ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

Խ. ԱԲՈՎՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՄԱՆԿԱՎԱՐԺԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Միքայելյան Համլետ Սուրենի

ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ԳԻՏԱՄԵԹՈԴԱԿԱՆ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ

ԺԳ.00.02 – «Դասավանդման և դաստիարակության մեթոդիկա» (մաթեմատիկա) մասնագիտությամբ մանկավարժական գիտությունների դոկտորի գիտական աստիճանի հայցման

ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ 2016 թ.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Թեմայի արդիականությունը: Սովորողների աշխարհայացքի, արժեհամակարգի ձևավորման, աշխարհընկալման, ճանաչողության, հոգեկան գործընթացների զարգացման, ինքնիրացման և կրթական այլ խնդիրների լուծման գործում ակնհայտ է մաթեմատիկայի ուսուցման դերը: Այս իրողությունները լայնորեն լուսաբանված են գիտական գրականության մեջ և ամրագրված շատ երկրների, այդ թվում նաև ՀՀ կրթական քաղաքականությամբ ([32-33]:

Միջին դպրոցում մաթեմատիկայի գործառույթը հիմնականում իրականացվում է «Հանրահաշիվ» առարկայի միջոցով: Մինչև 20-րդ դարի վերջը ՀՀ միջնակարգ կրթության բնագավառում գործում էին խորհրդային կրթական համակարգում ստեղծված հանրահաշվի դասագրքերը, համակարգ, որտեղ իշխում էին կրթական ավտորիտար մոտեցումները. դրանք դրսևորվում էին ինչպես ծրագրերում ու դասագրքերում, այնպես էլ դասավանդման գործընթացում:

ՀՀ հանրակրթական միջին դպրոցում գործող հանրահաշվի դասընթացում, որը խորհրդային ժամանակաշրջանի դասագրքերի թարգմանություն էր, ըստ էության բացակայում էր դեդուկտիվ մեթոդը. դասընթացը զուրկ էր ապացուցողական կառույցից և բնականաբար չէր կարող լիարժեքորեն իրականացնել սովորողների տրամաբանական մտածողության զարգացմանն ուղղված իր գլխավոր գործառույթներից մեկը: Վիճակը բավարար չէր սովորողների լեզվամտածողության զարգացման տեսանկյունից, որտեղ չէր օգտագործվում հանրահաշվի կրթական հսկայական ներուժը: Բավականաչափ հաշվի չէր առնվում ուսուցման ևս մեկ կարևոր խնդիր. դասընթացում չէին լուսաբանվում հանրահաշվի և ընդհանրապես մաթեմատիկայի կիրառական ոլորտները: Ավելին, կիրառական ոլորտը ներկայացված էր հատվածական փաստերով՝ հիմնականում տեսքստային խնդիրների շրջանակներում: Լուրջ թերություններ կային դասընթացի բովանդակային կառույցի մեջ. գործնական-վարժանքային հարցերը զգալիորեն գերակշռում էին տեսական նյութի նկատմամբ, հավասարումների ուսուցմանն առավել մեծ տեղ էր հատկացված, քան հավասարության հիմնարար հասկացությանը, անհիմն ձևով գերագնահատված էր ֆունկցիայի դերը, չափազանցված էր պարաբոլի դերը: Դրանում չէր երևում հանրահաշվի համար հիմնարար նշանակություն ունեցող հանրահաշվական գործողության դերը, չէր ուսումնասիրվում համախմբի կարևորագույն հասկացությունը, ճիշտ չէին դրվում շեշտադրումները հանրահաշվական կոտորակների, ոչ խիստ անհավասարումների, մի քանի փոփոխականով բազմանդամների և մի շարք այլ հասկացությունների ու փաստերի ուսուցման խնդրում: Արդյունքում հանրահաշվի դասընթացը ներառում էր ներքին տրամաբանությամբ միմյանց հետ կապ չունեցող մաթեմատիկական փաստեր, որոնք չէին կազմում դիդակտիկական միասնական համակարգ: Նրանում «չկար կապ առանձին թեմաների միջև, դպրոցական հանրահաշիվը իրար հետ կապ չունեցող, տարրածին փաստերի խառնակույտ էր» [406]:

Անժխտելի է, որ յուրաքանչյուր կրթական համակարգ՝ իր բաղադրիչներով, ներառված է տվյալ հասարակարգի գաղափարախոսական ընդհանուր կառույցի մեջ և կրում է դրա ազդեցությունը: Այդ տեսակետից բացառություն չէ նաև մաթեմատիկայի և հատկապես հանրահաշվի դասընթացը: Հասարակական-քաղաքական նոր իրողությունների, սոցիալ-մշակութային տեղաշարժերի, տեխնոլոգիական հեղաշրջումների արդի պայմաններում անհրաժեշտություն է առաջանում ձերբազատվելու նախկին գաղափարախոսության մեջ արժևորված կաղապարներից, արդիականության տեսանկյունից դիտարկելու կրթական նոր արժեքներ:

Այսպիսով՝ հրատապ է դառնում մաթեմատիկական կրթության գործառույթների առաջնահերթության մեջ փոփոխություններ կատարելու խնդիրը: Առաջին պլան է մղվում ոչ թե զուտ մաթեմատիկայի ինքնանպատակ ուսուցման, այլ մաթեմատիկայի ուսուցման միջոցով անհատի կրթության խնդիրը, կարևորվում է մաթեմատիկայի հանրակրթական և հանրամշակութային դերը: Այս շրջանակը ներառում է նաև մի շարք կարևոր խնդիրներ՝ մաթեմատիկական կրթության հումանացումը, նրա բովանդակության մեջ բարոյական, գեղագիտական, ազգային և համամարդկային արժեքների ընդգրկումը, մաթեմատիկայի դասավանդման միջոցով աշակերտի հոգևոր-բարոյական դաստիարակությունը, կրթության բովանդակության համապատասխանեցումը միջազգային կրթական չափանիշներին: Նշված խնդիրները, որոնց լուծումը ՝ական նշանակություն ուներ հայ մարդու ազգային նկարագրի և ՀՀ քաղաքացու ձևավորման գործում, կամ չէին դիտարկվում խորհրդային կրթական համակարգում, կամ էլ դրանց հպանցիկ էին անդրադառնում: Այսպիսով՝ անցումային շրջանում ժամանակի հրամայականն էր միջին դպրոցի «Հանրահաշիվ» առարկայի՝ վերը նշված իրողություններին համարժեք ուսումնական ծրագրի և դասընթացի ստեղծումը: Հարկ է նաև նշել, որ «Հանրահաշիվ» առարկայի՝ վերոնշյալ իրողություններից բխող նոր ծրագրի և դասընթացի ստեղծումը, որն իրականացավ 1999 թվականին, առարկայի կրթության բովանդակությունն արտացոլող նշված փաստաթղթերի զանգվածային օգտագործումը ՀՀ, Արցախի և Ջավախքի հայկական դպրոցներում պահանջում էին համապատասխան մեթոդական ապահովում, իսկ նախկին մոտեցումները՝ թե' ընդհանուր, թե' մասնավոր մեթոդիկաների տեսակետից, չէին համապատասխանում նոր դասագրքերին: Հետևապես ի հայտ էր գալիս համապատասխան մեթոդիկայի մշակման, նոր մոտեցումների լուսաբանման անհրաժեշտություն:

Եվս մեկ կարևոր հանգամանք. անհնար է հանրակրթական դպրոցում այս կամ այն առարկայի դասավանդման խնդիրների արդյունավետ լուծումն ապահովել առանց մանկավարժական բուհում ուսուցիչների մասնագիտական պատրաստման և դրա իրականացմանն ուղղված ուսումնական գրականության ստեղծման: Միջնակարգ դպրոցում իրականացվող նոր գործընթացները թելադրում են նոր մոտեցումներ նաև մանկավարժական բուհում ուսուցչի մասնագիտական պատրաստության համակարգում: Ասվածը լիովին վերաբերում է միջին դպրոցի «Հանրահաշիվ» առարկայի բովանդակային փոփոխություններին և մանկավարժական բուհում դրա գիտատեսական հիմքը կազմող բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացին, ինչպես նաև մաթեմատիկական կրթության ուղղությամբ առանձին ուսումնական ծրագրերին և առարկաներին:

Մանկավարժական բուհում բարձրագույն հանրահաշվի համար նախատեսված նախկին ծրագիրը հիմնվում էր պրեդիկատների տրամաբանության վրա, իսկ այդ ծրագրով գրված Լ. Յա Կուլիկովի հայտնի դասընթացը [258] հագեցած է ավելորդ ֆորմալիզմով, հանգամանք, որը դժվարացնում, երբեմն նույնիսկ անհնար է դարձնում նյութի ըմբռնումն ուսանողների կողմից: Հետևապես հիմնավորված է մանկավարժական բուհում մաթեմատիկական մասնագիտությունների համար «Բարձրագույն հանրահաշիվ» առարկայի՝ արդի պայմաններին բավարարող ծրագրի և դասընթացի ստեղծման անհրաժեշտությունը: Հավելենք, որ բուհում գործածվող ուսումնական գրականությունը, մասնավորապես բարձրագույն հանրահաշվի մի շարք դասընթացները գրված են ռուսերեն լեզվով և բավականաչափ մատչելի չեն հայ ուսանողության համար: Բացառություն է կազմում միայն Ա. Գ. Կուրոշի՝ իր ժամանակների համար գրված հրաշալի դասագրքի թարգմանությունը, որը, սակայն, լիովին չի բավարարում ժամանակակից պահանջներին [260], [23]:

Կրթության հումանիստական ուղղվածության ժամանակակից միտումները թելադրում են փոփոխություններ նաև մանկավարժական բուհում մաթեմատիկական կրթությանը միտված ուսումնական առարկաների ցանկում: Այս ոլորտում անհրաժեշտ է ստեղծել և ուսումնական գործընթացում ներառել մաթեմատիկայի և մասնավորապես հանրահաշվի ուսուցման միջոցով սովորողների դաստիարակությանն ու արժեհամակարգի ձևավորմանն ուղղված դասընթացներ: Անհրաժեշտ է շեշտադրել նաև մաթեմատիկական կրթության միջոցով սովորողների հոգեկան գործընթացների զարգացման առաջնահերթությունը, որը հանիրավի անտեսվել է (գրականության մեջ դիտարկվել են մտածողությունը և որոշ չափով՝ երևակայությունը): Աներկբա է, որ անձի հոգեկանի ձևավորումն անհամեմատ ավելի մեծ ու կարևոր կրթական խնդիր է, քան մաթեմատիկայի ուսուցումը, իսկ վերջինս ունի անձի հոգեկան գործընթացների ձևավորման հսկայական ներուժ, որը հարկ է լիարժեքորեն բացահայտել և կիրառել :

Հիմնախնդրի մշակվածության աստիճանը: Մեր կողմից ուսումնասիրվել են դասագրքաստեղծման անցյալի և ներկայի հայրենական ու միջազգային փորձը (Ա. Շիրակացի, Ի. Նյուտոն, Լ. Էյլեր, Ն. Լոբաչևսկի, Ղ. Տերտերյան, Հ. Պապիկյան, Ա.Պոյաչյան, Գ. Թընկըրյան, Ա.Պերպերյան, Հ. Փալագաշյան, Ա. Կիսիլյով, Պ. Լարիչև, Ն. Բարսուկով, Ե. Կոչետկով, Ե. Կոչետկովա, Ն. Կոլմոգորով, Ն. Վիլենկին, Շ. Ալիմով և այլք), մաթեմատիկական կրթության հայրենական ավանդույթները (Գ. Տեր-Ղուկասյան, Հ. Օրբելի, Գ. Մուրադյան, Ա. Եգանյան, Մ. Ստեփանյան, Գ. Պետրոսյան և այլք) և զարգացման արդի միտումները ([137-138], [152], [170], [176], [207-208], [218], [220], [245-248], [257], [287], [327], [386], [406], [415], [438-439], [454]), սովորողների մտածողության, երևակայության ([144], [172], [238], [498]), գեղագիտական դաստիարակության և գեղագիտական արժեքների ձևավորման ([9], [122], [131], [169], [200], [215], [237], [240-241], [270], [292], [295], [340], [374-375], [384], [387], [401], [442], [444], [468]) գործում հանրահաշվի ներուժի բացահայտման ուղղությամբ առկա փորձը: Նշված գիտական ժառանգությունը համալրվել և խորացվել է անձի երևակայության, ուշադրության, հիշողության, հուզակամային որակների, արժեհամակարգի այլ բաղադրիչների ձևավորման, մաթեմատիկական կրթության գեղագիտական և բարոյական ներուժի վերաբերյալ ծավալուն աշխատանքներով, որոնք կազմում են հայեցակարգային ամբողջական գիտամեթոդական համակարգ: Այդ ուղղությամբ ստեղծվել է միջնակարգ և բարձրագույն դպրոցի հանրահաշվի քանից ավելի դասընթաց, ուսումնական ձեռնարկ, մենագրություն, հրատարակվել է մոտ հարյուրից ավելի գիտական, գիտամեթոդական աշխատանք, առարկայական չափորոշիչ և ծրագիր (տես գրականության ցանկը, հավելվածներ՝ 4-Ա, 4-Բ, 4-Գ, 4-Դ, 4-Ե, 6):

Հիմնախնդրի արդիականությունը, դիտարկված հակասություններն ու մոտեցումները պայմանավորեցին հետազոտության թեմայի ընտրությունը՝ «Հանրահաշվի ուսուցման գիտամեթոդական հիմունքները»:

Հետազոտության նպատակն է.

1. Ստեղծել հանրակրթական միջին դպրոցում և ուսուցիչների պատրաստման ու վերապատրաստման համակարգում «Հանրահաշիվ» ուսումնական առարկայի ծրագրերի, դասագրքերի, մեթոդական ձեռնարկների միասնական համակարգ, մշակել այդ համակարգի տեսագործնական հիմունքները:

2. Բացահայտել սովորողների արժեհամակարգի, գեղագիտական ու բարոյական դաստիարակության, հոգեկան գործընթացների զարգացման գործում հանրահաշվի ներուժը:

Հետազոտության օբյեկտը միջնակարգ և բարձրագույն դպրոցների արդի պահանջներին բավարարող դասագրքերի ու ձեռնարկների ստեղծման, ուսումնական ծրագրերի մշակման գործընթացն է:

Հետազոտության առարկան արդի պայմաններում հանրահաշվի դասընթացի բովանդակության կատարելագործման և ուսուցման մեթոդական համակարգն է:

Հետազոտության վարկածը. «Հանրահաշիվ» առարկայի դասավանդումը միջին դպրոցում և մանկավարժական բուհում արդյունավետ կլինի, եթե՝

1. Մշակվի հանրահաշվի դասագրքերի և մեթոդական ձեռնարկների ստեղծման գիտամեթոդական համակարգված հայեցակարգ:

2. Միջին դպրոցի՝ դիդակտիկայի սկզբունքների վրա հիմնված, դասավանդման արդի չափանիշներին բավարարող, սովորողների լեզվամտածողության, տրամաբանական մտածողության և հոգեկան այլ գործընթացների լիարժեք զարգացումը, արժեհամակարգի ձևավորումն ապահովող և կիրառական ուղղվածություն ունեցող հանրահաշվի դասընթացում՝

ա. նյութի շարադրանքն իրականացվի աքսիոմատիկ մեթոդի հիման վրա՝ հիմքում դնելով իրական թվերի, ռացիոնալ կոտորակների և մեծությունների բովանդակային աքսիոմատիկ տեսությունները,

բ. ներառվեն և հանրահաշվական նյութի հիման վրա շարադրվեն տրամաբանության որոշակի տարրեր,

գ. ներկայացվի և համակարգված ձևով շարադրվի հանրահաշվի կիրառության առարկայական ոլորտը, որում հանրահաշվի տեսության և կիրառության միջև կապի ստեղծման գործում հիմնարար դեր կկատարեն մեծությունները:

3. Այդ դասընթացի դասավանդման գործընթացի միջոցով հնարավոր կլինի՝

ա. լուծել սովորողների արժեհամակարգի և հոգեկան գործընթացների ձևավորմանն ուղղված որոշակի խնդիրներ, տալ դրանց տեսական հիմնավորումները, բ. իրականացնել գեղագիտական դաստիարակության որոշակի գործառույթ:

4. Մաթեմատիկայի ուսուցիչների պատրաստման համակարգում ստեղծվեն՝

ա. հանրահաշվի դասընթաց, որը համահունչ կլինի հանրակրթական միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացին և միաժամանակ կբավարարի բարձրագույն դպրոցում մաթեմատիկայի ուսուցմանն առաջադրվող արդի պահանջներին,

բ. հանրահաշվին նվիրված ժամանակակից հետազոտությունների վրա հիմնված ընտրովի դասընթաց, կուրսային, ավարտական աշխատանքներ, մագիստրոսական թեզեր, որոնք ապագա ուսուցչին հնարավորություն կտան ուսումնասիրելու ժամանակակից հանրահաշվի կառույցի որոշ կողմեր, հասկանալու մաթեմատիկական ստեղծագործության առանձնահատկությունները, ձեռք բերելու դրանց բացահայտման ունակություններ, խորությամբ զգալու մաթեմատիկայի ներքին գեղագիտությունը:

Հետազոտության խնդիրները: Հետազոտության նպատակն ու վարկածը ենթադրում են հետևյալ հիմնական խնդիրների լուծումը.

1. Մշակել հանրահաշվի ուսուցման, դասագրքերի և մեթոդական ձեռնարկների ստեղծման ամբողջական հայեցակարգ:
2. Առաջադրել մաթեմատիկայի ուսուցման, ուսուցիչների վերապատրաստման և դասագրքերի ու մեթոդական ձեռնարկների ստեղծման գիտամեթոդական հիմնադրույթներ:
3. Մշակել ու փորձարկել միջին դպրոցի և մանկավարժական բուհի հանրահաշվի դասագրքերը, հիմնավորել դրանց համապատասխանությունն արդի պահանջներին ու միջազգային կրթական չափանիշներին:
4. Հիմնավորել միջին դպրոցի «Հանրահաշիվ» առարկայի բովանդակային շարադրանքում աքսիոմատիկ մեթոդի իրականացման հնարավորությունը, ուսուցման բովանդակության մեջ տրամաբանության տարրերի ներառման անհրաժեշտությունը և գործնականում իրականացնել դրանք:
5. Նախանշել մաթեմատիկայի կիրառական ոլորտի այն տիրույթները, որոնք արդի պայմաններում անհրաժեշտ են միջնակարգ դպրոցի շրջանավարտին:

6. Որոշել հանրահաշվի դասավանդման տարբեր փուլերի դերը ուսուցիչների պատրաստման համակարգում, բացահայտել միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացին համահունչ բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացի (տեսական և գործնական բաժիններով) ստեղծման հնարավորությունները և իրականացնել այն:
7. Բացահայտել և հիմնավորել մաթեմատիկական կրթության ներուժը անձի բարոյական, գեղագիտական և այլ արժեքների ձևավորման գործընթացում:
8. Արդիականացնել մեթոդական գրականության ստեղծման խնդիրը ուսուցիչների վերապատրաստման համակարգում:
9. Փորձարարությամբ հիմնավորել հանրահաշվի ուսուցման, ուսուցիչների վերապատրաստման, դասագրքերի և մեթոդական ձեռնարկների ստեղծման ամբողջական հայեցակարգի մանկավարժական արդյունավետությունը:

Հետազոտության փուլերը: Հետազոտությունը կատարվել է հետևյալ փուլերով.

1985-94 թ.թ. մշակվել են «Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացը» և նրա հիմնական բաժնի՝ խմբերի տեսության տարրերի գծով խնդիրների համակարգի մեթոդիկան:

1994-99 թ.թ. մշակվել են հանրակրթական դպրոցի «Հանրահաշիվ» առարկայի՝ արդի պահանջներից բխող հիմնահարցերը, ինչի արդյունքում ստեղծվել են այդ առարկայի ուսումնական ծրագիրը և «Հանրահաշիվ 6» փորձնական դասագիրքը, հանրակրթական դպրոցի 6-րդ, 7-րդ և 8-րդ դասարանների դասագրքերի վերջնական տարբերակները, մեթոդական ուղեցույցը և մեթոդական ձեռնարկը:

1988-2004 թ.թ. շարունակվել են աշխատանքները բուհում հանրահաշվի դասավանդման ուղղությամբ, ստեղծվել են բարձրագույն հանրահաշվի ծրագիրը և նոր դասընթացը՝ ներառելով խնդիրների համակարգը:

2002-2006 թ.թ շարունակվել են աշխատանքները միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացի բարեփոխման ուղղությամբ: Ստեղծվել են դասագրքերի նոր տարբերակներ, մեթոդական ուղեցույցները, մեթոդական սպասարկումն ապահովող գրականություն:

2006-2015 թ.թ. աշխատանքներ են իրականացել հանրահաշվի և ընդհանրապես մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի միջոցով սովորողների արժեհամակարգի ձևավորման ուղղությամբ: Արդյունքները հրատարակվել են մասնագիտական պարբերականներում և մենագրություններում:

Հետազոտության մեթոդաբանական հիմքը: Հետազոտության համար մեթոդաբանական հիմք են ծառայել գիտական իմացության և անձի զարգացման տեսությունների, արժեբանության, կրթության հումանացման, հոգևոր մշակույթի զարգացման հիմնադրույթները, գիտության մեթոդաբանության և տրամաբանության ընդհանուր օրենքները, անցյալի ու ժամանակակից հայ և օտարազգի մանկավարժ-մեթոդիստների հայացքներն ու մանկավարժական ժառանգությունը:

Հետազոտության մեթոդները: Հետազոտության ընթացքում կիրառվել են տեսական և էմպիրիկ հետևյալ մեթոդները.

- թեմայի վերաբերյալ տեղեկատվության հավաքում, համեմատում, դասակարգում, առկա իրավիճակի բնութագրում և գնահատում,
- նպատակների, խնդիրների և իրականացման հնարավորությունների հստակեցում, խնդիրների լուծման տարբերակների համադրում,
- հավաստող, ստուգող, ճշգրտող և վերափոխող մանկավարժական գիտափորձերի անցկացում:

Հետազոտության գիտական նորույթը

1. Մշակվել է հանրահաշվի դասագրքերի և մեթոդական ձեռնարկների ստեղծման գիտամեթոդական ամբողջական հայեցակարգ, որում գիտելիքների, կարողությունների և արժեքների ձևավորման և զարգացման խնդիրները դիտարկվում են միասնական դիրքերից: Հանրահաշվի դպրոցական դասագրքերի հիմքում առաջին անգամ դրվել է ժամանակակից հանրահաշվի բովանդակությանը համապատասխանող ուսումնական նյութ և մեթոդական համակարգ:

2. Հանրահաշվի դպրոցական դասընթացում կիրառվել է դեդուկտիվ շարադրանքը, որի հիմքում դրվել է աքսիոմատիկ մեթոդը: Նոր մոտեցումներ են կիրառված ապացուցումների ներկայացման խնդրում. առաջին անգամ ապացուցումները տրվում են սովորողների ալգորիթմական մտածողության ձևավորմանը և զարգացմանը նպաստող հատուկ մշակված սխեմաների միջոցով, որոնք ուղեկցվում են անհրաժեշտ փաստարկումներով: Այս ուղղությամբ ձևավորված գիտելիքները և կարողությունները հիմնարար նշանակություն ունեն մոդելավորման և ՏՀՏ-ների կիրառման և դրանց միջոցով հանրահաշվի ուսուցման արդյունավետությունը բարձրացնելու գործում: Հանրահաշվի դպրոցական դասընթացում առաջին անգամ կիրառվում են ապացուցման հենցենյան սխեմաները: Դասընթացում ներառվել են տրամաբանության տարրերը. տրամաբանական նյութի շարադրանքը խարսխված է մաթեմատիկական նյութի վրա:

3. Նորովի են լուծված պատմության, աշխարհագրության, ֆիզիկայի, տնտեսագիտության, կենսաբանության, ֆիզկուլտուրայի ու սպորտի հետ հանրահաշվի միջառարկայական կապերի բացահայտման, ինտեգրման և իրականացման խնդիրները: Նոր մոտեցումներ են ցուցաբերված մայրենի լեզվի հետ հանրահաշվի միջառարկայական կապերի կառուցման խնդրում, նորովի են դիտարկված մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում սովորողների լեզվամտածողության զարգացման հարցերը:

4. Սկզբունքորեն նոր մոտեցումներ են ցուցաբերված հանրահաշվի կիրառական ուղղվածության բացահայտման և լուսաբանման խնդրում, առաջին անգամ կատարվում են հանրահաշվի կիրառական ոլորտի համակարգված ուսուցում, հայրենական դասագրքերի մեջ՝ հանրահաշվական գործողությունների մոդելների ուսուցում: Նոր մոտեցումներ են ցուցաբերված հանրահաշվի կիրառական ոլորտում ազգային և համամարդկային արժեքների ներառման խնդրում: Արմատապես նոր մոտեցում է ցուցաբերված հանրահաշվի միջոցով մեծությունների ուսուցման խնդրում, առաջին անգամ կառուցվում է իր պարզությամբ և մատչելիությամբ աչքի ընկնող

բովանդակային աքսիոմատիկ տեսություն հանրահաշվի դասընթացում մեծությունների ուսուցման համար:

5. Նոր մոտեցում է դրսևորվել դասընթացում ֆունկցիայի տեղի, դերի ճշգրտման, հավասարությունների և հավասարումների ուսուցման խնդրում, նորույթ է համեմատականությունների ներառումը ֆունկցիայի դժվարագույն հասկացության նախաուսուցման ոլորտում: Առաջին անգամ հավասարությունը դարձել է «Հանրահաշիվ» առարկայի կենտրոնական բանաձևը: Նոր մոտեցումներ են ցուցաբերված անհավասարությունների և անհավասարումների ուսուցման խնդրում: Նոր հիմքերի վրա է դրված համախմբի և համակարգի ուսուցումը, ընդ որում համախմբի կարևորագույն հասկացության ուսուցումը միջնակարգ դպրոցում կատարվում է առաջին անգամ:

6. Համակարգված մոտեցում է ցուցաբերվել մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում բարոյական արժեքների ձևավորման խնդրում:

7. Սկզբունքային նոր մոտեցումներ են դրսևորվել հանրահաշվի ուսուցման գործընթացում գեղագիտական դաստիարակության իրականացման և գեղագիտական արժեքների ձևավորման խնդրում: Դիտարկվել է մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում գեղագիտական մի շարք հասկացությունների՝ ընկալման, զարգացման, իդեալի ըմբռնման, գնահատման կարողությունների ձևավորման խնդիրը: Նախկինում նման խնդիր դիտարկվել է միայն Ն. Լ. Ռոշչինայի կողմից՝ գեղագիտական ճաշակի ձևավորման առումով [380]: Նորովի է ներկայացվել հանրահաշվի ուսուցման դերը տգեղի, վեհի, ստորի ընկալման և իմաստավորման գործընթացում: Մեկնաբանվել են մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշները. առաջինը դասակարգվել է ըստ կազմավորող, միավորող և տրամաբանական, երկրորդը՝ ըստ մոտիվացիոն, ճանաչողական և հոգեկան տեսակների:

8. Նոր մոտեցումներ են ցուցաբերված հանրահաշվի ուսուցման միջոցով սովորողների հոգեկան գործընթացների՝ զգայության, ըմբռնման, հիշողության, ուշադրության, երևակայության, մտածողության, խոսքի, հույզերի, զգացմունքների,

կամքի ձևավորման և զարգացման հարցում: Նախկինում հիմնականում դիտարկվել են մտածողությունը և երևակայությունը [172], [185], [330]:

9. Հետազոտության և գիտամանկավարժական գործունեության ընթացքում խմբերի տեսության բնագավառում ստացված գիտական արդյունքներն օգտագործվել են մանկավարժական բուհերում մաթեմատիկայի մասնագիտության ուսանողների համար հատուկ դասընթացի ստեղծման, կուրսային, ավարտական աշխատանքների ու մագիստրոսական թեզերի իրականացման գործում:

Հետազոտության տեսական նշանակությունը:

1. Տեսականորեն հիմնավորվել է, որ միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացը կարելի է կառուցել առաջին հերթին զուտ հանրահաշվական նյութի հենքի վրա՝ որպես բովանդակային աքսիոմատիկ տեսություն՝ նրա թերմերի կառուցման հիմքում դնելով հանրահաշվական գործողությունները, իսկ բանաձևերի ստացման հիմքում՝ ինչպես հավասարությունը, հավասարումը, անհավասարությունը և անհավասարումը, այնպես էլ բազմությունների տեսության պատկանելու և ընդգրկվելու սիմվոլների հետ առնչվող պրեդիկատներ:

2. Հիմնավորվել է, որ միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացի տեսական նյութը կարելի է շարադրել դեդուկտիվ մեթոդով, իսկ կիրառական ոլորտը օգտագործել ուսուցման մոտիվացիայի նպատակով և ուղեկցել տեսական նյութի շարադրմանը՝ այն իրականացնելով դեդուկցիոն և ինդուկցիոն մեթոդների համադրությամբ: Դասընթացի շարադրանքը կարելի է իրականացնել ապացուցողական հստակ կառույցի միջոցով: Այդ շրջանակներում աշխատանքում լուծվել է մաթեմատիկական թեորեմների ապացուցումները հենցենյան ծառի տեսքով ներկայացնելու՝ Ի. Լ. Տիմոֆեևայի դոկտորական ատենախոսության մեջ առաջադրված խնդիրը [411], [412]:

3. Միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացում ընդգրկված է տրամաբանության տարրերի՝ հանրահաշվի հենքի վրա կառուցված որոշակի նյութ: Հիմնավորվել է, որ տեսական նյութի և կիրառական ոլորտի համակարգված շարադրանքը հնարավոր է դարձնում լուծելու սովորողների լեզվատրամաբանական մտածողության զարգացման խնդիրը:

4. Բարձրագույն հանրահաշվի հեղինակային դասընթացի տեսական նյութը հանրահաշվի գիտական հիմունքներին ուսանողներին ծանոթացնելու միջոց է:

5. Սիլովյան և քարտերյան ենթախմբերի, սիլովյան բազաների, դասերի զանազան հատկությունները, սիլովյան դասերի նկարագրությունները հիմք են հանդիսացել մանկավարժական բուհում խմբերի տեսության հատուկ դասընթացի կառուցման և կուրսային ու ավարտական աշխատանքների իրականացման համար:

6. Որոշակի ներդրում է կատարվել հանրահաշվի ուսուցման գործընթացի միջոցով սովորողների հոգեկան գործընթացների զարգացման, բարոյական, գեղագիտական արժեքների ձևավորման, գեղագիտական դաստիարակության և գեղագիտական հասկացությունների ընկալման հարցում:

Հետազոտության գործնական նշանակությունը

1. Հանրակրթական դպրոցի հանրահաշվի՝ հեղինակի կողմից ստեղծված 6, 7, 8-րդ դասարանների [42], [46], [49] և 7, 8, 9-րդ դասարանների [63-65] դասագրքերը հաստատված են ՀՀ ԿԳ նախարարության կողմից և շուրջ տասներեք տարի գործել են որպես ՀՀ, Արցախի և մասամբ նաև Ջավախքի հանրակրթական դպրոցների դասագրքեր: Դրանք ՀՀ և Արցախի դպրոցներում օգտագործվում են նաև ներկայումս՝ որպես ուսումնաօժանդակ ձեռնարկներ:

2. «Հանրահաշվի դասավանդումը 6-8-րդ դասարաններում» մեթոդական ձեռնարկը [45] և մեթոդական երկու ուղեցույցները՝ «Հանրահաշիվը 6-8-րդ դասարաններում» [41] և «Հանրահաշիվը 7-9-րդ դասարաններում» [62] հաստատված են ՀՀ ԿԳ նախարարության կողմից և գործածվում են մաթեմատիկայի ուսուցիչների կողմից: Նույն նպատակին են ծառայում «Հանրահաշվի ուսուցման արդի հիմնահարցերը» հեղինակային մենագրությունը [57] և գիտամեթոդական մյուս աշխատանքները [54], [58]:

3. «Հանրահաշիվ 6, լրացուցիչ խնդիրներ» [48] աշխատանքը հաստատված է ՀՀ ԿԳ նախարարության կողմից որպես հանրակրթական դպրոցի խնդրագիրք, «Հայեցակարգ և ծրագիրը» (տես հավելված 4-Ա), «Հանրահաշիվ» առարկայի նախկին

ծրագիրը (տես հավելված 4-Բ) ուսուցիչների և աշակերտների կողմից կիրառվում են հանրահաշվի ուսուցման գործընթացում:

4. «Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացը» [50], [59], [60] հաստատված է ՀՀ ԿԳ նախարարության կոլեգիայի կողմից որպես բուհական դասագիրք և գործածվում է ՀՀ ու Արցախի բուհերի մաթեմատիկական մասնագիտությունների ուսանողների, ասպիրանտների, դասախոսների և ուսուցիչների կողմից:

5. «Բարոյական արժեքները և մաթեմատիկայի կրթական ներուժը» և «Գեղեցիկը. Մաթեմատիկան և կրթությունը» հեղինակային մենագրությունները ՀՊՄՀ մաթեմատիկայի մասնագիտացման մագիստրատուրայում «Մաթեմատիկական կրթության արժեբանական հիմունքները» ուսումնական առարկայի և մագիստրոսական թեզերի համար արժեքավոր մասնագիտական նյութ են տրամադրում:

6. Գեղեցիկի, մաթեմատիկայի և կրթության փոխհարաբերություններին նվիրված մենագրությունները [88], [94] կարող են որպես հիմք ծառայել մանկավարժական բուհերում «Մաթեմատիկական կրթության արժեբանական հիմունքները» դասընթացի և «Մաթեմատիկան, գեղեցիկը և կրթությունը» կամընտրական դասընթացի համար:

Հետազոտության փորձաքննությունը: «Խմբերի տեսության տարրերը» [97] աշխատանքը կիրառվել է ՀՊՄՀ-ի մաթեմատիկայի մասնագիտության բակալավրի աստիճանի առաջին կուրսերում դասախոսներ Հ. Միքայելյանի, Հ. Հովհաննիսյանի, Ս. Մամիկոնյանի, Գ. Ղարագեբակյանի կողմից:

«Հանրահաշիվ 6» փորձնական դասագիրքը փորձարկվել է Երևանի թիվ 131, Շիրակի և Սյունիքի մարզերի դպրոցներում:

«Հանրահաշիվ 6, 7, 8» դասագրքերը [42], [46], [49]) մասնակցել և շահել են ԿԳ նախարարության հանրակրթության դասագրքերի մրցույթում և 1999-2000 ուստարվանից մինչև 2007-2008 ուստարի գործել են որպես հանրակրթական դպրոցի դասագրքեր ՀՀ, Արցախի և Ջավախքի հայկական բոլոր դպրոցներում:

«Հանրահաշիվ 7, 8, 9» դասագրքերը [63-65] մասնակցել և շահել են ԿԳ նախարարության հանրակրթության դասագրքերի մրցույթում և 2006-2007 ուստարվանից մինչև 2012-2013 ուստարի գործել են որպես հանրակրթական դպրոցի դասագրքեր ՀՀ և Արցախի բոլոր հայկական դպրոցներում:

«Հանրահաշիվ 6-8-րդ դասարաններում» ուսուցչի ձեռնարկը [41] և «Հանրահաշվի ուսուցումը 6-8-րդ դասարաններում» մեթոդական ձեռնարկը [45] օգտագործվում են հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի ուսուցիչների և մանկավարժական բուհերի ուսանողների կողմից:

«Հանրահաշվի ուսուցման հիմնահարցերը» [7] մենագրությունն օգտագործվում է ուսուցիչների, մանկավարժական բուհերի մաթեմատիկական մասնագիտությունների ուսանողների և դասախոսների կողմից:

Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացը [50], [59], [60] ԿԳ նախարարության կոլեգիայի կողմից հաստատվել է որպես բուհական դասագիրք: Այն կիրառվում է ՀՊՄՀ, ԵՊՀ, Գյումրիի մանկավարժական ինստիտուտի մաթեմատիկական ֆակուլտետներում, Արցախի պետական համալսարանում, հանրապետության որոշ մասնավոր բուհերում:

Ատենախոսության տեսագործնական արդյունքները, առաջադրված հիմնադրույթները պարբերաբար զեկուցվել են ԽՍՀՄ, ՌԴ, ՀՀ հանրապետական և միջազգային գիտաժողովներում, ներկայացվել են սեմինարներում, ուսուցիչների վերապատրաստման դասընթացներում, տարբեր մարզերի ուսուցիչների հետ կազմակերպված հավաքներում և առանձին դպրոցների մաթեմատիկայի ուսուցիչների հետ ունեցած հանդիպումներում, հիմնական արդյունքների վերաբերյալ տպագրվել են գիտական հոդվածներ, դասագրքեր, մենագրություններ:

Հետազոտության արդյունքների **հավաստիությունն ու հիմնավորվածությունն** ապահովված են հետազոտության մեթոդաբանական հիմքը կազմող տեսությունների, հայեցակարգային դրույթների համալիր վերլուծությամբ, հետազոտության օբյեկտին, առարկային, նպատակին, խնդիրներին համարժեք ընտրված և կիրառված մեթոդներով, առաջադրված տեսական հիմնադրույթների հիմնավորվածությամբ, հետազոտական աշխատանքի գործնական–կիրառական ուղղվածությամբ:

Պաշտպանությանն են ներկայացվում հետևյալ **դրույթները.**

1. Միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացի հիմքում պետք է դնել գիտամեթոդական համակարգված հայեցակարգ, ժամանակակից հանրահաշվի ոգուն համապատասխանող ուսումնական նյութ և համակարգ՝ նրանում կիրառելով աքսիոմատիկ մեթոդը՝ ի դեմս իրական թվերի կարգավորված դաշտի, ռացիոնալ կոտորակների դաշտի և մեծությունների կարգավորված հանրահաշվի բովանդակային աքսիոմատիկ տեսությունների: Նյութի շարադրանքը հիմնականում պետք է իրականացվի դեդուկտիվ մեթոդով և ապացուցողական հստակ կառույցով: Ապացուցումներում հնարավոր և արդյունավետ է կիրառել հենցենյան ծառերը, ինչը տալիս է Ի. Լ. Տիմոֆեևայի առաջադրած խնդրի դրական պատասխանը:

2. Միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացի բովանդակության մեջ տրամաբանության հիմնական տարրերի ներառումը և մաթեմատիկական նյութի հետ տրամաբանության հասկացությունների շաղկապումը նպաստում են սովորողների ինչպես լեզվամտածողության և տրամաբանական մտածողության զարգացմանը, այնպես էլ մաթեմատիկական որոշ հիմնարար հասկացությունների յուրացման խնդրում ավանդական սերտողական ուսուցման իրողության վերացմանը և ուսուցման արդյունավետության բարձրացմանը:

3. Միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացում առկա է հանրահաշվի կիրառական ոլորտի համակարգման անհրաժեշտություն, ինչը ենթադրում է նրանում ներառել գործողությունների մոդելները և համեմատականությունները: Կիրառական ոլորտի համակարգված ուսուցման միջոցով հնարավոր է սովորողների լեզվամտածողության զարգացման, միջառարկայական կապերի բացահայտման և իրականացման խնդիրներում հասնել արմատական բարելավման:

4. Միջին դպրոցի հանրահաշվի կառույցի հիմքում պետք է դնել հիմնական հանրահաշվական գործողությունները, իսկ հիմնական բանաձևերի՝ հավասարությունների, հավասարումների, անհավասարությունների և անհավասարումների վերաբերյալ նյութի շարադրանքը նպատակահարմար է զետեղել գործողություններից յուրաքանչյուրի վերաբերյալ նյութի շարադրանքին զուգահեռ: Այդ

համատեքստում անհրաժեշտ է արմատապես փոխել ֆունկցիայի, պարաբոլի և որոշ այլ հասկացությունների տեղը նշված դասընթացում:

5. Դասընթացում անհավասարումների հանգող կիրառական խնդիրների, բազմությունների, պարամետրերի վերաբերյալ վարժությունների կիրառումը բարելավում է հանրահաշվի գործնական ուսուցման որակը:

6. Միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացի նորովի կառուցումը և ուսուցումը էապես նպաստում են սովորողների արժեհամակարգի, հատկապես բարոյական, գեղագիտական, ազգային և համամարդկային արժեքների, հոգեկան գործընթացների ձևավորմանն ու զարգացմանը, գեղագիտական դաստիարակության իրականացմանը:

7. Բարձրագույն կրթության համակարգում մաթեմատիկայի ընտրովի դասընթացների ներդնումը, կուրսային, ավարտական աշխատանքների և մագիստրոսական թեզերի կատարումը՝ հիմնված հետազոտության նյութերի և գիտագործնական արդյունքների վրա, ապագա ուսուցչին հնարավորություն են տալիս տեսնելու ժամանակակից հանրահաշվի կառույցի առանձին կողմեր, հասկանալու մաթեմատիկական ստեղծագործության առանձնահատկությունները, ձեռք բերելու դրանց բացահայտման ունակություններ, խորությամբ զգալու մաթեմատիկայի ներքին գեղագիտությունը:

Ատենախոսության ծավալն ու կառուցվածքը: Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից, երեք գլխից, եզրակացությունից, օգտագործված գրականության՝ 508 սկզբնաղբյուր պարունակող ցանկից, հավելվածներից: Ատենախոսության հիմնական տեքստի շարադրանքը կազմում է համակարգչային շարվածքի 311 էջ:

ԳԼՈՒԽ 1.
ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԴՊՐՈՑԻ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ԴԱՍԸՆԹԱՑԻ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ՄԵԹՈԴԱԲԱՆԱԿԱՆ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ

1.1. Հանրահաշվի դասընթացի բովանդակությունը

1.1.1. Հանրահաշիվը և հանրակրթական դպրոցի հանրահաշվի դասընթացը. պատմական ակնարկ: Հանրահաշիվը ժամանակակից մաթեմատիկայի հիմնական բաժիններից է, միևնույն ժամանակ այն, թվաբանության և երկրաչափության հետ միասին, կազմում է մաթեմատիկայի երեք հնագույն ճյուղերից մեկը: Հանրահաշիվը երևան է եկել մաթեմատիկայում՝ փոփոխական պարունակող հավասարումների միջոցով զանազան խնդիրներ լուծելու անհրաժեշտությունից, խնդիրներ, որոնք դժվարությամբ են լուծվում կամ էլ ընդհանրապես չեն լուծվում թվաբանական մեթոդներով: Պատմականորեն նման մոտեցման տարրերը նկատվում են մ.թ.ա. երկու հազար տարի առաջ եգիպտացիների և բաբելոնացիների մոտ: Հունական մաթեմատիկայում իշխում էր երկրաչափությունը, և միայն Դիոֆանտ Ալեքսանդրիացին (մ.թ.ա. 3-րդ դար) է դիտարկում առաջին և երկրորդ աստիճանի հավասարումները, ընդ որում դիտարկում է նաև առաջին աստիճանի անորոշ հավասարումներ՝ մեկ հավասարում երկու անհայտով: Հունական մշակույթային ավանդույթները շարունակվեցին արևելքում, հիմնականում Պարսկաստանում և արաբական աշխարհում: Այստեղ մ.թ. 9-րդ դարում գրվեց հանրահաշվի առաջին տրակտատը և գործածության մեջ դրվեց «ալջեբրա» եզրը պարսիկ մեծ մտածող Մուհամեդ իբն Մուսա Խորեզմի (Ալ-Խորեզմի) կողմից: Այստեղից էլ, ըստ էության, սկսվում է հանրահաշվի՝ որպես մաթեմատիկայի առանձին բնագավառի գոյությունը: Սակայն հանրահաշվի արևելյան շարադրանքը իրականացվում էր միայն բառերի միջոցով. չկար փոփոխականի համար ժամանակակից հանրահաշվին բնորոշ տառային նշանակումը: Այդ պատճառով ձևակերպումները ստացվում էին շատ երկար ու խրթին և, բնականաբար, նման տեսքով դժվար էր սպասել հանրահաշվի բուռն զարգացում: Եվ միայն եվրոպացիները կարողացան հանրահաշվին տալ նրա համար բնորոշ սիմվոլիկ կամ տառային տեսքը, ինչը և ապահովեց նրա բուռն զարգացումը: Նախ իտալացիները (Լեոնարդ Պիզայեցին, 13-րդ դար և այլն) արևելքից Իտալիա բերեցին նրանց հանրահաշիվը և, այնուհետև, նրանց հաջորդները մտածեցին գումարման և հանման գործողությունների փոխարեն գործածել հատուկ սիմվոլներ: Իսկ գործընթացին վերջնական լուծում տվեց 16-րդ դարի ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Ֆրանսուա Վիետը, հանրահաշվում փոփոխականների կամ տառերի համար գործածելով լատինական այբուբենի տառերը: Իսկ նույն նպատակով լատինական այբուբենի վերջին տառերը՝ x, y, z և այլն, առաջինը գործածեց 17-րդ դարի ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Ռենե Դեկարտը: Արդեն 16-րդ դարում իտալացի մաթեմատիկոսները կարողանում էին լուծել 3-րդ (Ջերոլո Կարդանո) և 4-րդ (Լոդովիկո Ֆերարի) աստիճանի հավասարումները: Հետագայում հավասարումների լուծման խնդիրը (այդ ժամանակներում այն հանրահաշվի հիմնական խնդիրն էր) զարգացավ երկու ուղղություններով. փորձ էր արվում գտնել կամ ապացուցել իրական կամ կոմպլեքս գործակիցներով բազմանդամի կամ համապատասխան հավասարման արմատի գոյությունը և նման հավասարման համար գտնել լուծման բանաձև, ինչպիսին գոյություն ուներ առաջինից չորրորդ աստիճանի բազմանդամների համար [156, 407]:

Առաջին խնդիրը փայլուն ձևով լուծեց 19-րդ դարի գերմանացի մեծ մաթեմատիկոս Ֆրիդրիխ Գաուսը, իսկ նրա ապացուցած փաստը անվանվեց հանրահաշվի հիմնական թեորեմ, որն է՝ կոմպլեքս գործակիցներով n աստիճանի կամայական բազմանդամն ունի n հատ արմատ: Սակայն, ինչպես Գաուսի, այնպես էլ նրա ապացուցած այս թեորեմի հետագա բազմաթիվ նոր ապացուցումները հենվում էին անընդհատության գաղափարի վրա: Այսինքն՝ խոսվում էր հանրահաշվի՝ որպես գիտության առանձին ճյուղի, վերացման մասին, քանի որ նրա հիմնական թեորեմը ապացուցվում է մաթեմատիկական անալիզի մեթոդներով: Սակայն, այստեղ էլ հանրահաշվին օգնեց նրա զարգացման երկրորդ ուղղությունը. 19-րդ դարի սկզբին նորվեգացի մաթեմատիկոս Նիլս Աբելը և ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Էվարիստ

Գալուան պացուցեցին, որ 4-ից բարձր աստիճանի բազմանդամների համար լուծման բանաձև կարող է գոյություն չունենալ: Օրինակ, x^5-4x-2 բազմանդամը այդպիսին է: Այստեղ նշանակալից էր ոչ միայն այս հանճարեղ մաթեմատիկոսների հայտնագորությունը, այլև լուծման այն մեթոդը, որ առաջարկել էր պատանի Է. Գալուան: Այնքան անսովոր էր այն ու դժվար, որ ֆրանսիայի Ակադեմիայի անդամները չկարողացան ընկալել, և միայն կես դար անց մաթեմատիկոսները կարողացան հասկանալ Գալուայի մտահղացումները: Արդյունքում՝ Գալուայի և մեկ-երկու նման այլ մտահղացումների ազդեցության տակ կամաց-կամաց ձևավորվեց հանրահաշվի ժամանակակից տեսքը, ինչին նպաստեց նաև դարեվերջին գերմանացի մաթեմատիկոս Գեորգ Կանտորի կողմից ստեղծած բազմությունների տեսությունը: Այսպիսով, հանրահաշիվը ձևավորվեց որպես գիտություն հանրահաշվական գործողությունների մասին. այստեղ առարկաները, որոնց հետ կատարվում էին գործողությունները կարևոր չէին:

Լինելով մաթեմատիկայի հիմնական բնագավառներից մեկը, հանրահաշիվը իր սկզբնավորման շրջանից մտել է նաև հանրակրթական դպրոց: Հանրահաշվի դասագրքեր են ստեղծել Իսահակ Նյուտոնը, Լեոնարդ Էյլերը, Նիկոլայ Լոբաչևսկին և այլն:

Հանրահաշիվը հայկական դպրոցներում մուտք է գործել 19-րդ դարի կեսերից: Հանրահաշվի հայերեն առաջին դասագիրքը Ղ. Տերտերյանի «Գրահաշիվ»-ն է, որ հրատարակվել է Վիեննայում, 1843 թ.: Հայտնի են 19-րդ դարում գրված հայերեն ևս յոթ դասագրքեր՝ Գ.Տեր-Ղուկասյան և Գ. Մուրադյան, «Հանրահաշիվ», Թիֆլիս, 1886թ., Հ.Պապիկյան, «Գրահաշիվ», Վենետիկ, 1858թ., Ա.Պոյաչյան, «Գրահաշիվը», Կոստանդնուպոլիս, 1871 թ., Գ. Թընկըրյան, «Ընդարձակ հանրահաշիվ», Կոստանդնուպոլիս, 1872թ., Պ. Թագվորյան <<Հանրահաշվի դասընթաց>> (1880թ. Կոստադնուպոլիս), Ա.Պերպերյան «Տարերք հանրահաշուոյ», Կոստադնուպոլիս, 1887թ., Հ.Փալագաշյան, «Հանրահաշիվը», Կոստանդնուպոլիս, 1895 թ.: Հատուկ նշենք նաև Գ. Տեր-Ղուկասյանին և Գ. Մուրադյանին, որոնք իրենց դասագրքում, հայկական մաթեմատիկական դասագրքերի պատմության մեջ առաջին անգամ, թվերը նշանակելու համար կիրառեցին լատինական տառերը: Քննարկվող ժամանակաշրջանում, արևելահայ դպրոցներում նշվածներին զուգահեռ օգտագործվում էին նաև հանրահաշվի ռուսական, իսկ արևմտահայկական դպրոցներում՝ ֆրանսիական դասագրքեր և խնդրագրքեր [116-118]:

Հանրահաշվի հայերեն դասագրքերի 19-րդ դարի պատմությունը Մ. Ստեփանյանը բաժանում է երկու փուլերի: Առաջին փուլը, որ տևում է մինչև 60-ականները, կարելի է բնութագրել յուրաքանչյուր առարկայի համար մեկ դասագիրք սկզբունքով [117, էջ 32]: 40-50-ական թվականներին արևմտահայկական դպրոցներում մենաշնորհային դիրք էր գրավում Ղ Տերտերյանի (1819, Կ. Պոլիս -1897, Զմուռնիա, Վիեննայի Մխիթարյան միաբանության անդամ) «Համարողութիւն եւ նշագրովն համարողութիւն», Վիեննա, 1843 թ. դասագիրքը, իսկ 50-60-ականներին՝ Հնայակ Պապիկյանի (1827, Տրապիզոն – 1880, Պատավիոն կամ Բատավիա, Վենետիկի Մխիթարյան միաբանության անդամ) «Տարերք չափաբերության ի պէտս ազգային վարժարանաց գրահաշիվ մաս Ա», Վենետիկ, 1858թ. դասագիրքը: Դասավանդման մեթոդիկայի առումով, այդ ժամանակաշրջանը առանձնանում է դոգմատիկ մեթոդներով, որտեղ հաշվի չէին առնում սովորողի տարիքային առանձնահատկությունները, հանրահաշվի ուսումնասիրությունը հիմնականում հանգում էր տեսական նյութը անգիր անելուն, բավարար ուշադրություն չէր հատկացվում խնդիրների ու վարժությունների լուծմանը և այլն: Նշված դասագրքերը շարադրված էին հին հայերենով (գրաբարով) և դեդուկտիվ մեթոդով: Բոլոր դրույթները սկզբում ձևակերպվում են ընդհանուր տեսքով և այնուհետև դիտարկվում էին առավել մասնավոր դեպքեր: Դրանցում հեղինակները խորամուխ էին լինում բազմաթիվ մանրուքների մեջ, որոնք չունեին ոչ մի կրթական նշանակություն, երբեմն տեսական նյութն այնքան բարձր մակարդակով էր շարադրվում, որ չէր համապատասխանում սովորողի տարիքային առանձնահատկություններին, նոր հանրահաշվական հասկացությունների ներդրման ժամանակ այդ դասագրքերի հեղինակները ջանում էին շրջանցել դրանց սահմանումները [117, էջ 38]:

Երկրորդ փուլն ընդգրկում է 60-ականներից հետո ընկած ժամանակաշրջանը: Այդ փուլում ընդլայնվում է ուսումնական հաստատությունների ցանցը, անհրաժեշտություն է առաջանում առավել մատչելի և պարզ անցկացնել դասավանդման գործընթացը, աշխուժանում է այդ ուղղությամբ մանկավարժական հասարակության գործունեությունը, և վերջապես, Էջմիածնի սինոդի և Կոստանդնուպոլիսի ուսումնական խորհուրդները վերացնում են առարկայի մեկ դասագրքի մենաշնորհը և աշակերտին ու ուսուցչին հավանության արժանացած գրքերից, ըստ սեփական հայեցողության, ընտրության հնարավորություն են տալիս: Այս ամենը հանգեցնում է հանրահաշվի ուսումնական գրականության զարգացմանը: Այս փուլում հայտնվում են հանրահաշվի հայկական լավագույն դասագրքերը (Ա.Պոյաճյան, Գ.Թինկրյան, Ա. Պապիկյան, Հ.Թագվորյան, Գ.Տեր-Ղուկասյան և Գ.Մուրադյան, Ա. Պերպերյան և ուր.): Ստեղծվում են նաև հանրահաշվի խնդրագրքեր, հաշվի են առնվում սովորողների տարիքային առանձնահատկությունները [117, էջ 33]:

Ուշադրության արժանի է առարկայի հայկական՝ «հանրահաշիվ» անվանման ծագումը: Ահա թե ինչ է գրում այդ մասին Մ. Ստեփանյանը. «Առաջին փուլի դասագրքերի հեղինակները (Ղ. Տերտերյան և Ա. Պապիկյան), հետևելով 18-րդ դարի մաթեմատիկոսների օրինակին (Ի. Նյուտոն, Ս. Մակլորեն և Լ. Էյլեր), հանրահաշիվը ստուգաբանում են որպես **ունիվերսալ թվաբանություն**: Նրանք գրում են, որ հանրահաշվի մեթոդը կազմում են տառային նշանակումները և հավասարումների լուծումները, որտեղից էլ, ըստ մեր կարծիքի, ծագում է հանրահաշիվ առարկայի անվանումը՝ «Գրահաշիվ» կամ «Նշանագրով համարողություն» են վերնագրել նրանք իրենց դասագրքերը: Երկրորդ փուլի դասագրքերի հեղինակները (Գ. Թընկըրյան, Պ. Թագվորյանը, Հ. Պերպերյանը, Գ. Տեր-Ղուկասյան և ուր.) հետևելով Ժ. Բերտրանին, գտնում են, որ հանրահաշվի առարկան կայանում է կրճատումների, պարզեցումների և **հիմնականում հարցերի լուծումների** ընդհանրացումների մեջ, որոնք կարող են առաջադրվել թվերի վերաբերյալ, որտեղից ըստ մեր կարծիքի, ծագում է հանրահաշիվ առարկայի հայերեն անվանումը՝ հանրահաշիվ (կիրառելի նաև ներկայումս), որով նրանք վերնագրեցին իրենց դասագրքերը» [117, էջ 40]: Չնայած Մ. Ստեփանյանի այս դիտարկումներին, հարկ է նշել, որ «հանրահաշիվ» ներմուծումը պետք է վերագրել Գրիգոր Թընկըրյանին, որի «Ընդարձակ հանրահաշիվ կամ գրահաշիվ, Կ. Պոլիս, 1872թ.» դասագրքում առաջին անգամ ենք հանդիպում «հանրահաշիվ» եզրույթին: Դրանից հետո, Հ. Պապիկյանը (1875. Վենետիկ) և Գ. Փալագաշյանը (1895, Կ. Պոլիս) շարունակում են գործածել «գրահաշիվ» և «ալճեպրա» եզրույթները: Իսկ Յ. Թագւորեանը (1880, Կ. Պոլիս), Գ. Տեր-Ղուկասեանցը, Գ. Մուրադեանցը (1886, Տփխիս) և Յ. Պէրպէրեանը (1887, Կ. Պոլիս), գործածում են «հանրահաշիվ» եզրույթը: [15], [116-118] աշխատանքներում կարելի է գտնել հիշյալ դասագրքերի բովանդակության, շարադրանքի մեթոդիկայի, այլ երկրների համապատասխան դասագրքերի հետ համեմատության հետ կապված և մի շարք այլ հարցերի պատասխանը:

Հայաստանի առաջին հանրապետության անկախության դադարումից հետո նրա հանրակրթական դպրոցներում սկսեցին գործել Ա. Պ. Կիսիլյովի հանրահաշվի դասագրքերը [232]: Ա. Պ. Կիսիլյովի հանրակրթական դպրոցի համար գրված հանրահաշվի երկհատոր՝ «Տարրական հանրահաշիվ» դասագրքերի առաջին հրատարակությունը տեղի է ունեցել 1888 թ.: Հետաքրքիր են հեղինակի մոտեցումները դասագրքաստեղծման վերաբերյալ: Առաջին հրատարակության առաջաբանում նա գրում է. «Առաջարկվող դասընթացի հեղինակը իր առջև խնդիր է դրել հասնել լավ դասագրքի երեք որակների. հասկացությունների ստացման և ձևակերպման ճշգրտության, դատողությունների պարզության և շարադրման համառոտության» [224]: Մինչև հեղափոխություն դասագրքերը ունեցել են 30 հրատարակություն, հեղափոխությունից հետո՝ ևս տասը: 1953 և 1958-ին հրատարակվեցին Պ. Ա. Լարիչևի երկհատոր խնդրագրքերը հանրահաշվի վերաբերյալ [264, 265], 1966-ին հրատարակվեց Ն. Ա. Բարսուկովի «Հանրահաշիվ 6-8-րդ դասարանների համար» դասագիրքը [136], 1968-ին՝ Ն. Յա. Վիլենկինի և ուրիշների հանրահաշվի դասագիրքը 9-10-րդ դասարանի համար [280], 1967-ին և 1969-ին՝ Ե. Ս. Կոչետկովի և Ե. Ս. Կոչետկովայի «Հանրահաշիվ և տարրական ֆունկցիաներ» ուսումնական ձեռնարկի առաջին և երկրորդ հատորները [251], 1970-ից սկսվեցին լույս տեսնել Յու. Ն.

