G_0}{G_1}} \quad (3.3.42)$$

$$\alpha_2 = -0.5 + \gamma; \quad \beta_2 = -0.5 - \gamma;$$

В частном случае, когда пространство однородное, т.е. $G_1/G_0 = 1$

$$\alpha_1 = \beta_2 = -0.75 \quad \beta_1 = \alpha_2 = -0.25$$

При достаточно большом диапазоне изменения параметров задачи был проведен численный анализ, некоторые результаты которого представлены на рис. 3.3.3 и на рис. 3.3.4 и в таблице 3.3.1. Следует отметить, что, как показали расчеты, величина отношения модулей сдвига G_{01} мало влияет на распределение контактных напряжений, поэтому представляются зависимости только от удаленности включений друг от друга.

На рис. 3.3.3 показано распределение контактного напряжения $\tau(\xi)$ при различных значениях $\alpha = 0.3; 0.5; 1.0; 5.0; 10$, где $\alpha = h/l$ при $G_1/G_0 = 0.8$, а на рис. 3.3.4 приведено смещение $w(\xi)$ свободного берега трещины $g_3(x)$ при тех же значениях параметров.

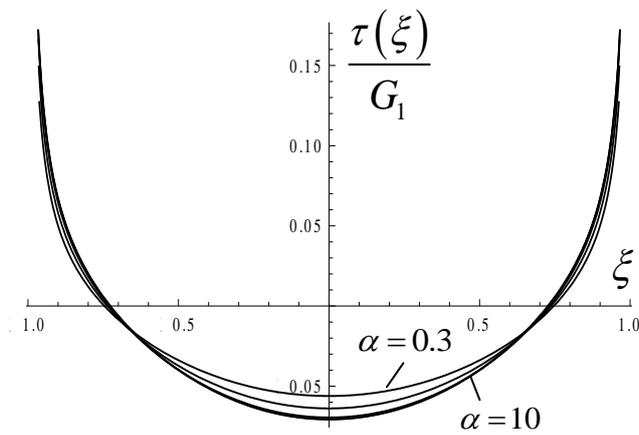


Рис. 3.3.3

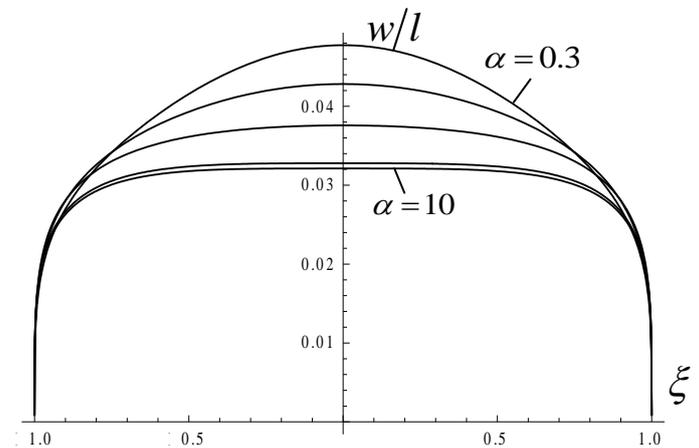


Рис. 3.3.4

В таблице приведены значения коэффициентов интенсивности напряжений K_{III} на концах жёсткого включения.

Таблица 3.3.1

| α | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| K_{III} | 0,0306 | 0,0315 | 0,0321 | 0,0324 | 0,0327 | 0,0328 | 0,0329 |

Численный анализ показывает, что удаление включений друг от друга больше сказывается на раскрытии трещины, а не на распределении контактных напряжений. Это подтверждается и данными таблицы.

КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Полученные в диссертации результаты приводят к следующим выводам:

9. Поставлен и решен ряд новых антиплоских смешанных контактных задач для кусочно–однородных полупространства и пространства с отдельными, так и примыкающими друг к другу концентраторами напряжений типа трещин, включений, штампов и упругих накладок.
10. Построены разрывные решения для составного полупространства с расположенными на одной линии, перпендикулярно к линии раздела материалов, прямолинейными концентраторами напряжений и кусочно-однородного пространства, содержащего, помимо указанных, еще и жесткие включения, расположенные на линиях раздела материалов и соединенные только с одним из них.
11. Построены функции влияния для полупространства с конечным числом параллельных трещин и жестких включений.
12. В довольно общей постановке, при антиплоской деформации, поставлена и исследована контактная задача о передаче нагрузок от системы из произвольного конечного числа коллинеарных разнородных стрингеров, обладающих различными жесткостями на сдвиг, к упругому полупространству, содержащему систему из конечного числа параллельных трещин конечных длин, перпендикулярных к ее границе. Рассмотрены разные варианты взаимного расположения концов трещины и стрингера.
13. Построены функции влияния для полупространства с конечным числом параллельных трещин и жестких включений и решена антиплоская контактная задача о передаче нагрузки от произвольного числа коллинеарных разнородных упругих стрингеров к однородной полуплоскости, содержащей конечное число параллельных концентраторов напряжений, расположенных перпендикулярно к ее границе.
14. Выявлены зависимости искомых скачков тангенциальных напряжений и смещений, имеющих место на концентраторах, от геометрических параметров поставленных задач и отношения модулей сдвига материалов в случае составного массивного тела. В частности, для задачи §1.1 показано, что при

малой толщине слоя коэффициент $K_{III}(1)$ у внутреннего конца трещины имеет минимум, а при $H^* > 1$ слой можно заменить полупространством, в задаче §2.2 показано, что при увеличении длины трещин распределение контактных напряжений под стрингером стремится к равномерному, в §§1.2.2, 1.2.3 исследован характер распределения контактных напряжений под штампом при приближении к нему конца другого концентратора.

15. Методика построения решений поставленных задач создает предпосылки для постановки и решения родственных задач в рамках плоской задачи теории упругости.
16. В диссертации свое дальнейшее развитие получили методы разрывных решений теории упругости, теории интегральных преобразований и интегральных уравнений, а также численно-аналитический метод механических квадратур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамян Б.Л. К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. –ПММ, 1957, т.21, вып I, с.89-100.
2. Абрамян Б.Л. Контактные (смешанные) задачи теории упругости.-Изв. АН СССР. МТТ,1969, No 4, с.181-197.
3. Абрамян Б.Л., Арутюнян Н.Х., Баблоян А.А. О двух контактных задачах для сферы. -ПММ,1964, т.28, вып 4, с.622-629.
4. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. О некоторых смешанных задачах теории упругости для полуплоскости.- Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1970, 23, №3ст. 3-13.
5. Агаян К.Л. Взаимодействие стрингеров с бесконечной пластиной, ослабленной двоякопериодической системой трещин. – В сб: Механика деформируемых тел и конструкции. Ереван, Изд – во АН Арм ССР, 1985, с. 26 – 32.
6. Агаян К.Л. Контактная задача для бесконечной пластины о взаимодействии пересекающихся трещины и стрингеров. Сб. трудов «Проблемы механики деформируемого твердого тела». Ереван 2012, с. 42-47.
7. Агаян К.Л. Некоторые контактные задачи для бесконечной пластины, усиленной упругими накладками.- Изв. АН СССР. МТТ,1972, No 5, с.34-45.
8. Агаян К.Л. Об одной контактной задаче для бесконечной пластины с трещиной, усиленной упругими накладками. Изв.АН АрмССР, Механика, 1976, 29, №4, с.3-15.
9. Агаян К.Л., Саркисян В.Г. Контактная задача упругой плоскости с трещинами, армированной бесконечными включениями.- Сб.: Механика деформируемого твердого тела.- Е.: Изд-во АН АрмССР, 1993, с.63-78.
10. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Изд-во «Гитутюн» НАН РА, Ереван -2014, 322с.
11. Акопян В.Н., Даштоян Л.Л., Акопян Л.В. О напряженном состоянии упругой плоскости с полубесконечным разрезом, перпендикулярно выходящим на частично оторванное от матрицы абсолютно жесткое включение. //Сб. трудов III-ей межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды», 8-12 октября 2012, Цахкадзор, Армения – Е., Изд-во ЕГУАС-2012, т. 1, с.57-61.
12. Акопян В.Н., Мирзоян С.Е., Даштоян Л.Л. Об одной осесимметричной смешанной задаче для составного пространства с монетообразной трещиной – Сб. «Проблемы механики деформируемых тел», Ереван-2003, с.68-76.
13. Акопян В.Н., Саакян А.В. Напряженное состояние упругой полуплоскости, содержащей тонкое жесткое включение // МТТ, №6, 2002, с. 76-82.