Մակարիչևի և ուրիշների [280-283], իսկ 1987-ին հրատարակվեցին Ա. Ն. Կոլմոգորովի հանրահաշվի դասագրքերը: Նշված բոլոր դասագրքերը խորհրդային շրջանում իրենց ռուսական հրատարակություններին զուգահեռ հիմնականում ունեցել են նաև հայերեն հրատարակումներ և գործածվել են Հայաստանի երկրորդ հանրապետության դպրոցներում, իսկ Յու. Ն. Մակարիչևի և ուրիշների հեղինակած հանրահաշվի դասագրքերը գործածվում էին ՀՀ-ում նաև անկախության առաջին տարիներին:

Հարկ է նշել, որ անկախությունից հետո Ռուսաստանի Դաշնությունում հրատարակվեցին միջին դպրոցի հանրահաշվի բազմաթիվ դասագրքեր [126], [139], [321-322] և այլն, որոնք իրարից տարբերվում էին ոչ միայն շարադրանքի սկզբունքներով ու մեթոդներով, այլև նյութի ընդգրկվածությամբ: Նույնը կարելի է ասել նաև Բելառուսի, Վրաստանի և այլ հանրապետությունների մասին:

Իսկ ինչպիսի՞ն պետք է լինի հանրահաշվի դասագիրքը և համապատասխան դասընթացը: Հանրակրթական միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացի բովանդակային կառույցի հիմնական հենասյունը մաթեմատիկական նյութն է, որի գլխավոր առանցքը պետք է լինի հանրահաշիվը: Հանրահաշվական այդ նյութի հետ ներառվում են նաև նյութեր հավանականությունների տեսությունից, կոմբինատորիկայից և մաթեմատիկայի այլ բաժիններից: Առանձին կարևորություն է ներկայացնում դասընթացում տրամաբանության տարրերի ներառման հարցը: Հարկ է նշել, որ հանրահաշվի դպրոցական դասընթացը չի հանգում մաթեմատիկայի դասագրքի: Ելնելով ուսուցման նպատակներից և խնդիրներից, այդ դասընթացում ներառվում են մաթեմատիկայի կիրառական բնույթի բազմազան հարցեր, ավելին՝ յուրաքանչյուր մաթեմատիկական կամ հանրահաշվական նյութ ուղեկցվում է կիրառական ֆոնով՝ կիրառական ինչ-որ իրադրության նկարագրությամբ և տվյալ մաթեմատիկական նյութին հանգող մոդելավորմամբ: Հանրահաշվի դասընթացի բովանդակության կարևոր մաս է կազմում նաև նրա խնդիրների և վարժությունների համակարգը:

Հանրահաշվի դասընթացի կառուցման հաջողությունը մեծապես պայմանավորված է հանրակրթության ուսումնական այլ առարկաների հետ նրա միջառարկայական կապերի արտացոլմամբ: Այստեղ հանրահաշվի դասընթացը ունի բացառիկ նշանակություն և կարող է խաղալ ուսումնական գործընթացի ինտեգրող դեր: Դրա համար հիմք են ծառայում մաթեմատիկայի կապերը և կիրառությունները ինչպես բնագիտական, այնպես էլ արվեստի ու մայրենիի հետ:

Ելնելով առարկայական չափորոշիչի պահանջներից, հանրահաշվի բովանդակային կառույցը պետք է ընդգրկի նաև այնպիսի նյութեր, որոնք նպաստեն սովորողների արժեհամակարգի՝ ճշմարտական, գեղագիտական, բարոյական, հոգեկան, ազգային, համամարդկային արժեքների ձևավորմանը [56-58]:

Հանրահաշվի դասագրքերի և դասընթացի վերաբերյալ մեր այս մոտեցումները համահունչ են անկախության առաջին շրջանում մեզանում կատարված կրթական բարեփոխումներին: Առաջին հերթին հարկ եմ համարում նշել 1998–ից ակադեմիկոս Է. Ղազարյանի գլխավորությամբ կազմված Հանրակրթության պետական չափորոշչի նախագիծը [17] և գործածության մեջ մտած տարբերակը [38], այնուհետև, կապված 11-ամյա և 12-ամյա կրթության անցման իրողության հետ, Հանրակրթության պետական Կրթակարգը, պետական չափորոշչի նոր տարբերակները, և առարկայական չափորոշչի առարկայական չափորոշիչներ [32, 33, 34]: Մեր կողմից առաջ քաշած մոտեցումները աջակցություն գտան մաթեմատիկական կրթության բնագավառի հանրապետության մի շարք առաջատար մասնագետների կողմից կամ համահունչ էին նրանց հետազոտություններում առաջ քաշած գաղափարներին [7, 8, 18, 25-30, 104-106]:

1.1.2. Հանրակրթության բովանդակային բաղադրիչները հանրահաշվի դասընթացում: Հանրակրթական դպրոցի «հանրահաշիվ» ուսումնական առարկայի բովանդակությունը լայն քննարկման նյութ է հանդիսացել բոլոր ժամանակներում [137], [152], [207], [244-248], [257], [290], [333], [337], [361], [414], [441-442]: Խոսքը առաջին հերթին վերաբերում է նրա բովանդակային հիմնական բաղադրիչներին՝ գիտելիքներին, կարողություններին և արժեհամակարգին:

Գիտելիքները, կարողությունները: Հանրակրթական դպրոցում «Հանրահաշիվ» ուսումնական առարկայի ուսուցման գլխավոր նպատակներից մեկը սովորողների կողմից մաթեմատիկական գիտելիքների ու կարողությունների տիրապետումն է: Հանրահաշվի նախկին (մինչև 20-րդ դարի վերջերում ԽՍՀՄ և ՌԴ-ում ստեղծված) դասագրքերում զետեղված նյութի զգալի մասը իր բնույթով հանրահաշվական չէր: Նրանում առանցքային տեղ էին զբաղեցնում ֆունկցիայի, կոորդինատական համակարգի, գրաֆիկի՝ ոչ հանրահաշվական հասկացությունները: Ավելին. դրանք օգտագործվում էին նաև եղած հանրահաշվական նյութի շարադրանքի մեջ: Այս առումով ցցուն էր պարաբոլի օրինակը. երկրաչափության դպրոցական առարկայի մեջ տեղ չգտած այս հասկացությունը հանկարծ հանրահաշվում խաղում էր կենտրոնական դեր: Առնվազն վիճելի էր նաև ֆունկցիայի կարևորագույն, բայց ընկալման և յուրացման համար բավականին բարդ հասկացությանն հատկացված դերը միջին դպրոցում, անընդունելի էր մանավանդ հանրահաշվի ուսուցման հիմքում այս ոչ հանրահաշվական հասկացության դնելը, առավել ևս՝ առանց սովորողների ճանաչողական ունակությունների անհրաժեշտ նախապատրաստման: Նման մոտեցումը հենց սկզբից դատապարտված էր ձախողման, և փորձը ցույց է տալիս, որ սովորողների ճնշող մեծամասնությունը այդպես էլ չէր յուրացնում ֆունկցիայի գաղափարը:

Այս ամենը թողել է իր հետքը հանրահաշվի դասավանդման գործընթացի վրա. հանրահաշիվը ոչ միայն աղավաղված էր, այլև կորցրել էր իր դեմքը: Հանրահաշվից տրվում էին ընդամենը հատվածական գիտելիքներ, որոնք, բնականաբար, չէին կարող կազմել ներքին տրամաբանությամբ շաղկապված մի ամբողջական կառույց: Արդյունքում՝ հանրահաշվի դասընթացի մեջ հավաքված էին ներքին տրամաբանությամբ իրար հետ կապ չունեցող մաթեմատիկական փաստեր, որոնք չէին կազմում միասնական դիտակտիկական համակարգ: Ինչպես նշում է ճանաչված մեթոդիստ Ստոլյարը. նրանցում «չկար կապ առանձին թեմաների միջև, դպրոցական հանրահաշիվը իրենցից ներկայացնում էր իրար հետ կապ չունեցող, տարրածին փաստերի խառնակույտ» [406]:

Մեր կողմից կազմված դասընթացում հանրահաշիվը ներկայանում է որպես իրար հետ օրգանապես կապված հասկացությունների, փաստերի ամբողջություն, ապացուցողական հստակ կառույցով ու կիրառության բազմազան ոլորտներով դիտակտիկական մի համակարգ, որի մեջ ոչ հանրահաշվական հասկացությունները խաղում են օժանդակ դեր [43]: Դասընթացի հիմքը «Հանրահաշիվ 7»-ն է [56-58], [63]: Այն կարելի է անվանել նաև «Հանրահաշվի այբբենարան»: Նրանում կառուցվում են իրական թվերի կարգավորված դաշտը, ռացիոնալ կոտորակների դաշտը և մեծությունների կարգավորված հանրահաշիվը: Հանգրվանային կետերը հանրահաշվական չորս գործողություններն են, որոնց նվիրված բաժիններում նշված երեք համակարգերը աստիճանաբար կառուցվում, միախառնվում և միահյուսվում են իրար: Այդ հյուսվածքը կատարվում է շատ պարզ եղանակով. Յուրաքանչյուր գործողության հետ կառուցվում են համապատասխան արտահայտությունը և բանաձևը՝ հավասարությունները և հավասարումները՝ հանրահաշվական կոտորակների պարագայում, հավասարությունները, հավասարումները, անհավասարություններն ու անհավասարումները՝ իրական թվերի և մեծությունների պարագայում: Զուգահեռաբար դիտարկվում են կիրառական օբյեկտները՝ գործողություններից յուրաքանչյուրի համար, ընդ որում՝ թե’ մեծությունների, թե’ գործողությունների մոդելների, և թե’ համեմատականությունների ուսուցումը ուղեկցվում է կիրառական ոլորտի առարկաների վրա դրանց բազմակողմանի ու համակարգված մեկնաբանություններով: Հաջորդ՝ 8-րդ դասարանի դասագրքում [64]՝ որպես գործողության գաղափարի զարգացում, ներմուծվում է բնական ցուցչով աստիճանի հասկացությունը և կատարվում համապատասխան թեմայի շարադրանքը: Ընդ որում՝ ինչպես այս, այնպես էլ մնացած դեպքերում պահպանվում է դասընթացի կառույցի՝ վերը նշված մեթոդաբանությամբ: Հանրահաշվական լեզվի հետագա ընդլայնմանն ու զարգացմանն է նվիրված տրամաբանության հանրահաշվի ողջ նյութը: Թեման ունի բացառիկ նշանակություն հանարհաշվական գիտելիքի հստակեցման, համակարգի, համախումբի, նրանց լուծումների, ոչ խիստ անհավասարությունների և ոչ խիստ անհավասարումների, թվի բացարձակ արժեքի, ±a տեսքի արտահայտության և ավանդական մի շարք այլ հասկացությունների ճիշտ ընկալման տեսանկյունից, հասկացություններ, որոնց լիարժեք չեն տիրապետում նաև շատ ուսուցիչներ:

Կոորդինատական մեթոդի ներմուծումը հնարավորություն է տալիս հանրահաշվական արտահայտության, համեմատականության, անհավասարման, համակարգի և համախմբի լուծումները և հանրահաշվական այլ հասկացությունները «թարգմանել» երկրաչափորեն, որի շնորհիվ դրանք դառնում են ավելի դիտողական: Բազմանդամների ուսուցումը կատարվում է հանրակրթական դպրոցի համար ոչ ավանդական ճանապարհով: Նախկինում ավանդույթ էր դարձել մեկ և մի քանի փոփոխականներով բազմանդամների ուսուցման համատեղ կազմակերպումը: Վերևում արդեն նշվեց, որ սա հանրահաշվի համար անբնական, հանրահաշվի ոգուն խորթ երևույթ է: Պատահական չէ, որ բարձրագույն հանրահաշվի բոլոր դասագրքերում նախ կատարվում է մեկ, ապա մի քանի փոփոխականներով բազմանդամների տեսությունների շարադրանքը: Գծային երկանդամների և քառակուսի արմատի թեմաներով ամփոփվում է 8-րդ դասարանի նյութը: Այդ թեմաներում հիմնականում ընդգրկված է ավանդական նյութը: 9-րդ դասարանի դասընթացը [65] սկսվում է քառակուսային եռանդամին նվիրված ընդարձակ թեմայով: Արդեն նշել ենք, որ քառակուսային անհավասարումների լուծման և ուսումնասիրության ընթացքում հրաժարվել ենք պարաբոլի կիրառությունից: Մի քանի փոփոխականներով բազմանդամների ուսումնասիրության մեջ նորություն են բնական թվերի բաժանականության հայտանիշներին և դիրքային գրություններին նվիրված նյութերը: Մի քանի անհայտով հավասարումներին և հավասարումների համակարգերին նվիրված թեմայում նորություն է Կրամերի կանոնի կիրառումը: Այստեղ որոշիչի ոչ ավանդական սահմանումը՝ որպես երկու անհայտով գծային հավասարումների համակարգի անհայտների գործակիցների արտադրյալների տարբերություն, անչափ հեշտացնում է նրա յուրացումը, իսկ բուն կանոնի կիրառումը թույլ է տալիս երկու անհայտով երկու գծային հավասարումների համակարգը ընկալել որպես մեկ ամբողջություն: Մանրամասնորեն կատարվում է նաև նշված համակարգերի հետազոտումը, իսկ լուծման տեխնիկական կողմի պարագայում առանձնացվում են համասեռ հավասարում պարունակող, օժանդակ անհատի ներմուծմամբ լուծվող և որոշ այլ տիպերի համակարգեր: Ամբողջ ցուցիչով աստիճանի շարադրման ընթացքում կենտրոնականը ամբողջ ցուցիչով աստիճանի, n րդ աստիճանի արմատի և արդեն ուսումնասիրված գործողությունների կապի բացահայտման խնդիրն է: Նախավերջին թեման ամփոփում է պրոգրեսիաներին նվիրված նյութը, որի շարադրանքը նման է անվանդականին: Դասընթացը ավարտվում է ֆունկցիայի հասկացությանը նվիրված թեմայով, որտեղ շարադրվում է ֆունկցիայի հասկացությանը, նրա գրառմանը և պատկերմանը, մեծագույն և փոքրագույն արժեքներին, որոշման և փոփոխման տիրույթներին, աճմանն ու նվազմանը նվիրված ավանդական նյութը՝ դիագրամների, աղյուսակների կիրառմամբ և ժամանակակից այլ մոտեցումներով:

Արժեհամակարգը: Հումանիստական կրթության պայմաններում առաջին պլան է մղվում սովորողների արժեհամակարգի ձևավորման խնդիրը: Եվ մեր հանրապետության կրթական չափորոշիչներով նույնպես սովորողների արժեհամակարգի ձևավորումը դիտվում է որպես կրթության բովանդակային կարևոր բաղադրիչ [32], [33]: Ներկա աշխատանքում մենք ելնում ենք արժեհամակարգի վերաբերյալ [114], [212], [404], [449], [479] ուսումնասիրություններց: Միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացում առանձնահատուկ տեղ է հատկացվում սովորողների արժեքային համակարգի ձևավորմանը. այն հնարավորություն է տալիս ձևավորել բոլոր այն արժեքները, որոնք նախատեսվում են կրթական չափորոշիչներով: Այստեղ ներառվում են բարոյական, գեղագիտական, պատմական, ազգային, համամարդկային և այլ արժեքներ, որոնց ձևավորումը իրականացվում է ինչպես տեսական, այնպես էլ գործնական-վարժանքային նյութերի շրջանակներում: Դրանք հիմնականում համապատասխանում են չափորոշիչային նվազագույն մակարդակին և կարող են յուրացվել բոլոր աշակերտների կողմից:

Բարոյական և գեղագիտական արժեքների ձևավորման խնդրին մենք կանդրադարձանք սույն աշխատանքի հաջորդ գլխում: Դասընթացում լայնորեն են ներգրավված նաև ազգային արժեքները (տես նաև [77], [106]): Կարելի է վստահորեն ասել, որ միջին դպրոցի հանրահաշվի [63-65] դասընթացի կիրառական ոլորտը խարսխված է հայ մշակույթից վերցված օրինակների վրա: Այսպես, օրինակ.

ա. Տիգրան Մեծի, Տիգրան Պետրոսյանի և Գարի Կասպարովի մասին տեղեկությունները՝ տառերի մասին թեմայում, Ավարայրի ճակատամարտում հայոց և պարսից զինվորների թվի և Հայաստանում քրիստոնեության ընդունման թվականի մասին տեղեկությունները՝ հավասարումներ թեմայում, «Արարատ» ֆուտբոլային թիմի մասին աղյուսակը՝ համեմատականություններ թեմայում և այլն:

բ. Անանիա Շիրակացու խնդիրների ընդգրկումը:

գ. Հայաստանի բնակավայրերի մասին բազմաթիվ և բազմապիսի խնդիրների և օրինակների ընդգկումը:

դ. Հայկական սպորտի, գրականության, գիտության, մշակույթի ներկայացուցիչների վերաբերյալ տեղեկությունների ընդգրկումը, դրանց միջոցով տեսական և գործնական նյութի կազմակերպումը և այլն: Բերենք մեկ օրինակ (տես [42], վարժություն 23):

Ինչպիսի՞ արժեք կարող է ընդունել «նա» դերանունը հետևյալ նախադասության մեջ.

ա. նա եղել է շախմատի աշխարհի չեմպիոն.

բ. նա եղել է հայոց թագավոր,

գ. նա եղել է ԽՍՀՄ հայազգի մարշալ:

Այստեղ «նա» դերանունը մի դեպքում իր մեջ միավորում է շախմատի աշխարհի չեմպիոններին, մյուս դեպքում՝ հայոց թագավորներին, երրորդում՝ ԽՍՀՄ հայազգի մարշալներին:

Դասընթացում ընդգրկված են նաև համամարդկային արժեքներ: Բերենք նման մի քանի օրինակ [42]-ից, [46]-ից և [49]-ից:

ա. Հունական և հռոմեական այբուբենները՝ տառերին նվիրված թեմայի մեջ:

բ. Մեծությունների չափման օրինակները հնագույն ժամանակներում, մասնավորապես՝ յարդի առաջացումը, մարդու գիրությունը որոշելու եղանակը և գիրության ու սրտի աշխատանքի կապը, Սիրակուզայի թագավոր Հերոնի՝ Արքիմեդին առաջադրած խնդիրը՝ մեծություններին նվիրված թեմաներում:

գ. Երեխայի քնելու, ցերեկվա և գիշերվա տևողությունների, Պրուսիայի բանակում մահացությունների թվի, ԱՄՆ Կոնգրեսի անդամների թվի, Հնդեվրոպական լեզվաընտանիքի խմբերում բնակչության թվի մասին տեղեկությունները՝ համեմատականություններին նվիրված թեմաներում:

դ. Ջրոյի և շախմատի մասին հնդկական լեգենդները, Զենոնի խնդիրը, հիմնական տոմարների մասին տեղեկությունները, ՆԱՏՕ-յի և Վարշավյան դաշինքի երկրների ռազմական ծախսերի աղյուսակը, տոկոսի մասին պատմական ակնարկը, Գաուսի մասին պատմությունը՝ հանրահաշվական գործողություններին նվիրված ու դրանց հարակից թեմաներում, նշանավոր մաթեմատիկոսների կյանքի և գործունեության մասին պատումները, որ արվում են յուրաքանչյուր գլխի վերջում և այլն: Նշենք նաև, որ ներկայումս ՀՀ հանրակրթական դպրոցներում գործածվող [108-110] դասագրքերի կիրառական ֆոնը լայն չէ և հենված է ռուսական մշակույթի վրա:

1.1.3. Տրամաբանության տարրերի ներառումը հանրահաշվի դասընթացում: Հանրակրթական դպրոցում տրամաբանության տարրերի ներառման հարցը համակողմանիորեն քննարկված է Լ. Ն. Լանդայի [263], Ջ. Բրուների [154], Լ. Քերոլի [262], Ջ. Պոյայի [355-355], Հ. Ֆրոյդենտալի [438-439], Պ. Պ. Բլոնսկու , Վ. Մ. Բրադիսի, Ա. Ն. Կոլմոգորովի [244], Վ. Գ. Բոլտյանսկու [146], Ռ. Ս. Չերկասովի , Ա. Ա. Ստոլյարի [405-406], Յու. Ա. Պետրովի, Վ. Ի. Ռիժիկի [371], Գ. Ի. Սարանցևի [388], Վ. Ի. Իգոշինի [220], Ի. Լ. Տիմոֆեևայի [412], Ի. Հարությունյանցի [31], Ա. Վ. Աբրահամյանի [1], Հ. Ս. Միքայելյանի [40, 41, 45, 49, 51, 52, 55, 62, 64, 312], Ս. Է. Հակոբյանի [27-30], Է. Ի. Այվազյանի [5-6], Ա. Տ. Մկրտչյանի [103] և այլոց կողմից: Հարցի դրական լուծումը հիմնավորվում է բազմաթիվ աշխատանքներում (տես, օրինակ, [1], [6], [11-12], [29], [45], [51], [52], [55], [103], [119], [175], [220], [405-406] և այլն): Այնպես, ինչպես մայրենի լեզվի խորը իմացությունը հնարավոր է դառնում միայն քերականության համակարգված ուսուցման շնորհիվ, այդպես էլ մտածողության օրինաչափությունների իմացությունը ճիշտ դատելու հնարավորություն է տալիս: Կատարված բազմաթիվ գիտափորձերը ցույց են տալիս, որ առանց տրամաբանության տարրերի ուսուցման, սովորողները ճշգրիտ դատողություններ չեն կարողանում կատարել անգամ պարզ իրավիճակներում: Եվ հանրահաշվի դասընթացում տրամաբանության որոշ թեմաների ներառումը հնարավորություն է տալիս հստակեցնելու սովորողների լեզվատրամաբանական մտածողության հիմքում ընկած կարևորագույն հասկացություններ և ավելի խորացնելու հայոց լեզվի ու հանրահաշվի լեզվի միջև զուգահեռի անցկացումը: Այստեղ խոսքը առաջին հերթին վերաբերում է ասույթների տրամաբանությանը, մասնավորապես՝ տրամաբանական շաղկապների ուսուցմանը: Այս ոչ դեդուկտիվ մոտեցումը հնարավորություն է տալիս սովորողներին հասկանալու մաթեմատիկական մոտեցման հիմնական առանձնահատկությունը. Այն է՝ առաջադրվող հարցերի հստակ, երկակի իմաստներ չպարունակող պատասխանների առկայություն (ավելի մանրամասն՝ տես [55], [61], [176], [186-187], [231], [233], [274], [334], [402], [426], [436], [447]):

Տրամաբանության հանրահաշվում՝ շարունակելով հանրահաշվական լեզվի՝ 7-րդ դասարանում սկսված ուսումնասիրությունը, կատարվում է նրա հիմնական տարրերից մեկի՝ նախադասության հասկացության հստակեցումը տրամաբանության շրջանակներում: Նրա պարզագույն ձևերը ասույթն ու բանաձևն են: Բանաձևը ներկայանում է իր հիմնական հանրահաշվական դրսևորումներով՝ հավասարություններով, անհավասարություններով, հավասարումներով և անհավասարումներով: Ինչպես հայոց լեզվում պարզ նախադասությունների միջոցով, «և», «կամ», «ոչ» և որոշ այլ շաղկապների օգնությամբ ստացվում են բարդ նախադասությունները, նույն կերպ էլ հանրահաշվական նախադասությունները՝ բանաձևերը ստացվում են պարզ նախադասություններից՝ տրամաբանական կապերի միջոցով: Այսպիսով, տրամաբանական կապերի ուսումնասիրությունը ավելի է հստակեցնում հանրահաշվական լեզուն:

Տրամաբանական գումարը կամ համախումբը: Չափազանց արդյունավետ է դասընթացում կամ շաղկապի գործածությունը: Այն սահմանվում է բանաձևերի համակարգի միջոցով և տրվում է ճշմարտային աղյուսակով: Սահմանվում է նաև համախմբի լուծման հասկացությունը և տրվում է համախմբի լուծումների բազմությունը որոշելու եղանակը:

Տրամաբանական գումարի ներմուծումը հնարավորություն է տալիս լուծելու հետևյալ կարևոր մեթոդական խնդիրները, որոնք փոխպայմանավորված են իրարով և լուծվում են համալիր եղանակով:

ա. Նպաստում է մայրենի լեզվի իմացությանը: Հարցի հստակեցման լավագույն մեթոդական ձևը հավանաբար գրազի վերաբերյալ իրադրության դիտարկումն է, որ կատարվել է նաև դասընթացում: Բացառող կամ-ի առկայությունը հայոց լեզվում նյութի ուսուցման ընթացքին որոշակի բարդություններ և դժվարություններ է հաղորդում: Միևնույն ժամանակ, նույն պատճառը ավելի է կարևորում նյութը:

բ. Թույլ է տալիս դիտարկելու և լուծելու կիրառական ոլորտի մի շարք խնդիրներ: Ինչպես սովորական, այնպես էլ բացառող կամ-ի ներմուծումը պետք է ուղեկցել կիրառական անհրաժեշտության բացահայտումով: Նման օրինակներ բազմաթիվ են: Մասնավորապես, նշենք «մեծ չէ» և «փոքր չէ» ձևերի կիրառական լայն գործածությունը, դրանց մեկնաբանությունը և բացատրությունը տրամաբանական գումարի կամ համախմբի շրջանակներում:

գ. Օգնում է ավանդական մաթեմատիկական հասկացությունների գիտակցական ըմբռնմանը: Դիտարկենք նման հասկացություններից կարևորները:

1). Վերցնենք $a \leq b$ բանաձևը: Այն ունի ընկալման որոշակի բարդություն, և անհնար է գիտակցականորեն ըմբռնել՝ առանց հասկանալու նրա հիմքում ընկած լեզվական՝ «a-ն մեծ չէ b-ից» և տրամաբանական՝ «$a = b$ կամ $a < b$» կառույցները: Եվ քանի որ դասընթացում լայնորեն դիտարկվում են թե' լեզվական, թե' տրամաբանական մոտեցումները, ապա հնարավոր է դառնում նշված բանաձևի դիտարկումը բանաձևերի տրամաբանական գումարի կամ համախմբի շրջանակներում, հանգամանք, որը մեծապես պարզեցնում և հստակեցնում է նրա շարադրանքը: Կատարված գիտափորձերը ցույց են տալիս, որ առանց «կամ» շաղկապի իմացության սովորողները ճիշտ չեն պատասխանում «արդյո՞ք ճշմարիտ է $2 \leq 2$ բանաձևը» տիպի հարցադրմանը, իսկ տրամաբանության տարրերին տիրապետող աշակերտները նշված հարցին պատասխանում են անսխալ: Իսկ $\leq$ տրամաբանական շաղկապի հայերեն ձևը բացատրելուց հետո (այն նշանակում է «մեծ չէ»), հարցը լիովին հասկանալի է դառնում (տես [55]):

2). Որպես տրամաբանական գումարի մասնավոր դեպք է ներմուծվում նաև կամայական ոչ խիստ անհավասարումը, հանգամանք, որ նշված հասկացության ընկալումը դարձնում է մատչելի և լիովին համապատասխանում է ուսուցման գիտակցականության դիդակտիկական սկզբունքի ոգուն:

3). Այնուհետև, փորձը ցույց է տալիս, որ սովորողների մեծ մասը չի հասկանում x = ±a բանաձևի իմաստը, համենայն դեպս՝ նախկին դասագրքերով սովորող քիչ աշակերտներ կլինեն, որոնք կկարողանանա ճիշտ պատասխան տալ «ճշմարի՞տ է, թե՞ ոչ 1 = ±1 բանաձևը» հարցադրմանը, և մանավանդ հիմնավորել տրված պատասխանը: Ահա տրամաբանական գումարի ներմուծումը թույլ է տալիս հասկանալու, որ 1 = ±1 բանաձևը 1 = 1, 1 = -1 բանաձևերի տրամաբանական գումարն է, և քանի որ դրանցից մեկը ճշմարիտ է, ապա ճշմարիտ է նաև տրամաբանական գումարը և տրված 1 = 1 = ±1 1 բանաձևը: Այստեղ հետաքրքիր է նաև հետևյալ օրինակը: Մեր կատարած գիտափորձը ցույց տվեց, որ անգամ ուսուցիչներից շատերը չեն կարողանում գտնել հետևյալ դատողության մեջ թույլ տրված սխալը: Ունենք 1 = ±1 և ±1= -1 ճշմարիտ բանաձևերը: Համաձայն հավասարության փոխանցական հատկության՝ կստանանք 1=-1 ճշմարիտ բանաձևը: Հասկանալի է, որ այստեղ նույնպես առկա է տրամաբանության տարրերին անծանոթ լինելու և հավասարության հասկացությանը չտիրապետելու փաստը: Նշված օրինակը ընդգրկվել է դասընթացի մեջ:

Տրամաբանական արտադրյալը կամ համակարգը: Դասընթացում բանաձևերի համակարգի հենքի վրա ճշգրտվում է տրամաբանական արտադրյալի, ինչպես նաև՝ և շաղկապի գործածության իմաստը: Մասնավորապես, այս մոտեցումը թույլ է տալիս դիտարկելու այնպիսի բանաձևերի համակարգեր, որոնց անդամները կարող են լինել հավասարումներ, անհավասարումներ, ոչ խիստ անհավասարումներ և այլ բանաձևեր:

Տրամաբամանական արտադրյալի ներմուծումը հնարավորություն է տալիս լուծելու հետևյալ կարևոր մեթոդական խնդիրները:

ա. Նպաստում է մայրենի լեզվի իմացությանը: Հարցի հստակեցման լավագույն մեթոդական ձևը, ինչպես և տրամաբանական գումարի դեպքում, գրագի վերաբերյալ իրադրության դիտարկումն է, որ կատարվում է նաև դասընթացում: Պետք է նկատել, որ սովորողները տրամաբանական արտադրյալի վերաբերյալ նյութը ավելի հեշտ են հասկանում, քան տրամաբանական գումարին նվիրված նյութը: Դրան մասնավորապես նպաստում է այն, որ նախկին դասընթացներում, որոնցով սովորել է մանկավարժների ներկա սերունդը, համախումբը բացակայում էր, իսկ տրամաբանական արտադրյալի հիմքը կազմող համակարգերը լայնորեն ներգրավվում էին հանրահաշվի դասընթացի մեջ:

բ. Տրամաբանական արտադրյալի յուրացման մատչելիությունը կապված է նաև նրա կիրառական ոլորտի բազմազանության հետ: Հանրահաշվական դասընթացներում դիտարկվող տեքստային խնդիրները, կարելի է ասել՝ առանց բացառության, իրենցից ներկայացնում են ինչ-որ պայմանների կոնյունկցիա, որոնց հանրահաշվական մոդելավորումը հանգում է բանաձևերի համակարգի:

գ. Հաջորդ կարևոր մեթոդական խնդիրը, որ հնարավոր է լինում լուծել տրամաբանական արտադրյալի ներմուծման շնորհիվ, միջակայքերի երկրաչափական հասկացության նկատմամբ հանրահաշվական մոտեցումը կիրառելու հնարավորությունն է: Հարկ է նկատել, որ այստեղ նույնպես կարելի է ելնել կիրառական ոլորտում դրված միանգամայն ակտուալ խնդրի դիտարկումով, և նոր միայն անցնել հանրահաշվական մոտեցմանը: Դասընթացում նյութը կառուցվում է այս սկզբունքով: Ընդ որում, միջակայքերի բոլոր տեսակները դիտարկվում են սկզբում հանրահաշվական ձևերի մեջ և, այնուհետև, պատկերների հանրահաշվին նվիրված բաժնում ստանում երկրաչափական տեսք ու ձև: Միևնույն ժամանակ նշենք, որ բազմությունների հատման գործողության առկայությունը թույլ է տալիս միջակայքերը ստանալ որպես երկու ճառագայթներ հատումներ.

$(a,b) = (\infty,a) \cap (b, \infty)$, $[a,b] = (\infty,a] \cap [b, \infty)$, $(a,b] = (\infty,a) \cap [b, \infty)$, $[a,b) = (\infty,a] \cap (b, \infty)$:

ժխտումը: Դասընթացում արմատական մոտեցում է ցուցաբերված բանաձևերի ժխտման հասկացության նկատմամբ: Նախկինում ոչ միայն չէր ուսումնասիրվում այս հասկացությունը, այլև ընդհանրապես չէր քննարկվում որևէ հասկացության կամ պնդման ժխտման հետ կապված հարց՝ թեկուզ և վարժության կամ խնդրի մակարդակով: Իսկ հայտնի է, որ հենց պնդման ժխտման ընկալումն է հնարավորություն տալիս լիովին ու համակողմանիորեն հասկանալ այն:

Դասընթացում բանաձևի ժխտման միջոցով ճշգրտվում է ոչ շաղկապի գործածության իմաստը: Ուսանելի է a = b, a < b, a > b բանաձևերի ժխտումների դիտարկումը: Իմացական կարևոր նշանակություն ունեն ժխտման՝ ժխտման և համարժեք բանաձևերի ժխտումների համարժեքության հատկությունները: Չափազանց կարևոր են համախմբի և համակարգի ժխտումների ուսուցումը: Օրինակների մակարդակով ցույց է տրվում, որ բանաձևերի համախմբի ժխտումը համարժեք է այդ բանաձևերի ժխտումների համակարգին, իսկ բանաձևերի համակարգի ժխտումը համարժեք է այդ բանաձևերի ժխտումների համախմբին: Այսինքն՝ կամայական Ա և Բ բանաձևերի համար՝

áã(² Ï³Ù ′) ⇔ áã² ¨ áã ′,   (1)

áã(² ¨ ′) ⇔ áã² Ï³Ù áã ′:   (2)

Այս բանաձևերը թույլ են տալիս հստակ, պարզ ու սովորողների համար մատչելի բացատրություն տալ a = b, a < b, a > b, a ≤ b, a ≥ b բանաձևերի ժխտումներին և դրանք ընդգրկել դասընթացի մեջ: Ապացուցվում են հատևյալ հատկությունները.

$$\text{Áã}(a = b) \Leftrightarrow a \neq b,\ \text{áã}(a < b) \Leftrightarrow a \geq b,\ \text{áã}(a < b) \Leftrightarrow a \geq b,$$

$$\text{áã}(a \geq b) \Leftrightarrow a < b,\ \text{áã}(a > b) \Leftrightarrow a \leq b,\ \text{áã}(a \leq b) \Leftrightarrow a > b:$$

Առանձնապես կարևոր է ստացված և (1) և (2) բանաձևերի կիրառությունը գծային հավասարումների և անհավասարումների, դրանք պարունակող համախմբերի և համակարգերի ժխտման վերաբերյալ նյութը շարադրելիս: Հավասարումների, անհավասարումների և ոչ խիստ անհավասարումների համար ապացուցվում են հետևյալ հատկությունները.

Տրված α թիվը $ax + b = 0$ հավասարման լուծումը չէ՝ նշանակում է այն $ax + b \neq 0$ անհավասարման լուծումն է, այսինքն՝ áã$(a\alpha + b = 0) \Leftrightarrow a\alpha + b \neq 0$:

Նույն կերպ ապացուցվում են հետևյալ հատկությունները.

Áã$(a\alpha + b \neq 0) \Leftrightarrow a\alpha + b = 0$, áã$(a\alpha + b < 0) \Leftrightarrow a\alpha + b \geq 0$, áã$(a\alpha + b > 0) \Leftrightarrow a\alpha + b \leq 0$,

áã$(a\alpha + b \geq 0) \Leftrightarrow a\alpha + b < 0$, áã$(a\alpha + b \leq 0) \Leftrightarrow a\alpha + b > 0$:

Երկու գծային անհավասարումներ պարունակող համակարգերի և համախմբերի համար դիտարկվում են բոլոր վեց հնարավոր դեպքերի ժխտումները. > կամ < իմաստով երկուական անհավասարումների համակարգ և համախումբ, < և > իմաստով անհավասարում պարունակող համակարգ և համախումբ: Հասկանալի է, որ այդ հատկությունների ապացուցումները չեն մտնում չափորոշիչային նվազագույն և միջին մակարդակի պահանջների մեջ: Սակայն (1) և (2) բանաձևերի միջոցով դրանց ապացուցումը չափազանց օգտակար է առանձնապես մաթեմատիկական հակումներ ունեցող աշակերտների համար:

Տրամաբանական համարժեքությունը: Սովորողների լեզվատրամաբանական մտածողության հստակեցման մեջ շատ մեծ է տրամաբանական համարժեքության դերը, որ կատարվում է դասընթացում: Միևնույն փոփոխականը պարունակող երկու բանաձևեր անվանվում են համարժեք, եթե նրանք ունեն միևնույն լուծումները: Այս ընդհանուր ձևակերպման մեջ են մտնում ինչպես հավասարումների, այնպես էլ անհավասարումների ու դրանց համակարգերի և համախմբերի, ինչպես նաև այլ բանաձևերի համարժեքության հասկացությունները: Համապատասխան և անհրաժեշտ քանակով օրինակներ դասընթացում դիտարկվում են: Համարժեքության անդրադարձելիության, համաչափության և փոխանցելիության հատկությունների կողքին մեծ նշանակություն ունի համակարգերի և համախմբերի համարժեքությունների դիտարկումը: Համարժեքություններին նվիրված հենց առաջին դասում համարժեքությունների

{	$x \in A \cap B$	[		$x \in A \cup B$

դիտարկումը, դրանց մեկնաբանությունը կոնկրետ ու բազմազան օրինակների վրա մեծապես նպաստում է համակարգերի և համախմբերի վերաբերյալ կարևորագույն նյութի գիտակցական ըմբռնմանը: Այս տեսակետից չափազանց կարևոր են նաև համախմբերի և համակարգերի տեղափոխական, զուգորդական և միազորության օրենքները:

Եթե նշված օրենքներն ունեն ինտուիտիվ ընկալման պարզություն և նրանց կիրառությունը շատ բնական է՝ անգամ առանց այդ օրենքների հստակ ձևակերպման, ապա նույնը չի կարելի ասել ճշմարիտ կամ կեղծ բաղադրիչներով համակարգերի և համախմբերի համար: Սովորողների մեծ մասը գլուխ չի հանում նույնիսկ

(0 < 1 ¨ x < 2), (0 > 1 ¨ x < 2)

տիպի պարզագույն համակարգերից: Դասընթացում ձևակերպվում է ճշմարիտ կամ կեղծ բաղադրիչներով համակարգերի և համախմբերի համարժեքության օրենքը, որը՝ դիտարկվող համապատասխան օրինակների և վարժությունների հետ, վերացնում է նշված բացը:

1.1.4. Խնդիրների և վարժությունների համակարգը: Խնդիրների և վարժությունների համակարգը մեծ դեր ունի մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում: Առաջին հերթին դրանց միջոցով է կազմակերպվում սովորողների ինքնուրույն գործունեությունը, հնարավորություն է ստեղծվում ակտիվացնելու նրանց ճանաչողական և հետազոտական ունակությունները, ձևավորելու և զարգացնելու համագործակցային կարողությունները, վերահսկելու ուսումնական գործընթացը, ձևավորելու տեխնիկավարժանքային կարողություններ, ամրապնդելու անցած ուսումնական նյութի յուրացումը: Գ. Ա. Բալի, Յու Մ. Կոլյագինի, Վ. Ա. Հովհաննիսյանի, Ն. Ա. Կոպիտովի, Յա. Յա. Մենցիսի, Կ. Ի. Նեշկովի, Դ. Պոյայի, Ա. Մ. Պիշկալոյի, Ա, Դ. Սեմուշինի, Ա. Ա. Ստոլյարի, Ս. Բ. Սուվորովայի, Պ. Մ. Էրդնիեվի և այլոց հետազոտություններում ուսումնասիրված են «խնդիր» հասկացությունը, հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում խնդրի դերն ու նշանակությունը, ճշգրտված են նրա գործառույթները, մշակված են այն պայմանները, որոնց պետք է բավարարի պահանջվող գործառույթներն իրականացնող խնդիրների համակարգը:

Միևնույն ժամանակ մեթոդական գրականության մեջ մշակված են նաև ուսումնական այս կամ այն նյութին նվիրված խնդիրների ու վարժությունների որոշակի խմբեր [191], [196], [213], [206], [217], [213], [219], [273], [336], [339], [350], [356-357], [478], [480], [484]: Սակայն մշակված խնդիրներն ու վարժությունները շատ դեպքերում չեն համապատասխանում հանրահաշվի ներկա դասընթացի նորարարական բնույթին ու կառուցվածքին, և հաճախ անհրաժեշտ է եղել նոր մոտեցումներ ցուցաբերել նաև դասընթացի խնդիրների համակարգի նկատմամբ, ինչը պահանջել է նաև ստանալ խնդիրների լրացուցիչ տիպեր: Դրանք կախված են եղել ինչպես բուն հանրահաշվական նյութի առանձնահատկություններից, այնպես էլ կիրառական ոլորտից ու հանրահաշվի ուսուցման նպատակներից, խնդիրներից և չափորոշիչային այլ պահանջներից: Մասնավորապես, մաթեմատիկական կրթության հումանիզացումը, համամարդկային և, մանավանդ, ազգային արժեքների ներառումը կրթության բովանդակային դաշտի կիրառական ոլորտ, պահանջել են այդ ոլորտում համապատասխան իրադրությունների քննարկում և դիտարկում՝ նաև խնդիրների համակարգի տեսքով (տես նաև [48], [66-68]):

Դասընթացի վարժությունների և խնդիրների համակարգը կազմված է յոթ բաժիններից:

1) Հասկացե՞լ եք դասը: Բաժնի խնդիրները հիմնականում ուղղված են տեսական նյութի ամրապնդմանը, կրկնության և ինքնաստուգման կազմակերպմանը: Դրանք կատարում են խնդրի ուսուցանող, կրկնող, վերահսկող և ամրապնդող գործառույթներ:

2) Հիմնական: Խնդիրների այս խումբը նպատակ ունի սովորողների մոտ ձևավորել ու զարգացնել տեխնիկավարժանքային կարողություններ ու հմտություններ: Դրանք հիմնականում կատարում են խնդրի ուսուցանող, ամրապնդող և զարգացնող գործառույթներ: Կանգ առնենք այս համակարգում ընդգրկված խնդիրների մի քանի առանձնահատկությունների վրա:

(1). Դասընթացում դեդուկտիվ մեթոդի առկայությունը հնարավորություն է տալիս ստանալու ապացուցման խնդիրների մի լայն դաս: Ընդ որում, այդ խնդիրները վերաբերում են թվերի ու արտահայտությունների պարզագույն հատկություններին, ունեն ինտուիտիվ ընկալման պարզություն, պահանջում են հստակ ապացուցումներ ու փաստարկումներ: Այստեղ հարկ է նշել, որ ապացուցման խնդիրի լուծման ընթացքը բացառում է սերտողական, ֆորմալ մոտեցումը, հանգամանք, որ շատ կարևոր նշանակություն ունի ուսուցման կազմակերպման գործում: Պետք է ցավով արձանագրել, որ հանրահաշվի դասընթացներում ավանդաբար քիչ տեղ է հատկացվել ապացուցման խնդիրներին, իսկ երկրաչափության ու եռանկյունաչափության դասընթացներում դրանք թեպետ և կարևոր տեղ ունեն, բայց ուսուցչությունը դրանց վրա պատշաճ ուշադրություն չի դարձնում՝ ելնելով ընդունելության քննության պահանջի տեսքով ներկայացված պետական պատվերից: Բերենք վերևում նշված տիպի վարժության պարզագույն օրինակ Հանրահաշիվ 6-ից [42]:

N 605, ա. Ապացուցեք, որ կամայական x և y բնական թվերի համար[a] եթե x > y և y>z, ապա x-1>z:

(2). Անորոշ իրավիճակներով հետաքրքիր վարժություններ են ստեղծված բազմության և բազմությունների հետ կատարվող գործողությունների կիրառմամբ: Այս վարժությունները նպաստում են գիտելիքի ոչ սերտողական յուրացմանը: Բերենք երկու օրինակ «Հանրահաշիվ 7» -ից [46]:

N 335, բ. Գտեք a թիվը, եթե {a+1}∪{a+2}={2,3}:

N 676, ե. Ինչպիսի՞ x և y թվերի համար է {x,y}∩{1,2,3}={1,2}:

(3). Վարժությունների այս բաժնում դրվում են պարամետրական հավասարումների և անհավասարումների լուծման հիմքեր: Ուսուցման դիդակտիկական սկզբունքները քննարկելիս մենք տեսանք պարամետրական հավասարումները միջին դպրոցում ուսուցանելու կարևորությունը: Դասընթացում կատարվում է պարամետրական հավասարումների ուսուցում՝ ըստ բարդության և անորոշությունների աստիճանական զարգացման: Ընդ որում, զարգացումը կապվում է սովորողի տվյալ թեմայում ստացած կոնկրետ գիտելիքի հետ: Բերենք նման մի քանի պարզագույն օրինակներ «Հանրահաշիվ 7» -ից [46]):

N 394. Նշեք a-ի որևէ արժեք, որի դեպքում հավասարման լուծումը փոքր է 1-ից:

ա. $x = a$, բ. $x = a + 7$, գ. $x = 6$, դ. $x + 1 = 10$:

N 571. A ի ինչպիսի՞ արժեքի դեպքում հավասարումն ունի լուծում.

ա. $a + x = x\ \ 1$, բ. $x\ \ a = a\ \ x$, գ. $x = x\ \ a$, դ. $x + 1 = x\ \ a$:

N 572. a-ի ինչպիսի՞ արժեքի դեպքում հավասարումը չունի լուծում.

ա. $x = a + x$, բ. $x - 3 = a + x + 1$, գ. $1 - x + a = 3 + a$, դ. $2 + x - a = 4 - a + x$:

(4). Խնդիրների համակարգը նպաստում է հանրահաշվական լեզվի տիրապետմանը, օգնում հանրահաշվական լեզվի մի ձևակերպումից անցնելու մյուսին, ինչը կարևոր է գիտելիքի համակողմանի և խորը յուրացման տեսակետից: Բերենք մեկ օրինակ «Հանրահաշիվ 8» -ից [49]:

Դաս 8.14, N 12, ե. Ապացուցեք, որ

$x \in (1, 2] \Leftrightarrow x>1$ ¨ $x \le 2 \Leftrightarrow 1< x \le 2 \Leftrightarrow x \in \begin{cases} x > 1 \\ x \le 2 \end{cases}$:

3. Կիրառական: Այս բաժնի վարժությունների հիմնական խնդիրը տվյալ թեմային վերաբերող կիրառական ոլորտի հանրահաշվական մոդելավորումն է, դասընթացի հումանիտար-ճանաչողական, ազգային և համամարդկային արժեքների հետ հաղորդակցվելու գործառույթների խորացումը:

(1) Հայտնի է, որ կիրառական խնդիրների լուծման ընթացքում սովորողները դժվարանում են կատարել խնդրում առկա իրադրության մաթեմատիկական մոդելավորման աշխատանքը: Այս հարցի լուծման համար դասընթացում առաջարկվում է խնդիրների աստիճանական բարդացման սխեմա. միևնույն իրադրությանը վերաբերող խնդիրները հաջորդում են իրար ըստ բարդության աստիճանի, հաջորդ իրադրությանը վերաբերող խնդիրները նորից կազմվում են նույն սկզբունքով:

Ահա նման օրինակ [46]-ից:

N 730. Շախմատային մրցաշարում յուրաքանչյուր մասնակից մնացածների հետ խաղում է հավասար թվով պարտիաներ: Քանի՞ պարտիա է խաղացվել մրցաշարում, եթե մասնակիցների թիվը.

ա. 10 է, յուրաքանչյուր զույգի խաղացած պարտիաների թիվը՝ 1,

բ. 15 է, յուրաքանչյուր զույգի խաղացած պարտիաների թիվը՝ 2,

գ. m է, յուրաքանչյուր զույգի խաղացած պարտիաների թիվը՝ 1,

դ. m է, յուրաքանչյուր զույգի խաղացած պարտիաների թիվը՝ 2n:

(2) Բաժնի խնդիրների միջոցով իրականացվում է հումանիտար-ճանաչողական արժեքների հետ հաղորդակցվելու գործառույթի խորացում: Դրան նպաստում է առարկայական ոլորտում նման իրավիճակների դիտարկումը՝ ֆարենհայտի և ցելսիուսի, մարդու հասակի և կշռի, մարդու գիրության և սրտի աշխատանքին չվնասելով՝ վազելու հնարավորության, ծղրիդի ճռռոցների և օդի ջերմաստիճանի և այլ երևույթների միջև՝ բաժնում դիտարկված բազմաթիվ խնդիրները:

(3) Հանրահաշվի դաընթացներում ընդգրկված խնդիրների մեջ ավանդաբար պակասում են այսպես կոչված՝ ուղիղ խնդիրները: Դրանք, օրինակ, արագության վերաբերյալ ունեն մոտավորապես այսպիսի կառուցվածք. Միևնույն կետից միաժամանակ և նույն ուղղությամբ դուրս եկան երկու ավտոմեքենա, մեկի արագությունը a կմ/ժ, մյուսինը՝ b կմ/ժ: Որքա՞ն կլինի նրանց միջև հեռավորությունը t ժամից հետո: Դասընթացում ուղիղ խնդիրները բնականաբար մասնակցում են գումարման և բազմապատկման բաժնում, իսկ հակադարձ խնդիրը, այսինքն՝ հավասարումների հանգող խնդիրները մասնակցում են հանման և բաժանման գործողությունների շրջանակներում:

Ավանդաբար հանրահաշվի դասընթացներում ներառվում են գծային կամ քառակուսային հավասարումների հանգող տեքստային խնդիրներ, իսկ անհավասարումների վերաբերյալ նմանատիպ խնդիրները բացակայում են: Մինչդեռ վերջիններս ունեն ոչ պակաս կիրառական նշանակություն: Հաշվի առնելով սա, մենք կազմել և դասընթացում ներառել ենք գծային կամ քառակուսային անհավասարումների հանգող տեքստային խնդիրները:

(4) Սովորաբար հանրակրթական դպրոցի հանրահաշվի դասընթացի կիրառական խնդիրները կազմվում են այնպես, որ նրանց մոդելավորումը հանգում է առաջին կամ երկրորդ աստիճանի հավասարումների կամ հավասարումների համակարգի: Մինչդեռ առօրեական իրադրություններում մենք ավելի շատ հայտնվում ենք անհավասարման հանգող իրադրություններում: Նկատի ունենալով սա, անհավասարումների ուսուցմանը նվիրված յուրաքանչյուր տեսական նյութի շրջանակներում մենք կազմել ենք համապատասխան անհավասարման հանգող կիրառական խնդիրների դաս, ինչը մեծացնում է նյութի պրակտիկ նշանակությունը և հետաքրքրությունը նրա նկատմամբ:

(5) Հիմնականում այս բաժնի վրա է դրված նաև խնդրի դաստիարկող գործառույթը՝ սովորողի աշխարհայացքի, հոգևոր աշխարհի, ճանաչողական հետաքրքրությունների ձևավորման հարցերի լուծումը: Եվ նման խնդիրներ կազմված են բավարար քանակությամբ:

(6) Բաժնի խնդիրների միջոցով ազգային և համամարդկային արժեքների հետ հաղորդակցվելու գործառույթների խորացումը իրականացվում է Անանիա Շիրակացու, ինչպես նաև ազգային ու համամարդկային արժեքներ բովանդակող այլ խնդիրների ընդգրկումով:

4. Հետաքրքրաշարժ: Այս բաժնի խնդիրներն ու վարժությունները նպատակ ունեն ավելի հետաքրքիր և աշխույժ դարձնելու դասավանդվող նյութը, նպաստել սովորողների ակտիվության բարձրացմանը, իսկ առաջադրված ինքնատիպ խնդիրները, որոնք հատուկ գիտելիքներ չեն պահանջում, զարգացնում են նաև սովորողի տրամաբանական մտածողությունը: «Հանրահաշիվ 7»-ի [46] բոլոր պարագրաֆների նշված բաժնում զետեղված են «Գտիր սխալը» խորագրով վարժություններ, որոնք նաև բացահայտում են տվյալ նյութի կարևորագույն հարցերի յուրացման խորությունը:

5. Կրկնության: Այս բաժնի վարժություններն ու խնդիրները, լուծում են թվաբանությունից անցած նյութի կրկնության, դասընթացի նյութի կրկնության, ամրապնդման և խորացման խնդիրներ:

6. Լրացուցիչ խնդիրներ յուրաքանչյուր գլխի վերաբերյալ: Այս բաժնի խնդիրները բերվում են դասընթացի յուրաքանչյուր գլխի վերջում: Դրանք լրացնում, հարստացնում են վարժությունների Հիմնական և Կիրառական բաժինները և ուղղված են այն սովորողներին, որոնք ավելի մեծ հակում ունեն մաթեմատիկայի նկատմամբ և ցանկություն ունեն ավելի շատ ժամանակ հատկացնել դրա ուսումնասիրությանը:

7. Խնդիրներ դասընթացի կրկնության համար: Այս բաժնի խնդիրները ամփոփված են դասընթացի և 9-րդ դասարանի դասագրքի վերջում: Վարժությունները կազմված են ըստ գլուխների և պարագրաֆների: Հաշվի են առնված նաև չափորոշիչային երեք մակարդակները:

1.1.5. Հանրահաշվի կիրառական ոլորտը, միջառարկայական կապերը: Մաթեմատիկայի հիմնական ծառայություններից մեկը նրա կիրառությունն է առօրյա կյանքում և գիտության տարբեր բնագավառներում առաջացած խնդիրների լուծման մեջ: Այս նշանակությունն արդեն բավական է, որպեսզի մաթեմատիկան դառնա ոչ միայն հասարակական առաջընթացի հիմնական լծակ, այլև կրթական համակարգի առանցքային առարկաներից մեկը: Անհրաժեշտ է նկատել, որ խորհրդային և այսօրվա ռուսական հանրակրթական դպրոցի հանրահաշվի դասընթացներում անհրաժեշտ խորությամբ չի բացահայտվում հանրահաշվի կիրառական նշանակությունը, մինչդեռ արևմտյան զարգացած երկրներում դրան հատկացվում է չափազանց մեծ տեղ: Հանրահաշվի կիրառական ֆոնին մեծ տեղ հատկացվում նաև հանրակրթական դպրոցի հանրահաշվի մեր դասընթացում, ավելին՝ այն ընկած է դասընթացի կառույցի հիմքում: Հիմնական աշխատանքը կատարվում է 7-րդ դասարանի դասագրքում: Այստեղ հանրահաշվի տեսական կառույցի ստեղծումը ուղեկցվում է կիրառական ոլորտների համակարգված ուսումնասիրությամբ և տեսական նյութի հետ դրանց հյուսվածքով:

Հանրահաշվի կիրառությունը առօրյա կյանքում և գիտության տարբեր ոլորտներում տեղի է ունենում հետևյալ կերպ. նախ կիրառական խնդիրը ձևակերպվում է հանրահաշվի լեզվով և վերածվում է հանրահաշվական խնդրի, այնուհետև, լուծվում է ստացված հանրահաշվական խնդիրը, որը և տալիս է տրված կիրառական խնդրի պատասխանը: Դասընթացում դիտարկվում է հանրահաշվի կիրառական խնդրի առաջացման երեք հիմնական ճանապարհ.

ա. Հանրահաշվի կիրառական ոլորտում ընկած առարկաների դիտարկում:

բ. Հանրահաշվական գործողությունների մոդելների դիտարկում:

գ. Մեծությունների և համեմատականությունների դիտարկում:

Նշենք, որ գործողությունների մոդելների ուսուցումը նորույթ է մեր դպրոցների համար: Սակայն արևմտաեվրոպական դպրոցներում, որտեղ սկզբունքային նշանակություն է տրվում մաթեմատիկայի կիրառական ուղղվածությանը, դրանք վաղուց են դարձել մաթեմատիկական կրթության բովանդակության կայուն տարր: Առանց այդ մոդելների ուսուցման աշակերտը հստակ չի կարող պատկերացնել, թե առարկայական ոլորտում կատարվող այս կամ այն գործողությունը, որի լեզվական համարժեքը մեծ մասամբ չի համընկնում համապատասխան մաթեմատիկական տերմինի հետ, ինչպիսի՞ մաթեմատիկական գործողությամբ պետք է արտահայտել:

Միջառարկայական կապերը: Հանրահաշվի հանրակրթական կարևորագույն արժեքներից մեկը նրա կիրառությունն է հարակից ուսումնական առարկաները ուսումնասիրելու, դրանցում առաջացած օրինաչափությունները հասկանալու և հիմնավորելու մեջ: Այստեղ պետք է նկատի ունենալ, որ այլ ուսումնական առարկաների, այդ թվում՝ հանրահաշվի հետ հայոց լեզվի միջառարկայական կապերում թելադրող կողմը հայոց լեզուն է, իսկ ուսումնական այլ առարկաների հետ հանրահաշվի միջառարկայական կապերում թելադրող կողմը հանրահաշիվն է: Սա նշանակում է, որ բոլոր այդ առարկաների ուսումնական ծրագրերի, դասագրքերում ընդգրկված նյութերի հերթականության ընտրության հարցերում պետք է ելնել այն հնարավորություններից, որ տվյալ պահին թույլ է տալիս աշակերտի ստացած ծրագրային հանրահաշվական գիտելիքը: Իհարկե, կարող են լինել նաև որոշ բացառություններ: Օրինակ, աշխարհագրությունից մասշտաբի հասկացությունը ունի հանրահաշվական ու երկրաչափական արմատներ, բայց այն անցնում են չորրորդ դասարանում, որտեղ նշված մաթեմատիկական արմատների ուսումնասիրությունը անհնար է կատարել: Այս դեպքում նմանության հասկացության ուսուցման ընթացքում աշխարհագրության այդ գիտելիքը օգտագործվում է մաթեմատիկական բարդ հասկացությունը աշակերտների համար ընկալելի դարձնելու համար: Նույնը կարող է վերաբերել նաև ֆիզիկայում ածանցյալի կիրառությանը և այլ դեպքերի:

Ներկա դասընթացում լայնորեն են դիտարկվում երկրաչափության հետ միջառարկայական կապերը: Անդրադառնանք միայն մի քանի խնդրի: Նշված կապերում մեծ տեղ ունի հանրահաշվում կոորդինատական մեթոդը: 8-րդ դասարանում ուսումնասիրվում է «Պատկերների հանրահաշիվը» ծավալուն թեման, որը ամբողջովին նվիրված է կոորդինատական մեթոդի մանրակրկիտ ուսումնասիրությանը: Կարևոր ենք համարում այստեղ հանրահաշվի և երկրաչափության լեզուների, նրանց օբյեկտների միջև զուգահեռների հետևողական անցկացումը: Թվային ուղղի վրա հավասարության, անհավասարության, անհավասարումների, ոչ խիստ անհավասարումների, անհավասարումների համակարգերի և համախմբերի լուծման պատկերումը, թվային միջակայքերի գործածությունը և այլ մոտեցումներ արմատապես նոր հիմքերի վրա են դնում հանրահաշվի առանցքային հասկացությունների ուսումնասիրությունը:

Երկրաչափական մեկնաբանությունների և պատկերումների ավելի լայն հնարավորություններ է ընձեռնում կոորդինատական հարթությունը: Կարևոր ենք համարում հանրահաշվական հիմնական բանաձևերի գրաֆիկական պատկերումները, մասնավորապես՝ կարևոր նորույթ են պարզագույն անհավասարումների գրաֆիկական պատկերումները: Գրաֆիկական մեթոդի կիրառման լայն հնարավորություններ են ստեղծում հանրահաշվական արտահայտության գրաֆիկի և համեմատականությունների գրաֆիկ հասկացությունները:

Կոորդինատական մեթոդը լայնորեն կիրառվում է հետագա բոլոր թեմաների ուսումնասիրության ընթացքում: Մասնավորապես՝ ֆունկցիաների ուսումնասիրությանը նվիրված բաժիններում կառուցվում են դասընթացում հանդիպող կարևորագույն բոլոր ֆունկցիաների գրաֆիկները:

Ամուր են նաև ֆիզիկայի հետ հանրահաշվի միջառարկայական կապերը: Այդ կապերը այստեղ ունեն երկակի բնույթ: Մի կողմից հանրահաշվական գիտելիքը օգտագործվում է ֆիզիկական երևույթները ուսումնասիրելու համար, մյուս կողմից՝ ֆիզիկայի երևույթները լցնում են հանրահաշվական գիտելիքի կիրառական ոլորտը և առարկայական ու հետաքրքիր են դարձնում հանրահաշվի վերացական նյութի ուսուցումը:

Հանրահաշվի դասընթացում ֆիզիկական երևույթների դիտարկման լայն հնարավորություն են տալիս մեծությունները: Մեծությունների մի մասը՝ ժամանակը, արագությունը, ջերմությունը և այլն, ուսումնասիրվում են ֆիզիկայի մեջ, և նրանց ներառումը հանրահաշվի դասընթացում հնարավորություն է տալիս այստեղ ներգրավելու նաև նրանցով չափվող ֆիզիկական առարկաներն ու երևույթները: Ավանդաբար հանրահաշվի դասընթացում մեծությունների միջոցով ֆիզիկայի երևույթների ուսումնասիրությունը իրագործվում է խնդիրների համակարգի միջոցով: Դիտարկվող դասընթացում նույնպես լայնորեն կիրառվում է այս մոտեցումը: Սակայն նրանում կատարված է նաև զուտ ֆիզիկական բովանդակությամբ տեսական նյութի շարադրանք:

Ֆիզիկայի հետ միջառարկայական կապերի տեսանկյունից չափազանց կարևոր է կշռույթի հասկացությունը, որի ներմուծումը կարևորվում է մի շարք տեսանկյուններից: Հանրահաշվի դասընթացում ֆիզիկական երևույթների ներգրավման և ուսումնասիրության մեծ հնարավորություն են ստեղծում նաև համեմատականությունները:

Դասընթացում, մանավանդ՝ նրա խնդիրների համակարգում, լայնորեն են կիրառվում կենսաբանության հետ միջառարկայական կապերը: Որպես օրինակ նշենք ջերմաստիճանի որոշման խնդիրը՝ կախված ծղրիդի ճռռոցների թվից, մարդու կշռի որոշման խնդիրը՝ կախված հասակից, երեխայի քնելու ժամանակի որոշումը՝ կախված տարիքից, մարդու գիրության որոշման եղանակը՝ կախված նրա մեջքի և կոնքի չափերի հարաբերությունից, սրտի աշխատանքը՝ կախված գիրությունից և այլն:

Դասընթացում մեծ կիարռություն ունեն նաև աշխարհագրությունից վերցրած բազմաթիվ փաստեր ու տեղեկություններ: Դրանք հիմնականում կիրառվում են տեսական նյութը նախապատրաստելու, մեկնաբանելու և հետաքրքիր դարձնելու համար: Դասընթացում լայնորեն գործածվում են նաև պատմությունից, տնտեսագիտությունից, ֆիզկուլտուրայից և սպորտից վերցրած փաստերը և դրանց վերլուծությունը:

Մայրենիի հետ հանրահաշվի միջառարկայական կապերը: Հանրակրթական դպրոցի առանցքային առարկան մայրենի լեզուն է. առանց դրա լավ իմացության անհնար է շարադրել որևէ առարկայի վերաբերյալ ինչ-որ գիտելիք: Փորձը ցույց է տալիս, որ շատ դեպքերում աշակերտը չի կարողանում մաթեմատիկական գիտելիքը շարադրել հայերենի վատ իմացության պատճառով: Միաժամանակ՝ լավ դրված հայերենը աշակերտի խելացիության անսխալ վկայությունն է:

Սակայն հայերենի իմացությունը շատ ավելի բարդ խնդիր է, քան մաթեմատիկական՝ թեկուզև բարդ խնդրի լուծումը: Մեր կարծիքով դպրոցում դասավանդվող բոլոր ուսումնական առարկաների հիմնական նպատակներից մեկը պետք է լինի սովորողների հայերենի իմացության խորացումը, կարևորագույն խնդիր, որի վրա դժբախտաբար քիչ ուշադրություն է դարձվում: Այս տեսակետից չափազանց մեծ է հանրահաշվի դերը, որը հայոց լեզվից հետո հաջորդ կարևոր ու առանցքային դպրոցական առարկան է:

Այստեղ մենք կաշխատենք բացահայտել հալոց լեզվի հետ հանրահաշվի միջառարկայական կապերի իրականացման հետ կապված որոշ հարցեր (տես նաև [55]: Քննարկվող հարցի առնչությամբ հետաքրքիր են Ա. Մաշուրյանի դիտարկումները [36]:

ա. Հանրակրթական դպրոցի հանրահաշվի դիտարկվող դասագրքերի առանձնահատկություններից մեկը հանրահաշվի ներկայացումն է որպես ինչ-որ գործառույթներ և խնդիրներ լուծելու համար ստեղծված լեզու: Դասագրքերում հանրահաշվի լեզվի կառուցումը իրականացվում է հայոց լեզվի հետ զուգահեռների և փոխհարաբերությունների անցկացման ու հաստատման ճանապարհով:

Փոխհարաբերությունների նախնական փուլում կարևորվում է հանրահաշվի լեզվի և հայոց լեզվի հիմնական լեզվական հասկացությունների միջև զուգահեռների հաստատումը: Այս տեսակետից ամենակարևորը փոփոխականի ներմուծումն է, նրա դերի և գործառույթի բացահայտումը հայոց լեզվում: Կարևոր է նաև հայոց լեզվի բառ, արտահայտություն և հանրահաշվի լեզվի հանրահաշվական արտահայտություն հասկացությունների միջև զուգահեռների անցկացումը:

Հաջորդ կարևոր խնդիրը հանրահաշվի լեզվում նախադասությունների կազմումն է: Առաջին հերթին այստեղ առաջ է քաշվում հավասարության և անհավասարության հասկացությունների հստակեցման հարցը: Հանրահաշվի դասընթացում լեզվի հստակեցման խնդիրը դրվում է նաև հանրահաշվի կիրառական ոլորտի համար: Այստեղ, որպես ուսումնասիրության ընդհանուր ելակետ առաջ է քաշվում առարկա – մեծություն – թիվ – տառ սխեմա: Այն ցույց է տալիս ինչպես հանրահաշվի ուսումնասիրության հեռահար նպատակը, այնպես էլ ուսումնասիրության ռազմավարական գիծը: Նշենք, օրինակ, որ հանրահաշվի նախկին դասագրքերում «առարկայի մաս» հասկացությունը չէր ներմուծվում, մինչդեռ այն նույնքան գործածական է, որքան «թվի մաս» հասկացությունը: Այստեղ կարևոր է հասկանալ, որ նշված սխեմայի մեջ հայոց լեզվի ոլորտը առարկաներն են, իսկ հանրահաշվի ոլորտը՝ թվերը և տառերը, իսկ մեծությունները կազմում են միջանկյալ օղակ: Հայոց լեզուն ավելի բազմազան ու հարուստ է, և հանրահաշվական հիմնական առարկաներն ու փոխհարաբերությունները ունեն տարբեր անվանումներ: Դասընթացում կատարվում է դրանց մանրակրկիտ ուսումնասիրություն: Հավելված 2-ում բերված 1 աղյուսակը ցույց է տալիս, օրինակ, առարկաների մեծ կամ փոքր լինելու առնչությունների համար հայոց լեզվում գործածվող բառերի ցանկը՝ կախված նաև առարկաների սեռից:

Նման հարցերի ուսուցումը կրկնակի օգտակար է՝ ինչպես հայոց լեզվի համակողմանի իմացության, այնպես էլ հանրահաշվի կիրառական խնդիրների լուծման ընթացքում ճիշտ կողմնորոշվելու տեսանկյունից:

Հանրահաշվի և հայոց լեզվի միջառարկայական կապերի ստեղծման լայն հնարավորություններ են տալիս հանրահաշվական գործողությունները: Հանրահաշվական գործողությունները առօրյա կյանքում առարկայական կիրառություն են ստանում համապատասխան մոդելների միջոցով: Հարկ է նշել, որ մեր հանրակրթական դպրոցների նախկին ծրագրերում գործողությունների մոդելների ուսուցում չէր նախատեսվում: Աշակերտները գործողությունների, նրանց հատկությունների վերաբերյալ գիտելիքի հրաշալի յուրացման դեպքում անգամ, համակարգված ձևով չէին պատկերացնում դրանց կիրառական նշանակությունը, և շատ դեպքերում առարկայական ոլորտում գործողությունների համար կիրառվող լեզվական համարժեքները նրանց համար մնում էին անընկալելի: Հասկանալի է, որ նման ուսուցումը ավելի շատ կրում է ձևական բնույթ: Օրինակ, երբ աշակերտը «ջրհորը խորացրին 2 մ, ինչքա՞ն կդառնա նրա խորությունը, եթե սկզբում 4 մ էր» հարցին պատասխանելիս չի կարողանում կողմնորոշվել գործողության ընտրության հարցում, ուսուցիչը չի մտածում, որ աշակերտը այդ հարցադրման պատասխանը չի տալիս, որովհետև նա այն չի սովորել, այսինքն՝ «խորացնել» բառի ճշգրիտ նշանակությունը՝ որպես գումարման գործողության առարկայական դրսևորում, նա չգիտի, որովհետև չի անցել: Հանրահաշվի ներկա դասընթացի առանձնահատկություններից մեկը այս բացի վերացումն է: Նշենք նաև, որ արևմտյան շատ երկրների մաթեմատիկայի ծրագրերում չնայած նշված մոդելները ուսուցանվում են, սակայն հարցի լեզվական կողմը այնտեղ նույնպես պատշաճ ուշադրության չի արժանանում:

Գումարման գործողության համար հանրահաշվի դասընթացում դիտարկվում են միավորման և ավելացման մոդելները: Համապատասխանաբար ընդունվում են երկու սկզբունքներ. Միավորման գումարային օրենքը. Ընդհանուր մաս չունեցող երկու համասեռ առարկաների միավորման մեծությունը հավասար է այդ մեծությունների գումարին, և ավելացման գումարային օրենքը. ավելացումից հետո ստացված քանակությունը հավասար է սկզբնական քանակության և ավելացված քանակության գումարին: Այսպիսով, առարկայական ոլորտում գումարման գործողությունը դրսևորվում է համասեռ առարկաների միավորման և համասեռ առարկաներից մեկը մյուսին ավելացնելու գործողությունների ձևերով: Սակայն առարկաների հետ նման գործողություններ կատարելիս միավորման հետ միասին գործածվում են նաև այլ բառեր: Կապված առարկաների սեռից, հայոց լեզվում նրանց միավորումը նշելու համար գործածվում են միացնել, կցել, խառնել, միասին և այլ բառեր (տես [42, էջ 73], [63, էջ 68]): Նշենք, որ այստեղ խոսքը գնում է առարկաների ու նրանց հետ կատարվող գործողությունների մասին: Այսպիսով՝ նշված բառերը ինչ-որ իմաստով կարելի է դիտել որպես «գումարել» բառի հոմանիշներ: Ավելացման փոխարեն հայոց լեզվում գործածվող բառերն ավելի շատ են [42, էջ 76, Հավելված 1, աղյուսակ 3]: Դրանցից են. երկարության համար՝ մեծացնել, երկարացնել, բարձրացնել, խորացնել, կցել, ձգել, լայնացնել, միացնել, մակերեսի համար՝ մեծացնել, ընդարձակել, լայնացնել, կցել, միացնել, ծավալի համար՝ մեծացնել, ընդարձակել, հաստացնել, կցել, միացնել, ծավալել, զանգվածի համար՝ մեծացնել, ծանրացնել, շատացնել, կցել, միացնել, խոշորացնել, ժամանակի համար՝ մեծացնել, երկարացնել, ձգել, արագության համար՝ մեծացնել, բարձրացնել, ջերմության համար՝ մեծացնել, տաքացնել, բարձրացնել, գնի համար՝ մեծացնել, թանկացնել, բարձրացնել, տոկոսադրույքի համար՝ մեծացնել, բարձրացնել: Այստեղ նույնպես խոսքը վերաբերվում է ոչ թե մեծություններին, այլ առարկաներին. Խորացրին ոչ թե ջրհորի երկարությունը, այլ ջրհորը, ձգեցին ոչ թե պարանի երկարությունը, այլ պարանը, հաստացրին ոչ թե գերանի հաստությունը, այլ գերանը:

Հանման գործողության համար նույնպես ընդունվում են երկու սկզբունքներ: Դրանցից առաջինը պակասեցման գումարային սկզբունքն է. տրված առարկայից նրա ինչ-որ մասը պակասեցնելուց հետո ստացված առարկայի մեծությունը հավասար է այդ առարկայի և պակասեցված մասի մեծությունների տարբերությանը: Այսպիսով, հանման գործողության առարկայական դրսևորումներից մեկը առարկայի պակասեցումն է: Պակասեցման համար հայոց լեզվում գործածվող բառերը նույնպես կախված են առարկայի սեռից և առարկայից: Երկարության համար՝ օտարել, առանձնացնել, փոքրացնել, կարճացնել, ցածրացնել, ծանծաղեցնել, կտրել, գործածել, օգտագործել, մակերեսի համար՝ օտարել, առանձնացնել, փոքրացնել, նեղացնել, գործածել, օգտագործել, ծավալի համար՝ օտարել, առանձնացնել, փոքրացնել, նվազեցնել, բարակացնել, սեղմել, գործածել, օգտագործել, թափել, զանգվածի համար՝ օտարել, առանձնացնել, փոքրացնել, թեթևացնել, քչացնել, թափել, նվազեցնել, գործածել, օգտագործել, արագության համար՝ փոքրացնել, ցածրացնել, իջեցնել, նվազեցնել, գնի համար՝ փոքրացնել, քչացնել, իջեցնել, էժանացնել, գործածել, օգտագործել, ծախսել, վճարել, ժամանակի համար՝ փոքրացնել, կարճացնել, նվազեցնել, տոկոսադրույքի համար՝ փոքրացնել, իջեցնել, նվազեցնել: Օրինակ, մենք ասում ենք՝ ճանապարհը կարճացրինք, ջրհորը ծանծաղեցրին, պարանը կտրեցին, ապրանքը էժանացրին և այլն: Հանման հաջորդ կիրառությունը կապված է քանակությունների համեմատման հետ: Նման հնարավորություն է տալիս քանակությունների համեմատման հանման օրենքը. Երկու համասեռ առարկաների մեծությունների տարբերությունը ցույց է տալիս, թե դրանցից մեկը մյուսից ինչքանով է տարբերվում: Քանակությունների համեմատման ժամանակ «ավելի» և «պակաս» բառերի հետ զուգընթաց հայոց լեզվում գործածվող համապատասխան բառերը բերվում են հավելված 1-ի աղյուսակ 2-ում:

Ավելացումը գումարման գործողության հետ միասին հանդես է գալիս նաև որպես բազմապատկման գործողության առարկայական դրսևորում: Համապատասխան մոդելը ավելացման արտադրյալային սկզբունքն է. տրված առարկան ինչ-որ թիվ անգամ ավելացնելուց հետո ստացված առարկայի մեծությունը հավասար է այդ թվի և տրված առարկային մեծության արտադրյալին: Բնականաբար, ավելացման գումարային և արտադրյալային մոդելները ունեն որոշակի նմանություն և նրանց լեզվական դրսևորումները իրարից քիչ են տարբերվում, և սովորողների լեզվամտածողության զարգացման տեսակետից չափազանց կարևոր է ավելացման գումարային և արտադրյալային սկզբունքների միջև զուգահեռի անցկացումը: Այստեղ օգնում են հետևյալ տիպի օրինակները. Աշակերտի հասակը ավելացավ 5 սանտիմետրով, աշակերտի ունեցած դրամը ավելացավ 2 անգամ և այլն: Հասկանալի է, որ չնայած երկու իրադրության մեջ էլ ավելացում ենք կատարում, սակայն ստացված քանակությունը գտնելու համար առաջին դեպքում կատարում ենք գումարում, երկրորդում՝ բազմապատկում:

Նշված զուգահեռի անցկացումը շարունակվում է նաև քանակությունների համեմատման հանման և քանորդային օրենքների ուսուցման ընթացքում: Համաձայն քանակությունների համեմատման քանորդային օրենքի, երկու համասեռ առարկաների մեծությունների հարաբերությունը ցույց է տալիս, թե դրանցից մեկը մյուսից ինչքան անգամ է տարբերվում: Այսպիսով համեմատումը հանդես է գալիս ոչ միայն որպես հանման, այլև բաժանման գործողության առարկայական դրսևորում: Այստեղ ևս համապատասխան լեզվական դրսևորումներ միջև տարբերությունը նուրբ է, և ուսուցումը պահանջում է որոշակի ջանքեր: Կարելի է բերել այսպիսի օրինակ: Դիցուք ճանապարհներից մեկը 100 կմ է, մյուսը՝ 150 կմ: Այս ճանապարհները մենք կարող ենք համեմատել երկու եղանակով՝ քանակությունների համեմատման հանման և քանակությունների համեմատման բաժանման օրենքներով: Առաջին դեպքում մենք կունենանք 150 կմ – 100 կմ = 50 կմ: Համապատասխան լեզվական դրսևորումն է. երկրորդ ճանապարհը առաջինից երկար է 50 կմ-ով: Երկրորդ դեպքում մենք կունենանք 150 կմ/100 կմ = 1,5: Համապատասխան լեզվական դրսևորումն է. երկրորդը ճանապարհը առաջինից երկար է 1,5 անգամ: Անհրաժեշտ է ուշադրություն դարձնել երկու հանգամանքի վրա. Նախ՝ առաջին դեպքում համեմատումը արտահայտվում է երկարությամբ, այն 50 կմ է, իսկ երկրորդ դեպում համեմատումը արտահայտվում է թվով, այն 1,5 է: Այնուհետև, առաջին՝ հանման գործողության դեպքում համեմատման արդյունքը արտահայտող մեծությունը ավարտվում է «ով» վերջածանցով, իսկ երկրորդ դեպքում համեմատման արդյունքը արտահայտող թվից հետո գրվում է «անգամ» բառը:

Հայոց լեզվի հետ փոխհարաբերությունների տեսակետից կարևոր դեր են խաղում առարկայի փոփոխության օրենքները, որոնք կապ են հաստատում առարկաների ավելացման և պակասեցման գործողությունների միջև: Զարմանալի է, բայց համեմատաբար ավելի հեշտ է ընկալվում առարկայի փոփոխության հակադիրի օրենքը. Առարկայի պակասեցումը x քանակությամբ նույնն է, ինչ նրա ավելացումը x քանակությամբ, և առարկայի ավելացումը x քանակությամբ նույնն է, ինչ նրա պակասեցումը x քանակությամբ: Օրինակ, մենք կարող ենք ասել՝ մեր ունեցած գումարը ավելացավ -20000 դրամով, դա նշանակում է, որ իրականում այն պակասել է 20000 դրամով: Կամ, եթե մենք ասում ենք, որ պարանը կարճացել է -2 մետրով, նշանակում է այն 2 մետրով ավելացել է և այլն: Ավելի դժվարությամբ է ընկալվում առարկայի փոփոխության հակադարձի օրենքը. Առարկայի պակասեցումը x անգամ նույնն է, ինչ նրա ավելացումը 1/x անգամ, և առարկայի ավելացումը x անգամ նույնն է, ինչ նրա պակասեցումը 1/x անգամ: Սովորաբար, երբ ասում ենք՝ «ինչ-որ առարկա ավելացրինք», ապա դա ընկալվում է որպես առարկայի մեծացում: Այս տեսակետից հեշտությամբ է պատասխանվում, օրինակ, «Ապրանքն ավելացավ 2 անգամ: Ինչքա՞ն դարձավ այն, եթե սկզբում 5 կգ էր» հարցին: Մենք եղած քանակությունը՝ 5 կգ-ը, բազմապատկում ենք 2-ով: Կստացվի 10 կգ: Այժմ որոշ չափով փոխենք հարցադրումը. «Ապրանքն ավելացավ ½ անգամ: Ինչքա՞ն դարձավ այն, եթե սկզբում 5 կգ էր»: Բնականաբար մենք պետք է կատարենք նույն գործողությունը, ինչ նախորդում: Կստանանք՝ ½ · 5 կգ = 2,5 կգ: Այսպիսով, ավելացման արդյունքում առարկան փաստորեն պակասել է՝ 5 կիլոգրամից դարձել է 2,5 կգ: Իհարկե, նման արդյունք ստացվեց այն պատճառով, որ ավելացումը կատարվել էր ½ անգամ, իսկ ½ ը 1 ից փոքր է. 1 ից փոքր թիվ անգամ ավելացնելիս իրականում առարկայի քանակությունը պակասում է: Այս օրենքը ցույց է տալիս, որ ավելացնելու և պակասեցնելու գործողությունները ունեն հարաբերական բնույթ և կախված են ավելացման և պակասեցման չափերից և կարող են փոխարինվել իրարով: Նկատի ունենալով ասվածը «Հանրահաշիվ 7»-ում առարկաների փոփոխության արտադրյալային օրենքին նախորդում է առարկայի փոփոխության հակադարձի օրենքը. Մեծությունը որևէ թիվ անգամ պակասեցնել նշանակում է այն բազմապատկել այդ թվի հակադարձով: Իհարկե, նպատակահարմար է այստեղ առարկայի փոփոխության հակադիրի օրենքի հետ զուգահեռի անցկացումը: Նշենք նաև, որ հայոց լեզվում, կախված առարկայից կամ նրա սեռից, «ավելացնել» և «պակասեցնել» բառերի փոխարեն կարող են գործածվել նաև այլ բառեր (տես հավելված 1, աղյուսակ 3:

գ. Կշռույթի մասին (տես հավելված 1, աղյուսակ 4): Հանարահաշվի դասընթացում դիտարկվող որոշ մեծություններ բնութագրում են մեզ շրջապատող առարկաները, իսկ այլ մեծություններ բնութագրում են երևույթները: Օրինակ, երկարությունը բնութագրում է պարանը, ճանապարհը կամ երկարությամբ օժտված ցանկացած այլ առարկա, իսկ արագությունը բնութագրում է մարմնի շարժումը, ապրանքի գինը բնութագրում է նրա վաճառքը և այլն: Իսկ ինչպե՞ս է բնութագրվում շարժումը արագության միջոցով: Եթե մենք դիտարկում ենք հավասարաչափ շարժվող մարմնի անցած s ճանապարհի և այդ ընթացքում ծախսած t ժամանակի համեմատականությունը, ապա մարմնի արագությունը s/t հարաբերությունն է և այն բնութագրում է հենց այդ համեմատականությունը: Նույն կերպ, եթե մենք դիտարկում ենք ապրանքի վաճառքի ընթացքում ապրանքի n քանակի և այդ քանակից ստացված s գումարի՝ տվյալ քանակի արժեքի համեմատականությունը, ապա ապրանքի գինը s/n հարաբերությունն է և այն բնութագրում է նշված համեմատականությունը:

Հասկանալի է, որ առօրյա կյանքում մենք հանդիպում ենք ոչ միայն արագությամբ ու գնով բնութագրվող երևույթներ կամ համեմատականություններ: Օրինակ, հավասարաչափ շարժվող մարմնի ուսումնասիրման ընթացքում մենք կարող ենք դիտարկել նրա ծախսած t ժամանակի և այդ ընթացքում անցած s ճանապարհի համեմատականությունը: Այն կբնութագրվի t/s հարաբերությամբ, որը ցույց է տալիս, թե ճանապարհի յուրաքանչյուր միավորը անցնելու համար ինչքան ժամանակ է ծախսում մարմինը: Նույն կերպ մենք կարող ենք դիտարկել մարմնի շարժման ընթացքում միավոր ճանապարհի վրա ծախսած բենզինի քանակությունը՝ ծախսած բենզինի և այդ ընթացքում անցած ճանապարհի քանակության հարաբերությունը, մեկ դոլարի արժեքը՝ դրամի քանակության և նրա դիմաց տրված դոլարի քանակության հարաբերությունը, մեկ լիտրում աղի պարունակությունը՝ աղաջրի ընդհանուր քանակության և նրանում աղի պարունակության հարաբերությունը և այլ կարոր հարաբերություններ կամ մեծություններ: Այս բոլորի մեջ միայն արագությունն ու գինն են հայերենում հայտի իրենց կոնկրետ անվանումներով: Անգլերեն լեզվում նման բոլոր համեմատականությունները նկարագրելու համար գործածվում է rate բառը: Հասկանալի է, որ տարբեր բովանդակությամբ երևույթների մի ամբողջ խմբի միասնական դիտարկումը, մեկ հասկացության միջոցով դրանց համակարգումը մեծապես նպաստում է սովորողների լեզվատրամաբանական մտածողության զարգացմանը, աշխարհընկալման խորացմանն ու լայնացմանը: Հանրահաշիվ 7 [46] դասագրքում rate բառի համար առաջարկվում է հայերեն կշռույթ բառը: Նկատենք, որ x/y կշռույթը հայերեն գրառվում է «x առ y» տեսքով: Փաստորեն, / նշանը գրառվում է «առ» ձևով: Կատարենք որոշ համեմատություն անգլերենի հետ: Օրինակ, 50 km/hour կշռույթը անգլերենում գրվում է 50 km per hour տեսքով: Հայերենում դրան համարժեք գործածում ենք 50 կմ առ ժամ գրառումը: Անգլերենում / նշանը գրառվում է per տեսքով: Այսպիսով՝ առ-ը անգլերեն per-ի հայերեն թարգմանությունն է և թույլ է տալիս կշռույթի հասկացության շրջանակներում կատարել նրա բոլոր գործառույթները:

Հասկանալի է, որ կշռույթի հասկացությունը նոր է և նրա արմատավորումը պահանջում է լրացուցիչ ջանքեր [55, 91-94]: Անհրաժեշտ արդյունքի հասնելու համար կպահանջվի նաև հայոց լեզվի, ֆիզիկայի, քիմիայի, աշխարհագրության միջառարկայական կապերի կիրառում:

դ. Հայոց լեզվի հետ փոխհարաբերության հարցը տրամաբանության տարրերի ուսուցման շրջանակներում: Ինչպես նշվեց վերևում, հանրահաշվի դասընթացում տրամաբանության որոշ թեմաների ներառումը հնարավորություն է տալիս հստակեցնելու սովորողների լեզվատրամաբանական մտածողության հիմքում ընկած մի շարք կարևոր հասկացություններ և ավելի խորացնել հայոց լեզվի ու հանրահաշվի լեզվի միջև զուգահեռների անցկացումը:

ե. Վարժությունների մասին: Հայոց լեզվի և հանրահաշվի կապերի հետագա խորացմանը, սովորողների լեզվական մտածողության զարգացմանը մեծապես նպաստում են լեզվական ուղղվածությամբ վարժությունները, վարժություններ որոնք չեն լուծվում մաթեմատիկայի ավանդական մեթոդներով: Նման վարժությունները, ըստ էության, պարզագույն իրադրությունների մաթեմատիկական մոդելավորումներ են, իրադրություններ, որոնց ձևակերպումը հայոց լեզվով կատարվում է հանրահաշվական լեզվի և հայոց լեզվի միջև գոյություն ունեցող օրինաչափությունների հիման վրա: Դրանց յուրացումը հնարավորություն կտա հետագայում հասկանալու և իրագործելու ավելի բարդ իրադրությունների մաթեմատիկական մոդելավորումներ, մասնավորապես՝ լուծելու զանազան բնույթի տեքստային խնդիրներ:

Այստեղ նշենք, որ չպետք է կարծել, թե առաջադրված վարժությունները պարզ լինելով տվյալ տարիքի աշակերտների համար՝ նպատակահարմար չեն: Ինչպես նշվեց վերևում, դրանց հիմնական նպատակը հանրահաշվական գործողության և նրա առարկայական համարժեքը արտահայտող լեզվական հոմանիշի միջև զուգահեռի անցկացումն է, դրա ամրապնդումը, գործողությունների կիրառման համար առարկայական հիմքի ստեղծումը, և լավ է, որ դրված նպատակին հասնում ենք ավելի պարզ միջոցներով, մասնավորապես՝ հեշտ վարժություններով: Այդ վարժությունները հաստատում են նաև այն, որ մաթեմատիկական գիտելիքները ունեն բնական, առարկայական արմատներ, և դրանց տիրապետումը կարող է օգնել լուծելու առօրյա կյանքում ծագած խնդիրները: Միաժամանակ, նման վարժություններն ունեն հոգեբանական նշանակություն. Մաթեմատիկական յուրաքանչյուր վարժության լուծման փաստը թույլ աշակերտին կարող է ինքնավստահություն հաղորդել իր ուժերի նկատմամբ: «Հանրահաշիվ 6» [42] դասագրքում բերված են նման տիպի բազմաթիվ վարժություններ (տես. [6+], դաս 2.4, N 9, 10, 17, դաս 3.1, N 7, 8, դաս 3.2, N 4, 11, 15, դաս 4.3, N 2, 5, 6, 7, դաս 4.4, N 3, 6, 7, դաս 4.6, N 1, 2, 46, 12, դաս 5.2, N 4, 7, դաս 5.11, N 5, 9, դաս 6.5, N 6, դաս 6.6, N 7, 9, դաս 6.11. N 4): Նման բազմաթիվ վարժություններ են ընդգրկված նաև [48] խնդրագրքում, դաս 2.4, N 1, դաս 3.1, N 1, դաս 3.2, N 1, 2, 3, դաս 3.6, N 7, 8, 9, դաս 4.3, N 15, դաս 4.4, N 2, 3, դաս 5.2, N 1, 2, 3, դաս 5.11, N 2, 3, դաս 6.5, N 6, 15):

գ. Տերմինների մասին: Առաջին հերթին խոսքը մաթեմատիկայի դպրոցական ողջ դասընթացում տերմինների միասնական համակարգ ստեղծելու մասին է: Կարելի է բերել օրինակներ, երբ կրտսեր, միջին և ավագ դպրոցներում միևնույն հասկացության համար գործածվում են տարբեր տերմիններ, և հակառակը, միևնույն տերմինը դասավանդման տարբեր մակարդակներում գործածվում է տարբեր իմաստներով, նրա համար բերվում են տարբեր սահմանումներ: Օրինակ, մաթեմատիկայի մի շարք դասագրքերում հանդիպում ենք «հավասարությունը ճիշտ է» բառակապակցությանը: Մինչդեռ, եթե բանաձևը հավասարություն է, ապա այն կեղծ լինել չի կարող, հանգամանք, որին հետևում են ինչպես երկրաչափության [4], այնպես էլ հանրահաշվի ու հանրահաշիվ և անալիզի հիմունքների դասընթացները [11, 12]:

Այնուհետև, չափազանց կարևոր է թվում հանրահաշվի և, ընդհանրապես, ողջ մաթեմատիկական կառույցի համար որոշ հիմնարար հասկացությունների ճշգրտման խնդիրը: Այս տեսակետից խոսենք մի քանի կարևոր հասկացությունների մասին:

Հանրահաշվի նախկին դասընթացներում և մաթեմատիկայի 5-րդ դասարանի գործող դասագրքում [281], [106] դիտարկվում են մեծությունների ուղիղ և հակադարձ համեմատականությունների հասկացությունները՝ հետևյալ սահմանումներով. y և x մեծությունները կոչվում են ուղիղ համեմատական, եթե նրանց համապատասխան արժեքների հարաբերությունը մնում է հաստատուն՝ որևէ k թվի հավասար՝ y/x = k: y և x մեծությունները կոչվում են հակադարձ համեմատական, եթե նրանց համապատասխան արժեքների արտադրյալը հավասար է մի հաստատուն k թվի՝ y = k x: Այս սահմանումները ունեն երկու արմատական թերություն: Առաջին. Մաթեմատիկական տառերի և բանաձևերի միջոցով տրված սահմանման մեջ չի երևում հասկացության ֆիզիկական բովանդակությունը, ինչի համար որ այն մտցվում է: Պատահական չէ, որ համապատասխան բովանդակությամբ կիրառական խնդիրներ լուծելիս աշակերտները ընդհանրապես ուշադրություն չեն դարձնում խնդրի բովանդակության վրա, իսկ խնդրում դիտարկված համեմատականության բնույթի պարզաբանման հարց ուսուցչի կողմից առհասարակ չի դրվում: Հաջորդ թերությունը վերաբերում է նրան, որ, ուղիղ և հակադարձ համեմատականությունների հասկացությունները հասկանալու դեպքում անգամ, խելոք աշակերտը կարող է իրեն կամ ուսուցչին հարց տալ. Ես գիտեմ ուղիղ և հակադարձ համեմատականությունների հասկացությունները, իսկ ի՞նչ է համեմատականությունը: Իհարկե, հարցի պատասխանը նշված դասընթացում չի տրվում: Եվ, նման մոտեցման պայմաններում չի էլ կարող տրվել:

Նկատենք, որ «համեմատություն» եզրը գործածվում է նաև երկրաչափության դասընթացում: Այնտեղ երկու եռանկյուններ կոչվում են նման, եթե նրանց անկյունները հավասար են, իսկ համապատասխան կողմերը համեմատական: Այսպիսով, եթե նման եռանկյունների համապատասխան կողմերն են a և a′, b և b′, c և c′, ապա տրված սահմանման մեջ համեմատականություն ասելով հասկացվում է a/a′ = b/b′ = c/c′

համակարգը: Սակայն այդ համակարգը արտահայտում է ոչ այլ ինչ, եթե ոչ՝ համապատասխան մեծությունների ուղիղ համեմատականություն: Այսպիսով, երկրաչափության դասընթացում նույնպես առկա է «համեմատականություն» եզրի հանրահաշվի հետ անհամաձայնեցված գործածությունը:

Հանրահաշվի [42, 63] դասընթացում ներմուծվում է մեծությունների համեմատականության հասկացությունը. Երկու մեծությունների համեմատման ընթացքը անվանվում է համեմատականություն: Հետագայում դիտարկվում են հաստատուն գումարով, տարբերությամբ, արտադրյալով և քանորդով համեմատականությունները՝ որպես համեմատականությունների մասնավոր տեսակներ: Չխոսելով այս մոտեցման այլ առավելությունների մասին, նշենք, որ այստեղ վերևում առաջ քաշված հարցադրումները արդեն չեն առաջանում: Այս տեսակետից ուշագրավ է «Հանրահաշիվ 6» ([42]), դասագրքի, 2.5 դասի 9 վարժությունը. Նկարագրեք իրադրություն, որտեղ ընթանում է համեմատականություն հետևյալ մեծությունների միջև. ա. զանգվածի և ծավալի, բ. երկարության և գնի, գ. ժամանակի և մակերեսի, դ. ջերմության և ժամանակի, ե. ժամանակի և գնի, զ. զանգվածի և գնի:

Կարևոր է նաև հետևյալ հասկացության սահմանումը. Եթե մեծությունների համեմատականության մեջ առաջին մեծության a քանակությունը համեմատվում է երկրորդ մեծության b քանակության հետ, ապա կասենք, որ a-ն համեմատական է b-ին: Ինչպես տեսնում ենք, համեմատականության սահմանման հիմքում ընկած են ընթացք և համեմատել նախնական հասկացությունները: Համեմատումը, որպես ճանաչողության կարևորագույն հնարքներից մեկը, սովորողներին ծանոթ է հավասարության և անհավասարության բանաձևերի դիտարկումից: «Ընթացք» նախնական հասկացության մատչելիությունը ապահովվում է նախապես դիտարկվող մի շարք օրինակների միջոցով. Ավտոմեքենայի շարժման ընթացք, տարադրամի փոխանակման ընթացք, ապրանքի վաճառքի ընթացք և այլն: «Ընթացք» հասկացությունը ընկած է նաև ֆունկցիայի սահմանման հիմքում: Այստեղ նախ բերվում է հաջորդ նախնական հասկացությունը՝ առնչվել: Բերված պարզ ու բազմազան օրինակները ավելի քան հասկանալի են դարձնում այս հասկացությունը. Աշակերտը առնչվում է իր ուսուցչի հետ, մարդը առնչվում է իր տարիքը ցույց տվող թվի հետ, յուրաքանչյուր փողոց առնչվում է այն քաղաքի հետ, որում գտնվում է այն [49, էջ 251]: Ահա, «առնչվել» և «ընթացք» հասկացությունների միջոցով սահմանվում է առնչություն հասկացությունը. Տարրերի համեմատման ընթացքը անվանվում է առնչություն: Սա նոր տերմին է հանրահաշվի դասընթացում և հնարավորություն է տալիս ներմուծելու ֆունկցիայի հասկացությունը. Ֆունկցիա է կոչվում այն առնչությունը, որում դիտարկվող յուրաքանչյուր տարր առնչվում է միայն մեկ տարրի հետ [49, էջ 252]:

Կարևոր է նաև հանրահաշվական մի շարք բանաձևերի անվանումների ճշգրտման հարցը: Հավասարություն, անհավասարություն, հավասարում, անհավասարում հասկացությունների արդեն ընդունված անվանումները թվում են հաջողված: Հավասարություն և հավասարում տերմինները ընդունվում են նաև ռուսական ուսումնամեթոդական գրականության մեջ, ճիշտ է՝ առաջինը այլ նշանակմամբ, որի մասին խոսվեց վերևում: Հայերենի լեզվակառուցվածքի առանձնահատկությունը, ի տարբերություն ռուսերենի, հիանալի հնարավորություն է տալիս ան նախածանցի միջոցով ստանալ անհավասարություն և անհավասարում տերմինները: Եթե ռուսերենում նման տարանջատում չկա, ապա չպետք է կասկածել հայերենի գործածության արդյունավետության վրա: Անհավասարում եզրը մտցվում է [42] դասընթացում:

Հաջողված պետք է համարել նաև նույն դասընթացում «ուղղանկյունանիստ» եզրի ներմուծումը նախկինում գործածվող ուղղանկյուն զուգահեռանիստ եզրի փոխարեն:

Այստեղ հաջորդ կարևոր հարցը $\leq$ նշանը պարունակող բանաձևերի անվանումն է: Ավանդական ուսումնական գրականության մեջ դրանք անվանվում էին անհավասարություններ: Սա հոգեբանորեն չի ընկալվում աշակերտի կողմից: Իսկապես, ինչու± պետք է $1 \leq 1$ բանաձևը անհավասարություն անվանել, եթե այն $1=1$ հավասարության և $1 < 1$ անհավասարության տրամաբանական գումարն է, որոնցից առաջինը ճշմարիտ է, իսկ երկրորդը՝ կեղծ: Այսինքն՝ $1 \leq 1$ բանաձևը ճշմարիտ է իր $1 =$

1 բաղադրիչի՝ հավասարության ճշմարիտ լինելու շնորհիվ: Հետևապես՝ անհասկանալի է այն անհավասարություն անվանելու տրամաբանությունը: Ահա այս պատճառով հանրահաշվի ներկա դասագրքերում $\leq$ նշանը պարունակող բանաձևերի համար գործածվում են «ոչ խիստ անհավասարություններ» և «ոչ խիստ անհավասարումներ» տերմինները՝ ինչպես ընդունված է մաթեմատիկայում:

1.2. Դասընթացի կառուցման սկզբունքները և մեթոդները

1.2.1. Դիդակտիկայի սկզբունքները հիմնական դպրոցի հանրահաշվի դասընթացում: Հանրահաշվի դասընթացի կառուցման և հանրահաշվի ուսուցման հարցերը քննարկված են լայնորեն [223], [246], [268], [291], [338], [359], [388], [455], [470]: Դրանց հիմքում ընկած են ուսուցման դիդակտիկական սկզբունքները: Որպես ուսուցման ելակետային դրույթներ՝ դիդակտիկայի սկզբունքները ընկած են նաև հանրահաշվի դասընթացի կառուցման հիմքում և առանցքային նշանակություն ունեն նրա համար: Տեղի սղության պատճառով այստեղ կդիտարկենք միայն դրանցից մի քանիսը:

Գիտականության սկզբունքը: Դիդակտիկայի այս կարևոր սկզբունքը ենթադրում է ուսումնական նյութի համակարգված շարադրանք՝ նրա մասերի հերթականության, փոխկապակցվածության, միջառարկայական կապերի, գիտության ժամանակակից մակարդակի և սովորողների տարիքային առանձնահատկությունների հաշվառումով:

Հանրահաշվի նախկին դասագրքերի մեծագույն թերություններից մեկը նրանցում գիտականության դիդակտիկական սկզբունքի ոչ լիարժեք դրսևորումն էր: Այդ են վկայում մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկայի մի շարք մասնագետներ, այդ թվում՝ խորհրդային ճանաչված մասնագետներից մեկը՝ Ա. Ա. Ստոլյարը, որի կարծիքը՝ այդ դասագրքերում թեմաների միջև ներքին կապի բացակայության, տարածնունդ խառնակույտ լինելու մասին արդեն ներկայացվեց: Եվ ներկա դասագրքերի ստեղծման հիմնական շարժառիթներից մեկը ահա այդ խառնակույտի վերացումն է եղել:

Հասկանալի է, որ նունիսկ բուհական դասընթացներում դժվար է ներառնել գիտության ժամանակակից նվաճումները: Սակայն գիտության արդի վիճակը, այնուամենայնիվ, այս կամ այն ձևով կարող է իր ազդեցությունը թողնել հանրակրթական առարկաների դասավանդման ընթացքի վրա: Հանրահաշվի պարագայում թեև դպրոցական դասընթացի բուն բովանդակությունը ունի դարերի պատմություն, սակայն ժամանակակից մաթեմատիկան նրա վրա կարող է ազդել մի շարք կողմերով: Առաջին հերթին դա վերաբերում է դասընթացում ժամանակակից մաթեմատիկական լեզվի, մաթեմատիկական հասկացությունների և փաստերի ներմուծման հարցում ժամանակակից մոտեցումների կիրառմանը: Նման մոտեցումներ ուսուցման մեջ կիրառվում են պարբերաբար: Կոլմոգորովյան վերափոխությունների ընթացքում ցուցաբերվեցին արմատական մոտեցումներ: Մաթեմատիկական լեզվի ներմուծման խնդրում հաշվի չառնվեցին սովորողների տարիքային առանձնահատկությունները, հոգեբանական համապատասխանության խնդիրը և այլ հարցեր: Հետագայում իրավիճակը բարելավելու փորձեր արվեցին, բայց հաջողությունը մեծ չէր: Ասվածը դիտարկենք մի շարք կարևոր հասկացությունների և թեմաների օրինակների վրա:

1). Նշված տեսակետից հատկանշական է ֆունկցիայի հասկացության ուսուցման կազմակերպումը: Ա. Ի. Մարկուշևիչի խմբագրած հանրահաշվի դասընթացի առաջին հրատարակության մեջ [280] ցուցաբերվում է ֆունկցիայի հասկացության նկատմամբ միանգամայն ժամանակակից մոտեցում. Ֆունկցիան ներմուծվում է որպես երկու բազմությունների միջև համապատասխանություն, որի ընթացքում առաջին բազմության յուրաքանչյուր տարր երկրորդի մեջ ունի միայն մեկ պատկեր: Ներմուծվում են նաև ֆունկցիայի որոշման տիրույթի և արժեքների տիրույթի հասկացությունները: Հաջորդ հրատարակության մեջ [281] հեղինակները ավելի առաջ գնացին և A բազմությունից B բազմության մեջ տրված f ֆունկցիան ներմուծեցին որպես այդ բազմությունների միջև տրված երկտեղ առնչություն, այսինքն՝ AxB դեկարտյան արտադրյալի ենթաբազմություն, որն օժտված է $(x,y)\in f,(x,z)\in f\rightarrow y=z$ հատկությամբ: Ընդ որում, ներմուծվում են նաև առնչության որոշման տիրույթի և արժեքների տիրույթի հասկացությունները և ֆունկցիայի որոշման տիրույթը և արժեքների տիրույթը դիտարկվում են որպես երկտեղ առնչության համապատասխան հասկացությունների մասնավոր տեսակներ: Այսպիսով, նշված հասկացությունների ուսուցման կազմակերպումը տարվում էր մաթեմատիկայի բուհական դասընթացներում ընդունված չափանիշներով: Պետք է նկատել սակայն, որ այստեղ հեղինակները, տուրք տալով ժամանակակից մաթեմատիկական լեզվին, խախտում էին գիտականության դիդակտիկական սկզբունքի մի շարք պայմաններ: Նախ, առնչության որոշման և արժեքների տիրույթները համապատասխան կիրառություններ չէին գտնում դասընթացի հետագա բաժիններում, այսինքն՝ հաշվի չէր առնված դասընթացի առանձին բաժինների միջև ներքին կապի դրսևորման անհրաժեշտությունը: Այնուհետև, հեղինակները հաշվի չէին առնում տվյալ հասակի երեխաների համար շարադրվող նյութի ընկալման հոգեբանական համապատասխանությունը: Վերջապես, ֆունկցիայի գաղափարը դրվում էր ողջ հանրահաշվական կառույցի հիմքում, հանգամանք, որը բոլորովին չէր համապատասխանում մաթեմատիկական գիտության ժամանակակից վիճակին, մանավանդ՝ նման մոտեցումը չէր ամրապնդվում և հիմնավորվում կիրառական ոլորտից վերցված համապատասխան փաստերով ու մեկնաբանություններով: Եվ պատահական չէ, որ հետագա հրատարակություններում հեղինակները հրաժարվեցին ֆունկցիայի գաղափարի ներմուծման իրենց մոտեցումից: Սակայն ֆունկցիայի դերը հանրահաշվի դասընթացում պահպանվեց:

Ներկա դասընթացում ֆունկցիայի հասկացությունը նույնպես ներմուծվում է որպես որոշակի հատկություններով օժտված երկտեղ առնչություն, սակայն այստեղ հաշվի է առնվում երկու առանձնահատկություն: Նախ, ֆունկցիայի հատկությունը ներմուծվում է դասընթացի վերջում և լուծում է բոլորովին այլ ուսումնամեթոդական խնդիրներ: Այնուհետև, ճիշտ է, ֆունկցիայի հասկացությունը ներմուծվում է որպես առնչության մասնավոր տեսակ, սակայն առնչության հասկացությունը արդեն տրվում է ոչ թե որպես երկու բազմությունների դեկարտյան արտադրյալի ենթաբազմություն, ինչը անհասկանալի է նույնիսկ իններորդ դասարանցիների համար, այլ կիրառվում է ինտուիտիվ մոտեցում՝ առնչության և նրա հետ կապված ողջ նյութի ուսուցումը ուղեկցելով առօրեական օրինակների և ժխտօրինակների բազմազանությամբ: Վերջապես՝ ֆունկցիայի գաղափարի ուսուցմանը նախորդում է նրա նախաուսուցումը ապահովող մի շարք թեմաների ուսուցում, մասնավորապես՝ համեմատականության կարևորագույն հասկացության և նրա տեսակների ուսուցումը:

2). Ուսուցման գիտականության դիդակտիկական սկզբունքը մեծապես գործել է հանրահաշվի ներկա դասընթացում հավասարության հասկացության շարադրանքը կազմակերպելու ընթացքում: Այստեղ նշենք հավասարության հասկացության հստակեցումը՝ համարժեքության հասկացության շրջանակներում (հավասարության անդրադարձելիության, համաչափության, փոխանցելիության օրենքները) և հավասարության դերի արմատական բարձրացումը՝ որպես դասընթացում դիտարկվող կենտրոնական բանաձև:

Հանրահաշվի դպրոցական նախկին դասընթացներում հավասարություն է անվանվում հավասարության նշանով միացված երկու արտահայտությունների գրառումը: Ստացվում է, որ հավասարություն է, օրինակ, 1 = 2 գրառումը: Նման «հավասարության» անհեթեթությունը ակնհայտ է: Վիճակից դուրս գալու ելքը «գտնվել էր» ձևական տրամաբանության անհաջող կիրառումով. Խոսվում էր ճշմարիտ և կեղծ հավասարությունների մասին (տես, օրինակ, [282]):

«Ճշմարիտ հավասարություն» եզրը հանդես է գալիս նաև հանրահաշվի ներկայումս գործող դասագրքերում: Հասկանալի չէ, թե ինչո՞ւ մի դեպքում պետք է նշենք, որ 1 + 2 = 3 գրառումը ճշմարիտ հավասարություն է, իսկ մի այլ դեպքում միայն գրելով 1 + 2 = 3 բանաձևը՝ նրա տակ հասկանանք ճշմարիտ հավասարություն: Եթե ընդունենք «ճշմարիտ հավասարություն» եզրի օրինական լինելը, ապա առաջին դասարանից սկսած և, այնուհետև, հետագա դասարաններում բոլոր հավասարությունների դիտարկման ընթացքում պետք է նշել, որ համապատասխան քայլում գրված է ճշմարիտ հավասարություն:

Միևնույն ժամանակ, թե' երկրաչափության մեջ, թե' ֆիզիկայում և գիտության այլ բնագավառներում, երբ խոսվում է առարկաների հավասարության մասին, ապա ինքնին հասկանալի է համարվում, որ եթե բանաձևը հավասարություն է, ապա այն արդեն ճշմարիտ է: Այդպես է նաև իրերի վիճակը ժամանակակից մաթեմատիկայում: Եվ հանրահաշվի ներկա դասընթացում մենք ընդունել ենք ահա այս մոտեցումը:

Հանրահաշվի 7-րդ [63] դասարանի դասագրքում տրվում են օրենքներ ու հատկություններ, որոնց միջոցով տրված հավասարություններից հնարավոր է լինում ստանալ նոր հավասարություններ: Այդ օրենքներն ու հատկությունները արտահայտում են հավասարության համաչափության, փոխանցելիության հատկությունները, գործողությունների հետ հավասարության առնչության կապերը: Ընդ որում, դիտարկվում են ինչպես թվերի ու հանրահաշվական արտահայտություւնների, այնպես էլ մեծությունների հավասարությունը և նրա հատկությունները: Համակարգված աշխատանք է կատարվում նաև հավասարության և անհավասարության կապերի բացահայտման և ուսուցման ուղղությամբ: Փաստորեն, կատարվում է իրական թվերի կարգավորված դաշտի, ռացիոնալ կոտորակների դաշտի և մեծությունների կարգավորված հանրահաշվի աքսիոմատիկ տեսությունների շարադրանք, տեսություններ, որոնք պարունակում են հավասարության և անհավասարության պրեդիկատային առնչությունը: Դրանցում հավասարության առնչությունը կապվում է գործողությունների հետ, և յուրաքանչյուր գործողության վերաբերյալ նյութի շարադրման շրջանակներում շարադրվում է նաև այդ գործողության հետ հավասարության կապն արտահայտող նյութը (մանրամասները տես աքսիոմատիկ մեթոդին նվիրված կետում):

8-րդ և 9-րդ դասարանների [64], [65] դասագրքերում հավասարության առնչությունը շարունակում է մնալ ուսումնական նյութի կենտրոնում: Բավական է նշել, որ այնտեղ դիտարկվող բանաձևերը հիմնականում հավասարություններ են: Դիտարկվում է նաև հավասարության հետ բնական, ամբողջ և ռացիոնալ ցուցիչով աստիճանի, քառակուսի և կամայական աստիճանի արմատի գործողությունների կապը, ինչպես նաև բազմանդամների հավասարության հարցը, ինչը թելադրվում է ուսուցման գիտականության դիդակտիկական սկզբունքի պահանջներով:

3). Մաթեմատիկական ժամանակակից մոտեցումները հնարավորություն են տալիս էապես բարելավելու նաև կարևորագույն այլ հասկացությունների ուսուցումը:

Այստեղ նշենք նաև անհավասարության հասկացության հստակեցումը՝ կարգավորված հանրահաշվական համակարգերի շրջանակներում (մանրամասները տես վերջին գլխում):

Կարգավորված դաշտերում դրական կոնուսի առկայությունը, նրա միջոցով կարգի առնչության ներմուծումը առաջին հայացքից գիտականության պատրանք է ստեղծում: Եվ, տուրք տալով այդ մոտեցմանը հանրահաշվի շատ դասգրքերում կարգի առնչությունը ներմուծվում է հանման գործողության միջոցով: Սակայն նման մոտեցումը նպատակահարմար չէ կիրառել մի քանի պատճառով, որոնց թվում է գիտականության դիդակտիկական սկզբունքը:

Ներկա դասընթացում կարգի առնչության ներմուծումը կապվում է հանրահաշվական գործողությունների հետ. Այդպես է իրերի բնական ընթացքը, այդպես է վիճակը նաև թվաբանության դասընթացում: Բայց ավելի կարևոր է այն, որ նման մոտեցումը թույլ է տալիս անհավասարության և անհավասարման հետ կապված տեսական և գործնական նյութը ոչ թե դիտարկել մեկուսի՝ այն կապելով գործողություններից մեկի հետ, այլ միահյուսել դասընթացի մնացած նյութի հետ, պահպանելով ուսուցման դիդակտիկական սկզբունքի կարևոր պահանջներից մեկի իրացումը:

4). Ժամանակակից հանրահաշվի ոգուն համապատասխան է կատարվում դասընթացի կառույցի խարսխումը հանրահաշվական գործողությունների հենքի վրա: Հանրահաշիվը գիտություն է հանրահաշվական գործողությունների մասին: Այս պարագան կենտրոնական նշանակություն ունի հանրահաշվի դասընթացի կառուցման խնդրում: Իսկապես՝ դասընթացում Հանրահաշիվ 7-ի [63] բովանդակային կառույցը բաժանվում է ըստ չորս հանրահաշվական գործողությունների, որոնք կազմում են նրա հիմնական մագիստրալները՝ գլուխները: Եվ դասընթացի գլխավոր խնդիրներից մեկը յուրաքանչյուր գլխում համապատասխան գործողության և նրա հատկությունների ուսումնասիրությունն է: Առաջին անգամ կատարվում են նաև հակադիրի և հակադարձի գործողությունների հիմնարար դիտարկումներ: Հավասարությունների, հավասարումների, անհավասարությունների, անհավասարումների, մեծությունների, համեմատականությունների, հանրահաշվի կիրառությունների ուսումնասիրությունները նույնպես պայմանավորվում և կապվում են գործողությունների հետ: Օրինակ, գումարման գործողության շրջանակներում ուսումնասիրվում են ոչ միայն այդ գործողության հատկությունները, այլև հավասարության և անհավասարության հետ գումարման գործողության կապերը, դիտարկվում են գումարային հավասարումների և անհավասարումների լուծումները, հաստատուն գումարով համեմատականությունները, գումարման կիրառությունները՝ գումարման գործողության մոդելների և որոշ այլ ձևերի մեջ և այլն: Արտահայտությունների հետագա ուսումնասիրությունների ընթացքում նույնպես հանրահաշվական գործողությունները կատարում են ուղենիշի դեր: Նույնպիսի խնդիրներ են իրականացվում մյուս գործողությունների պարագայում, որ դիտարկվում են դասընթացի հաջորդ բաժիններում: Բնական, ամբողջ կամ կոտորակային ցուցչներով աստիճանի, քառակուսի կամ բնական աստիճանով արմատի և դիտարկվող այլ գործողությունների պարագայում նույնպես գործողությունը, նրա կապը նախապես ուսումնասիրված գործողությունների, հավասարությունների, անհավասարությունների և այլ բանաձևերի հետ կազմում են դասընթացի նյութի կազմման ու կառուցման համար ելակետային մոտեցումներ:

5). Միջին դպրոցի «Հանրահաշիվ» առարկան՝ գոնե զուտ հանրահաշվի մասով, ըստ էության ռացիոնալ կոտորակների դաշտի ուսումնասիրությունն է: Հանրահաշվի նախկին դասագրքերը սրա վրա ուշադրություն չէին դարձնում: Ռացիոնալ կոտորակների շարադրանքը կատարվում էր 7-րդ դասարանի դասընթացի սկզբում: Դասընթացի հետագա կառույցի մեջ օգտագործվում էին միայն ռացիոնալ կոտորակիների այն հատկությունները, որոնք անհրաժեշտ էին արտահայտությունների ձևափոխության, հավասարումների և անհավասարումների և այլ տեխնիկավարժանքային խնդիրների լուծման համար: Պատշաճ մակարդակով ու խորությամբ չէր բացահայտվում բանաձևերի միջև գոյություն ունեցող ներքին կապը, որի արդյունքում սովորողները թույլ էին տալիս նաև տեխնիկավարժանքային սխալներ: Ճանաչված մասնագետ Զ. Ի. Սլեպկանը [393] նշում է սովորողների կողմից արտահայտությունների ձևափոխության ընթացքում թույլ տրվող սխալները, դրանք դասակարգում ըստ ոչ էական հատկանիշների: Իրականում, դրանք արդյունք են ռացիոնալ կոտորակների հիմնական հատկությունների վատ իմացության, հատկություններ, որոնք կազմում են ռացիոնալ կոտորակների դաշտի աքսիոմատիկ տեսության սահմանումները կամ աքսիոմները, և նյութի բնականոն կազմակերպման դեպքում պետք է կիրառվեն մյուս հատկությունների ապացուցումներում ու բազմիցս կրկնվեն ու հիշվեն:

Հանրահաշվական կոտորակների դաշտը ընկած է մեր կազմած դասընթացի հիմքում: Նրա կառուցման համար կիրառվում է բովանդակային աքսիոմատիկ տեսությունը: Կառուցումը կատարվում է 7-րդ դասարանի ողջ դասընթացում, փուլ առ փուլ՝ ըստ գումարման, հակադիրի, հանման, բազմապատկման, հակադարձի և բաժանման գործողությունների: «Հանրահաշիվ 8»-ում և «Հանրահաշիվ 9»-ում կառուցվում են նաև բնական և ռացիոնալ ցուցչով աստիճանները: Նման մոտեցումը ավելի պարզ ու մատչելի է դարձնում դասավանդվող նյութը: Բազմանդամները, մասնավորապես՝ գծային երկանդամները, քառակուսային եռանդամները դիտարկվում են որպես ռացիոնալ կոտորակների մասնավոր դեպքեր: Նշենք, որ բազմանդամների պարագայում, ի տարբերություն նախկին դասընթացների, ներկա դասընթացում կատարվում է մեկ փոփոխականով և շատ փոփոխականներով բազմանդամներ հանրահաշիվների առանձնացում. Մեկ փոփոխականով բազմանդամների տեսությունը շարադրվում է «Հանրահաշիվ 8»-ում, իսկ շատ փոփոխականներով բազմանդամների տեսությունը՝ «Հանրահաշիվ 9»-ում: Նման տարանջատումը շատ բնական է և համահունչ է հանրահաշվի կառուցման ներքին տրամաբանությանը:

6). Ժամանակակից մաթեմատիկայի կարևորագույն առանձնահատկություններից մեկը նրա կառուցումն է բազմությունների տեսության հենքի վրա: Եվ եթե խոսվում է մաթեմատիկայի ուսուցման արդիականացման մասին, ապա առաջին հերթին նկատի է առնվում մաթեմատիկական ուսումնական առարկաների ծրագրերում և դասընթացներում բազմությունների տեսության ներգրավումը: Պետք է նկատել, որ բարձրագույն դպրոցում մաթեմատիկայի ուսուցման արդիականացումը կատարված է լիովին:

Հանրակրթական դպրոցում մաթեմատիկայի դասավանդման նշված իմաստով արդիականացման լուրջ փորձ էր կոլմոգորովյան դասագրքերի մուտքը: Արված մոտեցումները իսկապես արդիական էին. Բավական է ասել, որ բազմությունների տեսությունը ծառայեցվում էր որպես հիմք դպրոցական առարկաների աքսիոմատիկ շարադրանքը իրականացնելու համար: Դրանցում, սակայն, բազմությունների տեսության ներգրավումը չէր կատարված հանրակրթական դպրոցի կիրառական հարցերի լուծման պահանջից և հաշվի չէին առնվել սովորողների տարիքային առանձնահատկությունները: Արդյունքում՝ շատ արագ կոլմոգորովյան նորամուծությունը իր տեղը զիջեց նախկին մոտեցումներին: Սակայն կոլմոգորովյան շրջանի որոշ նշանակումներ, առանց պատշաճ բացատրությունների, պահպանվեցին: Այդպիսին տիպական օրինակ էր եռանկյունաչափական հավասարումների լուծման պատասխանների վերջում n є Z գրառումը, որի նշանակությունը և իմաստը քչերն են հասկանում:

Արևմտաեվրոպական երկրներում բազմությունների տեսության տարրերը հանրակրթություն ներմուծվեցին մեծ զգուշավորությամբ և շատ չափավոր: Եվ այսօր այդ երկրների մաթեմատիկայի ծրագրերում որոշակի տեղ է հատկացված բազմությունների տեսության տարրերի ուսուցմանը:

Ներկա դասընթացում բազմությունների տեսության ներգրավման հիմք է ծառայում նյութի կիրառական նշանակությունը, ինչը բազմության և նրա հետ կապված հատկությունների ուսուցումը դարձնում է շատ բնական և մատչելի: Միևնույն ժամանակ, բազմության և նրա հետ կատարվող գործողությունները կիրառվում են նաև հանրահաշվական նյութի շարադրանքի մեջ:

7). Հանրահաշվի կիրառությունները առօրյա կյանքում և գիտության տարբեր ոլորտներում առաջացած խնդիրների լուծման մեջ, հիմնականում առնչվում են մեծությունների հետ: Կենցաղային ամենապարզագույն առարկաներից մինչև ժամանակակից տեխնիկայի նվաճումների արդյունքում ստեղծված արտադրանքը, արդյունք են մեծությունների կիրառության և, հետևաբար, նրանց իմացության: Այս պատճառով մեծությունների ուսուցմանը կարևոր տեղ է հատկացվում նաև հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի ծրագրում և դասընթացում:

Նախկին ծրագրերում և դրանց հիման վրա կազմված դասընթացներում մեծությունների ուսուցումը հիմնականում նախատեսվում էր կատարել 1-6-րդ դասարաններում, և համակարգված բնույթ չէր կրում: Այս մոտեցումը ամենևին չէր համապատասխանում մեծության գաղափարի վերը նշված դերին: Սովորողների մոտ չէին ձևավորվում մեծությունների, նրանց չափման, մեծությունների հետ կատարվող գործողությունների յուրացման համար անհրաժեշտ տեսական հիմքեր: Մեծությունների հետ առնչվելիս միջին դպրոցի աշակերտները հաճախ ցուցաբերում էին մեխանիկական մոտեցում, սխալներ էին թույլ տալիս նաև մեծությունների վերաբերյալ պարզագույն տեխնիկական հարցեր վճռելիս: Մի քանի տարի առաջ տարբեր դպրոցներում կատարած ուսումնասիրությունները ցույց տվեցին, որ 6-րդ դասարանի աշակերտների (ներկայիս 7-րդ դասարան) ճնշող մեծամասնությունը ռեալ պատկերացում չունի պարզագույն մեծությունների, օրինակ՝ 1 քառակուսի մետրի մասին. Չի կարողանում գործնականում մոտավոր պատկերել 1 քառակուսի մետրին հավասար մի քառակուսի: Ավելի մեծ մասը չգիտեր լիտրի և խորանարդ մետրի կապը, չէր պատկերացնում մեկ հեկտարի մոտավոր չափը, չգիտեր հեկտարի, արի, քառակուսի մետրի և քառակուսի կիլոմետրի կապերը: Նույնն էր պատկերը նաև 7-րդ դասարանում (ներկայիս 8-րդ դասարան): Այսօր էլ պատահում են դեպքեր, երբ նման կապերը լավ չի պատկերացնում անգամ ուսուցիչը: 7–9-րդ դասարաններում տեքստային խնդիրները կադալիս աշակերտները, վերցնելով նրանց տվյալներում ամփոփված մեծությունները, հաճախ լուծում են դրանք, բայց ուշադրություն չեն դարձնում խնդրի բովանդակային կողմի վրա և այլն: Այս պայմաններում տեքստային խնդրի լուծումը դառնում է ինքնանպատակ, կիրառական արմատներից կտրված: Աշակերտների մոտ չի առաջանում հետաքրքրություն այն իրադրության նկատմամբ, որի լուծմանը ծառայում է տվյալ խնդիրը:

Հանրահաշվի ներկա դասագրքերում աշխատել ենք վերացնել նշված թերությունները: Այստեղ մեծությունների ուսուցումը կատարվում է երկու ճանապարհով. Զուտ մեծություններին նվիրված թեմաներով՝ 1–6-րդ դասարանների մեծություններին նվիրված նյութի ընդհանրական ու համակարգված ուսուցմամբ, և տեսական-հանրահաշվական թեմաներում՝ վերացական հասկացությունների ու հարաբերությունների կիրառական մեկնաբանություններով: Մեծությունների համակարգված ուսուցումը կատարվում է հանրահաշվական լեզվի կառուցմանը զուգահեռ: Հետևապես՝ հիմնական շեշտը դրվում է 7-րդ դասարանի դասընթացի վրա: Այստեղ պետք է հասկանալ, որ խոսքը գնում է միաչափ իրական գծային տարածությունների մասին՝ համասեռ մեծությունների պարագայում, և իրական գծային հանրահաշիվների մասին՝ ընդհանուր դեպքում, երբ համատեղ դիտարկվում են բոլոր մեծությունները: Այսպիսով՝ մեծություններին նվիրված նյութի ուսուցումը հանրահաշվի գործող դասընթացում կազմակերպվում է գիտականության դիդակտիկական սկզբունքի լիարժեք հաշվառումով:

8). Գիտականության դիդակտիկական սկզբունքի պահանջները, մասնավորապես՝ ժամանակակից մաթեմատիկայի մոտեցումները հնարավոր են դարձնում նաև դասընթացում աքսիոմատիկ մեթոդի սկզբունքային կիրառությունը: Այդ մասին կխոսվի համապատասխան բաժնում: Այստեղ միայն նշենք, որ ճիշտ է աքսիոմատիկ մեթոդը կիրառվել է դեռևս Էվկլիդեսը ժամանակներում, սակայն այդ շրջանում Էվկլիդեսը և նրա ժամանակակիցները աքսիոմատիկ մեթոդի մեջ ինչպես նախնական հասկացությունների սահմանման, այնպես էլ որոշ եզրահանգումների դեպքում լայնորեն կիրառում էին ինտուիտիվ մոտեցումը: Եվ հաճախ նման մոտեցումը հետևանք էր աքսիոմատիկ տեսության մասին ամբողջական, ժամանակակից պատկերացումների բացակայության: Մաթեմատիկական տրամաբանության ստեղծումը արմատապես փոխում է իրերի վիճակը: Ճիշտ է, անիմաստ է խոսել մաթեմատիկական տրամաբանության թեկուզ և առանձին դրվագների հանրակրթական դպրոց տեղափոխելու մասին, սակայն մաթեմատիկական տրամաբանության շրջանակներում ասիոմատիկ տեսության ընդհանուր կառույցի և նրա մասերի հստակեցումը թույլ է տալիս անհրաժեշտ պարզություն մտցնել ու համապատասխան մոտեցումներ ցուցաբերել նաև հանրահաշվի դպրոցական դասընթացի շարադրանքում: Նման տիպական օրինակ է արտածման կարևորագույն գործընթացի հստակեցումը, ինչին մեծապես նպաստում է դասընթացում շարադրվող երեք տեսություններից (ռացիոնալ կոտորակների դաշտ, իրական թվերի կարգավորված դաշտ և մեծությունների կարգավորված հանրահաշիվ) յուրաքանչյուրի մեջ, թեկուզ և քողարկված տեսքով, արտածման կանոնների առկայությունը: Մասնավորապես՝ այդպիսիք են հավասարության և անհավասարության կապի մասին օրենքները, որոնց ներառումը հանրակրթական դպրոցի հանրահաշվի դասընթացում հավանաբար կատարվում է առաջին անգամ:

Մաթեմատիկական տրամաբանության շրջանակներում հնարավոր է դառնում հստակեցնել համակարգի և համախմբի, ոչ խիստ անհավասարության և ոչ խիստ անհավասարման, հավասարման և անհավասարման հասկացությունները, հասկանալ և շարադրել հավասարություն և հավասարում, անհավասարություն և անհավասարում հասկացությունների միջև եղած ընդհանրությունները, ներքին կապերը և տարբերությունները:

Ռացիոնալ կոտորակների դաշտի, իրական թվերի կարգավորված դաշտի և մեծությունների կարգավորված հանրահաշվի՝ դասընթացում կիրառվող շարադրանքը կատարվել է ժամանակակից հանրահաշվի ոգով ու հարազատ է նրան:

Նյութի կառուցման ներքին տրամաբանությունը այսպիսին է. որպես հիմնական ուղինեշեր ծառայում են գործողությունները, և դա բնական է ու արդիական, որովհետև ժամանակակից հանահաշիվը գիտություն է գործողությունների մասին: Յուրաքանչյուր գործողությանը նվիրված բաժնում հանդես են գալիս այդ գործողության բանաձևերը՝ հավասարությունները, հավասարումները, անհավասարությունները և անհավասարումները, որոնց միջոցով արտահայտվում են տվյալ գործողության հանրահաշվական հատկությունները: Այնուհետև, գալիս են գործողության և մեծությունների կապն արտահայտող հատկությունները, դրանց կիրառությունները՝ կիրառական ոլորտի այն տիրույթները, որոնց հանրահաշվական բանաձևումը հանգեցնում է տվյալ կամ արդեն ուսումնասիրված գործողության, ապա՝ այդ գործողության համեմատականությունները: Բնականաբար, ուսումնասիրությունը և շարադրանքը տարվում է հաջորդայնության դիդակտիկական սկզբունքի խստագույն կիրառումով՝ գումարում, հանում, բազմապատկում, բաժանում, բնական ցուցչով աստիճան և արմատ, ամբողջ, կոտորակային ցուցիչներով աստիճաններ հերթականությամբ:

Դասընթացում խստորեն պահպանվում է նրա թեմաների հերթականությունը և իրականացվում նրանց միջև ներքին խորը կապը: Թեմաների հաջորդականության և փոխկապակցվածության խնդրի լուծումը կատարված է ամենայն հստակությամբ: Կառույցը այնքան պարզ է, ամբողջական ու բնական, որ շատ դժվար է նրանում կատարել անգամ նյութերի տեղափոխություն:

Արդեն նշվեց, որ հանրահաշվական գործողությունները հանրահաշվի դասընթացի ելակետային հասկացություններն են, որոնց շուրջ ձևավորվում է դասընթացի բովանդակությունը: Վերջինս իրականացվում է հետևյալ մեթոդաբանությամբ: Յուրաքանչյուր գործողությանը նվիրված բաժնում՝ նախ դիտարկվում են տվյալ գործողության ընդհանուր հատկությունները, որոնք ոչ այլ ինչ են, եթե ոչ ռացիոնալ կոտորակների, իրական թվերի դաշտերի և մեծությունների հանրահաշվի՝ տվյալ գործողության հետ առնչվող հատկությունները: Այնուհետև դիտարկվում է տվյալ գործողության հետ առնչվող կիրառական ոլորտը: Որպես գործողություններից առարկայական ոլորտ ծառայում են գործողությունների մոդելները և համեմատականությունները, որոնք դիտարկվում են յուրաքանչյուր գործողությանը նվիրված բաժնում: Այնուհետև դիտարկվում են դասընթացի հիմնական բանաձևերի առնչությունները տվյալ գործողության հետ. Յուրաքանչյուր գործողության հետ կառուցվում է համապատասխան բանաձևերը՝ հավասարությունները և հավասարումները՝ հանրահաշվական կոտորակների պարագայում, հավասարությունները, հավասարումները, անհավասարություններն ու անհավասարումները՝ իրական թվերի և մեծությունների պարագայում: Յուրաքանչյուր գործողության նվիրված բաժնում դիտարկվում են նաև այդ գործողության և արդեն ուսումնասիրված գործողությունների միջև կապերը:

Այսպիսով՝ ներկա դասընթացում հանրահաշիվը ներկայանում է որպես դիդակտիկական ամբողջական համակարգ՝ իրար հետ օրգանապես կապված, իրար հաջորդող հասկացությունների, փաստերի մի ամբողջություն, դեդուկտիվ շարադրանքով ու կիրառության բազմազան ոլորտներով: Նրանում արտացոլված են հանրահաշվական գիտության արդի մոտեցումները՝ հանրահաշվական կոտորակների դաշտի օրինակով և շարադրանքի մեջ աքսիոմատիկ մեթոդի հստակ կիրառությամբ:

Գիտակցականության սկզբունքը: Դիդակտիկական այս սկզբունքը ենթադրում է սովորողների կողմից նյութի խորը, համակողմանի յուրացում, այն անծանոթ իրադրություններում կիրառելու կարողություն:

Գիտելիքի գիտակցական յուրացմանը խանգարում է կաղապարված ուսուցումը, որի դեպքում գիտելիքը դառնում է ինքնանպատակ ու ձևական: Բերենք ձևական գիտելիքի շարադրման մի քանի կարևոր օրինակներ, որոնք հետևանք են հանրահաշվի դասընթացներում, այդ թվում՝ նախորդ դասագրքերում, նյութի մակերեսային ներկայացման, երևույթների խորքային հատկությունների բացահայտման և համակողմանի դիտարկման բացակայության:

1) Ձևական գիտելիքի բնորոշ օրինակի է հանգեցնում $\pm a$ գրառումը և նրա գործածությունը ինչի մասին խոսեցինք տրամաբնության տարրերին նվիրված բաժնում: Այստեղ ավելացնենք, որ սովորողների ճնշող մեծամասնությունը անսխալ կարողանում է գրել քառակուսային հավասարման արմատների բանաձևը, որի մեջ մասնակցում է $\pm$ նշանը, բայց ի±նչ է նշանակում $\pm a$ գրառումը՝ չգիտի: Մեր կատարած հարցումներից պարզվեց, որ տվյալ գիտելիքին չեն տիրապետում անգամ մանկավարժական համալսարանի մաթեմատիկական ֆակուլտետի ցածր կուրսերի ուսանողները:

2) Շատերը գիտեն վարժանքային այս կամ այն քայլը կատարել $\leq$ կամ $\geq$ նշանները պարունակող բանաձևերի հետ, բայց հստակ ու անհրաժեշտ խորությամբ չեն հասկանում $a \leq b$ և $a \geq b$ բանաձևերի իմաստը, մանավանդ երբ դիտարկվում են դրանց $a \leq a$ և $a \geq a$ մասնավոր տիպերը:

3) Արտահայտությունների հետ ձևափոխությունները կատարում են շատ վարժ, բայց դժվարանում են կատարել արված քայլերի հիմնավորումը: Այս առումով տիպական է հեղինակի հետ պատահած հետևյալ դեպքը: Երբ ուսուցիչներից մեկը փորձում էր հիմնավորել «Հանրահաշիվ 6»-ում [42] կիրառված ապացուցումների բարդությունը՝ հատկապես նրա փաստարկումների մասը նկատի ունենալով, հեղինակը ձեռքով ծածկեց հատկություններից մեկի հենց այդ՝ փաստարկումների մասը, թողնելով միայն կատարված ձևափոխությունների բաժինը: Ուսուցիչը անմիջապես նկատեց, որ ապացուցումը էապես հեշտացավ: Իհարկե, այս դեպքում ուսուցիչը ինքն էր հեռու նյութի գիտակցական ընկալման իրողությունից:

4) Բանաձևերի դիտարկման ժամանակ, մասնավորապես՝ բանաձևերի համարժեքությունը կիրառելիս սովորողները վարժ կատարում են մի բանաձևից մյուս բանաձևին անցման տեխնիկական կողմը, բայց դարձյալ չեն կարողանում կատարել անհարժեշտ հիմնավորումը: Այստեղ նույնպես առկա է նյութի սերտողական յուրացման փաստը:

Ուսուցման մեջ նյութի ընկալման գիտակցականությունը ապահովելու խնդիրը հանրահաշվի դասընթացում բարձրացվում է որակապես նոր աստիճանի: Դրան առաջին հերթին նպաստում է նրանում տրամաբանության հանրահաշվին նվիրված նյութի ընդգրկումը: Մասնավորապես՝ $\pm a$ գրառման ու $a \leq b$ և $a \geq b$ բանաձևերի գիտակցական ընկալումը ապահովվում է տրամաբանական գումարի ընդհանուր հասկացության և առարկայական ոլորտում մայրենի լեզվի հետ ունեցած առնչությունների շրջանակներում այդ բանաձևերի դիտարկումով:

Այնուհետև, արտահայտությունների հետ ձևափոխությունների կատարման ձևական ընկալումը հաղթահարվում է.

1) գործողությունների հատկությունների ուսուցման հետևողականությամբ ու սիստեմատիկությամբ,

2) ապացուցումներին զուգահեռ փաստարկումների գծի առկայությամբ:

Բանաձևերի համարժեքության դիտարկումը տրամաբանական համարժեքության ընդհանուր հասկացության ու նրա հատկությունների ուսուցման շրջանակներում, նպաստում է ամբողջ դասընթացի նյութի ընբռնման գիտակցականությանը:

Խնդրի լուծմանը մեծապես նպաստում է նաև ապացուցումների՝ դասընթացում կիրառված մեթոդիկան, մասնավորապես՝ բանաձևերի համարժեքություններով ընթացող ապացուցումների մեջ համարժեքության յուրաքանչյուր քայլի հետ զուգահեռաբար կատարվող փաստարկումը (համապատասխան օրինակ տես հավելված 3-ում):

Ուսուցման գիտակցականությանը նպաստում են նաև «Հասկացե±լ եք դասը» բաժնի վարժությունները, ինչպես նաև անորոշ, տարբեր դեպքերի դիտարկում պահանջող վարժությունները, մասնավորապես՝ պարամետրական հավասարումները և անհավասարումները, բազմությունների հետ կատարվող գործողություններ պարունակող հավասարությունները և հավասարումները, որոնց դիտարկումը դասընթացում կատարվում է լայնորեն:

Վարժությունների բաժնում, օրինակ, դրվում են պարամետրական հավասարումների և անհավասարումների լուծման նախահիմքերը: Նախկին դասագրքերում պարամետրական հավասարումների ուսուցումը կրում էր հատվածական բնույթ. Պարամետրական հավասարումներ կամ չէին դիտարկվում, կամ դրանք դիտարկվում էին միայն ավագ դպրոցի դասագրքերում: Սովորողը միանգամից հայտնվում էր բավականին բարդ, անսովոր իրավիճակում և դժվար էր կողմնորոշվում: Այդ պատճառով պարամետրական հավասարումները ավանդաբար հաշվվում են դժվարամատչելի: Միևնույն ժամանակ, պարամետրական հավասարումները ստեղծում են անորոշ իրավիճակ և կարևոր նշանակություն ունեն ուսուցման մեջ՝ սերտողական, ձևական ուսուցման դեմ պայքարելիս: Դասընթացում կատարվում է միջին դպրոցում պարամետրական հավասարումների ուսուցում՝ ըստ բարդության և անորոշությունների աստիճանական զարգացման: Ընդ որում, զարգացումը կապվում է սովորողի տվյալ թեմայում ստացած կոնկրետ գիտելիքի հետ:

Անորոշ իրավիճակի հետաքրքիր օրինակ է ստեղծում քառակուսային հավասարումների լուծման՝ դասընթացում կիրառվող մեթոդիկան: Ավանդաբար նման հավասարումներ լուծելիս նախ մեխանիկորեն գրում են լուծման ընդհանուր բանաձևը, ապա դիտարկում լուծման գոյության կամ միակության հարցերը՝ կախված տարբերիչից: Նման մոտեցման դեպքում մասնավորապես ստացվում է, որ հավասարումը կարող է լուծում չունենալ, բայց նրա լուծման բանաձևը աշակերտը արդեն գրել է, այսինքն՝ «գիտի»: Այստեղ ուսուցման սերտողական բնույթն ավելի քան ակնհայտ է:

Դասընթացում կիրառվող մեթոդիկայով նախ պահանջվում է տարբերիչի միջոցով առանձին-առանձին դիտարկել քառակուսային հավասարման՝ լուծում չունենալու, մեկ լուծում ունենալու, երկու լուծում ունենալու դեպքերը, և նոր միայն անցնել հավասարման ընդհանուր լուծմանը: Ընդ որում, լուծում չունենալու դեպքում կարիք չկա սերտողաբար ինչ-որ բանաձև գրել, իսկ մեկ լուծում ունենալու դեպքում էլ առաջարկվում է կիրառել շատ ավելի պարզ բանաձև, քան քառակուսային հավասարումների լուծման ընդհանուր բանաձևն է, որն էլ նպատակահարմար է կիրառել միայն երկու լուծում ունենալու, այսինքն՝ հավասարման դրական տարբերիչ ունենալու դեպքում: Հասկանալի է, որ նման ուսուցումը սերտողական տարր չի պարունակում և համապատասխանում է ուուցման գիտակցականության սկզբունքին:

Ուսուցման գիտակցականությունը ենթադրում է գիտելիքը կիրառելու կարողություն, մանավանդ՝ անծանոթ իրադրություններում: Հանրահաշվի ավանդական դասընթացներում տեսական գիտելիքի կիրառությունը հիմնականում կատարվում է տեքստային խնդիրների դիտարկման ճանապարհով: Փորձը ցույց է տալիս, որ աշակերտների ճնշող մեծամասնությունը տեքստային խնդիրներ լուծելիս ուշադրություն չի դարձնում խնդրի բովանդակության վրա, այն իրադրության, որի մոդելավորումը իրականացնում է տվյալ խնդիրը: Այսինքն՝ աշակերտին չի հետաքրքրում իրադրությունը, որի ուսումնասիրության համար ստեղծված է հանրահաշվի տեսական ապարատը:

Հանրահաշվի ներկա դասընթացում այս խնդիրը բարձրացվում է որակական նոր աստիճանի՝ գործողությունների մոդելների և հայոց լեզվում զանազան մեծությունների, առարկաների հետ կատարվող գործողությունների համար ընդունված հոմանիշների ուսուցմամբ, հանգամանք, որ բացակայում էր հանրահաշվի նախկին դասընթացում: Առանց դրանց աշակերտը տեքստային խնդիրների լուծման ընթացքում չի պատկերացնում, թե առարկայական գործողությունը պատկերող լեզվական տվյալ արտահայտությանը ի±նչ հանրահաշվական գործողություն է համապատասխանում: Օրինակ, խորացնելու առարկայական գործողության համապատասխան հանրահաշվական գործողությունը միշտ չէ, որ աշակերտների կողմից գտնվում է: Եվ այստեղ աշակերտը մեղք չունի, եթե նա չի անցել այն, որ խորացնելը ավելացնել բառի առարկայական դրսևորումն է, իսկ ավելացնել նշանակում է գումարել՝ համաձայն ավելացնելու գումարային մոդելի:

Նույն մեթոդական խնդրի լուծմանն է ուղղված նաև համեմատականություններին վերաբերող նյութի շարադրանքի՝ դասընթացում կիրառվող մեթոդիկան: Համեմատականությունների՝ նախկին դասընթացում կիրառվող շարադրանքը, որ իրականացվում էր համեմատականությունների զուտ մաթեմատիկական դրսևորմամբ, դրանք կտրում էր առարկայական հիմքից: Ներկա դասընթացում համեմատականությունները կապվում են գործողությունների հետ, զուգահեռաբար դիտարկվում են նաև դրանց առարկայական դրսևորումները: Օրինակ, հաստատուն տարբերությամբ համեմատականության հիմնական առարկայական դրսևորումներից է երկու մարդկանց տարիքների համեմատականությունը՝ դրանց փոփոխության ընթացքում: Նման մոտեցումը առարկայական է դարձնում համեմատականությունների ուսուցումը, մեծացնում տարբեր իրադրություններում դրանց կիրառելու աշակերտի կարողությունը:

Դիտողականությունը: Հանրահաշվական նյութի շուրջ մտածողության ընթացքը սովորաբար առանձնանում է վերացարկման բարձր աստիճանով, և հանրահաշվական դատողությունների, բանաձևումների կոնկրետ դրսևորումները, առարկայական պատկերումները ուսուցման գործընթացում խաղում են առանձնահատուկ դեր: Սկսած հանրահաշվի այբուբենից, մինչև նրա բարդ դատողություններն ու ապացուցումները, ունեն ընկալման դժվարություններ և ուսուցման ընթացքում պահանջում են առարկայական մեկնաբանություններ: «Կենդանի հայեցողությունից դեպի վերացական մտածողություն» հայտնի բանաձևը ավելի մեծ կենսունակություն է ստանում հանրահաշվի ուսուցման պարագայում: Այսպիսով, ուսուցման մեջ դիտողականության դիդակտիկական սկզբունքը հանրահաշվում ձեռք է բերում առանձնահատուկ նշանակություն: Հանրահաշվի ներկա դասընթացում դիտողականության սկզբունքը կիրառվում է հետևյալ ճանապարհներով:

1). Առանձնակի դժվարություն է ներկայացնում հանրահաշվական հասկացությունների ուսուցումը՝ սկսած տառից ու տառերի հետ կատարվող գործողություններից, մինչև բարդ հանրահաշվական հասկացություններ: Այստեղ անփոխարինելի դեր է խաղում դիտողականության սկզբունքի կիրառումը: Օրինակ, տառը գործածվում է անհայտ քանակությունը նշանակելու համար, և մենք կարող ենք որոշել ցանկացած մարդու քաշը՝ x կգ, հասակը՝ y սմ, տարիքը՝ a տարեկան, ունեցած դրամի քանակությունը՝ z, երկու մարդկանց միասին ունեցած դրամի քանակությունը՝ x + y, եթե նրանցից մեկի ունեցած քանակությունը x է, մյուսինը՝ y, a + b, եթե նրանցից մեկի ունեցած քանակությունը a է, մյուսինը՝ b, և այլն: Դասընթացում նման դիտարկումները կատարվում են հետևողականորեն, բոլոր հասկացությունների ներմուծումից առաջ:

2). Հանրահաշվական բանաձևումի (հատկության, օրենքի) ձևակերպումից առաջ բերվում է նրա առարկայական դրսևորման որևէ օրինակ: Հավասարության անդրադարձելիության, համաչափության և փոխանցականության օրենքների ձևակերպումից առաջ դիտարկվում են դրանց առարկայական դրսևորումները նժարավոր կշեռքի օրինակի վրա: Անհավասարության հատկությունների ձևակերպումներից առաջ՝ բերված օրինակների հետ միասին, դիտարկվում են նաև դրանց իրականացումները՝ կապված մարդկանց տարիքների և այլ իրադրությունների հետ: Հավասարման գումարային ընդհանրական օրենքին նախորդում է Ավարայրի ճակատամարտում հայոց և պարսից զորքերում զինվորների թվերի նկատմամբ այդ օրենքի մասնավոր դրսևորումը: Նման օրինակների ներգրավումը դասընթացում կազմում է օրինաչափություն:

3). Ուսուցման դիտողականության սկզբունքը լայնորեն դրսևորվում է համեմատականությունների, արտահայտությունների, բանաձևերի և ֆունկցիաների գրաֆիկական պատկերումների ժամանակ: Այս հարցը ավանդական է, նրա մեթոդիկան՝ հրաշալի մշակված, և մենք օգտվում ենք կատարված մշակումներից: Նշենք միայն, որ գրաֆիկական պատկերումը ուսուցման մեջ ավելի արդյունավետ է դառնում, երբ մենք կոորդինատական հարթությունը կառուցելիս՝ նրա առանցքները դիտարկում ենք ոչ թե որպես թվային ուղիղներ, այլ նրանց վրա նշում ինչ-որ մեծություններ: Նման հնարավորություն են տալիս համեմատականությունները: Օրինակ, երբ պատկերում ենք մարմնի շարժման ընթացքում նրա ծախսած ժամանակի և անցած ճանապարհի համեմատականությունը, ապա կոորդինատական առանցքներից մեկի (աբսցիսների) վրա նշում ենք մարմնի ծախսած ժամանակը, իսկ մյուսի վրա՝ այդ ընթացքում նրա անցած ճանապարհը: Այս դեպքում գրաֆիկը և նրա հետ կապված այլ դետալներ ավելի առարկայական են դառնում և ավելի լավ են ընկալվում սովորողի կողմից:

4). Դասընթացում առարկայական պատկերումները իրենց արտահայտությունն են գտնում նաև աղյուսակների մեջ: Աղյուսակային պատկերումը առանձնապես մեծ կիրառություն է ստանում համեմատականությունների և ֆունկցաների ուսուցման մեջ: Նշենք, որ մենք չենք բավարարվում կոնկրետ ֆունկցաների աղյուսակային պատկերումը բերելով: Դասընթացում բերված աղյուսակները օգտագործվում են նաև ավանդական նյութի մեջ՝ հավասարումների, անհավասարումների և որոշ այլ խնդիրների լուծման ընթացքում: Օրինակ, [42] դասընթացի 18.3 դասում բազմաթիվ աղյուսակների շարքում բերվում է նաև օվկիանոսների մասին տվյալների աղյուսակը, որում տրվում է նաև f ֆունկցիան հետևյալ կերպ՝

f (Ատլանտյան) = 91,7 մլն. քառ. կմ,

f (Հնդկական) = 76,2 մլն. քառ. կմ,

f (Խաղաղական) = 178,7 մլն. քառ. կմ,

f (Հյուսիսային սառուցյալ) = 14,8 մլն. քառ. կմ:

Նույն դասի 4 վարժության մեջ բերվում է այսպիսի վարժություն.

Լուծեք հավասարումը՝ f (x) = 76,2 մլն. քառ. կմ, որտեղ f ֆունկցիան պատկերված է վերևում:

5). Դասընթացում մեծ արդյունավետությամբ են կիրառվում նաև դիագրամների տեսքով համեմատականությունների և ֆունկցաների պատկերումները: Օրինակ, 9-րդ դասարանի դասագրքում պատկերված են ՆԱՏՕ ի և Վարշավյան դաշինքի ռազմական ծախսերի դիագրամը 1968 – 1977 թ.թ. ժամանակահատվածում: Այդ պատկերումը շատ ակնառու, դիտողական և դյուրին է դարձնում ֆունկցիայի ընդհանրական ու բարդ հասկացության յուրացումը: Դիագրամային պատկերումները շատ են հատկապես 6-րդ դասարանի դասագրքում [42]:

1.2.2. Աքսիոմատիկ մեթոդը: Աքսիոմատիկ մեթոդը գիտական տեսության կառուցման այնպիսի եղանակ է, երբ տեսության հիմքում դրվում են որոշ նախնական դրույթներ՝ աքսիոմներ, որոնցից՝ զուտ տրամաբանական հնարքների միջոցով արտածվում են տեսության մնացած դրույթները՝ թեորեմները: Նման ձևով ստացված տեսությունը, սովորաբար, անվանվում է դեդուկտիվ տեսություն: Դեդուկտիվ տեսության մեջ նախապես՝ առանց սահմանման ընդունվում են որոշ նախնական հասկացություններ, որոնց միջոցով սահմանվում են տեսության մնացած հասկացությունները: Աքսիոմատիկ մեթոդով զանազան տեսություններ են փորձել շարադրել. Բ. Սպինոզան՝ փիլիսոփայությունը, Ջ. Վիկոն՝ սոցիոլոգիան, Կ. Ռոդբերգը՝ քաղաքատնտեսությունը, Ջ. Վուդջերը՝ կենսաբանությունը և այլն: Սակայն այդ մեթոդը լիարժեք կիրառվել է միայն մաթեմատիկայի, ձևական տրամաբանության և ֆիզիկայի որոշ բաժինների կառուցման մեջ:

Աքսիոմատիկ մեթոդը անցել է զարգացման երեք փուլ [385]: Առաջին փուլը կապված է անտիկ շրջանում հույների կողմից երկրաչափության, տրամաբանության և գիտության այլ բաժինների համակարգված կառույցի ստեղծման փորձերի հետ: Այդ շրջանի և աքսիոմատիկ մեթոդի սկզբնավորումը կապվում է է Պյութագորասի անվան հետ: Սակայն աքսիոմատիկ մեթոդը լիարժեք կերպով դրսևորվել է միայն Էվկլիդեսի

«Սկզբունքներ» աշխատության մեջ: Սակայն իր ստեղծած երկրաչափության մեջ Էվկլիդեսը հաճախ էր դիմում նաև ինտուիտիվ, ոչ տրամաբանական եզրահանգումների, հատկապես երբ խոսքը վերաբերում էր կորերի անընդհատությանը կամ պատկերների հավասարությանը: Միշտ չէ, որ հստակ էր կատարվում նախնական հասկացությունների միջոցով նոր հասկացությունների սահմանումը: Այս շրջանում, որ տևեց մինչև 19-րդ դարի սկիզբը, դիտարկվում էին միայն բովանդակային աքսիոմատիկ տեսությունները. Տվյալ տեսության դրույթները կապվում էին առարկաների մի որոշակի խմբի հետ, իսկ աքսիոմները համարվում էին այդ առարկաների մասին անառարկելի դատողություններ, որոնց իսկությունը որևէ մեկի կողմից կասկածի տակ չէր առնվում:

Աքսիոմատիկ մեթոդի զարգացման երկրորդ փուլը կապված է Կ. Գաուսի, Ն. Լոբաչևսկու և Յա. Բոյայի կողմից ոչ էվկլիդեսյան երկրաչափության հայտնագործության հետ: Իրականում նրանք ցույց տվեցին, որ Էվկլիդեսի զուգահեռության աքսիոմից անկախ գոյության իրավունք ունի նաև այն ժխտող դրույթը և, այսպիսով, խարխլեցին հավատը աքսիոմների և նրանց վրա կառուցված տեսությունների նկատմամբ: Ոչ էվկլիդեսյան երկրաչափության կողքին առաջ եկան մի շարք տեսություններ, մասնավորապես՝ 1891-ին Ջ. Պեանոն ստեղծեց բնական թվերի աքսիոմատիկ տեսությունը, 1899-ին Դ. Հիլբերդը՝ երկրաչափության աքսիոմատիկ տեսությունը, 1910-ին Է. Ցերմելոն՝ բազմությունների աքսիոմատիկ տեսությունը: Այս և նման այլ տեսություններում աքսիոմները դիտվում էին որպես տեսության հիմքում ընկած նախնական դրույթներ, իսկ դրանց ճշմարտացիության հարցը դիտարկվում էր տեսությունից դուրս, այսպես կոչված՝ մոդելի կամ մեկնաբանության վրա: Ընդ որում, ի տարբերություն բովանդակային աքսիոմատիկ տեսությունների, այստեղ միևնույն աքսիոմատիկ տեսությունը կարող էր արդեն ունենալ տարբեր մոդելներ:

Աքսիոմատիկ մեթոդի զարգացման երրորդ փուլը կապված է արտածման տրամաբանական հասկացության ճշգրտման հետ: Այս խնդրի իրագործման ճանապարհին Դ. Հիլբերդը ստեղծեց ձևական աքսիոմատիկ տեսությունը կամ մաթեմատիկական տրամաբանությունը: Ձևական աքսիոմատիկ տեսության մեջ նախ տրվում է այդ տեսության այբուբենը՝ առարկայական սիմվոլների, գործողության սիմվոլների և առնչության սիմվոլների որոշակի համախմբություններ: Այդ այբուբենի տարրերից կազմված վերջավոր հաջորդականություններից՝ գործողությունների սիմվոլների միջոցով և որոշակի օրենքով առանձնացվում են տեսության թերմերը կամ արտահայտությունները, իսկ թերմերից՝ առնչության սիմվոլների միջոցով ստացվում են տեսության բանաձևերը: Որոշ բանաձևեր ընդունվում են որպես աքսիոմներ: Տրվում են նաև տեսության արտածման կանոնները՝ ինչ-որ բանաձև կարող է «արտածվել» բանաձևերի ինչ-որ խմբից: Տեսության մեջ արտածումը բանաձևերի հաջորդականություն է, որի յուրաքանչյուր անդամ կամ աքսիոմ է կամ էլ ստացվում է իր նախորդներից՝ արտածման որևէ կանոնով: Թեորեմը այն բանաձևն է, որը ինչ-որ արտածման անդամ է: Այսպիսով՝ ձևական աքսիոմատիկ տեսության ինչպես աքսիոմները, այնպես էլ թեորեմները սիմվոլների հաջորդականություններ են և զուրկ են որևէ բովանդակային իմաստից, և նման իմաստ են ստանում միայն մոդելի վրա (տես, օրինակ, [385]):

Աքսիոմատիկ մեթոդը հանրահաշվի միջին դպրոցի դասընթացում: Աքսիոմատիկ մեթոդը մեծապես նպաստում է և լայն հնարավորություններ է ստեղծում սովորողների տրամաբանական և, նաև, ալգորիթմական մտածողության զարգացման համար (տես {1], [13], [104], [128], [143], [195], [263], [324], [328], [329], [347], [376], [381], [385]): Աքսիոմատիկ մեթոդի կիրառությունը մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում կարևորագույն խնդիր է, որով զբաղվել են ինչպես մանկավարժներ, այնպես էլ մաթեմատիկոսներ, այդ թվում՝ Ժ. Ադամարը, Ժ. Դեդոնեն, Ա. Վեյլը, Ա. Ա. Կոլմոգորովը, Վ. Գ. Բոլտյանսկին, Ա. Ա. Ստոլյարը, Լ. Մ. Ֆրիդմանը, Վ. Ա. Կրուտեցկին. Գ. Ա. Բուտկինը, Վ. Ա. Հովհաննիսյանը, Հ. Ս. Միքայելյանը, Դ. Ն. Մկրտչյանը և ուրիշներ (տես [100], [104], [128-129], [178], [194], [199], [203], [243-244], [319], [333], [335], [348], [405-406], [502] և այլն): Այն եղել է մաթեմատիկայի միջազգային կոնգրեսների ու կոնֆերանսների, ուսուցիչների համագումարների քննարկման առարկա: Խնդիրը ուսումնասիրված է համակողմանիորեն, ստացվել են մեծ թվով մեթոդական երաշխավորություններ: Կան տարբեր տեսակետներ դպրոցական դասընթացում աքսիոմատիկ մեթոդի օգտագործման վերաբերյալ, որոնք, ըստ էության, հանգում են հետևյալին [405]: Իհարկե, այստեղ խոսք լինել չի կարող ձևական աքսիոմատիկ տեսության կիրառության մասին, այլ պետք է մեթոդը համադրել ինտուիցիայի հետ: Նշվում է, որ, դիտարկվող առարկաները, գործողությունները, առնչությունները, բանաձևերը, աքսիոմները, արտածման կանոնները, թեորեմները և դրանց ապացուցումները պետք է ունենան ինտուիտիվ ընկալման պարզություն և կիրառական նշանակություն: Դպրոցական դասընթացի շարադրանքում աքսիոմատիկ տեսության հնարավոր կիրառության համար դրվում են հետևյալ չորս պայմանները.

(1) գոյություն ունեն տեսության պարզ, հետաքրքիր մոդելներ, որոնց վրա հնարավոր է մեկնաբանել այդ տեսությունը,

(2) վերացական տեսության արդյունքները թելադրվում են մոդելի ուսումնասիրությամբ,

(3) աքսիոմների փոքր թվով հնարավոր է կառուցել տեսության առանձին հատվածներ՝ հետաքրքիր թեորեմներով,

(4) ապացուցումները բավականին պարզ են ու մատչելի:

Ավանդաբար աքսիոմատիկ տեսության ուսումնասիրությունը կատարվել է երկրաչափության նյութի հիման վրա (տես [4], [20-21], [25-26], [115]: Սակայն երկրաչափության աքսիոմների համակարգը, ինչպես նշում է Ա. Ա. Ստոլյարը (տես [405]), այս պայմաններին չի բավարարում, օրինակ, [115], [20-21]: Նշենք նաև, որ երկրաչափական առարկաները դիտողական հնարավորություն ընձեռնելու հետ միասին՝ ունեն նաև ընկալման որոշակի դժվարություն, ինչը կապված է դրանց խորքային բարդությունների հետ: Դրանցից է, օրինակ, երկրաչափության հիմնական հասկացություններից մեկի՝ ուղղի ընկալման բարդությունը՝ կապված նրա անվերջության և անընդհատության հատկությունների հետ, որոնք պետք է ընկալվեն, բայց չեն ընկալվում այդ նույն դիտողական հնարավորությունների շրջանակներում: Այդ հատկությունների աքսիոմատիկ շարադրանքը չափազանց մեծ ծավալ կարող է զբաղեցնել և ամենևին նպատակահարմար չէ ուսուցման համար, իսկ ուսուցումը ինտուիտիվ ընկալման հիման վրա նույնպես դժվար է իրականացնել: Սակայն ուղղի այդ հատկությունները այս կամ այն ձևով, ուղղակի կամ անուղղակի մասնակցում են նրա այլ հատկությունների ուսումնասիրության ժամանակ: Այդ պատճառով ուսումնասիրությունը՝ առանց համապատասխան աքսիոմատիկ հիմնավորումների, դառնում է թերի: Ուրեմն՝ պետք է գտնել դպրոցական դասընթացում աքսիոմատիկ տեսության ուսումնասիրման համար այլ մոդել:

Տարբեր հեղինակներ այս նպատակի իրականացման համար առաջադրում են տարբեր տեսություններ՝ աբելյան խմբերի, բուլյան հանրահաշիվների, փոքր չափողականության վեկտորական տարածությունների տեսությունները: Հասկանալի է, որ նշված տեսությունների ուսումնասիրությունը դառնում է արհեստական՝ միայն աքսիոմատիկ մեթոդի ցուցադրման համար, իսկ բուն մաթեմատիկայի ավանդական դասընթացին այդ տեսությունները քիչ բան են տալիս: Միաժամանակ, փաստորեն առաջարկվում են ծրագրային հիմնարար փոփոխություններ, որոնք սակայն որոշակի բարդություններ ունեն՝ կապված ուսուցման մեթոդիկայի մշակման, փորձարկման, ուսուցիչների վերապատրաստման և ուսումնամեթոդական այլ խնդիրների հետ (ավելի հանգամանորեն տես [103]): Իսկ խորհրդային շրջանի հանրակրթական դպրոցի հանրահաշվի բոլոր դասընթացներում աքսիոմատիկ մեթոդը մասնակցում էր միայն հատվածաբար:

Աքսիոմատիկ մեթոդը հանրահաշվի ներկա դասընթացում: Մենք խնդիր էինք դրել կառուցել աքսիոմատիկ համակարգեր, որոնք բավարարելով վերը նշված պահանջները, լուծում էին նաև հետևյալ մանկավարժամեթոդական խնդիրները.

1) այդ համակարգերը՝ դրանց հիմնական բաղադրիչներով, արդեն ուսումնասիրվում են հանրահաշվի դպրոցական ավանդական դասընթացում,

2) աքսիոմատիկ մեթոդի կիրառումը դրանց շարադրանքը դարձնում է ավելի հստակ, հասկանալի, համակարգված և, միաժամանակ, հնարավորություն է տալիս ներկայացնելու դեդուկտիվ մեթոդի էությունը,

3) կառուցել բովանդակային աքսիոմատիկ տեսություն, և աքսիոմատիկ մեթոդը դիտարկել կոնկրետ մոդելների վրա,

4) նշված տեսության առարկաները, գործողությունները, առնչությունները, բանաձևերը, աքսիոմները, արտածման կանոնները, թեորեմները և դրանց ապացուցումները ունեն ինտուիտիվ ընկալման պարզություն և կիրառական հիմնարար նշանակություն:

Դասընթացում նշված խնդիրներն իրականացվում են իրական թվերի կարգավորված դաշտի, մեծությունների կարգավորված հանրահաշվի և ռացիոնալ կոտորակների դաշտի կոնկրետ մոդելների վրա:

Դասընթացում հանրահաշվի տեսական նյութի շարադրանքը կրում է դեդուկտիվ բնույթ: Առկա են հիմնական հանրահաշվական հասկացությունները, որոնց միջոցով կառուցվում է հանրահաշվի լեզուն: Առկա են աքսիոմները, որոնք այստեղ կոչվում են օրենքներ: Աքսիոմներից հետևում են թեորեմները, որոնք դասընթացում կոչվում են հատկություններ՝ յուրաքանչյուրը իր անվանմամբ ու իր ապացուցումով: Դասընթացում կիրառվում են ինչպես ավանդական, այնպես էլ ոչ ավանդական ապացուցումներ: Ապացուցումների ժամանակ օգտագործվող որոշ օրենքներ ըստ էության խաղում են արտածման կանոնների դեր, որոնք մեթոդական առումով նպատակահարմար է այդպես էլ անվանել: Դիտարկենք նշված երեք մոդելները:

Հանրահաշվական կոտորակների դաշտը: Հանրահաշվի դպրոցական դասընթացի հիմնական նյութը ըստ էության կազմում է ռացիոնալ կոտորակների դաշտը: Սակայն ավանդաբար ռացիոնալ կոտորակները ներմուծվել են դասընթացի միջին մասերում, և դրանցում չի երևում ռացիոնալ կոտորակի հիմնարար դերը: Ներկա դասընթացում ցուցաբերվել են արմատական մոտեցումներ [40, 45, 55]:

1) Որպես հիմնական առարկաներ դիտարկվում են իրական թվերը, լատինական և հունական այբուբենների տառերը և որոշ այլ նշաններ՝ հանրահաշվի այբուբենի տարրերը:

2) Որպես հիմնական գործողություններ դիտարկվում են գումարման, հանման, բազմապատկման և բաժանման հանրահաշվական գործողությունները, որոնց միջոցով՝ հանրահաշվի այբուբենից ստացվում են տեսության թերմերը՝

հանրահաշվական արտահայտությունները: Նկատենք, որ թվարկված բոլոր առարկաները ավանդաբար եղել են հանրահաշվի դասընթացի միջուկում:

3) Առարկաների միջև տրվում է հավասարության = առնչությունը և որպես հիմնական բանաձևեր դիտարկվում են հավասարությունները:

4) Առկա են աքսիոմները կամ աքսիոմների սխեմաները (տես հավելված 7, աղյուսակ 1):

Այստեղ աքսիոմների քանակը թվում է մեծ, սակայն դրանց մասնավոր դրսևորումները, ինչպես նաև՝ անվանումները սովորողներին ծանոթ են թվաբանության դասընթացից:

5) Ինչպես նշվեց, ապացուցումների մեջ գործածվող որոշ օրենքներ և սահմանումներ՝ իրենց ձևական կառուցվածքներով, խաղում են արտածման կանոնների դեր (տես հավելված 2, աղյուսակ 2):

Արտածման այս կանոնների մեջ են հակադիրի, տարբերության, հակադարձի և քանորդի սահմանումները, որոնք ավանդաբար ուսումնասիրվում են դպրոցական մաթեմատիկայի բոլոր դասընթացներում, ինչպես նաև գումարման և բազմապատկման գործողությունների հետ հավասարության կապն արտահայտող օրենքներ, որոնք թույլ են տալիս տրված հավասարություններից ստանալ այլ հավասարություններ:

6) Թեորեմները և նրանց ապացուցումները: Բոլոր թեորեմները կազմում են հանրակրթությունում ավանդաբար դասավանդվող հանրահաշվի նյութ: Օրինակ,

$x = x$, $0 + a = a$, $(x + y) = (x) + (y)$, $x = 0 + x$, $x - y = x + (-y)$ և այլն:

Թեորեմների ապացուցումները ունեն շատ պարզ տեսք: Ընդ որում, կիրառվում են ապացուցման յուրօրինակ սխեմաներ, որոնցում երևում են աքսիոմների և արտածման կանոնների կիրառությունները, որոնք որպես փաստարկներ առանձնացվում և ավելի շոշափելի են դառնում:

Իրական թվերի կարգավորված դաշտը: Իրական թվերի ուսումնասիրությունը ավանդաբար կատարվել է փուլային եղանակով: Թվաբանության դասընթացը ավարտվում է ռացիոնալ թվերի կարգավորված դաշտի ուսուցումը: Դասընթացում իրական թվերը դիտվում են որպես տասնորդական կոտորակներ: Իրական թվերի կարգավորված դաշտը կառուցվում է հետևյալ ձևով:

1) Հիմնական առարկաները: Որպես հիմնական առարկաներ դիտարկվում են իրական թվերը՝ տասնորդական կոտորակները:

2) Հիմնական գործողությունները: Որպես հիմնական գործողություններ դիտարկվում են գումարման, հանման, բազմապատկման և բաժանման թվաբանական գործողությունները:

3) Հիմնական առնչությունները: Տրվում են հավասարության՝ = և անհավասարության՝ <, > առնչությունները թվերի միջև:

4) Բանաձևերը: Որպես հիմնական բանաձևեր դիտարկվում են հավասարությունները և անհավասարությունները:

5) Տեսության աքսիոմները: Այս տեսությունը ռացիոնալ կոտորակների դաշտի տեսության ենթատեսությունն է և նրա մեջ մտնում են այդ տեսության բոլոր աքսիոմները: Լրացուցիչ ներմուծվում է հետևյալ աքսիոմը.

Կամայական x և y իրական թվերի համար կամ x = y, կամ x©< y, կամ էլ y < x:

6) Արտածման կանոնները: Այստեղ գործում են ռացիոնալ կոտորակների դաշտի բոլոր արտածման կանոնները, բայց կան նաև արտածման լրացուցիչ կանոններ (տես հավելված 2, աղյուսակ 2):

Այստեղ արտածման երկու կանոնները արտահայտում են մեծի և փոքրի անհավասարություններից մեկը մյուսով արտահայտելու սահմանումը և անհավասարության փոխանցելիության հատկությունը: Սրանք երկուսն էլ թվաբանության դասընթացում արդեն ուսումնասիրված են: Հաջորդ երկու հատկությունները արտահայտում են հավասարության և անհավասարության կապը: Պետք է նշել, որ մաթեմատիկայի ավանդական դասընթացներում այս հատկությունները հստակ չեն առանձնացվում, բայց դրանց իրավացիությունը ենթադրվում է ինքնին հասկանալի: Այսինքն՝ սովորողը դրանք կիրառում է, բայց հստակ չի գիտակցում: Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում՝ որպես արտածման կանոններ այս երկու հատկությունների ներգրավումը մեզ հնարավորություն է տվել ստանալու նաև ապացուցման վարժությունների հետաքրքիր տեսակներ, որոնք մեծապես նպաստում են սովորողների տրամաբանական մտածողության հստակեցմանը և զարգացմանը (տես, օրինակ, [55]):

Մեծությունների կարգավորված հանրահաշիվը: Մեծությունների ոչ համակարգված ուսուցումը ավանդաբար կատարվում էր թվաբանության դասընթացում, և հաշվի էր առնվում բացառապես հարցի կիրառական նշանակությունը: Իսկ հանրահաշվի դպրոցական ավանդական դասընթացում, ընդհանրապես չի կատարվել մեծությունների ուսուցում: Պարզվում է սակայն, որ մեծությունների ուսումնասիրությունը ոչ միայն նպաստում է հանրահաշվի կիրառական ուղղվածության համակարգված ուսումնասիրմանը, այլև մեծությունների կարգավորված հանրահաշվի աքսիոմների և արտածման կանոնների պարզ, հստակ ու սովորողների համար հասկանալի ձևերի մեջ ներկայացումը հանրահաշվի դասընթացի մեջ դեդուկտիվ կառուցման և բովանդակային աքսիոմատիկ տեսությունը ուսումնասիրելու հրաշալի օրինակ է: Միևնույն ժամանակ հարկ է նշել, որ օրինակ ֆիզիկայի մեջ մաթեմատիկական կիրառությունները ավելի հաճախ կատարվում են մեծությունների մասնակցությամբ, և այս տեսակետից նույնպես մեծությունների հանրահաշվի ուսումնասիրությունը ավելի քան համոզեցուցիչ է: Միաժամանակ, մաթեմատիկայի ժամանակակից կառույցի հիմքում ընկած են նաև արտաքին գործողության և վեկտորական տարածության հասկացությունները, որոնց համար մեծությունների նշված ձևով ուսումնասիրությունը հրաշալի նախաուսուցում է: Մասնավորապես՝ այն կարելի է օգտագործել վեկտորի հասկացության և նրա հետ կապված նյութի ուսումնասիրությունը ավելի հաջող կազմակերպելու համար:

Մեծությունների կարգավորված իրական հանրահաշվի բովանդակային աքսիոմատիկ տեսությունը կառուցվում է հետևյալ կերպ (տես նաև [47]):

1) Հիմնական առարկաները: Որպես հիմնական առարկաներ դիտարկվում են իրական թվերը և մեծությունները:

2) Հիմնական գործողությունները: Որպես հիմնական գործողություններ դիտարկվում են.