14. Акопян В.Н., Саакян А.В. О напряженном состоянии упругой плоскости с полубесконечным разрезом, перпендикулярно выходящим на жесткое включение конечной длины // Сб. трудов, посв. 85-летию акад. НАН Армении С.А.Амбарцумяна, Ереван 2007, с. 16-26.
15. Акопян Л.В. Контактная задача для упругой плоскости с полубесконечным разрезом, перпендикулярно выходящим на трещину конечной длины. //Труды межд. школы- конференции «Механика - 2013», 1-4 октября 2013, Цахкадзор, Армения – Е., Изд-во ЕГУАС – 2013, с. 59-63.
16. Акопян Л.В., Амирджанян А.А. О плоско-деформированном состоянии упругой плоскости с разрезами и включением. //Труды межд. школы-конф. «Механика 2009», 28 сент. – 1 окт. 2009, Агавнадзор, Армения – Е., Изд-во ЕГУАС-2009, с. 124-128.
17. Акопян Л.В., Саакян А.В. Уточнённое решение смешанной задачи для упругого пространства с Т-образной трещиной при антиплоской деформации //Сб. трудов IV межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды», сентябрь 21-26, 2015, Цахкадзор - Е., НУАСА - 2015, С.38-42.
18. Актуальные проблемы механики деформируемых сред. – Сб. Науч. Трудов к шестидесятилетию академика АН УССР В.И. Моссаковского.- Днепропетровск: Изд-во ДГУ. 1976.- 234 с.
19. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости.- М.: Наука, 1978, -464с.
20. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками.- М.: Наука, 1983.- 488с.
21. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соловьев А.С. Эффективные методы решения сложных смешанных задач теории упругости, связанных с вопросами концентрации напряжений. Сб.:Концентрация напряжений.-К. Наукова Думка, 1971, вып.3, с.5-10.
22. Александров В.М., Сметанин В.И., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах.- Москва, Наука, 1993, -234с.
23. Амирджанян А.А., Саакян А.В., О вдавливании П-образного жесткого штампа в упругую полуплоскость с учетом сил трения скольжения и сцепления. Изв. НАН РА. Механика. 2013. №3. С. 3-11.
24. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. – ПММ, 1968, т. 32, вып. 4, стр. 632-646.
25. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван, 1999, 320с.

26. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, 1969, т.33, вып.5, с.813-820.
27. Баблюян А.А. Решение некоторых парных интегральных уравнений. – ПММ, 1964, 28, вып.6. стр.1016-1023
28. Баблюян А.А. Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости.- ПММ, 1967, 31, вып 4.с.678-689.
29. Бейтмен Г., Эрдейи А. и др. Таблицы интегральных преобразований. М.: Наука, т. 1, 1969, 344 с.
30. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Стащук Н.Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле.-Киев: Наукова думка, 1983.-288с.
31. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функции – М.: Наука, 1977, 287с.
32. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого тела. –М.: Физматлит. 2007, –223с.
33. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М. "Наука" 1971-512 с.
34. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. – М.: Наука, 1974.- 456 с.
35. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.- М.:Наука, 1979.- 320с.
36. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости.- М.:Наука, 1980.- 304с.
37. Геворкян Г.З., Макарян В.С. Контактная задача для шарового сектора. Изв. АН АрмССР, Механика, 1996, т.49, №1, с.51-61.
38. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии.- М.:Машиностроение, 1988.- 256с.
39. Грейф Р., Сэндерс мл. Влияние стрингера на распределение напряжений в листе с трещиной. Прикладная механика. Труды Америк. о-ва инж.–мех., сер. Е, 1965, т.32, №1. с.66-74.
40. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1980. –415с.
41. Григорян М.С. О передаче нагрузок от системы разнородных стрингеров к упругому полупространству или слою при антиплоской деформации. Изв. НАН РА Механика 67, №3, 2014, с.3-16.
42. Григорян Э.Х. Решение задачи упругого конечного включения, выходящего на границу полуплоскости.- Ученыезаписки ЕГУ, естеств. науки, 1981, №3, с.32-43.

43. Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т. Периодическая задача для кусочно-однородной плоскости с тонкостенными упругими включениями.- Прикл. Мех., 1975, т.2, №1.74-81.
44. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев. Наукова думка. 1981. 284с.
45. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Равновесие упругих тел канонической формы.- Киев.:Науковадумка, 1985.- 278с.
46. Гудьер Дж.Н., Ходж Ф.Г. Упругость и пластичность. М.: Изд-во ин. лит., 1960, 190с.
47. Гулян К.Г. О двух плоских контактных задачах для клина с накладками.- Изв.АН СССР, МТТ, 1972, №5, с.46-56.
48. Давтян З.А., Мхитарян С.М. О двух контактных задачах кручения цилиндров при помощи цилиндрических оболочек с учетом их вязкоупругих свойств.- Изв. АрмССР, Механика, 1984, т.37, №3, с. 3-17.
49. Даштоян Л.Л., Акопян Л.В. Антиплоское напряженное состояние пространства с трещинами при смешанных условиях на одном берегу. //Труды 6-ой межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», 21-26 сентября, 2008, Горис-Степанакерт – Е., 2008, с. 224-229.
50. Даштоян Л.Л., Акопян Л.В. Напряженное состояние упругой плоскости с полубесконечным абсолютно жестким включением, перпендикулярно выходящим на трещину конечной длины. //Труды 8-ой межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», сентябрь 22-26, 2014, Горис-Степанакерт – Е., Чаргарагет – 2014, с. 217-221.
51. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия.- М.: Мир, 1989.- 509с.
52. Довнорович В.И. Пространственные контактные задачи теории упругости.- Минск: Изд-во БГУ, 1959, 107с.
53. Ильина И.И, Сильвестров В.В. Задача о тонком жестком межфазном включении, отсоединившемся вдоль одной стороны от среды. //Изв. РАН, МТТ, 2005, №3. С.153-166.
54. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости.-М.: Наука, 1973.-304с.
55. Каландия А.И. О применении метода функции влияния в плоской теории упругости. Изв. АН АрмССР, Механика, 1976, т.29, №4. с.16-28.
56. Кильчевский Н.А. Теория соударения твердых тел.- Киев: Наукова думка, 1969, 248с.

57. Кильчевский Н.А., Костюк Э.Н. О развитии в XX веке теории контактных взаимодействий между твердыми телами.- Прикл. мех., 1966, т.2, № 8, с.32-39.
58. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости.-М.: Гостехтеориздат, 1955.- 491с.
59. Макарян В.С. Поведение трещины под сжимающей нагрузкой. Докл. НАН РА, т 106, №2, Ереван 2006, с. 144-152.
60. Механика в СССР за 50 лет, т. 3. Механика деформируемого твердого тела, с. 480.
61. Мирзоян С.Е., Мхитарян С.М. О некоторых задачах контактного взаимодействия между бесконечными стрингерами и полосами с учетом неоднородности старения материалов.-Изв. АН АрмССР, Механика, 1981, т.34, №5, с.27-40.
62. Михлин С.Г. Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники.- М.-Л.: Гостехиздат, 1949, 380 с.
63. Мкртчян А.М. *Плоская задача для полосы с нецентральной разрезами.* Известия АН АрмССР, Механика, 1971, т.24, №2, с.16-23.
64. Мкртчян М.С; Манукян Э.А. Об антиплоской задаче кусочно- однородного упругого слоя, содержащего на линии срая систему щелей и абсолютно жестких тонких включений. Известия НАН Армении, Механика, 2010, т.63, №2,с.21-33.
65. Морарь Г.А., Попов Г.Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением.- ПММ, 1970, т.34, №3, с.412-421.
66. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин.- М.: Наука, 1984.- 255с.
67. Моссаковский В.И., Качаловская Н.Е., Голикова С.С. Контактные задачи математической теории упругости.- Киев: Науковадумка, 1985. 175с.
68. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.-М.: Наука, 1966.-708с.
69. Мухелишвили Н.И.Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968.- 511с.
70. Мхитарян С.М. О двух смешанных задачах, связанных с вопросами взаимодействия концентраторов напряжений различных типов с массивными телами при антиплоской деформации. – В сб.: Механика деформируемого твердого тела, Ереван, Изд-во НАН Армении, 1993, стр. 129-143.
71. Мхитарян С.М. О собственных функциях интегрального оператора, порожденного логарифмическим ядром на двух интервалах, и их приложения к