ա. թվերի նկատմամբ գումարման, հանման, բազմապատկման և բաժանման թվաբանական գործողությունները,

բ. նույն գործողությունները մեծությունների նկատմամբ,

գ. Թվի և մեծության բազմապատկման գործողությունը:

3) Հիմնական առնչությունները: Թվերի միջև տրվում են հավասարության՝ = և անհավասարության՝ <, > առնչությունները, նույն առնչությունները տրվում են նաև մեծությունների միջև:

4) Բանաձևերը: Որպես հիմնական բանաձևեր դիտարկվում են հավասարությունները և անհավասարությունները:

5) Տեսության աքսիոմները: Այս տեսության մեջ մտնում են իրական թվերի դաշտի տեսության բոլոր աքսիոմները: Լրացուցիչ մտնում են նաև երեք աքսիոմներ (տես հավելված 2, աղյուսակ 2): Այստեղ բերված աքսիոմները գծային հանրահաշվի հայտնի աքսիոմներն են, որոնք կիրառվում են թվաբանության դասընթացում՝ կոնկրետ մեծությունների համար և մատչելի են ցածր դասարանների աշակերտների համար: Իսկ հանրահաշվական տեսական բանաձևումները իհարկե ունեն ընկալման դժվարություններ, որոնք հեշտությամբ հաղթահարվում են:

6) Արտածման կանոնները: Արտածման կանոնները նույնպես, այստեղ, իրական թվերի կարգավորված դաշտի արտածման կանոններն են: Բայց կան նաև արտածման լրացուցիչ կանոններ (տես հավելված 2, աղյուսակ 3): Արտածման բոլոր կանոնները փաստորեն սահմանումներ են: Առաջին երեքը մեծությունների և նրանց համապատասխան թվային արժեքների հավասարության ու անհավասարության կապերն են: Վերջին երեքը՝ մեծությունների հանման, մեծության և թվի, մեծության և մեծության քանորդների սահմանումները: Բոլոր այս սահմանումները ինտուիտիվ ընկալման տեսակետից պարզ են և փաստորեն սովորողների կողմից կիրառվում էին նաև ավանդական մեթոդներով ուսուցման ընթացքում:

7). Թեորեմները և նրանց ապացուցումները: Հանրահաշիվ 7-ում մեծությունների վերաբերյալ բերվում են նաև որոշ թեորեմներ, որոնք ունեն հետաքրքիր ու մատչելի ապացուցումներ:

Դ. Մկրտչյանը իր [103] աշխատանքում մանրակրկիտ քննարկման է ենթարկել աքսիոմատիկ տեսության կիրառության հարցը հանրահաշվի ներկա դասընթացի տեսական նյութի և խնդիրների համակարգի ուսուցման գործընթացներում: Մասնավորաբար, դիտարկվում են ապացուցման հենցենյան սխեմաները, թեորեմների ապացուցումների և վարժությունների հետ միասին դիտարկվում են նոր վարժություններ [48]:

Դասընթացի ապացուցողական կառույցը: Ապացուցման և, հատկապես, նրա ամենանշանակալից ձևի՝ տրամաբանական ապացուցման գաղափարի ու նրա մաթեմատիկական ձևի առաջացումն ու զարգացումը գիտության պատմության ուշագրավ էջերից են: Այդ գրավչությունը սկսվում է Անտիկ Հունաստանի փիլիսոփաների սոփեստություններում ու Զենոնի անտինոմներում և շարունակվում հետագա ժամանակներում՝ իր լավագույն արտահայտությունը գտնելով գիտական խոշորագույն հայտնագործություններում՝ լինի դա Լոբաչևսկու-Պոյայի երկրաչափության, թե բազմությունների տեսության հակասությունների հաղթահարման համար մաթեմատիկական տրամաբանության ստեղծումը: Եվ մաթեմատիկական բոլոր խոշոր հայտնագործությունների “աղը”, գրավչությունը դրանց հիմքում ընկած ապացուցումների անսպասելիությունն է ու անկանխատեսելիությունը, դժվարությունն ու միաժամանակ՝ պարզությունը, հստակությունը և տրամաբանական խստությունը. Հատկանիշներ, որոնցով բնութագրվում է գեղեցիկը գիտության մեջ: Եվ պատահական չէ, որ մաթեմատիկական լավագույն ապացուցումներին տրվող հիմնական գնահատականը գեղեցիկն է՝ գեղեցիկ ապացույցը:

Զարմանքը, հետաքրքրությունը, հիացմունքը, հաճույքը, այլ հույզեր ն զգացմունքեր փաստարկված խոսքի, նաև՝ մաթեմատիկական ապացուցման մշտական ուղեկիցները կարող են լինել, եթե սովորողի խոսքի գեղեցկությունը ուսուցման նպատակ է դառնում: Իսկապես, մի±թե զարմանք չի հարուցում հետևյալ սոփեստությունը (տես [64] դասագրքի N560 խնդիրը: Սոփեստության բնօրինակում ձիու փոխարեն օգտագործվում է կոտոշը):

Այն, ինչ դու չես կորցրել՝ ունես: Դու ծի չես կորցրել: Ուրեմն՝ դու ծի ունես:

Չկա աշակերտ, որ անտարբեր լինի այս սոփեստության նկատմամբ և չկա աշակերտ, որ չուզի ինքնուրույն, կրկնում եմ՝ ինքնուրույն գտնել դրա լուծումը: Ի±նչն է ձգում աշակերտին. Պարզությո±ւնը, անսպասելիությո±ւնը, սխալի քողարկման խորամանկությո±ւնը: Բոլոր դեպքերում ձգողական այդ ուժը խնդրի մեջ գեղեցիկի առկայության աներկբա հատկանիշ է ու ապացույց: Խնդրի մասին ասվածը կարելի է կրկնել նաև նրա ապացուցման նկատմամբ, և որպես գեղագիտական հույզերի ու զգացմունքների լրացուցիչ դրսևորում կարելի է ավելացնել սովորողի բավարարվածությունը և հաճույքը:

Հիմա դիմենք Զենոնին: Հանրակրթական դպրոցի հանրահաշվի 9-րդ դասարանի [65] դասագրքում անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարը հաշվելուց առաջ դիտարկվում է նրա «Արագավազ Աքիլեսի և կրիայի մասին» ապորիան: Զենոնը §ապացուցում¦ է, որ Աքիլեսը, ով հունական դիցաբանության մեջ հայտնի էր իր արագավազությամբ, չի կարող հասնել կրիային՝ աշխարհի ամենադանդաղաշարժ կենդանիներից մեկին: Սովորողների առաջին ռեակցիան թերահավատությունն է: Բայց երբ ուսուցիչը կրկնում է խնդիրը և ասում, որ Զենոնի պես իմաստուն մարդը դրանում համոզել է շատ այլ իմաստունների և, անշուշտ, կհամոզի նաև իրենց, աշակերտները սկսում են հետաքրքրվել խնդրով և պատրաստվում են հերքել իրենց ներկայացվող փաստարկումը կամ ապացուցումը: Իսկ այդ ապացուցումը, որ ներկայացնում է ուսուցիչը, հետևյալն է:

Տրված է, որ Աքիլեսը տասն անգամ ավելի արագ է վազում կրիայից և սկզբում նրանից հետ է մնում հազար քայլով: Այն ժամանկահատվածում, երբ Աքիլլեսը անցնի այդ հեռավորությունը, կրիան նույն ուղղությամբ կանցնի հարյուր քայլ: Երբ Աքիլլեսը անցնի այդ հարյուր քայլը, կրիան կանցնի ևս տասը քայլ, և այդպես շարունակ: Այս ընթացքը անվերջ կշարունակվի: Եվ Աքիլլեսը այդպես էլ չի հասնի կրիային:

Այս §ապացուցումը¦, իհարկե, աշակերտները չեն կարողանում հերքել: Բայց այն հարուցում է զարմանք ու տարակուսանք: Նրանց՝ հետաքրքրասիրությամբ վառվող աչքերը ուղղվում են ուսուցչին: Իսկ ուսուցիչը, որ ես եմ, բավարարված եմ իմ արած աշխատանքով. Ես ստացել եմ այն, ինչ ուզում էի: Ես նրանց ասում եմ, որ, ճիշտ է, ժամանակի իմաստունները չեն կարողացել առարկել, հերքել Զենոնին, բայց գիտությունը զարգացել է ու այդ ընթացքում կատարել այնպիսի հայտնագործություններ, որոնք թույլ են տալիս իրականացնել պահանջվող հերքումը: Այժմ մենք ծանոթանալու ենք նման մի հայտնագործության: Ապահովված է նաև աշակերտների հետաքրքրասիրությունը նոր նյութի նկատմամբ, և ես անցնում եմ դրա հաղորդմանը. §Անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիան և նրա գումարը¦ ...

Ի±նչ է ապացուցումը: Հավանաբար, ճիշտ կլինի սկզբում պարզել, թե ինչու է կատարվում ապացուցումը: Այն կոչված է պատասխանելու ճանաչողության հիմնական՝ §ինչու±¦ հարցադրմանը: Վերջինս առաջադրվել է մարդկության պատմության վաղնջական ժամանակներից, բայց բուռն զարգացում է ստացել միայն Անտիկ Հունաստանում՝ հասարակական կյանքի կազմակերպման յուրահատուկ պայմաններում: Հունական պոլիսների կառավարման ժողովրդավարական ձևը ենթադրում էր առաջադրվող հարցերի հրապարակային քննարկում, որտեղ հարցեր ներկայացնողին՝ բանախոսին, ճարտասանին անհրաժեշտ էր մարդկանց համոզել, ցույց տալ սեփական տեսակետի ճշմարտացիությունը: Ճարտասանությունը համարվում էր առաքինություն, և այն հունական կրթության կարևոր բաղադրիչն էր՝ կրթությունը կազմող յոթ ազատ արվեստներից մեկը: Եվ, բնականաբար, հարցադրման պատասխանի, համոզիչ խոսքի հիմնական արժանիքներից մեկը՝ գլխավորը, նրա փաստարկվածությունն էր, հիմնավորվածությունը, ապացուցելիությունը: Նման խոսքի կառուցման առաջին օրինակները տվեց հունական մաթեմատիկան: Բավական է նշել, որ մինչև հույները, թեև ինչպես Եգիպտոսում, այնպես էլ Միջագետքում կար բավականին զարգացած մաթեմատիկա, բայց դրանցում առկա չէր ապացուցման որևէ տարր, դրվագ, անգամ ապացուցման վերաբերյալ որևէ հարցադրում: Եվ առաջինը հույներն էին՝ Թալեսը, Պյութագորասը և նրանց հետևորդները, որ առաջ քաշեցին ապացուցման գաղափարը և իրագործեցին երկրաչափական փաստերի, թեորեմների ապացուցում: Այս գործընթացին հաջորդեց Արիստոտելի կողմից տրամաբանության ստեղծումը, որը, փաստորեն, նաև գիտություն էր ապացուցման մասին:

Առօրեական խոսքում, սովորաբար, որպես ապացուցում դիտարկվում է ինչ-որ պնդման իրավացիությունը հաստատող փաստարկումների ամբողջությունը: Նման փաստարկումներ կարող են լինել անառարկելի, ստուգված փաստերը, դրույթները, փորձի արդյունքները, հեղինակավոր մարդկանց կարծիքները և այլն: Ապացուցման այդպիսի մեկնաբանությունը և կիրառությունը, սակայն, հիմնավոր կարող է չլինել, և գիտական ուսումնասիրություններում ապացուցման նկատմամբ կիրառվում է այլ մոտեցում: Այստեղ դիտարկվում են ապացուցումների հետևյալ տեսակները.

- փաստաբանական՝ փաստերի վրա հիմնված ապացուցումները,
- էմպիրիկ՝ փորձի իմաստավորման և ընդհանրացման վրա հիմնըված ապացուցումները,
- ձևական-տրամաբանական, որտեղ փաստարկումը հենվում է ձևական տրամաբանության օրենքների վրա:

Անշուշտ, տարբեր գիտություններ, իրականացնելով ճանաչողության գործառույթներ, օգտվում են ապացուցման իրենց զինանոցից, բայց բոլորի համար տրամաբանությունը տալիս է ապացուցման համընդհանուր կաղապարներ, որոնց պետք է ենթարկվեն մնացած գիտություններում (և ոչ միայն գիտություններում) առաջադրվող ապացուցումները: Իսկ մաթեմատիկան ապացուցման համար կիրառում է ուրույն մոտեցում, ինչը և մաթեմատիկական գիտելիքի նկատմամբ վստահության հիմնական պատճառն է: Քսաներորդ դարի սկզբին, փորձելով հաղթահարել մաթեմատիկայում և փիլիսոփայության մեջ ծագած մի շարք լուրջ հակասություններ (պարադոքսներ), գերմանացի մաթեմատիկոս Դավիթ Հիլբերտը տվեց մաթեմատիկական ապացուցման հետևյալ սահմանումը, որը կարելի էր հեշտությամբ հարմարեցնել նաև այլ գիտությունների համար (հարկ է խոստովանել, որ Հիլբերտին և նրա հետևորդներին այդպես էլ չհաջողվեց հաղթահարել նշված հակասությունները).

A բանաձևի ապացուցումը բանաձևերի այնպիսի $A_1, A_2, \dots, A_n$ հաջորդականությունն է, որի յուրաքանչյուր անդամ կամ աքսիոմ է, կամ էլ ստացվում է իր նախորդներից արտածման ինչ-որ կանոնով, իսկ վերջին անդամն էլ հենց A –ն է [236]:

Թվում է, թե առանձին բացատրության կարիք չունի այս սահմանման մեջ կիրառվող “աքսիոմ” եզրույթը. Յուրաքանչյուր գիտություն կամ տեսություն ունի աքսիոմների՝ անառարկելի դրույթների իր համակարգը, որոնք, որպես ճշմարտություններ, ընդունվում են այդ գիտության կամ տեսության շրջանակներում: Ինչ վերաբերում է արտածման կանոններին, ապա դրանք էլ կարող են լինել այդ տեսության արդեն ապացուցված դրույթներ կամ մտահանգումների ձևեր, որոնք դարձյալ ճշմարիտ են համարվում տվյալ գիտության կամ տեսության շրջանակներում: Օրինակ, իրավունքի տեսության մեջ կիրառվում է այսպիսի արտածման կանոն. ՀՀ բոլոր չափահաս քաղաքացիները ունեն ընտրելու իրավունք: Անին ՀՀ չափահաս քաղաքացի է: Ուրեմն՝ Անին ունի ընտրելու իրավունք: Հանրահաշվի հանրակրթական դպրոցի դասընթացում կիրառվում է արտածման այսպիսի կանոն. Եթե անհավասարության երկու մասերին գումարենք հավասար թվեր, ապա կստանանք տվածի հետ նույնիմաստ անհավասարություն:

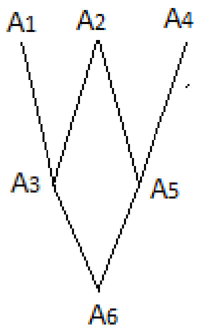
Առօրեական խոսքում և հասարակական գիտությունների մեջ միշտ չէ, որ հնարավոր է լինում հետևել ապացուցման այս ընթացքին կամ երբեմն անհնար է լինում նման ապացուցումներ կատարել. Այստեղ վիճարկելի են լինում և՛ որպես աքսիոմ կամ ճշմարտություն ներկայացվող դրույթները, և՛ արտածման կանոնները: Այլ է պատկերը մաթեմատիկայում, որտեղ հստակ են թե՛ աքսիոմները, թե՛ արտածման կանոնները: Այդ պատճառով մաթեմատիկական ապացուցումները հավաստի են, հստակ, զուսպ ու չափավոր. Հատկանիշներ, որոնք բնութագրում են նաև արվեստի գործերը, մասնավորապես՝ ճարտարապետական կառույցները:

Մաթեմատիկական ապացուցումը, նրա յուրաքանչյուր արտածումը ներկայացնող բանաձևերի հաջորդականություն ցույց է տալիս նաև մտածողության ընթացքը, տարբեր բանաձևերի ու դատողությունների փոխկապակցվածությունը: Եվ բանաձևերի այդ ներքին կապը հաճախ աչքի է ընկնում իր խորությամբ, անսպասելիությամբ, անկանխատեսելիությամբ, և կապակցությունների ողջ շղթային հաղորդում է գեղագիտական մեծ գրավչություն: Նշված պատճառները թվում են բավարար՝ ցույց տալու համար մաթեմատիկական ապացուցման գեղագիտական մեծ ներուժը: Դրանք են նաև, որ Պոլ Լոկհարդին [272] թույլ են տալիս մաթեմատիկան համարել §ապացուցումների արվեստ¦:

Ապացուցման կառույցի ճարտարապետությունը: Ապացուցման գեղագիտական գրավչությունը պայմանավորված է նաև նրա կառուցվածքով: Իսկ ինչպե±ս է կառուցված ապացուցումը: Յուրաքանչյուր ապացուցում կազմվում է երեք հիմնական տարրերից.

- ապացուցման թեզիսը՝ դատողություն, որի ճշմարտությունը պահանջվում է հաստատել ապացուցման միջոցով,
- արգումենտները (հիմքերը, փաստարկումները)՝ դատողություններ, որոնց ճշարիտ լինելը արդեն հայտնի է և որոնք օգտագործվում են տվյալ ապացուցման մեջ,
- ցուցադրումը՝ նշված երկու տարրերը կապող տրամաբանական ձևը:

Ապացուցման արդյունավետությունը պայմանավորված է ճանաչողական, մեթոդաբանական, տրամաբանական, ճարտասանական և այլ գործոններով, սակայն նրանում գլխավորը վերոնշյալ երեք տարրերն են: Ընդ որում, ապացուցման ողջ ընթացքում նրա թեզիսը պետք է բավարարի ձևակերպման ճշգրտության և անփոփոխության կանոններին, նրանում չպետք է դրսևորվի թեզիսի կամ հասկացությունների փոխարինում, ճշմարիտ պետք է լինեն ապացուցման արգումենտները (փաստարկումները):



Ասվածից հետևում է, որ մաթեմատիկայի դասավանդման ընթացքում պետք է աշխատել ավելի նշանակալից դարձնելու հիմնավորման, փաստարկման, ապացուցման դերը: Այդ նպատակով մաթեմատիկայի արևմտյան շատ դասագրքերում թեորեմի ապացուցման քայլերին զուգահեռ բերվում են նաև դրանց փաստարկումները՝ աքսիոմների և արտածման կանոնների անվանումները, ինչն օգնում է լավ հասկանալու ապացուցման մեխանիզմը, ձևավորելու փաստարկված խոսքի մշակույթ: Սակայն պետք է խոստովանել, որ հաջորդականության տեսքով տրված ապացուցումներում հաճախ տեխնիկապես դժվար է լինում նշել, թե ապացուցման քայլը կատարելիս հատկապես ո±ր բանաձևերի նկատմամբ է կիրառվում արտածման այս կամ այն կանոնը: Իսկ եթե նման հստակեցում մտցվի էլ, ապա այն ապացույցին կտա շատ ծավալուն տեսք, և պատկերման տեխնիկական բարդությունները կհանգեցնեն ապացույցի նկատմամբ հետաքրքրության կտրուկ թուլացման: Ահա այստեղ մեզ օգնում է ապացուցման մեկ այլ սահմանում, որ տվել է Հիլբերտի աշակերտ Գերհարդ Հենցենը՝ ապացուցումը ներկայացնելով ծառի տեսքով (տես [184]): Մեկնաբանենք Հենցենի մտահղացումը կոնկրետ օրինակի վրա: Դիցուք ունենք A_6 բանաձևի $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ ապացուցումը: Բանաձևերի այս հաջորդական հրաշալի տեսքը, սակայն, անօգտակար է, երբ ուզում ենք այս ապացույցը սովորեցնել աշակերտին: Այստեղ մենք պետք է նշենք նախ կիրառվող աքսիոմները, ապա և արտածման կանոնները: Դիցուք առաջին, երկրորդ և չորրորդ բանաձևերը աքսիոմներ են, իսկ երրորդ, հինգերորդ և վեցերորդ բանաձևերը ստացվում են արտածման կանոններով. Երրորդը՝ առաջին երկուսից, հինգերորդը՝ երկրորդից և չորրորդից, իսկ վեցերորդը՝ երրորդից և հինգերորդից: Մենք պարտավոր ենք դրանք հերթականությամբ նշել ապացուցման ընթացքում և հանգել ապացուցման: Նման պատկերման դեպքում գործընթացը ձգձգվում է, միասնական տեսք չի ստանում և ընկալելի չի դառնում:

Այժմ հետևենք Հենցենին: Նա այդ ապացուցումը ներկայացնում է հետևյալ §ծառի¦ տեսքով. Նախապես պայմանավորվելով, որ ծառի գագաթներում գրված բանաձևերը աքսիոմներ են, իսկ երկու կամ մի քանի կետերից ներքև և այդ կետերին գծերով (ճյուղերով) միացված բանաձևը ստացվում է այդ բանաձևերից արտածման համապատասխան կանոնով, ինչը որպես փաստարկ մենք գրում ենք ապացուցման կողքին բերված փաստարկումների բաժնում: Ապացուցումը և փաստարկումը ստանում են հետևյալ վերջնական տեսքը (տես գծագիրը):

Գեղեցի±կ է: Խոսքը, իհարկե, գծագրի մասին չէ (ինչը նույնպես ունի գեղագիտական իր գրավչությունը): Այն հնարավորություն է տալիս աշակերտին՝ տեսնելու թեորեմի ապացուցման հիմքում ընկած դատողությունների և մտահանգումների ողջ մեխանիզմը և հստակ պատկերացնելու փաստարկումների ողջ համակարգը: Այսպես են կատարվում ու ներկայացվում [63-65] դասագրքերի շատ ապացուցումներ (տես նաև Հավելված 3):

Ի. Լ. Տիմոֆեյեվան ապացուցումների նման ներկայացումը կարևորում է որպես ուսուցիչների պատրաստման լավագույն միջոց, իսկ աշակերտի համար համապատասխան խնդրի իրագործումը համարում մեթոդական շատ լուրջ խնդիր, որ կարոտ է լուծման (տես [411-412]: Նա, դժբախտաբար, ծանոթ չի եղել իր աշխատանքից տարիներ առաջ իրականացված հայաստանյան փորձին:

Հավելենք, որ ծառի տեսքով ներկայացված ապացուցումներում լայնորեն դրսևորվում է նաև դրանց արտաքին և ներքին գեղագիտությունը: Մի կողմից ապացուցումը ստանում է պատկերային որոշակի տեսք, որն ունի իր արտաքին գրավչությունը, մյուս կողմից՝ այդ պատկերը կազմող տարրերը իրար հետ շաղկապված են հետաքրքիր կապերով, որոնցում դրսևորվում է ապացուցման ներքին գեղագիտությունը:

1.2.3. Էմպիրիկ մեթոդը: Հանրահաշվի ներկա դասընթացի կարևոր առանձնահատկություններից մեկը նրանում կիրառական ոլորտի համակարգված դիտարկումն է, ինչը հիմք է ստեղծում նրա առարկայական-էմպիրիկ ուսուցման համար: Հանրահաշվի կիրառական ոլորտում ընկած առարկաների ուսումնասիրությունը տարվում է հետևյալ ճանապարհներով.

ա. Առարկաների դիտարկում,

բ. Առարկաների համեմատում,

գ. Գործողություններ առարկաների հետ,

դ. Առարկաների համեմատականություն,

ե. Իրադրություններ, որոնց մոդելավորումը հանգում է ֆունկցիաների:

Հակիրճ անդրադառնանք այս ճանապարհներից յուրաքանչյուրին:

Առարկաների դիտարկումը: Այստեղ խոսքը նախ վերաբերում է հաշվման, համարակալման և չափման: Առարկաների հաշվման և համարակալման գործողությունները իրականացվում են ննական թվերի միջոցով՝ 1-6-րդ դասարանների թվաբանության դասընթացում: Առարկաների չափման պարագայում առաջին հերթին երևում է իրական թվի գաղափարի կարևորությունը. դրանք իրական աշխարհի առարկաները չափելու համար անհրաժեշտ թվերն են: Չափվելու տեսանկյունից առարկաները բաժանվում են սեռերի: Միևնույն սեռի մեջ մտնում են այն առարկաները, որոնք չափվում են միևնույն մեծությամբ: Այդպիսի առարկաները կոչվում են համասեռ: Յուրաքանչյուր մեծության համար նշվում է համապատասխան առարկայական ոլորտը՝ օրինակների վրա: Նման օրինակներ բերված են հավելված 5-ի աղյուսակ 1-ում:

Առարկաների համեմատումը: Խոսքը առաջին հերթին վերաբերում է հավասարության և անհավասարության առնչությունների առարկայական դրսևորումներին: Հարկ է նշել, որ ինչպես հավասարության, այնպես էլ անհավասարության հիմնական հատկությունները՝ օրենքները ամրապնդվում են կիրառական զանազան օրինակների միջոցով: Իսկ մնացած հատկությունների ապացուցումներին նախորդում են նման օրինակների դիտարկումները: Հետաքրքիր է նաև այն, որ այդ տեսական օրենքները և հատկությունները հնարավորություն են տալիս լուծելու կիրառական կոնկրետ խնդիրներ: Օրինակ՝ հավասարության համաչափության օրենքի միջոցով հնարավոր է լինում ստուգել նժարավոր կշեռքի աշխատանքի ճշգրտությունը, առարկաների միավորման գումարային օրենքի միջոցով հնարավոր է լինում կշռել փիղը և այլն:

Նշենք նաև, որ թվերի և մեծությունների համեմատության ընթացքում գործածվող մաթեմատիկական «մեծ է» և «փոքր է» տերմինների փոխարեն առարկայական ոլորտում՝ կախված առարկաների սեռերից, կիրառվում են այլ բառեր: Այսպես, օրինակ, մենք ասում ենք՝ մի ճանապարհը երկար է մյուսից, մի գիրքը հաստ է մյուսից, մի մարմինը ծանր է մյուսից և այլն: Հավելված 5-ի աղյուսակ 2-ում բերվում է նման գործածությունների աղյուսակ առարկաների յուրաքանչյուր սեռի համար:

Այստեղ չափազանց մեծ նշանակություն ունեն նաև համեմատման գումարային և արտադրյալային մոդելները:

Գործողություններ առարկաների հետ: Հանրահաշվական գործողությունները մեզ անհրաժեշտ են նաև զանազան իրադրություններում առարկաների հետ կատարվող գործողությունների արդյունքում ստացված առարկաների ուսումնասիրության համար: Պետք է նկատել, որ համապատասխան կապն արտահայտող հատկությունների ուսուցումը խորհրդային դպրոցում չէր կատարվում, սակայն անբացահայտ տեսքով դրանք դիտարկվում էին: Նման դիտարկում հիմնականում կատարվում էին տեքստային խնդիրների լուծման ընթացքում: Իհարկե, աշակերտները անհրաժեշտ խորությամբ չէին ընբռնում նյութը, հաճախ չէին հասկանում տեքստային խնդրի լուծման ընթացքում այս կամ այն գործողության կիրառման պատճառը: Պետք է նկատել, որ ինչպես հանրահաշվական, այնպես էլ թվաբանական գործողությունների ուսուցումը՝ առանց դրանց հիմքում ընկած առարկայական դրսևորումների՝ գործողությունների մոդելների ուսուցման, ունի վերացական բնույթ և անհրաժեշտ խորությամբ չի կարող ընկալվել սովորողների կողմից: Այդ դեպքում անսխալ կատարելով կոտորակների հետ զանազան (անգամ բարդ) գործողություններ ու ձևափոխություններ, աշակերտը չի ընկալում դրանց անհրաժեշտությունը և չի հասկանում դրանց հիմքում ընկած օրինաչափությունները: Հասկանալի է, որ նման դեպքերում խախտվում է ուսուցման գիտակցականության դիդակտիկական սկզբունքը և ուսուցումը կրում էր սերտողական բնույթ:

Արևմտյան երկրների դասընթացներում կատարվում են նշված իրադրությունների մանրակրկիտ վերլուծություններ և հանրահաշվի կիրառական գործառույթը իրականացվում է անհրաժեշտ խորությամբ: Ներկա դասընթացում նույնպես մեծ տեղ է հատկացվում նշված հարցերին: Մոդելների առաջնահերթ ուսուցումը հնարավորություն է տալիս դիտարկվող մոդելի օրինակով աշակերտի մոտ համոզմունք առաջացնել տվյալ գործողության ներմուծման անհրաժեշ°տության նկատմամբ:

Դասընթացում ընդգծվում է հայոց լեզվում մոդելների համար կիրառվող հոմանիշների բազմազանությունը, ինչը ցույց է տալիս գործողության ու մոդելի կիրառական մեծ նշանակությունը, իրական հիմք է ստեղծում ապագայում իրադրությունների հանրահաշվական մոդելավորման և տեքստային խնդիրների լուծման համար: Այս փուլում ավելի է ընդգծվում մաթեմատիկայի հանրակրթական դերը: Միաժամանակ հարկ է նշել, որ նյութը աչքի է ընկնում իր դյուրամատչելիությամբ՝ հանգամանք, որ թույլ է տալիս ակտիվ վիճակում պահել գործնականում բոլոր աշակերտներին: Այս փուլում առանձնակի ուշադրություն պետք է դարձնել աշակերտի խոսքի դրվածքի վրա, որը չափազանց կարևոր է, և որի բարելավման հնարավորություն տալիս է այս նյութը: Յուրաքանչյուր մոդելից հետո պետք է աշակերտը յուրացնի նրա լեզվական հոմանիշները (տես Հավելված 1): Համապատասխան խնդիրներ այստեղ ուղղված են մաթեմատիկայի հանրակրթական դերի բարձրացմանը և հատուկ մաթեմատիկական պատրաստվածություն չեն պահանջում և գործնականում մատչելի են բոլոր աշակերտներին:

Դասագրքում ըստ գործողությունների դիտարկվում են հետևյալ մոդելները.

1). Գումարում - Միավորման գումարային մոդելը: Ավելացման գումարային մոդելը: Բազմությունների միավորումը:

2). Հանում - Պակասեցման հանման մոդելը: Համեմատման՝ հանման մոդելը:

3). Հակադիր - Ավելացման և պակասեցման կապի արտահայտումը հակադիրի միջոցով:

4). Բազմապատկում - Հավասարամեծ առարկաների միավորումը: Ավելացման արտադրյալային մոդելը: Մակերես: Ծավալ: Հաջորդական ընտրությունների մոդելը: Ուղղանկյունաձև դասավորված առարկաներ: Մաս:

5). Հակադարձ - Ավելացման և պակասեցման կապը հակադարձի միջոցով: Պակասեցման հակադարձի մոդելը:

6). Բաժանում - Առարկայի տրոհումը հավասարամեծ մասերի: Համեմատման բաժանման մոդելը: Ապրանքի գին: Արագություն: Կշռույթ: Տոկոս:

7). Բնական ցուցչով աստիճան - Բարդ տոկոս:

Հավելված 1-ի աղյուսակ 5-ում բերված է առարկայական գործողություն – հանրահաշվական գործողություն զուգահեռների աղյուսակ:

Իրադրություններ, որոնց ուսումնասիրությունը հանգում է համեմատականությունների: Հանրահաշվի կիրառական ուղղվածության ապահովման հիմնական ճանապարհներից մեկը համեմատականությունների դիտարկումն է: Համեմատականությունների միջոցով են լուծվում շատ տեքստային, ինչպես նաև՝ ֆիզիկայի, քիմիայի և այլ առարկաների մեջ առաջացած խնդիրներ:

Համեմատականությունները դիտարկվել են հանրակրթական դպրոցի թվաբանության նախկին դասընթացներում: Սակայն հանրահաշվի դասընթացում նման կիրառություն չի եղել: Հանրահաշվի մեր դասընթացում համեմատականությունների ուսուցումը ուղեկցվում, իսկ հաճախ՝ դրանց ուսուցմանը նախորդում է այն իրադրության դիտարկումը, որի հանրահաշվական մոդելը հանգում է տվյալ համեմատականությանը: Յուրաքանչյուր համեմատականության համար ընտրվում են այդ իրադրություններից կարևորագույնները, որոնց ուսումնասիրությունը պարտադիր է և որոնք հաճախակի հանդիպում են առօրյա կյանքում և առանձնապես՝ տեքստային խնդիրներում: Ահա դրանք.

1) Հաստատուն գումարով համեմատականություն. Առարկայի տրված քանակությունը երկու մասերի բաժանման դեպքում՝ ստացված մասերի համեմատականությունը:

2) Հաստատուն տարբերությամբ համեմատականություն. Երկու մարդկանց տարիքների համեմատականությունը՝ դրանց փոփոխության ընթացքում: Գետի շարժման ընթացքում նրա վրա գտնվող երկու լաստերի անցած ճանապարհների համեմատականությունը:

3) Հաստատուն արտադրյալով համեմատականություն. Տրված ճանապարհը հաստատուն արագությամբ անցնող առարկայի արագության և այդ ընթացքում ծախսած ժամանակի համեմատականությունը: Հաստատուն մակերեսով ուղղանկյան երկարության և լայնության համեմատականությունը: Տեղերի հաստատուն թվով ուղղանկյունաձև դահլիճի շարքերի թվի և յուրաքանչյուր շարքում՝ տեղերի թվի համեմատականությունը: Տրված տարողությունն ունեցող ուղղանկյունանիստի ձև ունեցող ամանի հիմքի մակերեսի և բարձրության համեմատականությունը: Հաստատուն գնով վաճառվող առարկայի գնի և վաճառվող առարկայի քանակության համեմատականությունը՝ վաճառքից նախապես տրված քանակությամբ գումար ստանալու պայմանով: Հաստատուն արտադրողականությամբ աշխատող բանվորի արտադրողականության և աշխատած ժամանակի համեմատականությունը՝ նախապես տրված քանակությամբ արտադրանքի արտադրման պայմաններում:

4) Հաստատուն քանորդով համեմատականություն. Տրված հաստատուն արագությամբ անցնող առարկայի անցած ճանապարհի և ծախսած ժամանակի համեմատականությունը: Տրված լայնությամբ ուղղանկյունաձև հողամասի մակերեսի և երկարության համեմատականությունը: Հաստատուն գնով վաճառքի ընթացքում՝ վաճառված ապրանքի քանակության և դրա դիմաց ստացված դրամի քանակության համեմատականությունը: Տարադրամի փոխանակման ընթացքում տարադրամի և դրա դիմաց ստացված դրամի քանակության համեմատականությունը: Հաստատուն արտադրողականությամբ աշխատող բանվորի արտադրանքի քանակության և դրա վրա ծախսած ժամանակների համեմատականությունը: Ավազանը լցնող ծորակի լցրած ջրի և այն լցնելու վրա ծախսած ժամանակների համեմատականությունը: Համասեռ խառնուրդում խառնուրդի քանակության և այդ խառնուրդն առաջացնող նյութերից մեկի քանակության համեմատականությունը:

Իրադրություններ, որոնց մոդելավորումը հանգում է ֆունկցիաների: Կիրառական խնդիրների շատ լայն դաս է դիտարկվում ֆունկցիայի հասկացությանը նվիրված թեմայի շրջանակներում: Հաշվի առնելով թեմայի ուսուցման դժվարությունը և սովորողների տարիքային առանձնահատկությունները, հանրահաշվի գործող դասընթացում, ի տարբերություն նախկինի, ֆունկցիային նվիրված թեման ուսուցանվում է ոչ թե հանրահաշվի սկզբում, այլ վերջում: Նույն պատճառով ֆունկցիայի արդեն ֆունկցիայի հասկացության ներմուծումը ուղեկցվում է կիրառական ոլորտի բազմազան օրինակների դիտարկումով: Դրանք առարկայական են դարձնում և կարևորում են մաթեմատիկայի հիմնական հասկացություններից մեկի ուսուցումը:

Հենց առաջին դասում, որտեղ ֆունկցիայի հասկացությունը դիտարկվում է որպես առնչության ընդհանուր հասկացության մասնավոր դեպք, համապատասխան առանձնացումը կատարվում է բազմաթիվ օրինակների և ժխտօրինակների վրա: Ընդ որում՝ դիտարկվում են թե կիրառական, թե մաթեմատիկական օրինակներ, և ամենուրեք սկզբում դիտարկվում են կիրառական օրինակները, որոնք հիմնականում կապվում են աշակերտական առօրյայի հետ:

Կիրառական ոլորտը լայնորեն է դիտարկվում ֆունկցիաների պատկերումը ուսումնասիրելիս: Աղյուսակային պատկերման ընթացքում դիտարկվում են օրինակներ աշխարհագրությունից, որոնք նպաստում են նյութի նկատմամբ աշակերտների հետաքրքրության մեծացմանը:

Կիրառական լայն հնարավորություններ է ստեղծում ֆունկցիայի դիտարկումը որպես դիագրամ: Համապատասխան դասի շրջանակներում գաղափար է տրվում պետությունների և դաշինքների ռազմական պատրաստվածության և ծախսերի մասին, վերջիններս պատկերվում են ՆԱՏՕ-ի, Վարշավյան դաշինքի և մնացած աշխարհի օրինակների վրա: Նման պատկերումները չափազանց կարևոր են, քանի որ աշակերտը դրանց հետ առնչվում է շատ հաճախ:

Կիրառական ոլորտի ուսումնասիրությունը շարունակվում է նաև ֆունկցիաներին նվիված հետագա դասերի ընթացքում: Ֆունկցիայի որոշման և արժեքների տիրույթների հասկացությունները մեկնաբանվում են նախկինում բերված օրինակների վրա:

Կիրառությունների լայն ու հետաքրքիր հնարավորություններ է ստեղծում Գինեսի գրքի ներգրավումը դասընթացում , որ կատարվում է ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքներին նվիրված դասի ընթացքում: Իսկապես, երբ մենք դիտարկում ենք առարկաների ինչ-որ խումբ և ուսումնասիրում ենք դրանց ինչոր մեծություն՝ երկարություն, մակերես, ծավալ, արագություն և այլն, ապա ունենք ֆունկցիա, և ամենափոքր կամ ամենամեծ մեծությունը ունեցող առարկան գտնել նշանակում է գտնել համապատասխան ֆունկցիայի մեծագույնը և փոքրագույնը: Այս ճանապարհին կարող է դիտարկվել Գինեսի գրքի ողջ նյութը: Ֆունկցիայի մեծագույնը և փոքրագույնը արժեքներին նվիրված դասի շրջանակներում կատարվում են նաև տարբեր երկրների վերաբերյալ հետաքրքիր տվյալների համեմատություններ, դիտարկվում են մարզական միջոցառումներ և այլն:

1.3. Մաթեմատիկական գաղափարների ձևավորումը և զարգացումը հիմնական դպրոցի հանրահաշվի դասընթացում

1.3.1. Հանրահաշվական գործողություններ: Հանրահաշիվը գիտություն է հանրահաշվական գործողությունների մասին: Իսկ ի±նչ է հանրահաշվական գործողությունը: Դիտարկենք, օրինակ, ամբողջ թվերի Z բազմության վրա տրված հանման «-» գործողությունը. Այն ամբողջ թվերի յուրաքանչյուր զույգի առնչում է մի որոշակի ամբողջ թիվ՝ այդ թվերի տարբերությունը: Ընդ որում, այստեղ կարևոր է նկատի առնել տրված թվերի հերթականությունը. «-» գործողությունը m և n թվերին առնչում է m – n տարբերությունը, իսկ n և m թվերին՝ n – m տարբերությունը, իսկ m – n և n – m թվերը կարող են իրարից տարբեր լինել: Այսպիսով, «-» գործողությունը ամբողջ թվերի յուրաքանչյուր կարգավորված զույգին առնչում է մեկ ամբողջ թիվ, այսինքն՝ այն արտապատկերում է ZxZ բազմությունից Z բազմության մեջ: Փոխարինելով Z ը կամայական A բազմությամբ, մենք կարող ենք դիտարկել AxA դեկարտյան արտադրյալի արտապատկերումը A բազմության մեջ, որն էլ կոչվում է A բազմության վրա տրված (երկտեղ) հանրահաշվական գործողություն [59]:

Մեթոդական գրականության մեջ բազմիցս արտահայտվել է այն տեսակետը, որ հանրակրթական դպրոցում նպատակահարմար է ներմուծել գործողության այս ընդհանուր սահմանումը, որը հնարավորություն կտա միասնական դիրքերից քննարկելու ինչպես չորս հանրահաշվական գործողությունները, այնպես էլ այլ առարկաների հետ կատարվող գործողություններ: Մասնավորապես, նման մոտեցումը հնարավորություն է տալիս բարդ ֆունկցիայի հասկացությունը դիտարկելու որպես երկու ֆունկցիաների համադրույթ կամ արտադրյալ:

Այդ դեպքում հնարավոր է նաև նորովի մեկնաբանել հակադարձ ֆունկցիայի գաղափարը: Իսկապես, մենք կարող ենք A-ից A-ի մեջ տրված f ֆունկցիայի հակադարձը դիտարկել որպես մի g ֆունկցիա, որն օժտված է $f \circ g = g \circ f = \varepsilon$ հատկությամբ, որտեղ $\circ$ -ը ֆունկցիաների բազմապատկման կամ համադրույթի գործողությունն է, իսկ ε-ը՝ A բազմության վրա տրված նույնական արտապատկերումը, որը ֆունկցիաների բազմապատկման մեջ խաղում է միավորի դեր: Այս դեպքում լիարժեք կընկալվի թե՛ «հակադարձ» եզրի իմաստը, որը մտցվել է թվերի բազմապատկման գործողության նկատմամբ թվի հակադարձի անալոգիայով, թե՛ հակադարձ ֆունկցիայի ստացման ներքին տրամաբանությունն ու ստացման սկզբունքը: Սակայն այս նկատառումները թողնելով ավագ դպրոցի ծրագրով ու դասընթացով զբաղվողներին, նշենք, որ մինչև ավագ դպրոց հասնելը, բացի իրական թվերի, ռացիոնալ կոտորակների և մեծությունների հետ կատարվող գործողություններից, աշակերտը այլ գործողությունների հետ չի առնչվում (եթե, իհարկե, չհաշվենք չորրորդ դասարանում ըստ երկու մոդուլի գործողության ներմուծումը, որը ուսումնական ծրագրի հետ որևէ առնչություն չունի): Այսպիսով, չնայած հանրակրթական դպրոցում հանրահաշվական գործողության ուսուցման խնդրում հնարավոր է կիրառել ժամանակակից մոտեցումներ, բայցևայնպես միջին դպրոցում հանրահաշվական օբյեկտների սահմանափակ բնույթը դա թույլ չի տալիս: Միևնույն ժամանակ, գործողության ընդհանուր գաղափարը իր վերացարկման բարձր աստիճանով անհասանելի է միջին դպրոցի աշակերտի համար:

Սակայն, միջին դպրոցի դասընթացի կառուցման հիմքում, այնուամենայնիվ, անհրաժեշտ է դնել հանրահաշվական գործողությունները, ելնելով ժամանակակից հանրահաշվի մեջ գործողության գաղափարի ունեցած դերից: Բայց ելնելով ոչ թե հանրահաշվական գործողության ընդհանուր սահմանումից, այլ դպրոցականին հայտնի չորս գործողություններից: Այս մոտեցումը կենտրոնական դեր է խաղում հանրահաշվի դասընթացի կառուցման խնդրում: Իսկապես՝ դասընթացում «Հանրահաշիվ 7»-ի բովանդակային կառույցը բաժանվում է ըստ չորս հանրահաշվական գործողությունների, որոնք կազմում են նրա հիմնական մագիստրալները՝ գլուխները: Եվ դասընթացի գլխավոր առանձնահատկություններից մեկը յուրաքանչյուր գլխում համապատասխան գործողության և նրա հատկությունների ուսումնասիրությունն է:

Իրական թվերի պարագայում թվաբանության դասընթացին բացահայտ ձևով ավելացվում է ոչ ռացիոնալ թվի գոյության ապացուցումը՝ ութերորդ դասարանում:

Սրան պետք է ավելացնել նաև իրական թվերի կարգավորված դաշտի մի շարք աքսիոմներ և հատկություններ, որոնք նույնպես ներմուծվում և ուսումնասիրվում են դասընթացի տարբեր բաժիններում՝ ըստ դրանց գործածության անհրաժեշտության:

Մեծությունների պարագայում ելակետային են մեծության ներկայացումը միավորի և թվային արժեքի տեսքով: Ելնելով դրանից, ax և bx մեծությունների գումարը, օրինակ, սահմանվում է այսպես՝ ax + bx = (a + b)x: Նման ձևով են սահմանվում նաև մյուս գործողությունները:

Ռացիոնալ կոտորակների պարագայում նույնպես կատարվում է կոնկրետ գործողությունների սահմանում՝ գումարման և բազմապատկման պարագայում, իսկ հանման և բաժանման դեպքերը հանգում են նախորդ երկու դեպքերին:

Հավասարությունների, հավասարումների, անհավասարությունների, անհավասարումների, մեծությունների, համեմատականությունների, հանրահաշվի կիրառությունների ուսումնասիրությունները նույնպես պայմանավորվում և կապվում են գործողությունների հետ: Օրինակ, գումարման գործողության շրջանակներում ուսումնասիրվում են ոչ միայն այդ գործողության հատկությունները, այլև հավասարության և անհավասարության հետ գումարման գործողության կապերը, դիտարկվում են գումարային հավասարումների և անհավասարումների լուծումները, հաստատուն գումարով համեմատականությունները, գումարման կիրառությունները՝ գումարման գործողության մոդելների և որոշ այլ ձևերի մեջ և այլն: Արտահայտությունների հետագա ուսումնասիրությունների ընթացքում նույնպես հանրահաշվական գործողությունները կատարում են ուղենիշի դեր: Նույնպիսի խնդիրներ են իրականացվում մյուս գործողությունների պարագայում, որոնք դիտարկվում են դասընթացի հաջորդ բաժիններում: Բնական, ամբողջ կամ կոտորակային ցուցչներով աստիճանի, քառակուսի կամ բնական աստիճանի արմատի և դիտարկվող այլ գործողությունների պարագայում նույնպես գործողությունը, նրա կապը նախապես ուսումնասիրված գործողությունների, հավասարությունների, անհավասարությունների և այլ բանաձևերի հետ կազմում են դասընթացի նյութի կազմման ու կառուցման համար ելակետային մոտեցումներ:

Դասագրքում դիտարկվում են հետևյալ մոդելները՝ ըստ գործողությունների.

Գումարման գործողությունը – Միավորման գումարային մոդելը, Ավելացման գումարային մոդելը, Բազմությունների միավորումը:

Հանման գործողությունը – Պակասեցման հանման մոդելը: Համեմատման հանման մոդելը:

Հակադիրի գործողությունը – Ավելացման և պակասեցման կապի արտահայտումը հակադիրի միջոցով:

Բազմապատկման գործողությունը – Հավասարամեծ առարկաների միավորումը: Ավելացման արտադրյալային մոդելը: Մակերես: Ծավալ: Հաջորդական ընտրությունների մոդելը: Ուղղանկյունաձև դասավորված առարկաներ: Մաս:

Հակադարձի գործողությունը – Ավելացման և պակասեցման կապը հակադարձի միջոցով: Պակասեցման հակադարձի մոդելը:

Բաժանման գործողությունը – Առարկայի տրոհումը հավասարամեծ մասերի: Համեմատման բաժանման մոդելը: Ապրանքի գին: Արագություն: Կշռույթ: Տոկոս:

Բնական ցուցչով աստիճանի գործողությունը – Բարդ տոկոս:

1.3.2. Անհավասարություններ և անհավասարումներ

Անհավասարություններ: Հանրակրթական դպրոցի հանրահաշվի տարբեր դասընթացներում անհավասարությունների ուսուցումը սովորաբար կատարվում է երկու ճանապարհով, որոնք կապված են կարգավորված դաշտերում կարգի ներմուծման ուղիների հետ: Ընդհանրապես, ժամանակակից հանրահաշվում կարգավորված դաշտերի սահմանման մեջ կիրառվում է կարգի առնչության և գործողությունների կապն ապահովող երկու մոտեցում: Եթե (K, +, •, <)-ը կարգավորված դաշտ է, ապա.

ա. նշված կապը ուղղակիորեն ապահովվում է

$a < b \Rightarrow a + c < b + c$ ¨ $a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ (1)

աքսիոմների միջոցով, որտեղ a, b տարրերը կամայական են, իսկ c ն՝ առաջին հետևության մեջ նույնպես կամայական է, իսկ երկրորդում՝ դրական: Մնացած գործողությունների հետ անհավասարման կապը ստացվում է այս երկու աքսիոմներից:

Շատ օգտակար է կարգավորված դաշտի բոլոր դրական տարրերի P բազմության դիտարկումը. Այն կոչվում է դրական կոնուս: Դրական կոնուսը օժտված է հետևյալ երկու հատկություններով՝

$a, b \in P \Rightarrow a - b \in P$ ¨ $a, b \in P \Rightarrow a \cdot b \in P$: (2)

Հեշտությամբ ցույց է տրվում, որ այս երկու հատկությունները համարժեք են K դաշտում մասնակի կարգի և նախորդ երկու հատկություններին, համգամանք, որը թույլ է տալիս կարգավորված դաշտի ներմուծման հարցում կիրառել երկրորդ մոտեցումը:

2) (K, +, $\bullet$) դաշտում դիտարկվում է K բազմության P ենթաբազմությունը, որը բավարարում է (2) պայմաններին: Այնուհետև K բազմության մեջ ներմուծվում է $<$ առնչությունը հետևյալ կերպ՝

$a < b \Leftrightarrow b - a \in P$: (3)

Հեշտությամբ ապացուցվում է, որ (3) պայմանով որոշվող $<$ առնչությունը մասնակի կարգի առնչություն է և բավարարում է (1) պայմաններին [441]:

Հանրահաշվի դպրոցական դասընթացի մեջ իրական թվերի դաշտում կարգի ներմուծումը ավանդաբար կատարվում էր առաջին եղանակով: Սակայն խորհրդային կրթական համակարգի յոթանասունականների վերափոխումների արդյունքում այլ փոփոխությունների հետ միասին ընդունվեց նաև կարգի ներմուծման երկրորդ եղանակը: Պետք է նշել, որ այն ունի երկու արմատական թերություն:

ա. Անհավասարություններին նվիրված ողջ նյութը ուսումնասիրվում է միանաբար: Այս թվացյալ առավելությունը իրականում լուրջ թերություն է. այն կարգի առնչությունը կտրում է հանրահաշվական գործողությունից՝ գործողություններից մեկին (հանմանը) տալով չհիմնավորված առավելություն մյուսների հանդեպ:

բ. Հաշվի չի առնում թվաբանության մեջ կարգի ներմուծման բնական ընթացքը: Այնտեղ թվերի համեմատությունը ավելի շուտ է կատարվում, քան թվերի հանումը: Հետևապես խոսք չի կարող լինել առաջինը երկրորդով պայմանավորելու մասին: Միաժամանակ՝ նման պայմանավորումը մեթոդապես անհիմն է, քանի որ թվերի համեմատումը շատ ավելի դյուրին ու պարզ խնդիր է, քան նրանց տարբերության կազմումը:

Ասվածը նկատի ունենալով՝ ներկա դասընթացում կարգի առնչությունը սահմանվում է (1) ճանապարհով և գործողությունների հետ նրա փոխհարաբերության հարցը դառնում է դասընթացի կենտրոնական զարգացումներից մեկը: Այն սկսվում է 7-րդ դասարանի դասընթացում՝ հանրահաշվական չորս գործողություններին նվիրված թեմաներում և շարունակվում 8-րդ դասարանի դասընթացում՝ բնական ցուցչով աստիճանի, քառակուսի արմատի, 9-րդ դասարանի դասընթացում՝ ամբողջ և ռացիոնալ ցուցչով աստիճանի և n-րդ աստիճանի արմատի գործողություններին նվիրված թեմաներում (հետագայում վերջին թեմաները ներառվեցին ավագ դպրոցի ծրագրերում): Նշենք նաև, որ ինչպես հավասարությունների պարագայում, այնպես էլ այստեղ առկա է որոշ թյուրըմբռնում: $1 < 2$ և $2 < 1$ բանաձևերից երկուսն էլ պարունակում են անհավասարության $<$ նշանը: Նրանցից առաջինը անհավասարություն է, երկրորդը՝ ոչ: Չի կարելի գործածել «ճշմարիտ անհավասարություն» և, մանավանդ, «ոչ ճշմարիտ անհավասարություն» եզրերը, որովհետև եթե մենք ասում են, որ բանաձևը անհավասարություն է, ապա այն ճշմարիտ բանաձև է (տես նաև գիտականության դիդակտիկայի սկզբունքին նվիրված նյութի շարադրանքում արված դիտողությունը): Դասընթացում անհավասարությունների բովանդակային գծի զարգացումները այսպիսին են:

ա. Անհավասարության հասկացության դիտարկումը սկսվում է դասընթացի սկզբում՝ հանրահաշվի լեզվին նվիրված բաժնում: Այստեղ հիմնական հասկացությունները ներմուծելուց հետո դիտարկվում են հետևյալ հատկությունները:

1). Իրական թվերի համեմատելիության օրենքը՝ կամայական a և b իրական թվերի համար կամ $a = b$, կամ $a < b$, կամ $a > b$:

2). Անհավասարության փոխանցելիության օրենքը՝ կամայական a, b, c իրական թվերի համար եթե $a < b$, $b < c$, ապա $a < c$:

3). Օրենք հավասարության և անհավասարության կապի մասին՝ կամայական a, b, c իրական թվերի համար եթե $a < b$, $b = c$, ապա $a < c$:

Նկատենք, որ բոլոր այս հատկությունները ավանդական դասընթացներում չեն դիտարկվել: Սակայն դրանք հստակեցնում են հանրահաշվական լեզուն և կազմում են աքսիոմատիկ մեթոդի բաղկացուցիչ մասը: Միևնույն ժամանակ դրանք ունեն ինտուիտիվ ընկալման պարզություն և լայն կիրառություններ, ինչը ցուցադրվում է դասընթացում: Մասնավորապես՝ դրանց օգնությամբ ստեղծվել է ապացուցման վարժությունների մի լայն դաս: Օրինակ, ապացուցել, որ եթե $a > 0$ և $b < 1$, ապա $a > b$: Այստեղ կարևոր է նկատել, որ բուն վարժության լուծումը դժվար չէ, բայց նրա փաստարկումը պահանջում է որոշ ջանքեր, ինչը հստակեցնում է սովորողի մտածողությունը և մատչելի է միջինից ցածր ընդունակությամբ աշակերտի համար: Հետևապես՝ նման վարժությունները լուծում են սովորողների տրամաբանական զարգացման կարևորագույն խնդիրը:

բ. Գումարման գործողության հետ անհավասարության կապն արտահայտվում է հետևյալ հատկություններով:

Կամայական a, b, c, d իրական թվերի համար.

1) »Ã» $a < b$, $c = d$, ³å³ $a + c < b + d$, 2) »Ã» $a < b$, ³å³ $a + c < b + c$,

3) »Ã» $a < b$, $c < d$, ³å³ $a + c < b + d$, 4) »Ã» $a > 0$, $b > 0$, ³å³ $a + b > 0$:

Այստեղ նշենք, որ անհավասարությունների ներմուծման երկրորդ ճանապարհին հետևողների համար ՝անհասկանալի են՝ 4 և 5 պայմանները, քանի որ կարգավորված դաշտում դրական կոնուսի առկայությունը արդեն ենթադրում է այդ պայմանների բավարարումը:

գ. Հանման գործողության հետ անհավասարության կապն արտահայտվում է հետևյալ հատկություններով: Կամայական a, b, c, d իրական թվերի համար.

1) »Ã» $a < b$, $c = d$, ³å³ $a - c < b - d$, 2) »Ã» $a < b$, ³å³ $a – c < b – c$:

Այս երկու հատկությունների հետ միասին կարելի է դիտարկել նաև նրանցից < նշանը > նշանով փոխարինելուց ստացված հատկությունները:

3). $a > b$ Ýß³Ý³ÏáõÙ ¿ $a – b > 0$:

Վերջին հատկությունը անհավասարությունը բնութագրում է հանման միջոցով:

դ. Բազմապատկման գործողության հետ անհավասարության կապն արտահայտվում է հետևյալ հատկություններով:

1) ºÃ» $a > b$, $c > 0$, ³å³ $ac > bc$: 2) ºÃ» $a > b$, $c < 0$, ³å³ $ac < bc$:

3) ºÃ» $a > 0$, $b > 0$, ³å³ $ab > 0$: 4) ºÃ» $a < 0$, $b < 0$, ³å³ $ab > 0$:

5) ºÃ» $a > 0$, $b < 0$, ³å³ $ab < 0$:

ե. Բաժանման գործողության հետ անհավասարության կապն արտահայտվում է հետևյալ հատկություններով:

1) ºÃ» $a > b$, $c > 0$, ³å³ $a:c > b:c$: 2) ºÃ» $a > b$, $c < 0$, ³å³ $a:c < b:c$:

Այստեղ կարելի է դիտարկել նաև դ կետի 3 - 5 հատկություններին նման հատկությունները՝ բազմապատկման նշանը փոխարինելով բաժանման նշանով:

զ. Բնական, ամբողջ, կոտորակային ցուցիչով աստիճանների անհավասարության համար դիտարկվում են երկու հատկություններ:

Կամայական a, b դրական և n բնական թվերի համար.