- контактным задачам. Известия АН Арм. ССР. Механика, т. 35, №6, 1982, стр. 3-18.
72. Мхитарян С.М. Об одном классе смешанных задач теории упругости.-Abstracts of Symposium "Continuum Mechanics and Related Problems of Analysis" Dedicated to the Centenary of Academician N. Muskhelishvili: Tbilisi, 1991, p. 35.
73. Мхитарян С.М., Шемян Л.А. *О вдавливании нелинейно вязкоупругого тела в тонкую полосу, лежащую на деформируемом основании.* Известия АН АрмССР, Механика, 1980, т.33, №5, с.3-16.
74. Нобл Б. Метод Винера – Хоифа. М.: Мир, 1962, 294с.
75. Новацкий В. Теория упругости.-Изд-во Мир, Москва, 1975г., 872с.
76. Острик В.И., Улитко А.Ф. Метод Винера–Хопфа в контактных задачах теории упругости. –Киев: Наукова думка, 2006. –328с.
77. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. - К: Наукова думка, 1976. - 443с.
78. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. - М.: Наука, 1982.- 344с.
79. Попов Г.Я. Точные решения некоторых краевых задач механики деформируемого тела. Изд.–тип. “Астропринт”, Одесса 2013г.,424с.
80. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды.- М.: Наука, 1981.- 738с.
81. Разрушение. – т.2. –М.: Мир. 1975. 763с.
82. Рвачев В.Л. Исследования ученых Украины в области контактных задач теории упругости.- Прикл.мех., 1967, т.3, вып.10, с.109-116.
83. Саакян А.В. Квадратурные формулы для вычисления интеграла с переменным верхним пределом. Труды II международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Дилижан, Армения, 4-8 октября 2010, сс. 107-111.
84. Саакян А.В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. Известия НАН Армении, Механика, 2000, т.53, №3,с.12-19.
85. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами.- Механика разрушения и прочность материалов. Спр. пособие под общей ред. В.В.Панасюка, т.2.-Киев: Наукова думка, 1988.- 619с.
86. Саркисян В.С. Еще раз о решении одной системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений.-Изв. АН АрмССР, Механика, 1992, т.45, №1-2, с.3-9.

87. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками.- Ереван: Изд-во ЕрГУ, 1983.- 255с.
88. Снеддон И. Преобразования Фурье.- М.: ИЛ, 1955, 668 с.
89. Статические и динамические смешанные задачи теории упругости.- Под ред. И.И.Воровича, Ростов-на-Дону: изд-во РГУ, 1983.- 264с.
90. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости.- М.: Наука, 1975, 576 с.
91. Тоноян В.С. Об одной плоской контактной задаче для упругой четверть-плоскости.- ДАН АрмССР, 1963, т.37, № 3, с.121-130.
92. Тоноян В.С., Мелкумян Н.С. Антиплоская контактная задача для упругой полуплоскости с полубесконечной трещиной. Изв. АН Армении, Механика, т. 42 № 1-2, 1992 с. 27-32.
93. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости.- Л.; Наука, 1968.- 402с.
94. Хачикян А.С. Плоская задача теории упругости для прямоугольника с тонкостенным включением.- Изв. АН АрмССР, Механика, 1971, т.24, № 4, с. 55-68.
95. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения.-М.: Наука, 1974.- 640с.
96. Черепанов Г.П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами.- Известия АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение, 1962, №1, с. 131-137.
97. Черепанов Г.П. Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости. - ПММ, 1962, т.26, вып. 5, с.907-912.
98. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах.- Изд.-во АН АрмССР, Ереван, 1987.-338с.
99. Чобанян К.С., Галфаян П.О. Решение одной контактной задачи для упругого прямоугольника. - ПММ, т.30, вып.3, 1966, с.569-575.
100. Чобанян К.С., Хачикян А.С. Плоское деформированное состояние упругого тела с тонким гибким включением.-Изв. АН АрмССР, Механика, 1967, т.20, №6, с.19-29.
101. Шемян А.Л., Шемян Л.А. Контактное взаимодействие кольцевого в плане штампа и упругого слоя в режиме граничного трения. Известия АН АрмССР. Механика. 2007. Т. 60, №3, с. 93-100.
102. Шерман Д.И. Основные плоские и контактные задачи (смешанные задачи) статической теории упругости.- Сб.: Механика в СССР за 30 лет. - М.: Гостехиздат,1950, с.192-225.

103. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй спец – курс. М.: Наука, 1965. – 327с.
104. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. - М.-Л.: Гостехтеориздат, 1949 - 270с.
105. Эрдоган Ф., Гупта Г. Задача о передаче усилий в валах, соединенных с помощью муфты. Прикладная механика. Труды ASME сер. E. 1973 № 4, с. 173 – 179.
106. Antipov Y.A. Subsonic semi-infinite crack with a finite friction zone in a bimaterial // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2009. 57. P. 1934-1957.
107. Arutunyan N.K., Mkhitaryan S.M. Some Contact Problems for a Semi–plane with elastic stiffeners. *Trends in Elasticity and Thermoelasticity. WitoldNawacki Anniversary Volume. Wolters–Nordhoff Publishing*, 1971, p.3-20.
108. Asundi A., Deng W. Rigid inclusions on the interface between dissimilar anisotropic media. // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1995. V. 43. №7. P. 1045-1058.
109. Ballarini R.A. A certain mixed boundary value problem for bimaterial interface // *International Journal of Solids and Structures*. 1995. V. 32. № 3 -4. P. 279-289.
110. Ballarini R.A. A rigid line inclusion at a bimaterial interface // *Engineering Fracture Mechanics*. 1990. V. 37. P. 173-182.
111. Bloom J.M., Sanders J.L. The effect of a reveted stringer on the stress in a cracked sheet. *Trans ASME, ser. E J. Appl. Mech.* т 33, № 3, 1966, pp. 561-570
112. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The Numerical Solutions of Singular Integral Equations. *Methods of Analysis a a Solution of Crack Problems*, pp 368 – 425, Noordhoff Intern. Leyden, 1973.
113. Gevorgyan S.Kh., Manukyan E.H., Mkhitaryan S.M., Mkrtchyan M.S. On A Mixed Problem For An Elastic Space With A Crack Under Antiplane And Plane Deformations// *Modern Problems of deformable bodies Mechanics. Collection of papers, dedicated to the memory of Professor P. S. Theocaris. Yerevan, Gitutyun», NAS RA*, 2005, pp. 98-113.
114. Hakobyan V.N. The mixed problem for anisotropic compound wedge with crack// *Modern Problems of deformable bodies Mechanics. Collection of papers, dedicated to the memory of Professor P. S. Theocaris. Yerevan, Gitutyun», NAS RA*, 2005, pp. 114-124.
115. Kecs W., Teodorescu P.P. *Aplicatii All Teoriei Distributiilor in Mecanica*. Editura Acad. RSR, Bucuresti 1970, pp. 438.

116. Sahakyan A.V., Method of discrete singularities for solution of singular integral and integro-differential equations. Proceedings of A.Razmadze Mathematical Institute, Georgia, Vol. 156 (2011), pp.101-111
117. Sanders J., Lyell Jr. Effect of a Stringer on the Stress Concentration due to a Crack in a Thin Sheet. NASA Technical Note 4207, 1958, p.1-19.
118. Aghayan K.L., Grigoryan E.Kh., Zakaryan V.G. Longitudinal shear of a compound elastic half – space weakened by cracks. Proc. of 6th Int. Conference «Contemporary Problems in Architecture and Construction», 24-27 June, 2014, Ostrava, Czech Republic, Advanced Materials Research Vol. 1020 (2014) pp 286 – 290.
119. Агаян К.Л., Закарян В.Г. Продольный сдвиг составного упругого пространства, ослабленного трещинами. Труды 8-ой межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», 22-25 сентября, 2014, Горис – Степанакерт – Е., Чартарагет – 2014, с. 23-27.
120. Закарян В.Г. Трещины и включения в составном полупространстве при продольном сдвиге. Сб. трудов межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Ереван – 2015, с. 204 – 208.
121. Агаян К.Л., Закарян В.Г. Контактная задача для упругого полупространства с трещинами и накладками при антиплоской деформации. // Известия НАН РА, Механика, т.69, № 1, 2016г, с. 6-15.
122. Агаян К.Л., Амирджанян А.А., Закарян В.Г. Продольный сдвиг упругого пространства, содержащего трещины и включения. Научные труды НУАСА 2016. Т.I (60), сс. 35-44.