1) ԵÃ» $a > b$, ³å³ $a^n > b^n$, 2) ԵÃ» $a^n > b^n$, ³å³ $a > 0$, $b > 0$:

է. Քառակուսի արմատների անհավասարության համար դիտարկվում են հետևյալ հատկությունները, որոնցում դիտարկվող a և b թվերը ոչ բացասական են:

1) ºÃ» $a > b$, ³å³ $\sqrt{a} > \sqrt{b}$: 2) ºÃ» $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, ³å³ $a > b$:

Համանման հատկություններ կարելի է ապացուցել նաև < իմաստով անհավասարությունների համար:

ը. Դասընթացի հանրահաշվական լեզվին նվիրված բաժնում իրական թվերի համեմատման միջոցով սահմանվում է մեծությունների անհավասարությունը. Կամայական մեծության e միավորի և a և b իրական թվերի համար՝ $ae < be$ նշանակում է $a < b$: Նույն տեղում ապացուցվում է մեծությունների համեմատման հատկությունը՝ դարձյալ իրական թվերի համեմատման հատկության միջոցով: Այնուհետև՝ կապ է հաստատվում մեծությունների համեմատման և այդ մեծություններով չափվող առարկաների համեմատման միջև, բերվում է համեմատման ընթացքում ‘մեծ’ և ‘փոքր’ բառերին զուգընթաց գործածվող հոմանիշների աղյուսակ՝ կապված մեծության ու առարկայի սեռից: Իհարկե, կարելի էր մեծությունների անհավասարության ուսուցումը նույնպես կապել հանրահաշվական գործողությունների հետ:

Անհավասարումներ: Անհավասարումների ուսուցումը դասընթացում կատարվում է հավասարումների ուսուցման հետ զուգահեռ, թե՛ բովանդակային գծի կառուցման, թե՛ գործառույթների առումով: Սակայն, հավասարման համեմատությամբ՝ դասընթացում անհավասարման կիրառություններն ու նշանակությունը անհամեմատ ավելի փոքր են, մանավանդ՝ գործառույթների տեսակետից: Նախապես նշենք, որ ինչպես հավասարություն-հավասարում, այնպես էլ անհավասարություն-անհավասարում փոխհարաբերությունները առաջացնում են ուսուցման մեջ որոշ դժվարություններ՝ կապված դրանց տարբերակման խնդրի հետ: Վերջին դեպքում խնդիրը բարդանում է նրանով, որ ռուսերենում անհավասարություն և անհավասարում բառերի համար գործածվում է միևնույն՝ неравенство եզրը, որը ժամանակին հայերեն է թարգմանվել որպես անհավասարություն: Հասկանալի է, որ անհավասարումը ֆորմալ տեսության բանաձև է, իսկ անհավասարությունը՝ մեկնաբանության կամ մոդելի: Հետևապես՝ անհավասարությունն ունի կոնկրետ բովանդակային իմաստ, իսկ անհավասարումը նման իմաստ է ստանում միայն մոդելի մեջ՝ մեկնաբանության ընթացքում: Ուրեմն՝ անթույլատրելի է այս երկու իրարից սկզբունքորեն տարբեր հասկացությունների համար միևնույն եզրը գործածելը: Արժե նշել, որ հանրապետությունում այսօր աշխատող ուսուցիչների մեծ մասը սովորել են նախկին դասագրքերով, վարժվել են դրանց և այս դեպքում և այս մոտեցումները հաճույքով չեն ընդունում:

Ներկա դասընթացում նկատի են առնված վերևում արված դիտարկումները, մասնավորապես՝ անհավասարման լուծում է անվանվում անհայտի այն արժեքը, որի դեպքում անհավասարումը դառնում է անհավասարություն: Դասընթացի սկզբում՝ հանրահաշվի լեզվին նվիրված բաժնում օրինակների մակարդակով ներմուծվում է մեկ անհայտով անհավասարման հասկացությունը: Այնուհետև, գործողություններից յուրաքանչյուրին նվիրված բաժնում դիտարկվում են այդ բաժնի անհավասարումները:

Տրամաբանության հանրահաշվի բաժնում նոր անդրադարձ է կատարվում անհավասարման հասկացության նկատմամբ: Մասնավորապես, բանաձևերի համարժեքության հասկացության շրջանակներում են դիտարկվում համարժեք անհավասարումները:

Գծային հավասարումներին նվիրված բաժնում դիտարկվում են առաջին աստիճանի մեկ անհայտով գծային անհավասարումները, տրվում է դրանց լուծման ընդհանուր ալգորիթմը: Նույն բաժնում դիտարկվում են բացարձակ արժեք պարունակող առաջին աստիճանի անհավասարումներ, որպես ելակետային անհավասարումներ դիտարկվում են $|x| < a$ և $|x| > a$ անհավասարումները, կարևորվում է դրանց լուծումը: Այնուհետև ուսումնասիրվում է միջակայքերի եղանակը, որի օգնությամբ լուծվում են մեկից ավելի բացարձակ նշան պարունակող, մեկ անհայտով գծային անհավասարումներ, ինչպես նաև գծային երկանդամների արտադրյալ պարունակող անհավասարումներ: Քառակուսի արմատներին նվիրված բաժնում ելակետային են $\sqrt{x} < a$, $\sqrt{x} > a$ անհավասարումները: Դիտարկվում են նաև արմատ պարունակող այլ անհավասարումներ:

Անհավասարումների ուսուցման դիտողականությանը մեծապես նպաստում է պատկերների հանրահաշվի նյութը՝ ինչպես թվային ուղղի, այնպես էլ կոորդինատային հաթության վրա անհավասարման պատկերումները: Կատարենք մի քանի նկատառումներ անհավասարումների լուծման մեջ երկրաչափական պատկերումների կիրառման մասին:

ա. Անհավասարումների ուսումնասիրությունը մեծապես դիտողական է դառնում թվային ուղղի վրա մեկ անհայտով պարզագույն անհավասարման պատկերումով: Հետագայում, երբ ավելի բարդ անհավասարումների լուծումը հանգում է պարզագույն անհավասարման, պատկերումների մեթոդիկան պահպանվում է:

բ. Կոորդինատական հարթության վրա $x > 0$, $x< 0$, $y > 0$, $y < 0$, $x \leq 0$, $x \geq 0$, $y \leq 0$, $y \geq 0$ պարզագույն անհավասարումների պատկերումը ավելի շատ ճանաչողական նշանակություն ունի, քան կիրառական: Միևնույն ժամանակ, այն նպաստում է կոորդինատական մեթոդի հաջող յուրացմանը:

գ. «Քառակուսային անհավասարումներ» թեմայի ուսուցումը սովորաբար իրականացվում է պարաբոլի հատկությունների կիրառման հիման վրա: Հարցի լուծումը կատարվում է պատկերման ոչ հիմնավոր և ոչ հանրահաշվական մեթոդի միջոցով, որը հեռու է առարկայի ուսուցման նպատակներից: Մինչդեռ ներկա դասընթացում նշված կարևոր հարցի լուծումը կատարվում է զուտ հանրահաշվական մեթոդներով՝ քառակուսային եռանդամի հատկությունների հիման վրա. Ճանապարհ, որը մի կողմից ելնում է հանրահաշվի ուսուցման խնդիրներից, մյուս կողմից համապատասխանում է գիտելիքի պատմական զարգացման ընթացքին և, որ ամենակարևորն է, չափազանց պարզ է ու մատչելի:

Անհավասարումների կիրառական նշանակության տեսակետից արժե նշել, որ ավանդաբար պատշաճ ուշադրություն չի դարձվում կիրառական ոլորտի այն իրադրությունների ուսումնասիրությանը, որոնք հանգում են անհավասարումների: Դասընթացում որոշ չափով լրացվել է այս բացթողումը: Մասնավորապես՝ մեր կողմից կազմվել և համապատասխան թեմային վերաբերող նյութերի շրջանակներում առաջադրվել են անհավասարման հանգող բազմապիսի և շատ բնական տեքստային խնդիրներ: Կիրառական ոլորտը առավել չափով դրսևորվել է ոչ խիստ անհավասարումների ուսուցման ընթացքում: Այստեղ ոչ խիստ անհավասարման յուրաքանչյուր դեպքի ուսուցումը սկսվում է առօրյական այնպիսի իրադրության քննարկումով, որը հանգում է տվյալ բանաձևին:

1.3.3. Համակարգեր և համախմբեր: Համակարգերի և համախմբերի թե՛ տեսական, թե՛ գործնական ուսուցումը հանրահաշվի դասընթացում կատարվում է ոչ ավանդական ճանապարհով՝ դրանք դիտարկվում են որպես տրամաբանական գործողություններ:

Բանաձևերի համախումբը: Նախապես նշենք, որ նախկին դասընթացներում բանաձևերի համախմբի հասկացությունը չի ուսումնասիրվել: Ներկա դասընթացում տրամաբանության հանրահաշվին նվիրված բաժնում նախ սահմանվում է տրամաբանական գումարի կամ համախմբի հասկացությունը՝ կամայական բանաձևերի համար: Գործնական, առօրեական իրադրություններից վերցրած օրինակների վրա ցույց է տրվում համախմբի հասկացության կիրառական կարևորությունը, ընդգծվում է լեզվամտածողության մեջ նրա դերը: Այնուհետև, համախմբի անհրաժեշտությունը ցույց է տրվում ±a գրառման իմաստը բացատրելով:

Այսպիսով, համախումբը դասընթաց է մտնում թե՛ որպես կիրառական խնդիրներ լուծելու միջոց, թե՛ որպես մեթոդական անհրաժեշտություն՝ գիտականության և գիտակցականության դիտակտիկական սկզբունքների պահանջները բավարարելու համար: Վերջին մոտեցումը ավելի է ընդգծվում ≤ և ≥ նշանները պարունակող բանաձևերը որպես համախմբեր դիտարկելու ընթացքում: Նկատենք, որ առանց այս մոտեցման, նշված բանաձևերի ուսումնասիրությունը, մանավանդ՝ համապատասխան ոչ խիստ անհավասարումների լուծումը անհավասարումների լուծման նմանությամբ, դրանց ուսուցումը դարձնում է ձևական և սերտողական:

Միևնույն ժամանակ, բանաձևերի համախմբի դիտարկումը թույլ է տալիս ուսումնասիրելու այնպիսի համախմբեր, որոնց մեջ մասնակցում են ինչպես հավասարումներ, այնպես էլ անհավասարումներ, ոչ խիստ անհավասարումներ ու բանաձևերի այլ տեսակներ: Հետագայում՝ գծային, քառակուսային հավասարումներին, անհավասարումներին, ոչ խիստ անհավասարումներին նվիրված բաժիններում զուգահեռաբար դիտարկվում են այդ բանաձևերի զանազան զուգորդումներով ստացված համախմբերը և կատարվում է դրանց ուսուցումը: Ուսանելի է նաև բանաձևերի համախմբի լուծման բազմության՝ որպես բանաձևերի լուծումների բազմությունների միավորում ներկայացնելը, ինչը կատարվում է թեմայի ուսուցման սկզբում:

Բանաձևերի համակարգը: Բանաձևերի համակարգի ուսուցումը նույնպես սկսվում է տրամաբանության հանրահաշվում, որտեղ այն սահմանվում է որպես բանաձևերի տրամաբանական արտադրյալ: Ֆուտբոլային միջոցառման վերաբերող առօրեական ակնառու օրինակը ցույց է տալիս այս հասկացության կիրառական կարևորությունը: Մեկ այլ օրինակ՝ ավտոմեքենայի՝ կրկնակի անհավասարման հանգող բնական իրադրության մոդելավորման հանգող խնդիրը, և միջակայքի գրառումը անհավասարումների պարզագույն համակարգի տեսքով, ամրապնդում են համակարգի կիրառական կարևորության նկատմամբ հավատը, և միաժամանակ ցույց են տալիս նրա ներմուծման անհրաժեշտությունը: Կարևոր է նաև համակարգի լուծումների բազմության ներկայացումը այն կազմող բանաձևերի լուծումների բազմությունների հատման տեսքով:

Տեսական նյութի ուսումնասիրությունը հետագա խորացման է ենթարկվում բանաձևերի համախմբերի և համակարգերի համարժեքության օրենքների ուսումնասիրության ընթացքում: Բերված նյութի յուրացումը մեծապես նպաստում է թեմայի ուսուցման մեջ գիտականության սկզբունքի պահպանմանը, իսկ նրա յուրացումը բացառում է սերտողական ուսուցումը: Այս տեսակետից հատկապես ուսանելի են պարզ բանաձևերի կապն արտահայտող հատկությունները, որտեղ սովորողն ամենապարզ դեպքերի դիտարկմամբ ոչ միայն առնչվում է «ի±նչ է նշանակում, որ թիվը համախմբի լուծումը չէ», «ի±նչ է նշանակում, որ թիվը համակարգի լուծումը չէ» բնույթի հարցադրումների, այլև ստանում է դրանց տեսական ու գործնական-վարժանքային լուծումների պատասխանները: Նշված հարցադրումների կարևորությունը բխում է նաև այն բանից, որ դրանց պատասխաններում երևում է բանաձևերի համակարգի և համախմբի միջև գոյություն ունեցող ներքին կապը: Պատկերը ամբողջանում է կոորդինատական հարթության վրա պարզագույն հավասարումների և անհավասարումների զանազան համակարգերի պատկերումով:

Ինչ վերաբերում է կոնկրետ համակարգերի ուսումնասիրությանը՝ դրանց լուծման տեսանկյունից, ապա դասընթացում հիմնականում դիտարկվում են վարժությունների հետևյալ տիպերը.

1). Գծային հավասարումների համակարգեր:

2). Մեկ առաջին և մեկ երկրորդ աստիճանի հավասարումների համակարգեր:

3). Համասեռ հավասարում պարունակող համակարգեր:

4). Օժանդակ անհայտի ներմուծմամբ լուծվող համակարգեր:

Առանձնահատուկ ուշադրություն է դարձվում առաջին դեպքին: Այստեղ, երկու անհայտով երկու գծային հավասարումների համակարգի լուծման եղանակների թվում դիտարկվում է Կրամերի կանոնը: Նախկինում նման ուսուցում կազմակերպվել է Ե. Ս.

Կոչետկովի և Ե. Ս. Կոչետկովայի «Հանրահաշիվ և տարրական ֆունկցիաներ» դասընթացում [250-251]: Սակայն, ի տարբերություն նշված դասընթացի, ներկա դասընթացում որոշիչը ունի շատ ավելի պարզ սահմանում, իսկ կիրարկվող տեսական նյութը չի պահանջում որոշիչի հատկությունների ուսումնասիրութուն: Կատարվում է նաև երկու անհայտով երկու գծային հավասարումների համակարգի հետազոտություն՝ պարզաբանվում է լուծման և գործակիցների միջև եղած կախվածությունը, ինչը ապահովում է նյութի ընկալման գիտակցականությունը և յուրացման խորությունը:

1.3.4. Ֆունկցիայի գաղափարը: Ֆունկցիայի հասկացությունը մաթեմատիկայում հիմնականներից մեկն է: Մաթեմատիկայի, մասնավորապես՝ հանրահաշվի դպրոցական ավանդական ծրագրերում և դասընթացներում ընդգրկված համարյա բոլոր գաղափարները այս կամ այն կերպ առնչվում են ֆունկցիայի հասկացության հետ: Ավելին՝ դրանց մեծ մասը ներառվում է ֆունկցիայի գաղափարի մեջ: Անգամ առաջին հայացքից ֆունկցիայի գաղափարից շատ հեռու թվացող թվաբանական չորս գործողությունները այդ հասկացության մասնավոր օրինակներ են: Ֆունկցիայի գաղափարի այս ընդհանրական, ընդգրկուն դերը լիովին արտահայտվում է մաթեմատիկային նվիրված ժամանակակից մենագրություններում, մաթեմատիկայի գրեթե բոլոր բուհական դասընթացներում:

70-ական թվականներին՝ թե հայրենական և թե արտասահմանյան մանկավարժների և գիտնականների կողմից սկսվեցին մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում նույնպես ֆունկցիայի այս դերի իրականացման ուղղությամբ ակտիվ աշխատանքները: Եվ եթե արտասահմանում այդ աշխատանքները կատարվում էին մեծ զգուշավորությամբ, ապա մեզանում դրսևորվեց ծայրահեղ արմատական մոտեցում: Ֆունկցիայի գաղափարը դրվեց մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի հիմքում: Ավելին, առաջին պլան մղվեց սովորողների ֆունցիոնալ մտածողության առաջնայնության, նրանց մոտ ֆունկցիոնալ մտածողության ձևավորման խնդիրը:

Այս մոտեցումը չուներ համապատասխան հոգեբանամանկավարժական հիմնավորում: Իսկապես: Նախ ֆունկցիայի գաղափարը ձևավորվումը ենթադրում է վերացարկման բավականին բարձր աստիճան: Հետևաբար՝ նրա արդյունավետ ուսուցումը կարող է իրականացվել միայն մասնավոր օրինակների բավականին ընդարձակ ցանկի ուսումնասիրությունից հետո միայն: Մինչդեռ 1-6-րդ դասարանների «Մաթեմատիկա» առարկան ֆունկցիայի հասկացության ուսուցման համար նման հող չի նախապատրաստում և չի էլ կարող նախապատրաստել, որովհետև այն նվիրված է թվային համակարգերի և նրանց վրա տրված թվաբանական գործողությունների ուսումնասիրությանը: Այնուհետև, մարդկային մտածողությունը ունի զարգացման իր օրինաչափությունները: Աշակերտի մտածողության զարգացման խնդիրը կախված է տարիքային առանձնահատկություններից: Եվ մտածողության որոշ տեսակներ կարող են արմատավորվել միայն տարիքային որոշ հասակից հետո միայն: Հավանաբար այդպիսին է նաև ֆունկցիոնալ մտածողությունը: (Տես նաև գիտականության դիդակտիկայի սկզբունքին նվիրված նյութի շարադրանքում արված դիտողությունը):

Ասված նկատառումները շատ արագ ցույց տվեցին երկրաչափության դասընթացի կառուցման մեջ ֆունկցիոնալ մոտեցման աննպատակահարմարությունը: Եվ երկրաչափության կոլմոգորովյան գրքերը շատ արագ զիջեցին իրենց դիրքերը: Սակայն դրանք անտեսվել են հանրահաշվի դպրոցական՝ մինչ այժմ ԽՍՀՄ և Ռուսաստանյան Դաշնությունում գործող բոլոր դասընթացներում: Ավելին՝ հանրահաշվի այդ դասընթացները՝ առանց անհրաժեշտ նախապատրաստական աշխատանքներ իրականացնելու, հիմնականում սկսվում են ֆունկցիայի գաղափարի ուսումնասիրությամբ և հետագա ողջ նյութի շարադրանքը խարսխում ֆունկցիայի գաղափարի հենքի վրա: Արդյունքում՝ սովորողները անհրաժեշտ խորությամբ չեն ընկալում ֆունկցիայի գաղափարը և նրա վրա հիմնված ողջ հանրահաշվական նյութը: Իսկ այդ նյութը իրականում այլ բնական հիմքեր ունի: Այն, ինչպես նաև այդ հիմքերը, որևէ սկզբունքային առնչություն չունեն ֆունկցիայի գաղափարի հետ: Նման կապ չի արձանագրվել նաև հանրահաշվի պատմական զարգացման ողջ ընթացքում: Ասվածը լիովին բավարար է ապացուցելու նշված դասընթացների ֆունկցիոնալ ուղղվածության մտացածին լինելը:

Միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացում ֆունկցիայի գաղափարի գործառույթները որոշելու համար նկատենք, որ նախ ավագ դպրոցում ֆունկցիայի գաղափարը կատարում է կենտրոնական դերերից մեկը, և կարևոր է նման ուսուցման համար ստեղծել անհրաժեշտ հիմքեր: Այնուհետև, հանրահաշվի դասընթացի մեջ ֆունկցիայի գաղափարը կարող է կատարել համակարգող և ընդհանրացնող դեր: Վերջապես՝ ուսումնական ութ տարիների ընթացքում մաթեմատիկայից և նրա հարակից առարկաներից անցած նյութը հնարավորություն է տալիս լիարժեք բացահայտելու ֆունկցիայի գաղափարի հանրակրթական նշանակությունը: Այսպիսով՝ միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացում ֆունկցիայի գաղափարի շարադրումը հետապնդում է հետևյալ հիմնական խնդիրները.

ա. ֆունկցիայի գաղափարի բովանդակային ուսուցում և նրա հանրակրթական նշանակության համակողմանի բացահայտում:

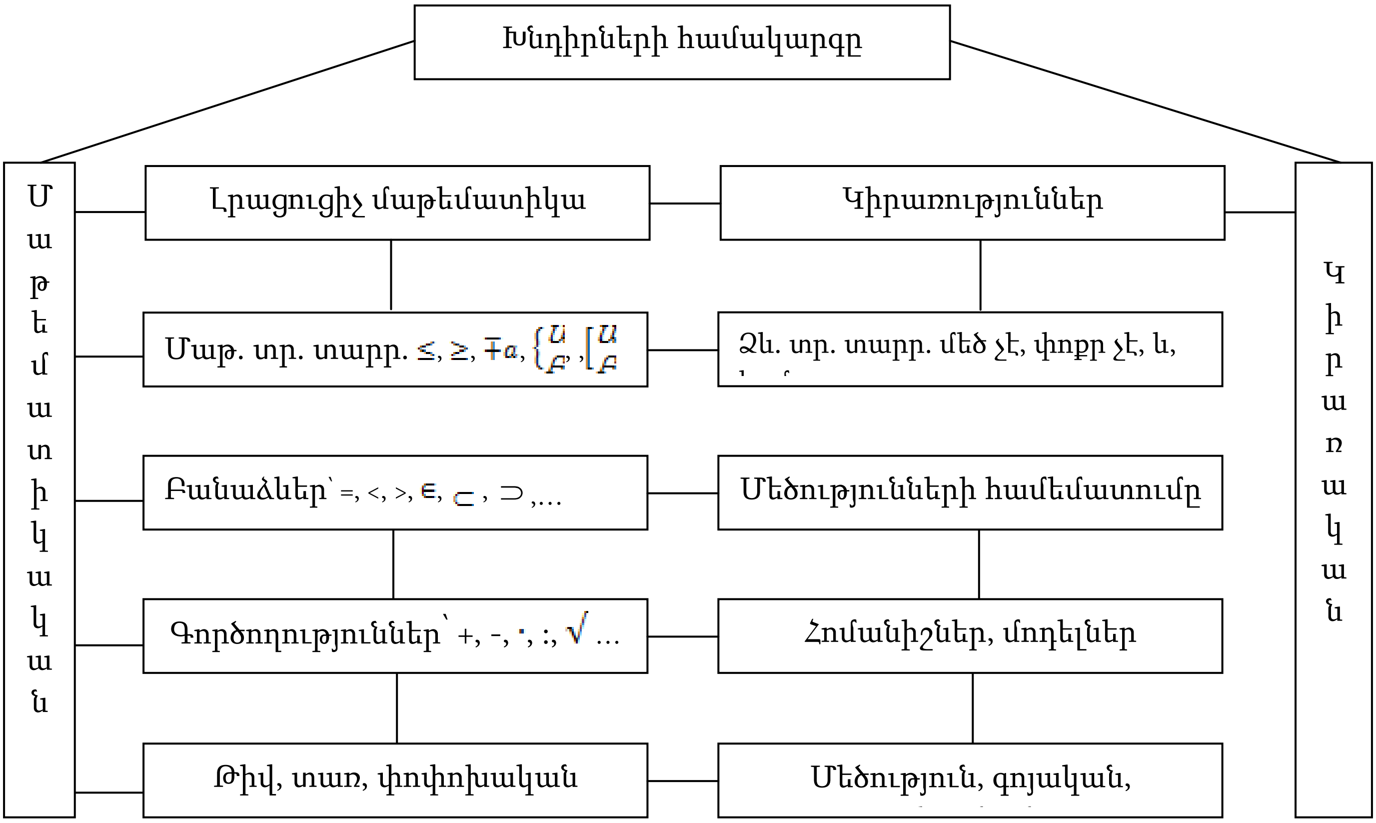
բ. հանրահաշվի մեջ ֆունկցիայի գաղափարի համակարգող և ընդհանրացնող դերի իրականացում:

գ. Ֆունկցիայի՝ որպես մաթեմատիկայի կարևորագույն գաղափարներից մեկի, հետագա ուսուցման համար անհրաժեշտ հիմքերի ստեղծում:

Ելնելով ասվածից և հաշվի առնելով վերը նշված հանգամանքները, մենք ֆունկցիայի գաղափարին նվիրված նյութը շարադրում ենք մեկ առանձին գլխում և դասընթացի վերջում: Թեմային նվիրված հենց առաջին դասի մեջ, բազմաթիվ օրինակների միջոցով հանգամանորեն դիտարկվում են առօրյա կյանքում հանդիպող երկտեղ առնչություններ, որոնց մի մասը կազմված է ֆունկցիաներից, մյուսը՝ ոչ: Եվ ինչպես գիտական, այնպես էլ իր հանրակրթական նշանակության մեջ ֆունկցիայի գաղափարը դիտարկվում է որպես երկտեղ առնչության մասնավոր դեպք: Այստեղ և հետագայում աշխատել ենք հնարավորինս ընդլայնված ներկայացնել կիրառական այն ոլորտները, որոնցից վերցվում են ֆունկցիաների օրինակները: Ֆունկցիայի գաղափարի հանրակրթական նշանակության բացահայտման լայն հնարավորություններ է տալիս «Ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները» թեման:

Ֆունկցիայի գաղափարի ուսուցման համակարգող և ընդհանրացնող գործառույթների իականացման շրջանակներում կարելի է դիտել մեկ փոփոխականով արտահայտությունների, դրանց գրաֆիկների, աղյուսակների, երկու անհայտով հավասարումների դիտարկումները: Սակայն ֆունկցիաների հետ բոլորից շատ առնչվում են համեմատականությունները, որոնց ուսուցումը կարելի է դիտել նաև որպես ֆունկցյայի հասկացության նախաուսուցում:

Ելնելով առաջին գլխի արդյունքներից, հանրահաշվի բովանդակային կառույցը կարող ենք համառոտ ներկայացնել հետևյալ մոդելի տեսքով (գծ. 1):



Գծապատկեր 1

ԳԼՈՒԽ 2. ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ԱՐԺԵԲԱՆԱԿԱՆ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ

2.1. Հանրահաշվի ուսուցումը և գեղագիտական դաստիարակության հիմնահարցը

2.1.1. Գեղագիտական դաստիարակության հիմնախնդիրը հանրահաշվի ուսուցման գործընթացում: Գեղագիտական դաստիարակության բնորոշման հարցում չկա միասնական մոտեցում, սակայն բոլոր հետազոտողները կարծում են, որ դրա իրականացման կարևորագույն օղակը հանրակրթական դպրոցն է (տես, օրինակ, [114], [147], [189], [208-210], [318], [345], [379], [396], [466], [473], [481-483], [495-496]): Այստեղ էլ հանրության մեջ կա այն թյուր կարծիքը, թե հանրակրթական դպրոցում գեղագիտական դաստիարակության խնդիրը պետք է իրականացնել միայն արվեստի կամ էլ առավելագույնը՝ հումանիտար ցիկլի ուսումնական առարկաների միջոցով: Այս կապակցությամբ ժամանակակից ճանաչված ռուս նկարիչ և մանկավարժ Մ. Բ. Նեմենսկին գրում է. «Գեղագիտական դաստիարակության համակարգը նախ և առաջ պետք է լինի միասնական, միավորի բոլոր առարկաները, արտադասարանական պարապմունքները, դպրոցականի հասարակական ողջ կյանքը, որտեղ պարապմունքի յուրաքանչյուր տեսակ գեղագիտական մշակույթի և անձնավորության ձևավորման գործում ունի իր խնդիրը» [326]: Սակայն ոչ հումանիտար ուսումնական առարկայի ուսուցիչը գեղագիտական արժեքների ձևավորմանը հատկացնում է աննշան տեղ կամ էլ ընդհանրապես չի դիտարկում նման խնդիր, մանավանդ երբ խոսքը վերաբերում է առաջին հայացքից գեղագիտությունից ու գեղեցիկից հեռու այնպիսի մի «չոր» ուսումնական բնագավառի, ինչպիսին մաթեմատիկան է: Մինչդեռ հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկական առարկաները կարևոր տեղ են զբաղեցնում ուսումնական առարկաների ցանկում և, միաժամանակ, ունեն գեղագիտական արժեքների ձևավորման, գեղագիտական դաստիարակության մեծ ներուժ: Այդ խնդրի լուծման համար հիմք են ծառայում մաթեմատիկայի և գեղագիտական արժեքների միջև առկա խորքային կապերը, որոնք դրսևորվում են երաժշտության, նկարչության, ճարտարապետության և արվեստի այլ բնագավառներում մաթեմատիկայի լայն կիրառություններով [88], [214-215], [425], [485-486]: Մյուս կողմից, մաթեմատիկան ավելի, քան գիտության որևէ այլ բնագավառ, բավարարում է գիտական գեղեցիկի պահանջներին: Ավելին, մարդկային խոսքի այնպիսի կարևորագույն տարրեր, ինչպիսիք են հիմնավորվածությունը, ապացուցվածությունը և տրամաբանական խստությունը, որը համարվում է գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշ, իրենց լիարժեք դրսևորումը ստանում են հենց մաթեմատիկայում [88]: Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում գեղագիտական տարրի բացահայտումը ոչ միայն նպաստում է սովորողի գեղագիտական ունակությունների զարգացմանը, այլև թույլ է տալիս ավելի արդյունավետ դարձնել բուն մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը: Օրինակ, սովորողների տոկունությունը, նպատակասլացությունը, հետևողականությունը և կամային այլ որակները լավագույնս դրսևորվում են մաթեմատիկական նյութի և դասավանդման գործընթացի մեջ գեղագիտական բաղադրիչի առկայության դեպքում (տես [82], [94]): Գեղագիտական արժեքների ձևավորման հարցը սերտորեն առնչվում է մաթեմատիկայի գիտական և կրթական բովանդակությունների փոխհարաբերության, մաթեմատիկայի ուսուցման նպատակների, գործառույթների, արդիականացման, մաթեմատիկական օբյեկտների՝ հասկացությունների, թեորեմների, ապացուցումների, խնդիրների ու դրանց լուծման ուսուցման և այլ հիմնախնդիրների հետ [94, 340, 342- 411]:

Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի միջոցով սովորողների գեղագիտական դաստիարակության խնդիրը ուսումնասիրվել է բազմաթիվ հետազոտողների կողմից: Մաթեմատիկայի ուսումնաճանաչողական գործընթացի գեղագիտական բաղադրիչի իրականացման և խորացման հարցը համակողմանիորեն ուսումնասիրել են Վ. Ա. Կրուտեցկին, Վ. Լ. Մինկովսկին, Ս. Ի. Շոխոր-Տրոցկին, Գ. Ի. Սարանցևը և ուրիշներ:

Հետազոտությունների մի ստվար խումբ զբաղվել է մաթեմատիկայի ուսուցման միջոցով սովորողների և ապագա ուսուցիչների մոտ գեղագիտական արժեքների ձևավորման հարցով: Այստեղ Օ. Վ. Չերնիկը առանձնացնում է երկու մոտեցում՝ պասիվ հայեցողական և ակտիվ գործնական [456, էջ 142]: Նրա կարծիքով առաջինները (Ի. Գ. Ձենկևիչ, Վ. Տ. Կովեշնիկով, Վ. Լ. Մինկովսկի) մաթեմատիկայի գեղագիտական ներուժի բացահայտումը հանգեցնում են մաթեմատիկական բովանդակությամբ տարասեռ օբյեկտների ոչ համակարգված ուսումնասիրության, օբյեկտներ, որոնք հեղինակների կարծիքով ունեն գեղագիտական գրավչություն: Նրանք որպես գեղեցիկի հատկանիշ մեծ նշանակություն են տալիս մաթեմատիկական օբյեկտների կիրառական նշանակությանը: Մեծ տեղ տալով գեղեցիկ խնդրին և նրա լուծմանը, այս հետազոտողները չեն բացահայտում դրանց էությունը: Ակտիվ գործնական մոտեցում իրականացնողները (Վ. Գ. Բոլտյանսկի, Օ. Ա. Կոբալիա, Ն. Վ. Գուսյեվա, Ն. Լ. Ռոշչինա, Ն. Ի. Ֆիրստովա) «առաջին անգամ լինելով, կիրառում են «գեղագիտական նշանակություն», «գեղագիտական ներուժ», «գեղագիտական գրավչություն» հասկացությունները և փորձում են գիտականորեն հիմնավորված սահմանել դրանք» [456, էջ 16]: Հարկ է նշել, որ Օ. Վ. Չերնիկի նշած այդ «սահմանումները» իրականում հանգում են մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ կամ սուբյեկտիվ առանձին հատկանիշների նկարագրության և, ըստ էության, նշված հասկացությունների սահմանումներ չեն առաջադրվում: Իրականում դժվար է որևէ մեկի կողմից ակնկալել ասենք «գեղագիտական գրավչություն» հասկացության ճշգրիտ սահմանումը: Վ. Գ. Բոլտյանսկին, օրինակ, իր բանաձևով (գեղեցիկը = դիտողականություն + անսպասելիություն = իզոմորֆիզմ + պարզություն + անսպասելիություն), ըստ էության, ոչ ճիշտ, ոչ արդարացի և անհստակ ու մշուշապատ ձևով մաթեմատիկական գեղեցիկը հանգեցնում է նրա գեղագիտական երկու-երեք հատկանիշների [146], իսկ Օ. Ա. Կոբալիան մաթեմատիկական գեղեցիկի հատկանիշներ է համարում իմացության մեթոդները: Ավելին, գիտական գեղեցիկի այնպիսի կարևոր հատկանիշ, ինչպիսին է առարկայի էությունը հասկանալու համար գործադրված ջանքերի քանակը, Գ. Բիրկհոֆը [144] և Հ. Այզենկը [125] հասկանում են տրամագծորեն հակառակ նշանակությամբ. մեկի համար այն գեղեցիկի դրական հատկանիշ է, մյուսի համար՝ բացասական [94, էջ 69]: Հետևաբար, գիտական գեղեցիկի հատկանիշներն արդեն կարծես ունեն հակասական մեկնաբանություններ, ինչը ցույց է տալիս դրանց ընդհանուր, բոլորի կողմից շատ թե քիչ ընդունելի բնութագրման բացակայությունը կամ անհնարինությունը: Մեր կարծիքով հետազոտությունների նշված փուլը կարելի է համարել գիտական գեղեցիկի հատկանիշների իմաստավորման շրջան: Հետագայում ուսումնասիրությունները կրել են ավելի համակարգված բնույթ: Այսպես, Ն. Վ. Գույեվան համակողմանիորեն ուսումնասիրել է դպրոցական մաթեմատիկայի գեղագիտական ներուժի բացահայտման հետ կապված տեսական և գործնական մի շարք հարցեր, համակարգել է գիտական գեղեցիկի հատկանիշները՝ ելնելով մաթեմատիկական օբյեկտների ներքին և արտաքին գեղագիտությունից, ցույց տվել հանրակրթական դպրոցի 5-6-րդ դասարաններում մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում դրանց կիրառման ուղիները [199], Ե. Վ. Լիկսինան ուսումնասիրել է համանման հարցերի լուծման ճանապարհները մաթեմատիկայի ապագա ուսուցիչների պատրաստման համակարգում [270], Մ. Ա. Ռոդիոնովը նույն հեղինակի հետ միասին ուսումնասիրել է ուսուցման գեղագիտական ուղղվածության արդիականացման խնդիրը [375], առաջադրել է մաթեմատիկական գեղեցիկի հատկանիշների իր համակարգը [373, 374], Յու. Մ. Ռոմանենկոն [378] զբաղվել է հարցի փիլիսոփայական տեսանկյունով, Ն. Լ. Ռոշչինան [380] դիտարկել է հարթաչափության խնդիրների լուծման գործընթացում սովորողների գեղագիտական ճաշակի ձևավորման խնդիրը, Օ. Վ. Չերնիկը [456] դիտարկել է մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի միջոցով սովորողների գեղագիտական դաստիարակվածության զարգացման խնդիրը, Ն. Ի. Ֆիրստովան [432] հետազոտել է մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի միջոցով սովորողների գեղագիտական դաստիարակության, մասնավորապես, մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում կատակերգականի ձևավորման խնդիրը և այլն: Մաթեմատիկայի դասավանդման գործընթացում գեղագիտական դաստիարակության հարցը ուսումնասիրվել է նաև հումանիստական արժեքների ձևավորման տեսանկյունից:

Այստեղ անհրաժեշտ է հիշատակել Գ. Ի. Սարանցևի [387], Մ. Ի. Ռոդիոնովի [372], Գ. Վ. Դորոֆեյեվի [205], Տ. Ա. Իվանովայի [218], Ա. Ի. Ազևիչի [122-123] և այլոց աշխատանքները: Մասնավորապես, Մ. Ի. Ռոդիոնովը կարևորում է գեղագիտականի դերը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի մոտիվացիայի հարցում [372, էջ 139], Ա. Ի. Ազևիչը մաթեմատիկայի հումանիտար նշանակությունը հիմնականում պայմանավորում է գեղեցիկով, իսկ վերջինիս իրականացման ճանապարհը տեսնում է մաթեմատիկայի կիրառական հնարավորությունների մեջ [122, էջ 175]: Ա. Լ. Ժոխովը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում գեղագիտականի ձևավորման հարցը կարևորում է սովորողների աշխարհայացքի ձևավորման տեսակետից՝ այն դիտելով որպես դրա իրականացման ուղենիշ [211, էջ 253]:

Հարկ է նշել, որ մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի միջոցով գեղագիտական դաստիարակության իրականացման ուղղությամբ կատարված աշխատանքներում նկատվում է ուսումնասիրությունների որոշ սահմանափակվածություն, ինչը արդյունք է մի շարք պատճառների: Այդ աշխատանքներում գիտական կամ մաթեմատիկական գեղեցիկի հատկանիշները չեն տարանջատվում ըստ իրենց օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ բնույթների, ինչը սահմանափակում է գեղեցիկի ընկալման հնարավորությունները: Այստեղ նշենք, օրինակ, որ առանց գեղագիտականի սուբյեկտիվ բնույթը հաշվի առնելու, դժվար է հասկանալ Գ. Բիրկհոֆի և Հ. Այզենկի տրամագծորեն հակառակ մոտեցումները առարկայի էությունը հասկանալու համար գործադրված ջանքերի գեղագիտական բնույթը մեկնաբանելիս: Միայն Ն. Ի. Ֆիրստովան է գեղեցիկի հետ միասին դիտարկում նաև կատակերգականը [432]: Մնացած բոլոր հետազոտություններում գեղագիտական արժեքների ձևավորումը, ըստ էության, հանգում է գեղեցիկի ձևավորման խնդրին, իսկ գեղագիտական մյուս կատեգորիաները մնում են ուսումնասիրությունից դուրս: Մասնավորապես, չի քննարկվում մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում տգեղի ձևավորման հարցը: Այնինչ, յուրաքանչյուր բնագավառում, նաև մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում, գեղեցիկի հետ միասին առկա է նաև տգեղի երևան գալու հնարավորությունը: (Գեղեցիկը ճանաչվում է տգեղի հետ փոխհարաբերության ընթացքում: Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում տգեղը ունի դրսևորման բազմաթիվ հնարավորություններ (տես ստորև), և ուսուցման նպատակներից մեկը տգեղի նմանատիպ դրսևորումներից խուսափելն է: Որևէ ուսումնասիրություն չի արծարծում մաթեմատիկայի ուսուցման միջոցով վեհի գեղագիտական արժեքի ձևավորման խնդիրը և, ընդհանրապես, վեհի ու մաթեմատիկայի փոխհարաբերության հարցը: Մինչդեռ այստեղ նույնպես առկա է հետաքրքիր փոխհարաբերությունների բազմազանությունը [94]: Նույնը կարելի է ասել նաև ողբերգականի, ստորի և գեղագիտական մնացած արժեքների մասին:

Հետազոտողների ուշադրությունից դուրս է մնացել մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում սովորողների հույզերի, մասնավորապես՝ գեղագիտական հուզերի դրսևորման և ձևավորման հարցը, այնինչ այստեղ նույնպես կան որոշակի օրինաչափություններ [86], [94): Սրան պետք է ավելացնել նաև այնպիսի զգացմունքների ձևավորման հարցի անտեսումը, որոնք չունեն զուտ գեղագիտական բնույթ, բայց իրենց բարոյական ու ինտելեկտուալ դրսևորումների հետ միասին, ցուցաբերում են նաև ընդգծված գեղագիտական երանգներ: Այդպիսիք են սերը, համակրանքը, հետաքրքրությունը և այլն [76], [94]: Նույնը կարելի է ասել նաև մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի միջոցով գեղագիտական պահանջմունքների ձևավորման մասին [85], [94]:

Չափազանց կարևոր է թվում մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի միջոցով գեղագիտական դաստիարակության կատեգորիաների ձևավորման հարցը: Այս ուղղությամբ դիտարկված է միայն գեղագիտական ճաշակի ձևավորման խնդիրը Ն. Լ. Ռոշչինայի [380] կողմից: Մինչդեռ, գեղագիտական դաստիարակության հարցի ուսումնասիրությունը ամբողջացնելու համար կարևոր է նաև նրա մնացած հիմնական կատեգորիաների դիտարկումը: Այստեղ առաջին հերթին կարևորագույն նշանակություն ունի գեղագիտական հարաբերության խնդրի պարզաբանումը: Պարզվում է, որ նախ անհրաժեշտ է և օգտակար գեղագիտական հարաբերությունը դիտարկել որպես սուբյեկտիվ հարաբերություն: Իսկ վերջինիս պարագայում էլ ոչ թե սահմանափակվել միայն երկկողմ հարաբերություններով, ինչպես ընդունված է հոգեբանության մեջ, այլ դիտարկել նաև եռակողմ և բազմակողմ սուբյեկտիվ հարաբերությունները: Այս մոտեցումը հնարավորություն է տալիս գեղագիտական հարաբերությունը դիտարկել նաև բարոյական արժեքների տեսանկյունից, ճիշտ հասկանալ և բացատրել գեղագիտական հարաբերություններում և ուսումնական գործընթացում դրսևորվող մի շարք սուբյեկտիվ առնչություններ, գեղագիտական հույզեր և զգացմունքներ, մաթեմատիկական կամ գիտական գեղեցիկի հատկանիշները բաժանել ըստ օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ դրսևորումների, ինչը ունի կարևոր դիդակտիկական նշանակություն: Գեղագիտական հարաբերությունների հետ միասին անհրաժեշտ է ուսումնասիրել նաև մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում գեղագիտական ընկալման, գեղագիտական զարգացման, գեղագիտական իդեալի, գեղագիտական ճշմարիտի, գեղագիտական գնահատականի և գեղագիտական դաստիարակության մյուս կատեգորիաների ձևավորման հարցերը [92-94], [497]:

Այնուհետև, թվում է, թե գեղագիտական դաստիարակության իրականացման ընթացքում շատ կարևոր է զանազանել գեղագիտական արժեքի անշարժ և շարժուն (պոտենցյալ և կինետիկ) վիճակները, ինչից բխում է նաև գեղագիտականի ընդհատությունը և անընդհատությունը: Գեղագիտական արժեքի շարժուն վիճակն առաջանում է, երբ սուբյեկտը հանդիպում է գեղագիտական արժեքը կրող օբյեկտին, վերջինս ազդում է սուբյեկտի վրա. մարդը ունենում է գեղագիտական ապրումներ՝ համակրանք, հույզեր, ուրախություն և այլն: Սակայն երբեմն, երբ գեղագիտական այդ նույն արժեքը կամ այն կրող օբյեկտը որոշ ժամանակ մնում է սուբյեկտի տեսադաշտում, կարծես դադարում է վերջինիս վրա հուզական ներգործություն ունենալուց, և թվում է, թե այդ օբյեկտն է զրկվում գեղագիտական իր արժեքից: Սակայն դա այդպես չէ. բավական է կորցնել նման օբյեկտը կամ նրա գեղագիտական հատկանիշը, և մարդը անմիջապես կզգա այդ արժեքի բացակայությունը և կունենա համապատասխան ապրումներ: Օրինակ, եթե պատին կախված նկարը թեքված է, ապա մենք զգում ենք անհարմարություն, անբավարարվածություն, որովհետև խախտվել է գեղագիտական կարգը կամ կարգի գեղագիտական հատկանիշը: Մենք անմիջապես ուղղում ենք նկարը, որից հետո միայն զգում ենք բավարարված:

Այսպիսով, մարդը, տիրապետելով ինչ-որ գեղագիտական արժեքի, իր հետագա գործունեության մեջ, եթե անգամ չի գիտակցում դրա գոյությունը, ելնում է այդ արժեքից, հենվում է նրա վրա, այսինքն՝ այդ արժեքը զգում է ենթագիտակցորեն: Նման անշարժ կամ պոտենցյալ արժեքների համախմբությունը կազմում է մարդու հոգևոր աշխարհի մի մասը: Նշենք, որ Ա. Վ. Վոլոշինովը [167, էջ 16] օգտագործում է պոտենցյալ և ակտուալ գեղեցիկի հասկացությունները՝ որպես առաջինի դրսևորման աղբյուր դիտելով քաոսը, իսկ երկրորդի համար՝ կարգը, իսկ Մ. Ա. Ռոդիոնովը [373] ըստ էության խոսելով մաթեմատիկական գեղեցիկի պոտենցիալ և ակտուալ վիճակների մասին, հիմնականում կանգ է առնում մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի միջոցով պոտենցիալ գեղեցիկի ակտուալացման խնդրի վրա: Այսպիսով, գեղագիտականը ամեն ինչի մեջ է. չկա առարկա կամ երևույթ, որը գեղագիտական բաղադրիչ չունենա: Այստեղ տեղին է հիշել Օ. Ա. Կոբալիայի արված հետևյալ դիտարկումը. «Երկրաչափության յուրաքանչյուր տարր, լինի դա գծագիր, թեորեմ, թե ապացուցում, մեթոդ կամ գաղափար, կարող է ծառայել որպես գեղեցիկի դրսևորման օրինակ» [237, էջ 78]: Ասվածը մեր դրույթի միայն մի մասի հաստատումն է:

Շատ կարևոր է տարբերել նաև գեղագիտականի կամածին և ոչ կամածին բնույթները: Գեղեցիկը մեծ մասամբ աչքի է ընկնում միանգամից՝ իր արտաքին տեսքով, և նրա հայտնաբերումը չի ենթադրում սոյբյեկտի կամային գործողություն: Այսինքն՝ գեղեցիկը իր արտաքին տեսքի, դրսևորման մեջ առաջին հերթին ոչ կամածին է: Սակայն հաճախ էլ հայեցվող օբյեկտը կարող է աչքի ընկնել ոչ թե իր արտաքին տեսքով, այլ ներքին գեղեցկությամբ, ինչի հայտնաբերումը կպահանջի մտածողության, կամքի և հոգեկան այլ ուժերի լարում: Նման դեպքերում գեղագիտականը կունենա կամածին բնույթ: Այս դիտողությունը առանձնապես կարևոր է նկատի ունենալ գիտական կամ մաթեմատիկական գեղեցիկի հետ շփվելիս, որտեղ գեղագիտականը հիմնականում հանդես է գալիս սուբյեկտի կամային գործունեության արդյունքում:

Ելնելով ասվածից մենք առաջարկում ենք մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի միջոցով գեղագիտական դաստիարակության խնդրի լուծման նկատմամբ համակարգային մոտեցում, որում.

1) Տրվում են մաթեմատիկական օբյեկտների գեղագիտական գնահատման հստակ չափանիշներ՝ մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշների և դրանց հետագա դասակարգման տեսքով:

2) Մաթեմատիկայի ուսուցման միջոցով գեղագիտական դաստիարակությունը դիտվում է որպես գեղագիտականի շարժուն և անշարժ ձևերի, ընդհատի և անընդհատի միասնություն, որում գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշների, մաթեմատիկական օբյեկտների ներքին և արտաքին գեղագիտության հենքի վրա դրսևորվում են գեղագիտական դաստիարակության բոլոր կատեգորիաները, իրենց արտահայտությունը գտնելով սովորողների հուզազգացմունքային ապրումներում:

3) Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում գիտական գեղեցիկի դիրքերից դիտարկվում են գեղագիտական հիմնական արժեքները, գեղագիտական դաստիարակության կատեգորիաները, հոգեկան երևույթները և դրանց փոխհարաբերությունները:

2.1.2. Մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշները: Թեև գիտության մեջ գեղեցիկի հարցը դիտարկվել է դեռևս հնադարից. Պլատոնը արդեն խոսում է գեղեցիկ ուսմունքների մասին, սակայն գիտական գեղեցիկին նվիրված հատուկ ուսումնասիրության մենք առաջին անգամ հանդիպում ենք 18-րդ դարի շոտլանդացի փիլիսոփա Ֆրենսիս Հատչեսոնի մոտ [444]: Խնդրի հետագա ուսումնասիրությամբ զբաղվել են բազմաթիվ նշանավոր մաթեմատիկոսներ, արվեստագետներ, մանկավարժներ՝ Կ. Գաուսը, Ժ. Ադամարը, Գ. Հարդին, Ա. Պուանկարեն, Դ. Հիլբերդը, Գ. Բիրկհոֆը, Դ. Պոյան, Գ. Վեյլը, Վ. Վոլկենշտեյնը և ուրիշներ: Ինչպես Հատչեսոնը, այնպես էլ հետագա ուսումնասիրողները բավարարվում են գիտական գեղեցիկի հատկանիշների առաջադրմամբ և աշխատում են գիտական (հիմնականում՝ մաթեմատիկական) օբյեկտների գեղագիտական գրավչությունը գնահատել՝ ելնելով գիտական գեղեցիկի իրենց նշած հատկանիշների հետ դրանց համապատասխանությունից [404], [408]:

Գիտական գեղեցիկի հատկանիշների մի մասը վերաբերում է գիտության այս կամ այն բնագավառի օբյեկտներին. դրանք այդ օբյեկտների հատկություններ են: Այդպիսիք են համաչափությունը, ներդաշնակությունը, օպտիմալությունը, տրամաբանական խստությունը, հստակությունը և այլն [131], [153], [157-160], [162-165], [175], [182], [197], [202], [239], [243], [259], [267], [293], [316], [344], [351], [367], [370], [384], [395], [397], [401], [417], [443], [448], [452], [458 [462-464], [468]: Համաչափությունը, օրինակ, մաթեմատիկայի, ֆիզիկայի, քիմիայի և բնական այլ գիտությունների ամենատարբեր օբյեկտների հատկություն է, տրամաբանական խստությունը գիտական մտքի հատկություն և այլն [161], [192], [420]: Նման հատկանիշները մենք անվանում ենք գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշներ:

Գիտական գեղեցիկի հատկանիշների մյուս մասը վերաբերում է սուբյեկտին. Գեղեցիկի ի հայտ գալը պայմանավորված է նաև գիտական գործունեություն իրականացնող սուբյեկտի մտավոր, ինտելեկտուալ ունակություններով: Իսկապես, մեկը կարող է նկատել գիտության մեջ առկա գեղեցիկը, մյուսը՝ չնկատել, ինչը պայմանավորված է գիտության տվյալ բնագավառում ունեցած գիտելիքներով և սուբյեկտի այլ ունակություններով, որոնք դիտում ենք որպես գիտական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշներ: Այդպիսի հատկանիշներ են հետաքրքրասիրությունը, մտքի ճկունությունը, արագությունը և այլն: Գիտական գեղեցիկի մաս են կազմում նաև այն հատկանիշները, որոնք երևան են գալիս օբյեկտի հետ սուբյեկտի երկկողմ հարաբերության ընթացքում և արտահայտում են սուբյեկտի հոգեկանի այս կամ այն կողմը՝ ճանաչումը, գործունեությունը և այլն: Այդպիսիք են, օրինակ, անսպասելիությունը, ինչն արտահայտում է գիտական օբյեկտի հետ սուբյեկտի հարաբերության ընթացքում նրա սպասումը, օգտակարությունը, ինչն արտահայտում է գիտական օբյեկտի կարևորությունը սուբյեկտի համար և այլն: Դրանք մենք անվանում ենք գիտական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշներ:

Գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշները, իրենց հերթին, կարելի է տրոհել մասերի: Գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշների առաջին խումբը կազմում են բնության կազմավորիչ տարրերը՝ կարգը, համաչափությունը, համեմատությունը, ներդաշնակությունը, ռիթմը, կիրառելիությունը, օպտիմալությունը, կայունությունը: Անվանենք այս հատկանիշները գիտական գեղեցիկի կազմավորող հատկանիշներ: Մաթեմատիկայի պարագայում նշված այս հատկանիշները արտահայտում են ինչպես բուն մաթեմատիկայի, այնպես էլ գիտության ու բնության բազմապիսի ոլորտներում մաթեմատիկայի կիրառական օբյեկտների հատկությունները: Որպես գիտական գեղեցիկի կազմավորիչ հատկանիշներ մենք ընդունում ենք կարգը, համաչափությունը, համեմատությունը, ներդաշնակությունը, ռիթմը, կիրառելիությունը, օպտիմալությունը, կայունությունը:

Հատկանիշների երկրորդ խումբը, որ կազմում են հստակությունը, պարզությունը (բարդի հանգեցումը պարզին), տրամաբանական խստությունը, վերաբերում է գիտական լեզվին: Այս հատկանիշները իրենց գեղագիտական գրավչությունը առանձնապես ցայտուն են արտահայտում մաթեմատիկայի և տրամաբանության մեջ: Անվանենք դրանք էլ գիտական գեղեցիկի տրամաբանական հատկանիշներ:

Հատկանիշների երրորդ խումբը կազմում են բազմազանությունների միասնականությունը, ընդհանրականությունը, գիտական օրինաչափության մաթեմատիկական գրառումը, ինքնատիպությունը, հեղափոխական քայլը: Սրանք էլ այն հատկանիշներն են, որոնք միավորում են գիտական օբյեկտները, ինչի պատճառով դրանք անվանենք գիտական գեղեցիկի միավորող հատկանիշներ: Ինչպես տեսնում ենք, մաթեմատիկան, գիտական օրինաչափության մաթեմատիկական գրառումը այստեղ խաղում է առանձնահատուկ դեր: Հարկ է նշել, որ գիտական գեղեցիկի դրսևորման և բացահայտման մեջ մաթեմատիկայի առանձնահատուկ դերը նշել են բոլոր հետազոտողները, սկսած Ֆ. Հատչեսոնից, որոնք մեծ մասամբ գիտական գեղեցիկը ներկայացրել են ուղղակի որպես մաթեմատիկական գեղեցիկ:

Գիտական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշները նույնպես մենք բաժանում ենք երեք խմբի: Առաջին խմբում ներառում ենք այն հատկանիշները, որոնք վերաբերում են սուբյեկտի գործունեության մոտիվացիային. Անվանենք դրանք մոտիվացիոն հատկանիշներ: Այդպիսիք են օգտակարությունը, անսպասելիությունը, անկախատեսելիությունը, նպատակաուղղված, բարդ ու դժվարին խոչընդոտի հաղթահարումը և այլն:

Երկրորդ խմբում ներառում ենք այն հատկանիշները, որոնք վերաբերում են իմացության գործընթացին, նրա բնույթին: Անվանենք դրանք ճանաչողական հատկանիշներ: Գիտական գեղեցիկի ճանաչողական հատկանիշների մեջ մենք ներառում ենք՝ ինտելեկտուալ որոնումը, գտնելը, հայտնագործելը, ճանաչելը, առարկայի էությունը հասկանալը, ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացությունը և այլն:

Սուբյեկտիվ հատկանիշների երրորդ խմբում ներառում ենք այն հատկանիշները, որոնք վերաբերում են գործունեությունը իրականացնող սուբյեկտի հոգեկանին. անվանենք դրանք էլ գիտական գեղեցիկի հոգեկան հատկանիշներ: Գիտական գեղեցիկի հոգեկան հատկանիշների մեջ ներառում ենք մտքի, երևակայության, ուշադրության, հիշողության, ընդունակության, կամքի դրական հատկանիշների առկայությունը՝ մտքի խորաթափանցությունը, արագությունը, ճկունությունը, ուշադրության կայունությունը, կամքի ուժը, նպատակասլացությունը և այլն: Այս հատկանիշները կարող են հանդես գալ ինչպես պասիվ, այնպես էլ ակտիվ ձևերով/վիճակերով: Գիտական գեղեցիկի հոգեկան հատկանիշների պասիվ տեսակի մեջ ներառում ենք հոգեկան դրական հատկանիշների առկայությունը, իսկ ակտիվ տեսակի մեջ՝ գործունեության ընթացքում սուբյեկտի դրսևորած դրական հոգեկան որակները: Վերջին դեպքում ինչքան նշանակալից են գործունեության իրականացման մեջ գործադրվող հոգեկան երևույթի մասնակցության համար գործադրվող ջանքերը, այնքան մեծ է գեղագիտականը: Այս տեսակետից հոգեկան ակտիվ հատկանիշների մեջ պետք է ներառել նաև Գ. Բիրկհոֆի և Հ. Այզենկի կողմից դիտարկված՝ առարկայի էություն հասկանալու համար գործադրվող ջանքերը:

Բոլոր հետազոտողները գիտական գեղեցիկի հատկանիշների մեջ նշում են ինչպես օբյեկտիվ, այնպես էլ սուբյեկտիվ հատկանիշներ: Ինքը՝ Ֆ. Հատչեսոնը [444] նշում է միայն երեք հատկանիշ, որոնցից երկուսը՝ բազմազանությունների միասնականությունը և ընդհանրականությունը, օբյեկտիվ (միավորով) հատկանիշներ, մեկը՝ ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացությունը, սուբյեկտիվ՝ ճանաչողական հատկանիշ: Երեք հատկանիշ է նշում նաև Վ. Վոլկենշտեյնը [168-169]. մեկը՝ նպատակաուղղված, բարդ ու դժվարին խոչընդոտի հաղթահարումը, սուբյեկտիվ՝ մոտիվացիոն և երկուսը՝ բարդի հանգեցումը պարզին և գիտական օրինաչափության մաթեմատիկական գրառումը, օբյեկտիվ, մեկը՝ տրամաբանական, մյուսը՝ միավորող: Գիտական գեղեցիկի հատկանիշների համեմատաբար ամբողջական ցանկ է ներկայացնում Ա. Գուսյեվան [200]: Սակայն նրա առաջարկված դասակարգման մեջ միևնույն խմբում ներառված են օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշներ: Վերջին շրջանի իր [374] աշխատանքում Մ. Ռոդիոնովը որպես գիտական գեղեցիկի հատկանիշներ է առաջադրում բովանդակության արտաքին պարզության և ներքին խորության հակադրությունը, կարգը, համաչափությունը, ներդաշնակությունը (օբյեկտիվ՝ կազմավորող հատկանիշներ) և ներկայացման անսպասելիությունը (սուբյեկտիվ՝ մոտիվացիոն հատկանիշ):

2.1.3. Մաթեմատիկայի ներքին և արտաքին գեղագիտությունը: Ինչպես գեղեցիկն ընդհանրապես, այնպես էլ մաթեմատիկական գեղեցիկը ունի ինչպես արտաքին, այնպես էլ ներքին դրսևորումներ: Որոշ հեղինակներ նման դրսևորումներն անվանում են մաթեմատիկայի արտաքին և ներքին գեղագիտություն [200]:

Գեղեցիկի արտաքին դրսևորումները: Սովորաբար մաթեմատիկական գեղեցիկի արտաքին դրսևորումը նույնացվում է մաթեմատիկական օբյեկտների արտաքին տեսքի գեղագիտության հետ, և քանի որ կա մաթեմատիկական օբյեկտների արտաքին արտահայտության երկու եղանակ՝ անալիտիկ և երկրաչափական, ապա բնական է համարվում զանազանել մաթեմատիկայի արտաքին գեղագիտության երկրաչափական ձևերի և մաթեմատիկական գրառման տեսակները (տես [200]):

Երկրաչափական ձևի տեսակետից որպես գեղագիտության հատկանիշներ կարող են հանդես գալ գծի, պատկերի կամ մարմնի համաչափությունը, համեմատությունը, մասնավորապես, ոսկե հատումը, ռիթմը, ներդաշնակությունը:

Համաչափությունը երկրաչափական ձևին հաղորդում է գեղագիտական գրավչություն. ինչքան շատ են նման համաչափությունները, այնքան մեծ է այդ ձևի գեղագիտական գրավչությունը: Մաթեմատիկական գեղեցիկի համաչափության հատկանիշի տեսանկյունից երկրաչափական ձևերի գեղագիտական գրավչությանը մենք կանդրադառնանք առաջիկայում: Երկրաչափական ձևերի գեղագիտական գրավչության մի այլ աղբյուր են համեմատությունները, մասնավորապես, ոսկե հատումը, ինչը լայնորեն դրսևորվում է բնության մեջ և կիրառվում արվեստում: Բոլոր այս, ինչպես նաև երկրաչափական ձևերի գեղագիտական գրավչության հարցը մաթեմատիկական գեղեցիկի՝ ռիթմի և ներդաշնակության հատկանիշների տեսանկյունից, կքննենք այս աշխատանքի հաջորդ գլխում:

Ինչ վերաբերում է մաթեմատիկական արտահայտությունների կամ բանաձևերի անալիտիկ գրառմանը, ապա նկատենք, որ յուրաքանչյուր առարկայի, երևույթի արտաքին տեսքը, ձևը կոչված են նրա էությունը արտահայտելու համար, և բնական է միևնույն օբյեկտի տարբեր գրառումներից գեղեցիկ համարել այն, որը առավելագույնս նպաստում է օբյեկտի էության ընկալմանը, հասկանալու գործընթացին: Այս տեսակետից որպես մաթեմատիկական գեղեցիկի արտաքին հատկանիշներ՝ պետք է ընդունել հստակությունը, պարզությունը, կիրառելիությունը:

Մաթեմատիկայի, նրա լեզվի հստակությունը հասկացությունների և դրանց վերաբերյալ դատողությունների միանշանակ, անորոշություններից զերծ ներկայացումն է, ինչին մաթեմատիկան հասնում է հաճախ սիմվոլների չափազանց մեծ քանակի օգտագործման շնորհիվ: Սիմվոլների այդ մեծ քանակը, սակայն, երբեմն խանգարում է մաթեմատիկական նյութի էության ընկալմանը, և այստեղ հատուկ հնարքների միջոցով մաթեմատիկան հասնում է որոշակի պարզեցումների:

Դիտարկենք, օրինակ, միևնույն արտահայտության գրառումները $2+3\cdot4-6:3$ և $(2+(3\cdot4))-(6:3)$ տեսքերով և փորձենք պարզել, թե դրանցից որն է ավելի գեղեցիկ: Առաջին արտահայտության տեսքը գեղեցիկին բնորոշ որևէ հատկությամբ աչքի չի ընկնում: Մինչդեռ երկրորդում առկա է ձախ և աջ փակագծերի երեք զույգ, որոնք դասավորված են համաչափություններով: Վերջիններս որոշակի արտաքին գրավչություն են հաղորդում այդ արտահայտությանը: Սակայն մաթեմատիկական գործունեությունը իրականացնող յուրաքանչյուր մարդ կնախընտրի գործ ունենալ ոչ թե երկրորդ, այլ առաջին գրառման հետ: Ինչո՞ւ: Բանն այն է, որ այս և մաթեմատիկական յուրաքանչյուր այլ գրառման հիմնական նպատակը ոչ թե արտաքին էֆեկտ առաջացնելն է, այլ այդ գրառման էությունն իրականացնելը, տվյալ դեպքում՝ գործողությունների կատարումը, և գրառումը նախընտրելի է, լավն է, գեղեցիկ է, եթե հեշտացնում է այդ գործընթացը: Նշված արտահայտություններից առաջինը երկրորդի պարզեցված գրառումն է, որ ստացվում է վերջինից՝ գործողությունների կարգի մասին կանոնների կիրառմամբ փակագծերից ազատվելու միջոցով: Եթե նման կանոններ չընդունենք, ապա արտահայտության կամ բանաձևի մեջ փակագծերի առատությունը, որ թելադրվում է հստակության պահանջով, կխանգարի արտահայտության կամ բանաձևի ընկալմանը, կդժվարացնի նրա հետ կատարվող աշխատանքը: Իսկ համապատասխան պարզեցումը հեշտացնում է նման ընկալումն ու աշխատանքը և արտաքին տեսքն էլ դարձնում է գեղագիտորեն գրավիչ:

Մաթեմատիկայի ողջ պատմությունը նաև սիմվոլների որոնման, դրանց միջոցով մաթեմատիկական արտահայտությունների ու բանաձևերի գրառման, հստակեցման ու պարզեցման պատմություն է: Բավական է հետևել մաթեմատիկական լեզվի զարգացման այդ ընթացքին, համեմատել միևնույն օբյեկտի ներկայացման տարբեր տեսքերը նրա տարբեր փուլերում, որպեսզի երևա նաև դրանց արտաքին գեղագիտության զարգացումը: Վստահորեն կարելի է ասել, որ առանց այդ գեղագիտական առաջընթացի անհնար կլիներ նաև մաթեմատիկայի առաջընթացը: Դրա համար բավական է, օրինակ, իրականացնել թվերի, դրանց նկատմամբ կատարվող գործողությունների համեմատում, երբ դրանք ներկայացված են երկու՝ հռոմեական և դիրքային գրառման եղանակներով: Իսկապես, փորձեք իրար հետ բազմապատկել հռոմեական գրությամբ գրառված երկու թվեր կամ, որ ավելի դժվար է, բաժանել դրանք: Վերջին գործընթացն այնքան դժվար է, որ միջնադարում հատուկ մաթեմատիկական մասնագիտություն է առաջ եկել՝ թվերի բաժանման գործընթացն իրականացնելու համար: Մի այլ օրինակի մենք հանդիպում ենք միջնադարյան Հայաստանում, որտեղ ժամանակի խոշորագույն մաթեմատիկոս Անանիա Շիրակացու լուրջ ծառայություններից մեկը բնական թվերի հետ գործողությունների աղյուսակների կազմումն է եղել: Եվ միայն թվերի դիրքային գրության շնորհիվ այսօր նշված գործընթացները որևէ դժվարություն չեն ներկայացնում անգամ տարրական դպրոցի աշակերտների համար:

Հստակեցման և պարզեցման գեղագիտական հատկանիշներն ուղեկցել են մաթեմատիկական հասկացությունների, թեորեմների, ապացուցումների ստեղծմանը: Բավական է նշել, որ զուգահեռության մասին Էվկլիդեսի աքսիոմի ապացուցման ապարդյուն փորձերի երկուհազարամյա պատմությունը, ի վերջո, էվկլիդեսյան երկրաչափության մեջ հստակության հատկանիշի բացակայության արդյունք է: Եվ հստակության հաստատումն էր, որ թույլ տվեց լուծել զուգահեռության աքսիոմի վերաբերյալ դարավոր խնդիրը և, միաժամանակ, ստեղծել երկրաչափության միանգամայն նոր բնագավառներ: Նույնը վերաբերում է նաև բազմությունների նաիվ տեսության մեջ առաջացած անտինոմներին, որոնց հաղթահարման համար Դ. Հիլբերտի և ժամանակի մյուս մաթեմատիկոսների ջանքերն ուղղված էին հստակության և պարզության հաստատմանը: Գեղեցիկի արտաքին դրսևորման տեսակետից այստեղ հետաքրքիր է, օրինակ, ապացուցման հիլբերտյան և հենցենյան եղանակների համեմատումը, որոնց մենք կանդրադառնանք այս աշխատանքի երկրորդ մասում: Հարկ է նշել, որ Ռ. Դեկարտի ստեղծած կոորդինատական մեթոդը միևնույն մաթեմատիկական օբյեկտի անալիտիկ և երկրաչափական ձևերով պատկերման հնարավորություններ է ստեղծում, և արտաքին գեղեցիկը կարող է չնկատվել օբյեկտի պատկերման մի ձևում, իսկ մյուսում կարող է լինել ակնառու: Այս կերպ, օրինակ, անալիտիկ եղանակով տրված զույգ ֆունկցիան գրաֆիկորեն պատկերվում է օրդինատների առանցքի, իսկ կենտ ֆունկցիան՝ կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ համաչափ կորի տեսքով, ինչը արտաքին գեղագիտական գրավչություն է հաղորդում դրանց: Նույն կերպ պարբերական ֆունկցիան գրաֆիկորեն պատկերվում է անընդհատ կրկնվող մասեր ունեցող կորի տեսքով, ինչը ռիթմի հատկանիշ և գեղագիտական գրավչություն է հաղորդում նրան: Կորի կամ մակերևույթի ողորկությունը, որ գեղագիտական գրավչության հատկանիշ է, արտահայտում է համապատասխան ֆունկցիայի ածանցելիության հատկությունը, ինչը նրա անալիտիկ արտահայտման մեջ կարծես գեղագիտականի որևէ տարր չի նախանշում: Նույնը կարելի է ասել անընդհատության, կորության և այլ հասկացությունների մասին: Նշենք նաև, որ ֆիզիկայի, քիմիայի և բնագիտական այլ գիտությունների օրինաչափությունների մաթեմատիկական գրառումը դրանց ձևն է, արտաքին կողմը, ինչը նպաստում է այդ օրինաչափությունն ուսումնասիրող գիտության շրջանակներում դրանց էության, ներքին կառուցվածքի բացահայտմանը:

Գեղեցիկի ներքին դրսևորումները: Եթե Ֆ. Հատչեսոնը և Վ. Վոլկենշտեյնը գիտական գեղեցիկի իրենց բնութագրումներում ելնում են արտաքին աշխարհի հետ երևույթի ունեցած փոխհարաբերություններից, ապա 19-րդ դարի ֆրանսիացի փիլիսոփա, գրող և գեղագետ Հիպոլիտ Տենը գեղեցիկը պայմանավորում է առարկայի բովանդակության հետ, և, ելնելով դրանից, արվեստի նպատակը տեսնում է առարկայի կամ երևույթի ներքին հատկանիշների, օրինաչափությունների, նրա մասերի միջև եղած փոխհարաբերությունների բացահայտման ու վերհանման մեջ [119]: Եթե այս տեսակետից մոտենանք նաև գիտական երևույթներին, ապա, բնականաբար, դրանցում առկա ներքին օրինաչափությունները նույնպես խորն են և, անկասկած, ունեն գեղագիտական որոշակի գրավչություն: Սակայն դրանց իմացությունը, սովորաբար, պահանջում է մասնագիտական գիտելիքներ և պատրաստվածություն: Այն անհասանելի է ոչ մասնագետին, որի համար անհասկանալի է, օրինակ, մաթեմատիկոսի ինքնամոռաց աշխատանքը «չոր» թվերի ու բանաձևերի հետ, աշխատանք, որի իրականացման կարևորագույն խթաններից մեկը նրանում առկա գեղեցիկն է, որ հենվում է նաև երևույթների ներքին օրինաչափությունների վրա:

Գեղեցիկի ներքին դրսևորումները երևան են գալիս մաթեմատիկական օբյեկտների բովանդակության մեջ: Դրանք արտահայտվում են մաթեմատիկայի ընդհանուր ճարտարապետության, դրանք կազմող հասկացությունների, նրանց միջև եղած փոխհարաբերությունների՝ թեորեմների ու դրանց ապացուցումների, իմացության մեթոդների, գիտության տարբեր բնագավառներում մաթեմատիկական լեզվի, փաստերի և մեթոդների կիրառման մեջ և նմանատիպ այլ գործընթացներում: Հարկ է նկատել, որ, ի տարբերություն իր արտաքին դրսևորման, մաթեմատիկական գեղեցիկի ներքին դրսևորումը միանգամից չի երևում, այն թաքնված է մաթեմատիկական երևույթի խորքում և հայտնաբերման, ընկալման համար պահանջում է որոշակի ջանքեր: Իրենց հերթին այդ ջանքերը՝ որպես մաթեմատիկական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշներ, ավելի են գեղեցկացնում բովանդակային դրսևորմամբ արտահայտված գեղեցիկը:

Հասկացությունների պարագայում ներքին գեղեցիկը արտահայտվում է հասկացության ծավալի և բովանդակության, սեռային և դասային պատկանելության, հասկացության հատկությունների մեջ: Այստեղ մեծ դեր ունեն գիտության այլ ոլորտներում հասկացության կիրառման հնարավորությունները, որոնք հաճախ պայմանավորում են հասկացության ծնունդը:

Ներքին գեղեցիկը լայնորեն է դրսևորվում մաթեմատիկական թեորեմներում, որոնք արտահայտում են մաթեմատիկական հասկացությունների հատկությունները, դրանց միջև առկա փոխհարաբերություններն ու կապերը: Դրանցում առկա են գիտական գեղեցիկի այնպիսի օբյեկտիվ հատկանիշներ, ինչպիսիք են կարգը, համաչափությունը, համեմատությունը, ռիթմը, ներդաշնակությունը, կայունությունը, օպտիմալությունը, բազմազանությունների միասնությունը, ընդհանրականությունը, հեղափոխական քայլի առկայությունը, կիրառելիությունը: Միաժամանակ մաթեմատիկական թեորեմներն աչքի են ընկնում անկանխատեսելիությամբ, անսպասելիությամբ և գիտական գեղեցիկի սուբյեկտիվ այլ հատկանիշներով: Գեղագիտական գրավչությունն այստեղ պայմանավորված է նաև ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացությամբ, հայտնաբերման կամ հասկանալու համար բարդ ու դժվարին խոչընդոտի հաղթահարմամբ, ինտելեկտուալ որոնման, հայտնագործության իրականացմամբ, այն ջանքերի չափով, որոնք անհրաժեշտ են առարկայի էությունը հասկանալու համար և այլն: Նույնը վերաբերում է նաև թեորեմների ապացուցումներին, ինչին մենք կանդրադառնանք առաջիկայում:

Արտաքին և ներքին գեղագիտությունների փոխհարաբերությունը: Բնական է գեղեցիկի առաջին՝ արտաքին տեսակը վերագրել մաթեմատիկական առարկաների և երևույթների ձևին, երկրորդը՝ ներքինը՝ դրանց բովանդակությանը: Սակայն որոշ հետազոտողներ հակված են կարծելու, թե մաթեմատիկական օբյեկտի արտաքին գեղեցկությունն ընկալվում է ներքին բովանդակությունից անկախ: Ն. Գույեվան, օրինակ, գտնում է, որ արտաքին գեղեցիկը բացահայտվում է զգայարանների միջոցով՝ առանց մտածողության ակտիվ մասնակցության, իսկ ներքին գեղեցիկի ընկալման համար, ընդհակառակը, անհրաժեշտ է մտածողության ակտիվ միջամտությունը [199]: Մենք կարծում ենք, որ այս մոտեցումը լիովին չի արտահայտում իրերի դրությունը: Իսկապես, ինչպես բնության մեջ կամ արվեստում, այնպես էլ գիտության, առավել ևս մաթեմատիկայի մեջ, առարկայի, երևույթի գեղագիտականի բացահայտման և ընկալման համար միայն զգայարանների մասնակցությունը բավարար չի կարող լինել: Նման յուրաքանչյուր դեպքի համար անհրաժեշտ կլինի հաշվի առնել փորձը, ինտուիցիան, կատարել համեմատություններ, ինչի համար անհրաժեշտ է նաև մտածողության ակտիվ մասնակցությունը: Եվ, ընդհանրապես, առարկայի, երևույթի ձևը և բովանդակությունը գտնվում են օրգանական միասնության մեջ, և դրանցից յուրաքանչյուրի իմացությունից կախված է մյուսի իմացությունը: Նույնը վերաբերում է նաև գեղեցկությանը. Առարկայի, երևույթի ներքին և արտաքին գեղեցկությունը փոխկապակցված են միմյանց հետ, առանց մեկի չի կարող լինել մյուսը, մեկի ճանաչումը օգնում է մյուսի իմացության բացահայտմանը, և դրանց միասնությունն է, որ թույլ է տալիս լիարժեք բացահայտել առարկայի էությունը, և այդ միասնությունն է, որ կազմում է նաև առարկայի, երևույթի գեղեցկությունը:

Վերցնենք թեկուզ $\frac{4}{3}\pi R^3$ արտահայտությունը: Առաջին հայացքից այն մաթեմատիկական սիմվոլների հաջորդականություն է և մնացած նման հաջորդականություններից որևէ բանով չի տարբերվում: Բայց դեռևս հնադարի մաթեմատիկոսներն են պարզել, որ այդ բանաձևով է արտահայտվում կամ չափվում R շառավիղ ունեցող գնդի ծավալը: Ահա այդ օրինաչափությունն է, որ հետաքրքրություն է առաջացնում նշված արտահայտության նկատմամբ և այն դարձնում գրավիչ: Իր հերթին այդ տեսքը հնարավորություն է տալիս բացահայտելու ինչպես գնդի շատ հատկություններ, այնպես էլ այլ մարմինների հետ նրա զանազան կապեր: Օրինակ, դիցուք ունենք հիմքի R շառավիղով կանոնավոր գլան, որին ներգծված են գունդ և կոն: Այդ գլանի ծավալը կլինի $2\pi R^3$, իսկ կոնի ծավալը՝ $\frac{2}{3}\pi R^3$: Համեմատելով այդ

արտահայտությունները՝ կարող ենք նկատել, որ կանոնավոր գլանի ծավալը հավասար է նրան ներգծված գնդի և կոնի ծավալների գումարին, այսինքն՝ գլանի մեջ ամբողջությամբ լցված հեղուկը կարելի է տեղավորել այնպիսի գնդի և կոնի մեջ, որոնք ներգծելի են նրան: Ստացված օրինաչափությունները և կապերը ունեն անսպասելիության, անկանխատեսելիության, պարզության, տրամաբանական խստության և մաթեմատիկայի գեղագիտության այլ հատկանիշներ, և դրանով էլ գրավիչ են դարձնում նշված արտահայտությունները:

Արտաքին և ներքին գեղագիտության դրսևորումները հանրահաշվի ուսուցման գործընթացում: Մաթեմատիկական գեղեցիկի արտաքին և ներքին դրսևորումներն ի հայտ են գալիս մաթեմատիկայի ուսուցման ողջ գործընթացում: Եվ եթե բուն մաթեմատիկայում գերիշխում են գեղեցիկի ներքին դրսևորումները, ապա ուսուցման գործընթացում առաջին պլան է մղվում նաև գեղեցիկի արտաքին կողմը:

Նախ հարկ է նշել, որ մաթեմատիկայի արտաքին գեղագիտությունը մեծապես ընդլայնվում է, եթե ուսումնական նյութի մեջ ներառվում են համաչափության, համեմատության ու ոսկե հատման, ռիթմի և ներդաշնակության հետ առնչվող հարցեր: Մաթեմատիկական գեղեցիկի արտաքին դրսևորման լայն հնարավորություններ կարող են ընձեռծել նաև գիտական գեղեցիկի հստակության, պարզության, կիրառելիության և գիտական օրինաչափության մաթեմատիկական գրառման օբյեկտիվ հատկանիշները:

2.2. Գեղագիտական դաստիարակության կատեգորիաները

Գեղագիտական դաստիարակության կատեգորիաները առանցքային տեղ են զբաղեցնում գեղագիտական դաստիարակության համակարգում: Իրենց աշխատանքներում գեղագիտական զանազան կատեգորիաների են անդրադարձել Ֆ. Հատչեսոնը [445], Ժ. Ժ. Ռուսոն [383], Ի. Կանտը [227], Ֆ. Շիլլերը [465], Գ. Հեգելը [180], Լ. Լուրյեն [276], Ա. Լոսյեվը և Վ. Շեստակովը [275], Լ. Ստոլովիչը [403-404], Ա. Ֆեդը [425] և այլն, մեզանում՝ Ա. Բալյանը [9], Հ. Հակոբյանը [24], Լ. Ներսիսյանը [107] և այլն: Իսկ ահա մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի հետ դրանց փոխհարաբերության հարցը լիարժեք չի լուսաբանվել [295]: Ինչպես նշվեց վերևում, միայն Ն. Լ. Ռոշչինայի [380] աշխատանքում դիտարկել է գեղագիտական ճաշակի ձևավորման խնդիրը, այն էլ երկրաչափական խնդիրների մի դասի ուսուցման շրջանակներում: [94] աշխատանքում նույն համատեքստում մենք անդրադարձել ենք ինչպես գեղագիտական ճաշակին, այնպես էլ մյուս, գեղագիտական կատեգորիաներին՝ գեղագիտական ընկալմանը, գեղագիտական զարգացմանը, գեղագիտական ճշմարիտին, գեղագիտական ճաշակին, գեղագիտական գնահատմանը և գեղագիտական իդեալին: Այստեղ կդիտարկենք միայն գեղագիտական հարաբերությանը և գեղագիտական զարգացմանը նվիրված մեր նյութը:

2.2.1. Գեղագիտական հարաբերություն: Մարդկային գործունեության ամենատարբեր ոլորտներում առանցքային նշանակություն ունի սուբյեկտիվ հարաբերության հասկացությունը: Ըստ Բ. Ֆ. Լոմովի «Ի տարբերություն օբյեկտիվ հարաբերության, ինչը դրսևորվում է երկու օբյեկտների փոխգործունեությամբ, սուբյեկտիվ հարաբերությունը արտահայտում է մարդու վերաբերմունքը ինչ-որ մեկի կամ ինչ-որ բանի հանդեպ, նրա կողմից մեկի նախապատվություն տալը մյուսի նկատմամբ, երևույթների, գործընթացների, մարդկանց կողմնակալ գնահատումը» [222, էջ 299]: Այսպիսով, սուբյեկտիվ հարաբերությունը ունի առնվազն երկու կողմ: Երբ կողմերը ճիշտ երկուսն են՝ առաջին կողմը սուբյեկտը, իսկ երկրորդը՝ կամայական օբյեկտ, կամ էլ որևէ սուբյեկտ, նման հարաբերությունը կանվանենք երկկողմ սուբյեկտիվ հարաբերություն [365-366], [451]:

Երկկողմ սուբյեկտիվ հարաբերությունները լայն կիրառություն ունեն հոգեբանության մեջ և ուսումնասիրված են հանգամանորեն: Սուբյեկտ-օբյեկտ ձևաչափով ընթացող հարաբերությունների միջոցով է, օրինակ, բացատրվում զգացմունքների տարանջատումը հույզերից (տես [222, էջ 300-301]: Որպես սուբյեկտիվ հարաբերություններ են դիտարկվում նաև գեղագիտական հարաբերությունները: Ուսումնական գործընթացում դրսևորվում են ուսուցիչ-աշակերտ, աշակերտ-աշակերտ, աշակերտ-դասապրոցես, աշակերտ-ուսումնական առարկա և այլ երկկողմ սուբյեկտիվ հարաբերություններ:

Հոգեբանները առանձնացնում են սուբյեկտիվ երկկողմ հարաբերության գնահատող, հուզական և դրդիչ կողմերը: Հարաբերության գնահատող կողմը դրսևորվում է նրա օբյեկտը այլ նմուշների, էտալոնների, նվաճման մակարդակների հետ համեմատելիս: Այստեղ սուբյեկտի կողմից օբյեկտին տրվում են լավ կամ վատ, հաճելի կամ տհաճ, ազնիվ կամ անազնիվ, գեղեցիկ կամ տգեղ, ճիշտ կամ սխալ և նմանատիպ այլ գնահատականներ, որոնք հիմք են ծառայում նրա նկատմամբ որոշակի վերաբերմունք ցույց տալու համար: Հարաբերության հուզական կամ արտահայտչական կողմը կապված է հարաբերության օբյեկտին տված հուզական գնահատականի պատճառով առաջացած ապրումների հետ: Հարաբերության դրդիչ կողմը դրսևորվում է դուր եկած օբյեկտին տիրանալու կամ նրանից բաժանվելու, նրա հետ առնչվելու կամ նրանից խուսափելու, նրանով զբաղվելու կամ չզբաղվելու ցանկության դրսևորմամբ (տես [222], էջ 300):

Նկատենք, որ ինչպես փիլիսոփայական, այնպես էլ հոգեբանական գրականության մեջ սուբյեկտիվ հարաբերությունը հիմնականում դիտվում է որպես երկկողմ՝ սուբյեկտ-օբյեկտ կամ սուբյեկտ-սուբյեկտ ձևաչափերով ընթացող գործընթաց: Օգտակար է, սակայն, նշված և այլ ոլորտներում դիտարկել նաև բազմակողմ, մասնավորապես՝ եռակողմ հարաբերությունները (մաթեմատիկայում, օրինակ, նման հարաբերություններն ունեն լայն կիրառություն): Իսկապես, երկու մարդու միջև հարաբերությունները, սովորաբար, ընթանում են ինչ-որ հանգամանքներում՝ առիթով, միջավայրում, իրադրության մեջ, գործընթացում և այլն: Եվ նման հարաբերությունների արդյունքը շատ կողմերով կախված է հենց այդ հանգամանքներից: Եռակողմ հարաբերությունները լայնորեն կարող են օգտագործվել հոգեբանության մեջ: Միայն եռակողմ հարաբերության միջոցով կարելի է, օրինակ, բացատրել խանդի, նախանձի, չարախնդության, բամբասանքի, թշնամանքի զգացմունքները:

Եռակողմ հարաբերությունները մեծ դեր ունեն նաև ուսումնական գործընթացում: Թեև մանկավարժական գրականության մեջ լայնորեն են դիտարկվում ուսուցիչ-աշակերտ փոխհարաբերությունները, սակայն ուսուցչի և կոնկրետ աշակերտի միջև երկկողմ հարաբերությունները ոչ միշտ են ակտիվորեն դրսևորվում: Կան ուսուցիչներ, օրինակ, որոնք ողջ դասի ընթացքում ոչ միայն չեն հարաբերվում առանձին աշակերտների հետ, այլև նրանց չեն էլ նկատում կամ էլ նկատում են միայն այն դեպքում, երբ հարկ են համարում դիտողություն անել: Հետևաբար, ուսուցման ու դաստիարակության վերաբերող շատ հարցեր դժվար է հասկանալ կամ բացատրել առանց ուսուցիչ – աշակերտ հարաբերություններում դասարանի կամ ուսումնական առարկայի միջնորդավորված դերը դիտարկելու, այսինքն՝ առանց դիտարկելու «ուսուցիչ – ուսումնական առարկա – աշակերտ», «ուսուցիչ – դասարան – աշակերտ» և նմանատիպ եռակողմ այլ հարաբերություններ: Ասվածը վերաբերում է նաև ուսուցման մեթոդներին: Օրինակ, վերջին ժամանակներում շատ է խոսվում ուսուցման ինտերակտիվ մեթոդների մասին, որոնք, ըստ էության, հանգում են «ուսուցիչ – աշակերտ – աշակերտ» եռակողմ հարաբերության, որում դրսևորվում է կողմերից յուրաքանչյուրի ակտիվությունը մնացած երկու կողմերի նկատմամբ:

Եթե երկկողմ սուբյեկտիվ հարաբերությունները կարող են ընթանալ սուբյեկտ-օբյեկտ կամ սուբյեկտ-սուբյեկտ ձևաչափերից յուրաքանչյուրով, ապա եռակողմ սուբյեկտիվ հարաբերությունները ընթանում են սուբյեկտ-օբյեկտ-սուբյեկտ կամ էլ սուբյեկտ-սուբյեկտ-սուբյեկտ ձևաչափերով: Ելնելով մեր առջև դրված խնդիրներից, մենք մեծ մասամբ կդիտարկենք առաջին տիպի եռակողմ հարաբերությունները: Եթե նման հարաբերությունը գրառենք A-X-B տեսքով, ապա A-ն և B-ն կանվանենք տված հարաբերության սուբյեկտներ կամ ծայրանդամներ, իսկ X-ը՝ նրա միջուկ: Նման եռակողմ հարաբերությունից աճանցվում են A-X և B-X սուբյեկտ-օբյեկտ և A-B սուբյեկտ-սուբյեկտ երկկողմ հարաբերությունները:

Եռակողմ հարաբերությունները նույնպես ունեն գնահատող, հուզական և դրդիչ կողմեր: Եռակողմ հարաբերության գնահատող կողմը, ի տարբերություն երկկողմ հարաբերության, կարող է լինել ներդաշնակ, երբ հարաբերության սուբյեկտները միակարծիք են կամ համանման՝ լավ կամ վատ, հաճելի կամ տհաճ և այլ գնահատական են տալիս օբյեկտին: Սակայն երբ գնահատականները իրարամերժ են, այդ դեպքում հարաբերությունը կարող է լինել ոչ ներդաշնակ (անառողջ, պայթունավտանգ կամ հակասական): Այսպիսով, եռակողմ հարաբերությունը ունի պայթունավտանգ լինելու հնարավորություններ, և առողջ հարաբերություն ստեղծելու պայմաններից մեկը կողմերի միջև անհամատեղելիություններից խուսափելն է: Հասկանալի է նաև, որ սուբյեկտ-օբյեկտ բնույթի երկկողմ հարաբերությունը հակասական չի կարող լինել, իսկ սուբյեկտ-սուբյեկտ տիպի երկկողմ հարաբերության հակասականությունն էլ կունենա ինչ-որ պատճառ, այսինքն՝ կլինի հակասության այդ պատճառը հանդիսացող մի երրորդ կողմ, իսկ դա նշանակում է, որ տրված հակասական երկկողմ հարաբերությունը ածանցվում է ինչ-որ եռակողմ հարաբերությունից:

Եռակողմ հարաբերության հուզական գործառույթը ևս կարող է դրսևորվել ինչպես ներդաշնակ, այնպես էլ աններդաշնակ կամ հակասական արտահայտվածություններով: Առաջին դեպքում հարաբերության միջուկը միատեսակ՝ դրական կամ բացասական հուզական արտահայտություն է ստանում նրա ծայրանդամների՝ սուբյեկտների համար: Օրինակ, երգը երկու լսողներին միաժամանակ դուր է գալիս: Երկրորդ դեպքում սուբյեկտներից մեկը ունենում է դրական, իսկ մյուսը՝ բացասական հուզական ապրում. երգը մեկին հուզում է, մյուսին՝ գրգռում: Առաջին դեպքում մենք հարաբերությունը կարող ենք գնահատել որպես առողջ, երկրորդում՝ անառողջ:

Հարաբերության դրդիչ գործառույթը նույնպես կարևոր դեր ունի նրա բնույթի՝ ներդաշնակության կամ հակասականության տեսանկյունից: Այստեղ առանձնապես վտանգավոր է, երբ հարաբերության երկու ծայրանդամներին էլ դուր է գալիս նրա միջուկը և երկուսն էլ ուզում են տիրանալ դրան: Այդ դեպքում մենք կունենանք որոշակի հակասություն նրա ծայրանդամների միջև, ինչը կարող է հանգեցնել խանդի, թշնամանքի, կռվի, պատերազմի և նմանատիպ այլ գործողությունների: Հարկ է նկատել, որ նման դեպքերում սուբյեկտների գործունեությունը կախված է հարաբերության բնույթից. Նյութական, թե հոգևոր է հարաբերությունը, իսկ վերջին դեպքում էլ՝ բարոյական, ինտելեկտուալ, թե գեղագիտական է այն:

Այսպիսով, եռակողմ հարաբերությունը՝ իր միջուկի նկատմամբ սուբյեկտներին տված գնահատականի, ապրումների և մղումների տեսանկյունով կարող է լինել հակասական, ներդաշնակ կամ չեզոք: Այն կարող է լինել.

ա. Հակասական, երբ օբյեկտին տված սուբյեկտների գնահատականները բարձր են և ունեն տարբեր նշաններ, կամ երբ նրա նկատմամբ սուբյեկտների ապրումները խորն են և նույնպես ունեն տարբեր նշաններ, կամ երբ սուբյեկտները հարաբերության նյութական միջուկի նկատմամբ ունեն միատեսակ դրական (տիրանալու) մղումներ:

բ. Ներդաշնակ, երբ օբյեկտին տված սուբյեկտների գնահատականները և նրա նկատմամբ սուբյեկտների ապրումները նույնպես ունեն միևնույն նշանները և սուբյեկտները հարաբերության միջուկի նկատմամբ ունեն միատեսակ, բայց հոգևոր դրդիչ մղումներ:

գ. չեզոք, երբ սուբյեկտների գնահատականները բարձր չեն, ապրումները խորը չեն կամ սուբյեկտները միջուկի հանդեպ ունեն տարբեր մղումներ:

Բնական է, որ մարդկային գործունեության յուրաքանչյուր ոլորտում նախընտրելի են ներդաշնակ հարաբերությունները: Սակայն հարաբերությունները, դրանց ստեղծումը պայմանավորված են ամենատարբեր գործոններով ու դրդապատճառներով, և ներդաշնակ հարաբերությունների ստեղծումը միշտ չէ, որ հնարավոր է դառնում [:

Գեղագիտական հարաբերություն: Գեղագիտական հարաբերությունը գեղարվեստական մանկավարժության (գեղագիտական դաստիարակության) հիմնական կատեգորիաներից մեկն է և նրա մնացած կատեգորիաների համար խաղում է միավորող դեր: Ավելին, վերջիններս հանդես են գալիս հենց գեղագիտական հարաբերության շրջանակներում: Թվում է, թե գեղագիտական հարաբերության հասկացությունը ունի միանշանակ ընկալում, սակայն տարբեր հեղինակներ տարբեր կերպ են բնորոշում այն: Այսպես, օրինակ, [475]-ում գեղագիտական հարաբերություն է անվանվում օբյեկտի հետ սուբյեկտի այնպիսի հոգևոր կապը, որը հիմնված է վերջինիս նկատմամբ անշահախնդիր հետաքրքրության վրա, և նրա հետ շփումը ուղեկցվում է հոգևոր խորը վայելքով: Կամ՝ «գեղագիտական հարաբերությունը իրականության երևույթները որպես գեղեցիկ կամ տգեղ, վեհ կամ ստոր, ողբերգական կամ կատակերգական գնահատելու մարդու ունակությունն է» [145, էջ 370]: Ահա մի այլ բնորոշում. Գեղագիտական հարաբերությունը իրականության հետ մարդու առանձնահատուկ հարաբերություն է, որի ընթացքում մարդը բացահայտում է և երևան է հանում օբյեկտիվ աշխարհի առարկաների, երևույթների և իրադրությունների ամբողջականության չափը, ցուցաբերում և ապրում է ակտիվ ստեղծագործելու իր ունակությունների և հնարավորությունների զարգացումը, գնահատում է իրականության երևույթների կատարելության և մարդու ներդաշնակության աստիճանը» [253]: Իսկ որոշ հեղինակներ էլ գեղագիտական հարաբերությունը ընդունում են որպես նախնական հասկացություն և նրա միջոցով սահմանում գեղագիտական դաստիարակությունը և նրա բոլոր կատեգորիաները [235]:

Ակնհայտ է, որ գեղագիտական հարաբերությունը սուբյեկտիվ հարաբերություն է, որն ընթանում է սուբյեկտ-օբյեկտ կամ սուբյեկտ-սուբյեկտ ձևաչափերով: Քանի որ մեզ հիմնականում հետաքրքրելու են առաջին ձևաչափով ընթացող հարաբերությունները, ապա գեղագիտական հարաբերությունն էլ կբնորոշենք որպես սուբյեկտ-օբյեկտ ձևաչափով ընթացող երկկողմ հարաբերություն, որում սուբյեկտի համար կարևորվում են օբյեկտի գեղագիտական հատկանիշները: Օրինակ, երբ մենք գնում ենք մեր հագուստը կամ տան կահույքը, ապա կարևորում ենք ոչ միայն դրանց պրակտիկ նշանակությունը, այլև գեղեցկությունը: Ընդ որում, մեր ընտրությունը պայմանավորված է ինչպես հագուստի կամ կահույքի գեղագիտական արժանիքներով, այնպես էլ մեր ճաշակով ու նախասիրություններով: Ասվածից հետևում է, որ գեղագիտական հարաբերությունը պայմանավորված է ինչպես օբյեկտի գեղագիտական բնույթով, այնպես էլ սուբյեկտի գեղագիտական էությամբ: Այդ է վկայում նաև գեղագետ Օ. Ա.

Կրիվցունի հետևյալ դիտարկումը. «Արվեստի ստեղծագործության ազդեցությունը կախված է ոչ միայն արդեն կատարված ստեղծագործությունից, այլև նրա ընկալման բնույթից: Արվեստի ստեղծագործության մեկնաբանությունների բազմազանությունը մշտապես սրել է այն հարցը, թե ինչ դեր են խաղում գեղագիտական ընկալման մեջ օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ գործոնները, ինչ չափով է գեղարվեստական կմախքը/հյուսվածքը ծառայում որպես մտահղացման աղբյուր և ինչ աստիճանով է լրացուցիչ միտք բերում ընթերցողը, հանդիսականը, լսողը» [255]:

Նշենք, որ յուրաքանչյուր սուբյեկտիվ հարաբերություն, անկախ իր տեսակից, իր մեջ ներառում է որոշակի գեղագիտական տարր, ինչը մեծ մասամբ հանդես է գալիս որպես գեղագիտական գնահատական: Իսկապես, դասի ընթացքում աշակերտի տված պատասխանը կարող է որակվել որպես գեղեցիկ, ավտոբուսում հասակով մարդուն իր տեղը զիջելը կամ չզիջելը՝ գեղեցիկ կամ տգեղ, հայրենիքի պաշտպանության համար կյանքը վտանգող զինվորի արարքը՝ վեհ, իսկ մատնությունը՝ ստոր: Գեղագիտական այս տարրը առաջանում է, երբ հարաբերության բովանդակությունը համապատասխանում կամ չի համապատասխանուում հասարակության մեջ ընդունված արժեքներին կամ նորմերին: Եվ գեղագիտական այս տարրն է, որ ամբողջացնում է հարաբերությունը, այն դարձնում ներդաշնակ:

Որպես գեղագիտական հարաբերության օբյեկտ կարող են լինել մարդը՝ իր ներաշխարհով ու վարքով, բնության ու հասարակության մեջ կատարվող երևույթները, գեղարվեստական ստեղծագործությունները: Մեզ համար կարևոր են գիտական կամ մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշները, որոնցով որպես գեղագիտական առանձնանում են ուսումնական գործընթացի մեջ դրսևորվող գեղագիտական հարաբերության օբյեկտները:

Իսկ ի՞նչ դեր է խաղում սուբյեկտը գեղագիտական հարաբերության մեջ: Գեղագիտական հարաբերության մեջ սուբյեկտի դերը պայմանավորված է գեղեցիկի, վեհի և մնացած հիմնական գեղագիտական արժեքների ընկալումներից, դրանց հանդեպ նրա ունեցած պահանջմունքներից, գեղագիտական ունակություններից, զարգացվածության աստիճանից ու մակարդակից, ճաշակից, գիտական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշներից և այլն: Սուբյեկտի նմանատիպ հատկանիշները դիտարկվում են որպես գեղագիտական հարաբերության բաղադրիչներ: Դրանք դասակարգվում են այսպես. հուզազգացմունքային, ճանաչողական, արժեբանական և գործունեության [235]:

Հուզազգացմունքային բաղադրիչ - գեղագիտական հույզերը, զգացմունքները, ապրումները, որոնք արտահայտում են օբյեկտի հետ հարաբերության ընթացքում սուբյեկտի գործունեության հուզազգացմունքային իրացումը: Ճանաչողական բաղադրիչ գեղագիտական ընկալումը, գիտակցությունը, դատողությունը, պատկերումը, որոնք ապահովում են իրականության գեղագիտական ճանաչումը:

Արժեբանական բաղադրիչ - գեղագիտական գնահատականները, ճաշակները, նորմերը, իդեալները, որոնք կազմում են գեղագիտական արժեքների, դրանց հետ կապված գեղագիտական մոտիվների, պահանջմունքների, դրանց բավարարման եղանակների բազմազանությունը:

Գործունեության բաղադրիչ - գեղագիտական ակտեր, որոնք հանդես են գալիս որպես շրջակա աշխարհի գեղագիտական իրացման արդյունք, որպես նոր, ավելի բարձր մակարդակով իմացության, գնահատման, զգալու նախադրյալ:

Օ. Վ. Չերնիկը [456] առանձնացնում է այս չորս բաղադրիչներից միայն երեքը՝ բաց թողնելով արժեբանականը, ընդ որում դրանք դիտում է որպես գեղագիտական դաստիարակվածության բաղադրիչներ:

Ընդհանրապես, սուբյեկտի և օբյեկտի փոխհարաբերության հարցը հիմնականներից մեկն է գեղագիտական հարաբերության մեջ: Ինչպես նշում է հանրահայտ հոգեբան Վիլհելմ Վորինգերը դեռ անցած դարի սկզբներին. «Ժամանակակից գեղագիտությունը վճռական քայլ է կատարել օբյեկտիվիզմի գեղագիտականից դեպի սուբյեկտիվիզմի գեղագիտականը,… որն իր հետազոտություններում արդեն ելնում է ոչ թե գեղագիտական օբյեկտի ձևից, այլ դիտող սուբյեկտի վարքից» [171]:

Նույն ժամանակներում գերմանացի մեկ այլ փիլիսոփա, հոգեբան և գեղագետ Թեոդոր Լիպպսը այդ հարաբերության միջոցով է բացատրում գեղեցիկը իր հոգևորացման սկզբունքը. «Գեղագիտական հաճույքը օբյեկտացված ինքնահաճույքն է», այսինքն՝ «Գեղագիտական հաճույք ստանալ նշանակում է հաճույք ստանալ ինքն իրենից զգայական առարկայի մեջ, որը տարբեր է իրենից, նրանում զգալ իրեն» [270]: Այլ կերպ ասած՝ այս երևույթը դիտվում է որպես գեղագիտական հարաբերության մեջ օբյեկտի և սուբյեկտի դինամիկ նույնության հաստատում: Այսպես օրինակ, գրական երկի ընթերցողը, գեղարվեստական ֆիլմի կամ թատերական ներկայացման հանդիսատեսը, դեպքերի զարգացմանը զուգընթաց, իրեն սկսում է պատկերացնել գլխավոր հերոսի դերում, սիրած երաժշտությունը լսողը կարծես անէանումձուլվում է այդ երաժշտության մեջ, բնության հրաշալի տեսարանը մարդուն մոռացնել է տալիս իր էությունը կամ էլ, հավանաբար, այդ էությունը ձուլվում-միահյուսում է տվյալ տեսարանի հետ: Նման նույնության իմաստը պատկերավոր ձևով բացատրում է 13-րդ դարի ճապոնացի պոետ և իմաստասեր Մյոեն. «...նայելով լուսնին ես դառնում եմ լուսին: Լուսինը, որին ես նայում եմ, դառնում է ես: Ես սուզվում եմ բնության մեջ, միանում եմ նրա հետ» [253]: Այս դինամիկ նույնությունը փայլուն ձևով է արտահայտում նաև Վ. Տերյանը (ընդգծումը իմն է՝ Հ. Մ.).

Ես եմ, դու ես, ես ու դու/Գիշերում այս դյութական,/Մենք մենակ ենք, ես ու դու,/

Ես էլ դու եմ՝ ես չկամ...:

Գեղագիտական հարաբերության այս առանձնահատկությունը Լիպսը անվանում է սուբյեկտի օբյեկտացում կամ օբյեկտի հոգևորացում, հումանացում (տես [271]): Այդ երևույթը լավագույնս արտահայտվում է նաև պարի մեջ, երբ պարող սուբյեկտը օբյեկտացվում՝ ձուլվում, իրեն զգում է երաժշտության մեջ, իսկ երաժշտություն-օբյեկտն էլ հումանացվում-մարդկայնացվում է պարող սուբյեկտի մեջ:

Առօրյա կյանքում, արվեստի հետ հնարավոր փոխհարաբերություններում, կրթական գործընթացում և կենսագործունեության այլ ոլորտներում մարդու համար կարևոր նշանակություն ունեն եռակողմ գեղագիտական հարաբերությունները: Երաժշտությունը, երգը, թատրոնը, պարարվեստը և արվեստի որոշ այլ տեսակներ ընկալվում են միայն եռակողմ հարաբերությունների միջոցով: Իսկապես, տվյալ երգի գեղարվեստական դրսևորումը իրականացվում է «երգիչ-երգ-ունկնդիր» եռակողմ հարաբերության մեջ, թատերական ներկայացումը՝ «թատերախումբ-ներկայացում-հանդիսատես» եռակողմ հարաբերության մեջ և այլն: Սուբյեկտ-օբյեկտ-սուբյեկտ ձևաչափով ընթացող A-X-B եռակողմ գեղագիտական հարաբերության ընթացքում կարող են տեղի ունենալ A=X և B=X դինամիկ նույնացումները: Եվ քանի որ նույնության կամ հավասարության հարաբերությունը համաչափելի է (եթե B=X, ապա նաև X=B) և փոխանցելի է (եթե A=X և X=B, ապա A=B), ապա այդտեղից կստանանք նաև A=B նույնացումը: Այսինքն՝ յուրաքանչյուր գեղագիտական օբյեկտ առաջացնում է սուբյեկտների նույնացում և մարդկանց բազմության տրոհում ըստ այդ նույնացման: Միևնույն դասի մեջ են մտնում այն մարդիկ, որոնք միևնույն կերպ են գնահատում տվյալ գեղագիտական օբյեկտը: Սա մարդկանց սոցիալ-մշակութային վարքը կարգավորող, հասարակության մեջ համերաշխություն և ներդաշնակություն հաստատող կարևորագույն հանգամանք է, որ թույլ է տալիս և միաժամանակ պարտադրում է մարդկանց շփվել, հարաբերվել իրենց հետ միևնույն գեղագիտական մոտեցումներն ու միևնույն գեղագիտական ճաշակն ունեցող մարդկանց հետ:

Եռակողմ գեղագիտական հարաբերությունը կարող է լինել ինչպես ներդաշնակ, այնպես էլ չեզոք կամ հակասական: Այստեղ նման հարաբերությունները հիմնականում դրսևորվում են «A ընկալող-արվեստի գործ-B ընկալող» եռակողմ հարաբերության միջոցով: Միևնույն X երգը ունկընդրող A և B երկու մարդիկ, օրինակ, իրար հետ մտնում են հարաբերության մեջ AXB եռակողմ հարաբերության միջոցով, և եթե երգը մեկին դուր է եկել, իսկ մյուսին՝ գրգռում, ապա այստեղ առկա է հակասականությունը: Իսկ նշված արդյունքները պայմանավորված են մարդկանց նախասիրություններով, ճաշակով և այլ հանգամանքներով: Հարկ է նկատել, որ սովորաբար հասարակական կյանքը այնպես է կազմակերպվում, որ մարդիկ մեծ մասամբ կարողանում են խուսափել գեղագիտական հարաբերության հակասականության դրսևորումից: Օրինակ, տվյալ երգչի համերգին գնում են հենց նրա երգը նախընտրող մարդիկ, ջազը կամ սիմֆոնիկ երաժշտությունը լսում են միայն դրանք սիրող մարդիկ և այլն:

Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում ի հայտ են գալիս մաթեմատիկական գեղեցիկի ինչպես օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշները, այնպես էլ արտաքին և ներքին դրսևորումները [89-91]: Միևնույն ժամանակ, գեղագիտական տարրի առկայությունը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը դարձնում է ավելի գրավիչ, նպաստում է սովորողների կամային որակների և հոգեկան այլ երևույթների ձևավորմանն ու զարգացմանը [82], ինչը ուսուցման գործընթացում մաթեմատիկայի գեղագիտական հատկանիշների դրսևորման լրացուցիչ խթան է հանդիսանում: Սակայն այդ գեղագիտականը տեսնելու և ընկալելու համար աշակերտը չունի համապատասխան փորձ և ունակություններ: Եվ այստեղ առաջին պլան է մղվում ուսուցչի դերը, ով կարող է և պարտավոր է յուրաքանչյուր հասկացության, թեորեմի, նրա ապացուցման և կիրառման, երկրաչափական ձևի և հանրահաշվական գրառման մեջ բացահայտել և ցույց տալ գեղեցիկը: Իսկ ուսուցչի այդ դերը դրսևորվում է զանազան երկկողմ և եռակողմ գեղագիտական հարաբերություններում:

Մաթեմատիկայի և, ընդհանրապես, կամայական ուսումնական առարկայի ուսուցման գործընթացում դրսևորվող կարևորագույն գեղագիտական հարաբերություններն են ուսուցիչ-աշակերտ, աշակերտ-աշակերտ, ուսուցիչ-դասապրոցես, աշակերտ-դասապրոցես, ուսուցիչ-ուսումնական առարկա և աշակերտ-ուսումնական առարկա երկկողմ հարաբերությունները: Սակայն յուրաքանչյուր ուսումնական առարկայի ուսուցման գործընթացում դրանք դրսևորվում են յուրովի:

Նախ խոսենք դրանցից առաջինի՝ ուսուցիչ-աշակերտ երկկողմ հարաբերության մասին: Ուսուցիչների մեծամասնության համար մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը հանգում է զուտ մաթեմատիկայի ուսուցման: Նման մոտեցումը աշակերտների մեծ մասին օտարում է ուսուցման գործընթացից: Այդ աշակերտները մի ամբողջ ժամ ստիպված են լինում իրենց համար գտնել մաթեմատիկայից տարբեր ու իրենց կողմից նախասիրված զբաղմունք: Իսկ ուսուցիչը նրանց հետ հարաբերվում է այնքանով, որ նրանց արգելում է զբաղվել նրանց այդ նախասիրած զբաղմունքով, այսինքն՝ զրկում է ազատությունից: Եվ կարծեք թե ուսուցիչաշակերտ փոխհարաբերությունը այդ դեպքում նմանվում կամ վերածվում է բանտարկյալ-վերակացու փոխհարաբերության: Եվ քանի որ բանտարկյալի և վերակացուի իրար հանդեպ ունեցած զգացմունքները միայն ատելությամբ են բնութագրվում, ապա այստեղ նույնպես երևան է գալիս մարդկային այդ անցանկալի զգացմունքը: Հասկանալի է, որ նման հարաբերության գեղագիտական տարրի կամ գրավչության մասին խոսելն անիմաստ է: Անիմաստ է այստեղ խոսել նաև ընդհանրապես կրթության մասին [76]:

Ուսուցիչ-աշակերտ հարաբերության գեղագիտական կողմը կարող է լիարժեք դրսևորվել եռակողմ հարաբերության շրջանակներում: Նման կարևորագույն հարաբերությունը «ուսուցիչ – ուսումնական առարկա – աշակերտ» հարաբերությունն է, որում ծայրանդամները հանդես են գալիս որպես սուբյեկտներ և հաշվի են առնում օբյեկտի՝ ուսումնական առարկայի կամ նրանում ընդգրկված ուսումնական նյութի գեղագիտության օբյեկտիվ հատկանիշները: Գեղագիտականի համատեղ հայտնաբերումը, դրա հետ համատեղ շփումը, հուզական ապրումները՝ հաճույքը, ուրախությունը, բերկրանքը, զուգորդված ճանաչողության գործընթացի բերած բավարարության և հուզական այլ ապրումների հետ, մարդկային հոգիների մեջ ձևավորում են բարոյական այն երկու անանցանելի արժեքները, որ դարեր ի վեր մարդկությունը հպարտորեն բնութագրում է ՈՒՍՈՒՑԻՉ և ԱՇԱԿԵՐՏ նվիրական բառերով: Դժբախտաբար, մաթեմատիկայի ուսուցչի հետ նման հարաբերությունները ձևավորվում են միայն աշակերտների շատ փոքր խմբերի համար, իսկ աշակերտության ճնշող մեծամասնությունը չի ներառվում հարաբերությունների այս շրջանակի մեջ:

Այսպիսով, ուսումնական գործընթացում գեղագիտական հարաբերության դրսևորման հիմքը ուսուցիչ ուսումնական առարկա և աշակերտ ուսումնական առարկա երկկողմ հարաբերություններն են: Դրանց գեղագիտական բնույթը պայմանավորված է դիտարկվող սուբյեկտների կողմից ուսումնական առարկայի կամ դասավանդվող կոնկրետ ուսումնական նյութի նկատմամբ ունեցած վերաբերմունքով, ավելի կոնկրետ՝ դրանց գեղագիտության օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշների ընկալումով:

Անշուշտ, գեղագիտականի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշների կիրառության համար կարևոր է ուսումնական նյութի իմացությունը: Սակայն դա դեռ բավարար չէ: Մանավանդ, երբ խոսքը վերաբերում է սուբյեկտիվ հատկանիշներին. Երևույթի անկանխատեսելիությունը, անսպասելիությունը, այն գտնելու, հայտնաբերելու համար կատարվող որոնումը պայմանավորված են ուսուցման գործընթացի կազմակերպումից՝ դասագրքում նյութի շարադրանքից, ուսուցչի կողմից դրա մատուցումից և այլն:

Միևնույն փաստը կարելի է ներկայացնել այնպես, որ այն դառնա կանխատեսելի կամ էլ այնպես, որ աշակերտի համար լինի անսպասելի ու անկանխատեսելի: Լավ դասագրքի հեղինակը, հմուտ ուսուցիչը հաշվի են առնում ասվածը: Նույնը վերաբերում է նաև մաթեմատիկական առարկան, երևույթը կիրառելուն և օգտագործելուն, դրանց էությունը հասկանալու համար անհրաժեշտ ջանքերին, նպատակաուղղված, դժվարին ու բարդ խոչընդոտի հաղթահարմանը: Անփորձ ուսուցիչը կարող է, օրինակ, չհամբերել և աշակերտին հուշել, ցույց տալ խնդրի լուծման ճանապարհը, ինչը արդեն անհետաքրքիր է դարձնում լուծումը, որովհետև կորչում է հայտնաբերման՝ գեղեցիկի խթան հանդիսացող հատկանիշը: Նման դեպքերում աշակերտը սովորաբար ընդիմանում է ուսուցչին, խնդրում է չօգնել, չասել լուծման ճանապարհը:

Այսպիսով, մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում գեղագիտականի դրսևորման կարևորագույն գործոնը ուսուցիչն է. ինչպե՞ս է նա վերաբերում գեղեցիկին, մաթեմատիկայի և նրա ուսուցման գործընթացի մեջ տեսնո՞ւմ և կարևորո՞ւմ է գեղեցիկը, գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշները, դրանց դերը ուսումնական առարկայի նկատմամբ աշակերտի վերաբերմունքի և, ընդհանրապես, նրա հոգևոր աշխարհի ձևավորման տեսանկյունից: Այս հարցերի դրական պատասխանի դեպքում միայն կարելի է խոսել գեղագիտական հարաբերության և, ընդհանրապես, մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի միջոցով գեղագիտական դաստիարակության իրականացման մասին: Ասվածը ընդգծում է նաև «ուսուցիչուսումնական առարկաաշակերտ» եռակողմ գեղագիտական հարաբերության առանձնահատուկ դերը ուսումնական գործընթացում: Այստեղ հարկ է նշել, որ ի տարբերություն իրականության ճանաչողական և բարոյական դրսևորումների, որոնք հնարավոր է իրականացնել ուսուցչի և աշակերտի միջև սուբյեկտօբյեկտ բնույթի փոխհարաբերությունների միջոցով, գեղագիտական ունակությունների ձևավորումը անհնար է իրականացնել սուբյեկտի կողմից օբյեկտաշակերտին տրվող հրահանգավորումներով կամ խորհուրդներով: Գեղեցիկը զգալու, ճանաչելու համար աշակերտը ինքը պետք է լինի գործունեության սուբյեկտ. առանց դրա, միայն ուսուցչի դեղատոմսերին հետևելով, անհնար է նման զգացողության և ճանաչողության իրականացումը:

Ուսուցման գործընթացում կամ «ուսուցիչ – ուսումնական առարկա – աշակերտ» գեղագիտական հարաբերության մեջ ուսուցչի ունեցած դերը նման է թատրոնում դերասանի կամ թատերական ներկայացման ռեժիսորի խաղացած դերին: Պատահական չէ, որ հաճախ մանկավարժի մասնագիտությունը համեմատում են դերասանի մասնագիտության հետ: Եթե ուսուցիչը ուսուցման գործընթացում չընդգծի, կանգ չառնի ուսումնական նյութի մեջ առկա գեղագիտական որակների վրա, ապա աշակերտը չի կարող սեփական ուժերով հատնաբերել դրանք: Այնպես, ինչպես կան վատ ռեժիսորներ և դերասաններ, որոնք չեն կարողանում բացահայտել և հանդիսատեսին հասցնել ներկայացման գրական հենքի՝ պիեսի ասելիքը, թափանցել նրա գեղագիտական խորքերը, նույն կերպ և վատ ուսուցիչը կանգ չի առնում դասավանդվող նյութի գեղագիտական կողմերի, նրա գեղագիտական խորքերի վրա: Բայց ուսուցչի կողմից նյութի գեղագիտական հատկանիշների բացահայտումը աշակերտի համար դեռևս բավարար չէ դրա գեղագիտական ընկալման համար: Անհրաժեշտ է, որ աշակերտն ինքը զգա այդ գեղեցիկը, ինչի համար նա, ի տարբերություն թատրոնի հանդիսատեսի, որը հարաբերության օբյեկտ է, պետք է դիտվի, դառնա հարաբերության սուբյեկտ:

2.2.2. Գեղագիտական զարգացումը հանրահաշվի ուսուցման գործընթացում: Գեղագիտական զարգացումը գեղագիտական դաստիարակության կարևորագույն կատեգորիաներից է: Ինչպես դրա էության բացահայտման, այնպես էլ գեղագիտական դաստիարկության գործընթացում սովորողների գեղագիտական զարգացման ունակությունների ձևավորման խնդիրները դարձել են ամենաբազմազան ուսումնասիրությունների առարկա: Ընդ որում, խնդրի գործնական, այսինքն՝ սովորողների գեղագիտական դաստիարակության տեսանկյունները դիտարկող հետազոտողները հարցի լուծման ճանապարհը հիմնականում տեսնում են հումանիտար և, առաջին հերթին, արվեստի բնագավառի ուսումնական առարկաների ուսուցման գործընթացի շրջանակներում: Սակայն ելնելով վերջին շրջանում մաթեմատիկայի կրթական ներուժի հումանիստական հնարավորությունների բացահայտման հիմնահարցի ակտուալությունից, որոշակի հետաքրքրություն են ներկայացնում նաև մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում սովորողների գեղագիտական զարգացման հետ կապված հարցերը:

Թեպետ և գեղագիտական զարգացման հասկացությունը թվում է ինտուիտիվ տեսանկյունից պարզ ու ընկալելի, սակայն չկա միասնական մոտեցում դրա բնորոշման հարցում: Այսպես, օրինակ, [148]-ում գեղագիտական զարգացումը բնորոշվում է որպես իրականության տարբեր երևույթները գեղեցիկ զգալու ունակության զարգացում: Ըստ [194]-ի գեղագիտական զարգացումը կյանքի և նրա նկատմամբ հուզական-հոգեբանական հարաբերության պատկերային-գեղարվեստական ընկալման ունակության ձևավորման և հարստացման գործընթացն է: Իսկ [475]-ում գեղագիտական զարգացումը սահմանվում է որպես առարկաների և երևույթների գեղագիտական առույթները (ասպեկտները) ընկալելու ունակության ստեղծում և դրանց զարգացում: Չխորանալով այս և նմանատիպ այլ բնորոշումների վերլուծության մեջ, մենք որպես գեղագիտական զարգացում կհասկանանք օբյեկտների մեջ գեղեցիկը զգալու ունակության զարգացում:

Գեղագիտական զարգացումը գեղագիտական դաստիարակության կարևոր բաղադրիչներից է և հիմնականում իրականացվում է հանրակրթության շրջանակներում: Մեզ հատկապես հետաքրքրում է սովորողների գեղագիտական զարգացման խնդրի իրականացումը մաթեմատիկայի դասավանդման գործընթացի միջոցով:

Ն. Լ. Ռոշչինան [380] աշխատանքում, հենվելով մաթեմատիկական գեղեցիկի արտաքին և ներքին գեղագիտության վրա, առանձնացնում է մաթեմատիկայի գեղագիտական զարգացման երեք մակարդակներ, որոնք անվանում է նաև գեղագիտական ճաշակի մակարդակներ (գեղագիտական ճաշակի մասին տես [274]): Դրանցից առաջինը նա համարում է զգայական կամ տեսողականպատկերային մակարդակը, ինչը հենվում է սովորողի զգայությունների (հիմնականում՝ տեսողական) վրա: Սակայն դժվար չէ կռահել, որ այս մակարդակը, ըստ էության, ոչնչով չի տարբերվում մաթեմատիկական օբյեկտների արտաքին գեղագիտությունից, որը հենց այդպես էլ՝ որպես զգայարանների միջոցով ընկալվող գեղագիտություն է բնութագրում Ն. Գույեվան [200]:

Գեղագիտական զարգացման կամ ճաշակի հաջորդ մակարդակը, որ բերում է Ն. Ռոշչինան, թվում է արհեստական: Այն կոչվում է այլընտրանքային, իսկ նրա էությունը կայանում է նրանում, որ այն թույլ է տալիս գեղեցիկը տեսնել մաթեմատիկական օբյեկտների համեմատության մեջ: Նախ, նկատենք, որ համեմատության գործողությունը հատկանշական է գեղագիտական գնահատականին [449]: Եվ ապա, նմանատիպ գործողությունների կատարումը ենթադրում է մաթեմատիկական օբյեկտների ինչպես արտաքին, այնպես էլ ներքին հատկանիշների հաշվառում, այսինքն, հանգում է այդ օբյեկտների կամ արտաքին, կամ էլ ներքին գեղագիտությանը:

Գեղագիտական զարգացման կամ ճաշակի երրորդ մակարդակը, որ անվանվում է հատկանշական, հեղինակը համարում է բարձրագույն մակարդակ, ինչը թույլ է տալիս սովորողին «առաջադրված խնդիրների բազմազանությունից ընտրել այն, որը կարելի է համարել գեղեցիկ և փաստարկել իր ընտրությունը»: Բայց դժվար չէ հասկանալ, որ նման ընտրությունը կախված է առաջադրվող խնդրի բարդությունից (ըստ կրթական աստիճանների) և, ուրեմն, կարող է դիտարկվել զարգացման տարբեր մակարդակներում: Հետևաբար, այստեղ նույնպես առկա է որոշ արհեստականություն: Պատահական չէ, որ զարգացման այս մակարդակի վերաբերյալ խնդիրների գեղեցկությունը հեղինակը գնահատում է՝ ելնելով գիտական գեղեցիկի այս կամ այն հատկանիշից:

Ընդհանրապես, գեղագիտական զարգացումը, նրա տարբեր մակարդակները կարող են դրսևորվել ինչպես մաթեմատիկական օբյեկտների ներքին, այնպես էլ արտաքին գեղագիտության մեջ: Դրանցում արտահայտվում են նաև մաթեմատիկական գեղեցիկի թե՛ օբյեկտիվ, թե՛ սուբյեկտիվ հատկանիշները:

Իրականում գեղագիտական զարգացումը և զարգացման մակարդակները պետք է առաջին հերթին պայմանավորել կրթական տարբեր աստիճանների հետ, ինչը կապված է ինչպես ուսումնասիրվող մաթեմատիկական նյութի, այնպես էլ սովորողների տարիքային առանձնահատկությունների հետ: Ասվածից հետևում է, որ կրթական տարբեր աստիճաններում պետք է սպասել մաթեմատիկայի դասավանդման գործընթացի միջոցով գեղագիտական զարգացման խնդրի տարբեր լուծումներ [92]:

Իսկապես, նախ մաթեմատիկայի արտաքին և ներքին գեղագիտությունների ազդեցությունը սովորողի գեղագիտական զարգացվածության ձևավորման գործընթացի վրա կախված է սովորողի տարիքից: Փոքր տարիքում սովորողի մոտ գերակայում է առարկայական, պատկերային մտածողությունը, նա ընկալում և նախընտրում է առարկայի, երևույթի ձևը: Այստեղ մեծ դեր են խաղում և հետաքրքրություն առաջացնում խաղերը, պայմանականությունները: Սակայն տարիքի մեծացման հետ զուգընթաց մեծանում է նաև մտածողության տրամաբանական բաղադրիչը, և սովորողը արդեն հասկանում և ըմբռնում է մաթեմատիկայի էությունը, նրա համար ավելի կարևոր են դառնում առարկայի, երևույթի ներքինը, նրա հատկությունները, մասերի ու տարրերի փոխհարաբերությունները: Այստեղ գեղագիտական զարգացվածությունը ավելի շատ պայմանավորված է ներքին գեղագիտականի տեղաշարժերով:

Նույնը վերաբերում է մաթեմատիկական գեղեցիկի հատկանիշներին: Ինչ վերաբերում է գիտական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշներին, ապա դրանք կրթական տարբեր աստիճաններում դրսևորվում են տարբեր կերպ: Անսպասելիության, անկանխատեսելիության հատկանիշները իրենց գեղագիտական ուժը պահպանում են կրթական բոլոր աստիճաններում: Նույնը վերաբերում է նաև ինտելեկտուալ որոնման, գտնելու, հայտնագործելու հատկանիշներին: Միայն պետք է նկատել, որ ցածր դասարաններում այդ հատկանիշները ավելի շատ ուղղված են մաթեմատիկական օբյեկտների ներքին գեղագիտությանը, իսկ ավելի բարձր աստիճաններում սկսում են գերակայել ներքին գեղագիտության հետ կապված մոտիվները: Ինչ վերաբերում է բարդ ու դժվարին խոչնդոտների հաղթահարման համար ներդրվող ջանքերին, ապա դրանք անհրաժեշտ են մաթեմատիկական վերացական նյութի ընկալման, դրանցում գեղեցիկը տեսնելու համար անհրաժեշտ կամային որակների դրսևորման համար: Եվ այստեղ նույնպես գեղագիտական զարգացումը ուղիղ համեմատական է սովորողի տարիքին:

Գեղագիտական զարգացման գործում ավելի մեծ նշանակություն ունեն և ավելի լայնորեն են դրսևորվում գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշները:

Գիտական գեղեցիկի կարգի և համեմատության օբյեկտիվ հատկանիշները դրսևորվում են տարբեր ձևերով և խորությամբ՝ կախված կրթական աստիճաններից: Եթե տարրական դպրոցում դրանք ավելի շատ ունեն ոչ մաթեմատիկական՝ կիրառական, առարկայական բովանդակություն, ապա միջին դպրոցում լիարժեք դրսևորվում են մաթեմատիկական հիմնական բանաձևերի՝ հավասարությունների և անհավասարությունների տեսքով: Ընդ որում, կա նյութի ձևավորման երկու ճանապարհ. Անհավասարությունների մեկուսի ուսուցում կամ դրա միահյուսում հավասարության գաղափարի հետ՝ հանրահաշվական գործողությունների հենքի վրա: Վերջին մոտեցումը դասընթացին հաղորդում է կուռ և ներդաշնակ տեսք, որի ընկալումն արդեն գեղագիտական զարգացման կարևոր հանգրվան է: Նման շարադրանք է իրականացված, օրինակ, [63]-[65] դասագրքերում: Այստեղ առաջին հերթին պետք է առանձնացնել կարգի օբյեկտիվ հատկանիշը, որն ուղեկցում է սովորողին՝ ուսումնառության ողջ ընթացքում և մեծապես նպաստում ինչպես նրա մտավոր, այնպես էլ գեղագիտական զարգացմանը: Միևնույն ժամանակ, մաթեմատիկայի դասընթացում հավասարությունների, անհավասարությունների, հավասարումների և անհավասարումների ուսուցման հետ առնչվող նյութը ավանդաբար ունի կիրառական լայն ոլորտ ու հնարավորություններ: Դրա շաղկապումը ուսումնական նյութի հետ, ընդլայնում է սովորողի մտահորիզոնը, ձևավորում աշխարհայացքը, ինչը զարգացվածության ձևավորման կարևոր գործընթաց և, միաժամանակ, մաթեմատիկական գեղեցիկի կիրառելիության օբյեկտիվ հատկանիշի դրսևորում է:

Սովորողների գեղագիտական զարգացման լայն հնարավորություն է ստեղծում մաթեմատիկական գեղեցիկի տրամաբանական խստության օբյեկտիվ հատկանիշը: Նման հնարավորությունը առանձնակի դրսևորում է ստանում միջին դպրոցում մաթեմատիկական երկու նոր ուսումնական առարկաների՝ հանրահաշվի և երկրաչափության ուսուցման գործընթացում:

Միջին դպրոցի երկրաչափության դասընթացը սովորողին հնարավորություն է տալիս առաջին անգամ ծանոթանալ մտածողության դեդուկտիվ եղանակի և նրա կարևորագույն մի տարրի՝ ապացուցման գաղափարի հետ: Ապացուցման անհրաժեշտության գիտակցումը որակական նոր աստիճանի է բարձրացնում սովորողի մտածողությունը: Չափազանց կարևոր է այս փուլում օրինակների և, մանավանդ, ժխտօրինակների դիտարկումը. Այն կարող է ցույց տալ առանց ապացուցման, հիմնավորման և փաստարկման ասված խոսքի անկատարությունը:

Գեղագիտական զարգացման լայն հնարավորություններ է ստեղծում միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացը: Դասընթացի գեղագիտական հիմնական հմայքը նրա լեզուն է, որի ձևավորման միջոցով էլ իրականացվում է սովորողի գեղագիտական զարգացումը: Ի տարբերություն թվաբանության, այդ լեզուն, բացի թվերից ներառում է նաև տառեր, ինչը ժամանակին հեղաշրջում է առաջացրել ողջ մաթեմատիկայում և, բնականաբար, նման դեր կարող է խաղալ նաև մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում: Տառի գաղափարի ներմուծումը ապահովում է սովորողի զարգացվածության բոլորովին նոր մակարդակ: Միաժամանակ, այդ զարգացվածությունը նաև գեղագիտական է, քանի որ տառի ներմուծման միջոցով կառուցվող հանրահաշիվը ունի, օրինակ, կիրառական շատ ավելի լայն հնարավորություններ, իսկ վերջինս արտահայտվում է համապատասխան գեղագիտական հատկանիշի դրսևորմամբ:

Մենք արդեն նշել ենք հանրահաշվի դասընթացի աքսիոմատիկ կառուցման հնարավորությունների մասին, ինչը իրականացվում է մաթեմատիկական գեղեցիկի հստակության, պարզության և տրամաբանական խստության հատկանիշների ուղեկցությամբ [55]: Այն նաև համահունչ է երկրաչափական դասընթացի կառուցման մոտեցումներին և նպաստում է ապացուցման գաղափարի լիարժեք տիրապետմանը՝ ինչը ապահովում է գեղագիտական զարգացման նշանակալից մակարդակ:

Հանրահաշվի լեզվի զարգացնող գործառույթի, նրանում մաթեմատիկական գեղեցիկի տրամաբանական խստության, պարզության և հստակության հատկանիշների դրսևորման ևս մեկ՝ լրացուցիչ հնարավորություն կարելի է ստեղծել նրանում բազմության գաղափարի ներառմամբ: Հանրահայտ է բազմության գաղափարի դերը ողջ մաթեմատիկայում, առանձնապես նրա հենքի վրա մաթեմատիկայի կառուցման նշանակությունը մաթեմատիկայի հետագա զարգացման գործում: Բազմությունների տեսության հենքի վրա կառուցված մաթեմատիկան աչքի է ընկնում տրամաբանական խստությամբ, պարզությամբ և հստակությամբ և մատծողության նմանատիպ դրսևորման լայն հնարավորություններ է ստեղծում: Հանրահայտ է նման ձևով ֆրանսիական «Բուրբակի» հեղինակային խմբի կողմից մաթեմատիկայի զգալի հատվածի շարադրանքը: Բնական կլինի նաև մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի որոշ հատվածների շարադրանքում բազմությունների տեսության տարրերի կիրառումը: Կատարված են նման բազմաթիվ փորձեր: [63]-[65] դասագրքերում բազմության և նրա հետ կապված հասկացությունների շարադրանքը միահյուսված է ավանդական նյութի հետ:

Հանրահաշվական լեզվի միջոցով սովորողի գեղագիտական զարգացման լայն հնարավորություն կարող է ստեղծել տրամաբանության տարրերի ներմուծումը՝ տրամաբանության հանրահաշվի ուսուցումը միջին դպրոցում: Շնորհիվ տրամաբանական շաղկապների, հանրահաշվական արտահայտությունների և բանաձևերի կառուցումը ընդունում է ավելի հստակ տեսք: Օրինակ, աշակերտը վերջապես կարողանում է ոչ թե սերտել, այլ հասկանալ $a \pm b$ արտահայտության կամ $a \leq b$ բանաձևի իմաստները: Սակայն ավելի նշանակալից է այն, որ այստեղ սովորողը վերջապես կարող է հնարավորություն ստանալ քննարկելու դատողության ճշմարտության հարցը ծանոթանալ ճշմարիտ և կեղծ դատողությունների գաղափարների հետ: Սա նույնպես որակական կարևոր քայլ է սովորողի մտածողության և նաև գեղագիտական զարգացման ճանապարհին, քանի որ տրամաբանության հանրահաշվի ողջ նյութը նպատակաուղղված է բուն հանրահաշվական նյութի շարադրանքում տրամաբանական խըստության և հստակության ապահովմանը:

Սովորողի մտածողության, մտահորիզոնի, աշխարհայացքի զարգացման ևս մեկ հրաշալի առիթ է ստեղծվում կոորդինատական համակարգերի՝ կոորդինատական ուղղի, կոորդինատական հարթության և կոորդինատական տարածության դիտարկումը:

Հասկացությունների ուսուցման նշված հերթականությունն արդեն զարգացման որոշակի միտում ունի իր մեջ: Այն նաև գեղագիտական զարգացում է, որովհետև նրանում դրսևորվում են ընդհանրականության և բազմազանությունների միասնության գեղագիտական հատկանիշները: Պակաս կարևոր չէ նաև նշված կոորդինատական համակարգերի միջոցով հանրահաշվի և երկրաչափության կապերի ստեղծումը և դիտարկումը: Գեղագիտական զարգացումը այստեղ առաջին հերթին իրականացվում է դարձյալ մաթեմատիկական գեղեցիկի ընդհանրականության և բազմազանությունների միասնականության հատկանիշների դրսևորման շնորհիվ:

Ավագ դպրոցում կատարվում է մաթեմատիկական լեզվի հետագա ընդլայնում և զարգացում: Բուն մաթեմատիկայի տեսանկյունից այստեղ առաջին հերթին խոսքը վերաբերում է թվային համակարգերի հետագա ընդլայնմանը և իրական թվի գաղափարի ներմուծմանը: Հարկ է նկատել, որ այստեղ մաթեմատիկական զարգացումը չի ընդունում անհրաժեշտ գեղագիտական գրավչություն: Պատճառները տարբեր են: Նշենք մի քանիսը:

Թեև իրական թվի գաղափարը մաթեմատիկայի պատմական և ներքին տրամաբանական զարգացման ընթացքի, ինչպես նաև կիրառությունների ընդլայնաման մեջ ունեցել է վճռորոշ նշանակություն, սակայն ասվածը իր լիարժեք արտահայտությունը չի գտնում հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացում: Եվ դա պայմանավորված է իրական թվի, նրա հետ առնչվող հասկացություններին վերաբերող նյութերի ներմուծման տեխնիկական դժվարություններով, իռացիոնալ թվերի հետ կապված առօրեական պարզ կիրառությունների բացակայությամբ (այդտեղ սովորաբար, կիրառվում են ոչ թե իրացիոնալ թվերը, այլ նրանց ռացիոնալ մոտավորությունները):

Ասվածը վերաբերում է նաև անընդհատության գաղափարին, որի հիմնական օրինակը՝ թվային ուղիղը աչքի չի ընկնում առօրեական կիրառությամբ:

Սահմանման հիմքում ընկած տրամաբանական հենքի բարդության տեսակետից վերևում ասվածը վերաբերում է նաև ածանցյալի գաղափարին: Սակայն վերջինս, ի տարբերություն անընդհատության, ածանցյալն ունի կիրառական օրինակների դիտարկման չափազանց լայն հնարավորություն, մաթեմատիկական կիրառությունների պարզություն և մատչելիություն և բնագիտական ոլորտում կիրառությունների շատ լայն դաշտ, ինչը կարող է գեղագիտական գրավչություն հաղորդել այդ գաղափարի ուսուցմանը, նպաստել սովորողների գեղագիտական զարգացմանը: Միևնույն ժամանակ, այստեղ զարգացման գեղագիտական կողմը ապահովվում է նաև ինքնատիպության, բազմազանությունների միասնության, տրամաբանական խստության, անկանխատեսելիության, ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացության, հեղափոխական քայլի առկայության և մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ այլ հատկանիշների դրսևորմամբ:

Գեղագիտական զարգացման լայն հնարավորություններ է ստեղծում ավագ դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացի լոգարիթմներին և եռանկյունաչափական արտահայտություններին նվիրված նյութերի ուսուցումը: Լոգարիթմի հասկացությունը, օրինակ, առաջ է եկել 17-րդ դարում, բազմապատկման՝ այն ժամանակների համար դժվարին գործընթացը գումարման հանգեցնելու կարևորագույն գաղափարի իրագործման ճանապարհին: Եվ Շտիֆել-Նեպերի այդ հանճարեղ մտահղացումը, եթե ժամանակակից հանրահաշվի լեզվով ասելու լինենք, հանգում է դրական իրական թվերի արտադրյալային և իրական թվերի գումարային խմբերի իզոմորֆիզմին, այսինքն՝ նրանց ըստ էության հավասարությանը, ինչը բացահայտում է առաջին հայացքից իրարից շատ տարբեր գործողությունների՝ գումարման և բազմապատկման նույնականությանը կամ միասնականությանը: Սա Ֆ. Հատչեսոնի՝ բազմազանությունների միասնականության գեղագիտական հատկանիշն է՝ իր ամենախորը, հետևապես՝ նաև ամենագեղեցիկ դրսևորման մեջ և նախանշում է գեղագիտական զարգացման շատ բարձր մակարդակ:

Մտածողության և գեղագիտական զարգացման որակական կարևոր թռիչք կարող է ապահովել իմացության մեթոդների կիրառությունը ավագ դպրոցի «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրերը» ուսումնական առարկայի դասընթացում (տես [10-12], [22] և այլն): Արդեն նշվեց ավագ դպրոցում իմացության նոր մեթոդների կիրառման միջոցով միջին դպրոցի որոշ նյութերի ուսուցման նկատմամբ կատարվող անդրադարձի մասին: Մաթեմատիկական ինդուկցիայի կիրառմամբ թեորեմների ապացուցումների կատարումը, օրինակ, որակական նոր աստիճան է որպես խոսքի փաստարկում կամ հիմնավորում: Զարգացման այս ընթացքի գեղագիտական գրավչությունը ավելի ակնառու կարող է դառնալ, եթե ուսուցիչը անդրադառնալով միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացում թերի ինդուկցիայով կատարվող ապացուցումներին, նշի դրանց թերությունները, դիտարկի պարզ օրինակներ, որոնցում թերի ինդուկցիայի կիրառումը հանգեցնում է կեղծ կամ չհիմնավորված մտահանգման:

Գեղագիտական զարգացումը սերտորեն կապված է գեղագիտական դաստիարակության մյուս կատեգորիաների հետ: Առաջին հերթին հարկ է նշել, որ ինչպես սուբյեկտ-սուբյեկտ, այնպես էլ սուբյեկտ-օբյեկտ բնույթի գեղագիտական հարաբերությունը իրականացվում է ելնելով սուբյեկտների գեղագիտական զարգացման մակարդակներից: Գեղագիտական զարգացման հետ զուգընթաց փոխվում են սուբյեկտի գեղագիտական պահանջմունքները, և նախկին օբյեկտը կարող է իր գեղագիտական չափանիշներով չբավարարել նրան: Այստեղ պահանջմունքը, հետաքըրքրությունը մաթեմատիկական օբյեկտի նկատմամբ շեշտակիորեն թուլանում է ոչ միայն մաթեմատիկական գեղեցիկի՝ նորին միտվող բնույթի պատճառով [88, 34-35]: Ուղղակի նմանատիպ օբյեկտների նկատմամբ գործողությունների որոշ քանակության իրականացման արդյունքում որոշակի հմտություն ձեռք բերելուց հետո, դրանք՝ այդ գործողությունները այլևս չեն բավարարում սուբյեկտի գեղագիտական պահանջմունքները և չեն հետաքրքրում նրան: Այս երևույթը իրեն զգացնել է տալիս նաև մաթեմատիկական գործունեության և ուսուցման գործընթացում: Օրինակ, կոտորակների հետ կատարվող գործողությունները սովորողներին հետաքրքրում են այնքան ժամանակ, քանի դեռ նրանք չեն հմտացել դրանց կատարման մեջ, որից հետո դրանցով այլևս անհնար է նրանց հրապուրել:

Գեղագիտական զարգացումը սերտորեն է առնչվում նաև գեղագիտական ընկալման հետ [398]: Առարկաների, երևույթների գեղեցկությունը իր էությունը բացահայտում է տարբեր մակարդակներում, և յուրաքանչյուր մակարդակի ընկալման համար անհրաժեշտ է ունենալ համապատասխան գեղագիտական զարգացվածություն:

ժողովրդական երաժշտությունը, նրա գեղեցկությունը ընկալելի է շատերի համար, որովհետև մարդկանց մեծ մասը փոքր հասակից լսում է այդ երաժշտությունը: Իսկ ահա դասական երաժշտությունը պահանջում է զարգացվածության ավելի բարձր աստիճան և ընկալելի է ոչ բոլորի համար: Նույնը կարելի է ասել գեղանկարչության մասին. Շատերը, լինելով գեղնկարչական թանգարաններում, անկարող ընկալելու գեղագիտական գլուխգործոցները՝ անտարբեր անցնում են նրանց կողքով: Այս երևույթը առանձնապես կարևոր է մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում: Այստեղ ուղղակի անհնար է իրականացնել գործընթացը, առանց հաշվի առնելու սովորողի ընկալելու կարողությունը, ինչը պայմանավորված է նրա զարգացվածությամբ, քանի որ մաթեմատիկական նոր նյութի շարադրանքը անմիջականորեն հենվում է նախորդի վրա, և առանց այդ նախորդի իմացության անհնար է նորի իմացությունը: Հետևաբար, անիմաստ է այդ պայմաններում խոսել նաև հարցի գեղագիտական կողմի մասին:

Գեղագիտական զարգացումը անմիջականորեն է կապված գեղագիտական ճաշակի հետ: Կարելի է ասել, որ գեղագիտական ճաշակը գեղագիտական զարգացման մակարդակի արտահայտումն է:

Գեղագիտական զարգացումով են պայմանավորվում գեղագիտական պահանջմունքները և ապրումները, հույզերն ու զգացմունքները: Մեկին հուզում է ժողովրդական երգը և նա ունի դրա պահանջմունքը, իսկ դասական երաժշտությունը թողնում է անտարբեր, իսկ մյուսին ավելի շատ գրավում է դասականը: Պատճառը գեղագիտական զարգացման աստիճանների տարբերությունն է: Թեև ասում են, թե «սերը աթարին է կպնում», սակայն նման ընտրությունը լավ ճաշակի արտահայտություն չի համարվում և, թվում է, թե լայն ընտրության, լավ ճաշակի և զարգացած գեղագիտականի դեպքում կարելի է ակնկալել ոչ «աթարային» ընտրություն: Նշենք նաև, որ գեղագիտական զարգացումը տեղի է ունենում այնպիսի օբյեկտների ընկալման ընթացքում, որոնք առաջացնում են գեղագիտական ապրումներ: Ասվածը լիովին իր արտահայտությունն է գտնում նաև հանրահաշվի ուսուցման գործընթացում:

2.3. Հանրահաշվի ուսուցումը և գեղագիտական արժեքների ձևավորումը

2.3.1. Գեղագիտական հիմնական արժեքների ձևավորումը հանրահաշվի ուսուցման գործընթացում: Ինչպես նշվեց առաջին պարագրաֆում, գեղագիտական դաստիարակության հիմնական գործառույթներից մեկը սովորողի արժեհամակարգի և արժեքային կողմնորոշման գեղագիտական բաղադրիչի ձևավորումն է:

Արժեքը «կամայական բնույթի առարկա է, որը նշանակալից է սուբյեկտի համար, օժտված է սուբյեկտի պահանջմունքները բավարարելու ունակությամբ» (տես [149], էջ 799): Արժեք ասելով մենք հասկանում ենք այն օբյեկտը, ինչը գնահատում ենք, նշանակալից ենք համարում, ինչը անհրաժեշտ է մեր պահանջմունքների բավարարման համար: Սովորաբար որպես արժեք է դիտվում նաև այն հատկությունը, որով օժտված է արժևորվող օբյեկտը և որը առանձնացվում, պատճառ է դառնում սուբյեկտի կողմից օբյեկտի արժևորման:

Արժեքների հիմքում ընկած են մարդկային պահանջմունքները: Կախված սուբյեկտի պահանջմունքներից՝ առանձնացվում են նյութական և հոգևոր արժեքները: Վերջիններիս մեջ էլ ինտելեկտուալ և բարոյական արժեքների հետ միասին դիտարկվում են գեղագիտական արժեքները: Եթե դիմենք արժեքի՝ որպես առարկաների հատկություն ընկալմանը, ապա գեղագիտական հիմնական արժեքները կլինեն գեղեցիկը և տգեղը, վեհը և ստորը, կատակերգականը և ողբերգականը: Այս հատկություններով օժտված և գնահատվող առարկաները նույնպես սուբյեկտի համար ունեն համապատասխան եզրույթով բնորոշվող գեղագիտական արժեք [150], [249]:

Մեծ է գեղագիտական արժեքների դերը մարդու կյանքում. դրանք նշանակալից են դարձնում մարդու կյանքը: Իսկապես, ժամանակակից մարդը անբաժան է գեղեցիկից. մարդու կենցաղում օգտագործվող ամենապարզագույն իրերից մինչև նրա բնակարանը, փողոցը, քաղաքը, երկիրը բնորոշող կարևորագույն արժեքներից մեկը գեղեցիկն է: Գեղեցիկով կարող է բնորոշվել բնության տեսարանը, սիրած աղջիկը, իր հայրենիքը պաշտպանող զինվորը… Ուրիշին դուր գալու ձգտումը նույնպես ստիպում է աղջկան գեղեցիկ երևալ. Նա ընտրում է գեղեցիկ շորեր, երկար կանգնում է հայելու առջև, սանրում է մազերը ու նայում իր գեղեցիկ աչքերին...: Եվ իր ընտրությունը կատարելիս մարդը միշտ առաջնորդվում է նաև գեղեցիկով:

Գեղեցիկի դրական արժեքի հետ միասին մարդու կյանքում հանդես է գալիս բացասական գեղագիտական արժեքը՝ տգեղը: Արիստոտելը նկատում է, որ արվեստի առարկան կարող է լինել և՛ գեղեցիկը, և՛ տգեղը: Բայց երբ տգեղը արդեն պատկերված է որպես արվեստի գործ, ապա այն գեղեցիկ է, քանի որ հնարավորություն է տալիս ճաշակել ճշմարտության իմացության ուրախությունը: (տես [133]): Առանց տգեղի նաև գեղեցիկը չի երևա, նշանակալից չի դառնա: Կանտը ասում է, որ եթե չկա համեմատությունը՝ այլ կին, ապա ցանկացած՝ թեկուզ և ամենատգեղ կին, եթե բնական արատ չունի, ժամանակի ընթացքում կարող է գեղեցիկ երևալ տղամարդու աչքին:

Գեղագիտական կարևոր արժեքներ են նաև վեհը, սարսափելին, ստորը, ողբերգականը, կատակերգականը, որոնք մեծ դեր են խաղում մարդու կյանքում:

Գեղագիտական արժեքները ավելի նշանակալից են դառնում դրանց առարկայական բնույթի մեջ: Հենց իրականության առարկաներն են, երևույթները, որոնք օժտված լինելով գեղագիտական այս կամ այն հատկությամբ, ձեռք են բերում գեղագիտական արժեք և դառնում են նշանակալից մարդու համար: Այս տեսակետից գեղագիտական արժեքները ընկած են արվեստի, նրա բոլոր տեսակների հիմքում: Ավելին՝ դրանց բացահայտումը արվեստի նպատակն է: Եվ պատահական չէ, որ արվեստի գործը՝ երգը, երաժշտությունը, գեղանկարը, քանդակը, թատերական ներկայացումը, կինոնկարը սովորաբար մենք բնութագրում ենք նաև այդ արժեքներով:

Գեղագիտական արժեքների դերը չի սահմանափակվում միայն արվեստով. դրանք դրսևորվում են կենսագործունեության բոլոր ոլորտներում. գեղեցիկ կամ տգեղ կարող է լինել մարդու վարքը, միտքը, խոսքը, նրա շրջապատի առարկաներն ու երևույթները:

Գեղեցիկը, վեհը, տգեղը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում: Գեղագիտական արժեքները իրենց դերն ունեն նաև գիտության մեջ, մասնավորապես, մաթեմատիկայում: Մաթեմատիկական գործունեությունից անբաժան են «գեղեցիկ թեորեմ», «գեղեցիկ խնդիր», «գեղեցիկ ապացուցում», «գեղեցիկ լուծում» և նմանատիպ գեղագիտական այլ բնութագրումներ: Ավելին, ինչպես նշում է կիբեռնետիկայի հիմնադիրներից մեկը՝ Ջ. Ֆոն Նեյմանը, մաթեմատիկան բոլոր ժամանակներում զարգացել է հիմնականում գեղագիտական մոտիվների շնորհիվ: Որպես ֆոն Նեյմանի այս տեսակետի հաստատում, տեղին է նշել, որ դժվար է մաթեմատիկայի և, հավանաբար, գիտության պատմության մեջ գտնել դեպք, երբ մեծի, հանճարեղի ծնունդը պայմանավորված է եղել մանկության և պատանեկության տարիներին ուրիշների կողմից նրանց համառ աշխատանքի պարտադրումով: Այնինչ, արվեստում, մանավանդ նրա կատարողական բնագավառում, նման պարտադրանքները շատ-շատ են եղել և, հավանաբար, առանց նման պարտադրանքների չէին ծնվի կատարողական արվեստի հանճարները:

Գեղագիտական արժեքների ձևավորումը, դրանց ճանաչումը, «գեղեցիկով ապրելու» սովորույթի արմատավորումը գեղագիտական դաստիարակության կարևորագույն խնդիրներից մեկն է:

Գեղեցիկը և տգեղը: Գեղեցիկի հետ մաթեմատիկայի և, մանավանդ, մաթեմատիկական կրթության առնչությունների հարցը քննարկվել է բազմաթիվ աշխատանքներում [94], [316], [384]: Սակավ են տգեղի հետ մաթեմատիկական կրթության փոխհարաբերություններին նվիրված աշխատանքները:

Ինչպես նշում է հանրահայտ մաթեմատիկոս Գ. Հարդին, «տգեղը մաթեմատիկայում տեղ չունի. աշխարհում չկա տգեղ մատեմատիկա» [442]: Եվ չնայած Հարդիի այս մոտեցմանը, տգեղը, այնուամենայնիվ, որոշակի տեղ է զբաղեցնում մաթեմատիկական գործունեության մեջ: Երկարաշունչ, ոչ ռացիոնալ ապացուցումները, հասկացությունների և թեորեմների ոչ հստակ ձևակերպումները և տգեղի դրսևորման այլ արտահայտություններ հետազոտողներին ստիպում են գտնել նոր մոտեցումներ, մաթեմատիկական նյութի գեղեցիկ արտահայտման կամ ներկայացման նոր հնարավորություններ:

Ինչ վերաբերում է մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացին, ապա այստեղ գեղեցիկն ու տգեղը ունեն նույնքան բազմազան և խորը դրսևորումներ, ինչքան մաթեմատիկայում: Ինչպես յուրաքանչյուր գործընթացում, մաթեմատիկայի ուսուցման մեջ նույնպես կարող է երևան գալ տգեղը: Եվ ուսուցման խնդիրներից մեկը այդ տգեղի վերացումն է: Իսկ ո՞րն է տգեղը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի մեջ:

Մ. Ա. Ռոդիոնովը և Ե. Վ. Լիկսինան, խոսելով մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում տգեղի երևան գալու հնարավորությունների մասին, որպես դրանց դրսևորման աղբյուր նշում են «հասկացությունների և թեորեմների ձևակերպումներում հանդիպող սխալները, խնդրի պայմանների ոչ կոռեկտությունը, հաշվումներում թույլ տրված տրամաբանական սխալները, ոչ ռացիոնալ և մեծածավալ լուծումները, սխալ կամ «խցանված» գծագրերը» [374, էջ 63]:

Մեզ թվում է, որ ընդհանրապես այստեղ տգեղ պետք է համարել այն, ինչ ունի գեղեցիկով արտահայտվելու, գեղեցիկ դառնալու հնարավորություն, բայց այդպիսին չի դարձել: Դա առաջին հերթին վերաբերում է մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշներին. երբ համաչափը պատկերված է անհամաչափ, ներդաշնակը՝ աններդաշնակ, չի երևում երևույթում առկա ռիթմը, չեն պահպանված օբյեկտի մասերի համամասնությունները, բացակայում է խոսքի հստակությունը, պարզությունը և տրամաբանական խստությունը, երբ կայունը դառնում է անկայուն, բազմազանությունները ունեն միասնաբար հանդես գալու հնարավորություն, բայց երևում են միայն մեկուսի: Մաթեմատիկական գեղեցիկի հատկանիշների այս խախտումներից յուրաքանչյուրը արժանի է առանձին դիտարկման: Ի՞նչ արժե, օրինակ, անհստակ, անտրամաբանական խոսքը. նրա կրողի հետ անհնար է նորմալ զրույց վարել: Բանաստեղծական անուրանալի շնորհքով օժտված իմ ընկերներից մեկի հետ ես այսպիսի զրույց ունեցա: «Չես կարող հարգել ինքդ քեզ, եթե դիմացինդ քեզ չի հարգում», ասաց նա: «Իսկ եթե դիմացինդ հիմարի մեկն է ու քեզ չի հարգում, դու է՞լ չպիտի քեզ հարգես», հարցրեցի ես: «Ի՜, հիմարը ինչ գործ ունի ինձ հետ փոխհարաբերություններում», ասաց իմ ընկերը: Իհարկե, նման զրույցը շարունակելն անիմաստ էր: Ընդհանրապես, անտրամաբանական խոսքը մարդ արարածի ամենատգեղ արտահայտություններից մեկն է, որի վերացմանը պետք է նպատակաուղղված լինի կրթությունը և առաջին հերթին՝ նրա կարևորագույն բաղադրիչներից մեկը՝ մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը:

Նույնքան կարևոր է մաթեմատիկական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշների խախտումից առաջացած տգեղի դիտարկումը կամ վերացումը: Այստեղ տգեղ է, երբ ուսուցիչը նյութի շարադրանքը չի ուղեկցում անկանխատեսելիության և անսպասելիության կախարդանքով: Տգեղ է, երբ խնդրի լուծման համար աշակերտից պահանջվող ջանքերը չեն գործադրվում, երբ բարդ ու դժվարի խոչընդոտը չի հաղթահարվում կամքի թուլության պատճառով, երբ բացակայում է հետաքրքրությունը, ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացության, ինտելեկտուալ որոնման, գտնելու պահանջը, երբ աշակերտը զրկվում է նմանատիպ գործողությունների արդյունքում զուտ մարդկային ոգուն հատուկ բերկրանքը ապրելու հնարավորությունից:

Տգեղը կարող է դրսևորվել նաև մաթեմատիկական օբյեկտների ներքին և արտաքին գեղագիտությունը երևան չհանելու պատճառով: Ավելի դյուրին է նկատել տգեղը իր արտաքին դրսևորման մեջ, և ավելի դժվար նրա ներքին էության հայտնաբերումը: Հարկ է նկատել, որ այստեղ տգեղը խանգարում է ոչ միայն մաթեմատիկական նյութի գեղագիտական ընկալմանը, այլև բուն ճշմարտության բացահայտմանը: Երկրաչափական շատ խնդիրներ, օրինակ, դժվար է լինում լուծել, եթե պահանջվող գծագրերը ճիշտ չեն գծագրվում, չեն պահպանվում երկրաչափական պատկերների մասերի միջև համամասնությունները, իսկ հատույթների վերաբերյալ խնդիրներում պահանջվող հատույթների ոչ ճիշտ կամ տգեղ գծագրումը բացառում է խնդրի լուծումը և այլն:

Վեհը: Գեղագիտական կարևոր արժեք է վեհը: Չնայած վեհի մասին հիշատակումները վերաբերում են մ.թ. առաջին դարին [364], որպես ինքնուրույն կատեգորիա այն հանդես է գալիս 18-րդ դարում [143]: Վեհին անդրադարձել են Ի. Կանտը [228], Ֆ. Շիլլերը [465], Բ. Լեվակը [151], Գ. Հեգելը [180], Գ. Չերնիշևսկին [457], Ն. Գարտմանը [179], Է. Բերքը [142], Ն. Բերդյաևը [141] և ուրիշներ: Գեղագիտական մտքի պատմության մեջ նկատվում է երկու մոտեցում գեղեցիկի և վեհի փոխհարաբերության նկատմամբ.

- վեհը գեղեցիկի բարձրագույն աստիճանն է, նրա հատուկ տեսակը, որ առանձնանում է իր մեծությամբ և հզորությամբ:
- վեհը հակադիր է գեղեցիկին և նրա ընկալումը առաջացնում է բացասական գեղագիտական հակազդում:

Վեհը մարդու կյանքում խաղում է շատ ավելի փոքր դեր, քան գեղեցիկը, և մաթեմատիկայի հետ վեհի փոխհարաբերությունները նույնպես մեծ չեն: Այնուամենայնիվ, դրանք նկատելի են ինչպես բուն մաթեմատիկայում, այնպես էլ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում: Առաջին հերթին, վեհ է մաթեմատիկայի ճարտարապետական ողջ կառույցը: Այն արտահայտվում է ձևերի բազմազանությամբ ու միասնականությամբ, սահմանափակությամբ ու անսահմանափակությամբ, ընդհատությամբ և անընդհատությամբ, կատարելագործվելու, զարգանալու, ծավալվելու և ընդլայնվելու ունակությամբ, անվերջության ընդգրկման հնարավորություններով, զարգացման ընթացքում մասերի տարանջատման, հեռացման և հեռավորության մեջ նորից իրար մոտենալու, ընդհանուրը դրսևորելու միտումով, բնության, աշխարհակառույցին համապատասխանելու, դրանց օրենքները արտահայտելու հնարավորություններով, ճշմարտության բացահայտման կարողությամբ ու անկարողությամբ, ընկալման պարզությամբ և բարդությամբ, իր հավերժությամբ ...

Սակայն մաթեմատիկայի ճարտարապետության մեջ վեհի նման ընկալման կարելի է հասնել միայն պրոֆեսիոնալ մաթեմատիկական գործունեության արդյունքում: Մինչդեռ հանրակրթական դպրոցի աշակերտի կողմից մաթեմատիկայի ուսումնասիրությունը համապատասխան ուսումնական առարկայի շրջանակներում ոչ մի չափանիշով հնարավոր չի այդպես գնահատել: Աշակերտների մի մասի մոտ թեպետ և առկա է մաթեմատիկայի նկատմամբ հարգանքը, բայց նրանք վախենում են դրանից: Այստեղ նրանց զգացումը, մոտ է վեհին, բայց շատ հեռու է աշակերտների այդ խմբի կողմից գիտակցվելուց, հակադիր է գեղեցիկին և առաջացնում է բացասական գեղագիտական հակազդում (այնպիսին, ինչպիսին կառաջացներ ուժեղ փոթորիկը՝ նրա տիրույթներում հայտնված մարդու մոտ, կամ ալեկոծված ծովը՝ իր ալիքների մեջ ընկածի մոտ, կամ էլ առյուծը՝ նրա դեմ հայտնվածի մոտ): Աշակերտների մի այլ խմբի համար, որոնք հասկանում են մաթեմատիկան, այն կարող է մոտենալ վեհին, եթե վեհը դիտենք որպես գեղեցիկի բարձրագույն աստիճան:

Սակայն վեհի զգացումը կարելի է ունենալ նաև մաթեմատիկայի ընդհանուր ճարտարապետության շինանյութի՝ նրա առանձին տարրերի դիտարկումից, որոնք ճիշտ է, չունեն ընդհանուր կառույցի ճարտարապետական վեհությունն ամբողջությամբ, բայց կրում են դրա դրոշմը:

Վերցնենք թեկուզ իրական թվերի բազմությունը կամ թվային ուղիղը: Այն առաջին հայացքից թվում է շատ պարզ, բայց բավական է նկատել, որ երկու կողմից անսահման շարունակվում է և առաջացնում է դժվար բացատրելի հարցադրումը՝ ի՞նչ է նշանակում դա: Այս շարքին են պատկանում նաև բնական թվերի անվերջության կամ, որ մի քիչ ավելի խորհրդավոր է, պարզ թվերի անվերջության հատկությունները: Բայց վերադառնանք թվային ուղղին. Այն անվերջ շարունակվում է, ձգտում է անվերջության ոչ միայն երկու կողմերից, այլև իր ցանկացած կետի շուրջ. Ուղղի կամայական կետի ցանկացած շրջակայքում կան անվերջ թվով կետեր: Ավելին, ուղղի ցանկացած հատված պարունակում է այնքան կետ, ինչքան նրանից թեկուզ և շատ մեծ մի այլ հատված: Եվ դա դեռ բոլորը չէ. Ուղղի ցանկացած հատված պարունակում է այնքան կետ, ինչքան ամբողջ ուղիղը: Ահա այստեղ կարելի է հիշել վեհին տված Կ. Գրոսի բնորոշումը՝ հզորը պարզի մեջ կամ, որ նույնն է՝ անչափ մեծը շատ փոքրի մեջ:

Իսկ ինչպե՞ս հաշվենք, օրինակ, շրջանագծի երկարությունը: Եթե մեկը մտածում է պարանը տեղավորել շրջանագծի երկարությամբ և, այնուհետև, այն բացելով, չափել նրա երկարությունը, ապա նա հեռու է մաթեմատիկական գործունեությունից. Ստացված մոտավոր գնահատականը կլինի բազմաթիվ սխալների արդյունք, որ նա թույլ կտա պարանը տեղավորելու և բացելու արդյունքում, և ստացված պատասխանն էլ չի համապատասխանի ճշմարտության բացահայտման մաթեմատիկական չափանիշներին: Սա դեռևս Անտիկ Հունաստանում հասկացել է Պլատոնի աշակերտ Էվդոքսը, ով առաջարկել է շրջանագծի երկարության հաշվման այսօրվա մեթոդներին մոտիկ մոտեցում. Անհաժեշտ է շրջանագծին ներգծել կանոնավոր բազմանկյուն, որի պարագիծը մոտավորապես հավասար կլինի շրջանագծի երկարությանը: Այնուհետև բազմանկյան կողմերը կրկնապատկելով՝ կստանանք նոր կանոնավոր բազմանկյուն, որի երկարությունը ավելի մոտ կլինի շրջանագծի երկարությանը և այս գործընթացը շարունակելով, մենք ավելի ու ավելի և ցանկացած ճշտությամբ կմոտենանք շրջանագծի երկարությանը, բայց երբեք չենք ստանա այն: Հետագայում, արդեն նոր ժամանակներում, Ի. Նյուտոնի և Գ. Լայբնիցի կողմից դիֆերենցիալ հաշվի ստեղծումից հետո, հնարավոր դարձավ Էվդոքսի մեթոդը զարգացնել և, կրկնապատկումների ընթացքը անվերջ շարունակելու միջոցով, ստանալ շրջանագծի ճշգրիտ երկարությունը: Իսկ անվերջ շարունակելու հնարավորություն տալիս էր դիֆերենցիալ հաշիվը:

Վերջավորից անվերջի անցման այդ ընթացքը, որ հատուկ է դիֆերենցիալ հաշվին, իր մեջ նույնպես պարունակում է վեհի հատկանիշներ: Սակայն պետք է նկատել, որ հանրակրթական դպրոցում, ինչպես այս հարցը, այնպես էլ ընդհանրապես դիֆերենցիալ հաշիվն ուսումնասիրելիս, սովորողները բավարարվում են ածանցման պարզագույն կանոնները անգիր անելով, ինչը նրանց հնարավորություն է տալիս պատասխանել միայն շտեմարանային հարցերի: Իսկ ածանցյալի (ինչո՞ւ միայն ածանցյալի) էությունը, նրա՝ որպես գեղեցիկի բարձրագույն հատկանիշ կամ որպես վեհ, ընկալումը դուրս է մնում սովորողների տեսադաշտից: Մինչդեռ ածանցյալի գաղափարը ի զորու է պատասխանելու այնպիսի նուրբ և դժվար հարցի, ինչպիսին, օրինակ, ողորկությունն է:

Պատմականորեն վեհի՝ որպես մաթեմատիկական դատողության առաջին դրսևորումը, հավանաբար, քառակուսու կողմի և անկյունագծի անհամաչափելիության փաստն է եղել, որ զարմացրել ու վախեցրել է Պյութագորասին և պյութագորականներին: Մաթեմատիկական այդ մեծ երևույթը նրանք չեն կարողացել ընկալել, աշխատել են թաքցնել ուրիշներից, բայց, ի վերջո, իրենց մեծագույն հայտնագործությունը՝ իռացիոնալ թվի գոյությունը ընդունել են որպես մեծագույն պարտություն: Եվ պահանջվել են դարեր, որպեսզի մարդկային միտքը ի զորու լինի հաղթահարել և գտնել դրա բացատրությունը:

Կամ արագավազ Աքիլեսի ու կրիայի, նետի շարժման անհնարինության և Զենոնի մնացած ապորիաները: Դրանք մարդկային մտքի առջև կանգնած և վեհին միտվող այնպիսի ստեղծագործություններ են, որոնք ժամանակ առ ժամանակ, մաթեմատիկայի զարգացմանը զուգընթաց, ստանում են որոշ, բայց ոչ լիարժեք բացատրություններ:

Վեհի զգացմունքը զուգորդվում է մաթեմատիկայի զարգացման պատմության մեջ դարաշրջան կազմող այնպիսի հայտնագործությունների հետ, ինչպիսիք են՝ Գ. Կանտորի ստեղծած բազմությունների նաիվ տեսությունը՝ իր հակասություններով, դրանց հաղթահարման նպատակով և Դ. Հիլբերտի կողմից ձևական մաթեմատիկական լեզվի ստեղծումը, հետագայում Կ. Գյոդելի թեորեմի ի հայտ գալը, որը ցույց է տալիս Դ. Հիլբերտի գաղափարի անիրագործելիությունը և այլն:

Վեհի՝ որպես գեղեցիկի բարձրագույն աստիճանի, ընկալմանը կարող է նպաստել հանրակրթական դպրոցում մաթեմատիկայի կիրառական ոլորտի ուսուցումը: Արքիմեդի կողմից Հերոն թագավորի թագի մեջ ոսկու պարունակության որոշման վերաբերյալ խնդրի լուծումը թերևս շատ գեղեցիկ է, բայց այն հավանաբար վեհ չի կարելի անվանել: Մինչդեռ Ի. Նյուտոնի կողմից մեխանկայի օրենքների մաթեմատիկական պարզ գրառումները անկասկած վեհ են: Դրանցում, իսկապես չափազանց պարզ մաթեմատիկական ձևերի մեջ, արտահայտվում են բնության հզոր օրինաչափությունները: Ահա այդ վեհն էր, որ Ի. Նյուտոնը համարեց Աստծո գոյության ապացույց: Վեհի նման դրսևորումներ կարելի է նկատել նաև բնագիտական այլ գիտությունների մեջ մաթեմատիկայի կիրառություններում: Ասվածից հետևում է, որ մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում որպես վեհի դրսևորման աղբյուր կարող են ծառայել միջառարկայական կապերը:

Վեհին բնորոշ են հետաքրքրությունը, զարմանքը, հիացմունքը, որոնք, սակայն, հաճախ ուղեկցվում են նաև անհանգստությամբ, անբավարարվածությամբ և նմանատիպ այլ բացասական հուզական ապրումներով:

Մեզ թվում է, որ վեհի զգացմունքը առաջացնող մաթեմատիկական նյութերի ուսուցումը թեև կարող է լիովին ընկալելի չլինել սովորողների մեծ մասի կողմից, բայց կարող է նրանց մոտ առաջացնել որոշակի հետաքրքրություն ինչպես այդ նյութերի, այնպես էլ մաթեմատիկայի և աշխարհընկալման նկատմամբ՝ ընդհանրապես:

Կատակերգականը: Թեև կատակերգականը բնորոշվում է որպես փիլիսոփայական-գեղագիտական կատեգորիա, որն արտահայտում է սոցիալական և գեղագիտական տեսակետից նշանակալից ծիծաղելին, սակայն այն որոշակիորեն տարբերվում է ծիծաղելիից: Միայն ֆիզիոլոգիական բնույթ ունեցող ծիծաղը, օրինակ, կատակերգական չէ (այդպիսին է, օրինակ, խտուտից առաջացած ծիծաղը): Իսկ մերկացնող սուր սատիրան և կատակերգականի որոշ այլ տեսակներ էլ ծիծաղելի չեն:

Փիլիսոփայության պատմության մեջ տարբեր մոտեցումներ են եղել ծիծաղելիի և կատակերգականի նկատմամբ: Պլատոնը գտնում է, որ ծիծաղելի են թույլ և վրեժ լուծելու ոչ ունակները, երբ նրանց ծաղրում են, հզոր մարդկանց տգիտությունը ատելի է, իսկ թույլերինը՝ ծիծաղելի, ծիծաղելի է մեծամտությունը այնտեղ, որտեղ այն ոչ-ոքի չի վնասում [352]: Կոմիկականում մեծ դեր ունի անսպասելիության գործոնը: Այսպես, Շ. Մոնտսկյեն նկատում է. «Երբ անճոռնին անսպասելի է, ապա կարող է առաջացնել որոշ տեսակի ուրախություն, անգամ՝ ծիծաղ» [320]: Միջնադարյան որոշ փիլիսոփաներ անդրադառնում են Աստծո և կատակերգականի փոխհարաբերության հարցին, ոմանք կասկածում են, օրինակ, Փրկչի ծիծաղելու ունակության վրա: Բ. Սպինոզան քննարկում է բարոյականության հետ կատակերգականի փոխհարաբերության հարցը: Նա գտնում է, որ «Ծիծաղը ուրախության արտահայտություն է, ինչի պատճառով այն բարիք է» (տես [400]): Գ. Լեսինգը գտնում է, որ կատակերգությունը չի կարող բուժել հիվանդությունը, բայց կարող է ամրապնդել առողջությունը: Ի. Կանտը ծիծաղը համարում է հակասությունների հաշտեցման միջոց և գտնում, որ ծիծաղելի բաներ հիշելն անգամ մեզ ուրախացնում է: «Ծիծաղը առանձնապես վարակիչ է այն դեպքերում, երբ հարկ է լինում լուրջ երևալ, և ավելի ուժեղ ծիծաղում են նրա վրա, ով ունի հենց լուրջ տեսք: Եթե մեկի վրա ծիծաղում եմ, ապա նրանից չեմ կարող նեղանալ անգամ այն դեպքում, եթե նա ինձ վնաս է պատճառում» [227, հ.2, էջ 216]:

Կատակերգականը բոլոր ժամանակներում մեծ տեղ է ունեցել մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում՝ հանդես գալով որպես այդ գործընթացի երևակայականով և լրջությամբ հագեցված էությունը կատակի, զվարճանքի տարրերով մեղմելու գործոն: Ընդ որում, այստեղ կատակերգականը դրսևորվում է զանազան ձևերով:

Մաթեմատիկայի և մաթեմատիկական գործունեության հետ կատակերգականի հանդես գալը մեծապես պայմանավորված է մաթեմատիկական դատողությունների անսպասելիության դրսևորմամբ, ինչը կապված է նաև վերջինիս մաթեմատիկական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշ լինելով: Ընդ որում, ինչպես նշում է Մենտեսկյեն, «երևույթին կատակերգական երանգ հաղորդելու համար անսպասելին պետք է լինի անճոռնի»: Մաթեմատիկայի պարագայում այդ անճոռնին կարող է լինել ակնհայտ սխալը, որն ստացվել է մաթեմատիկական «ճշգրիտ» դատողությունների միջոցով (ավելի անճոռնի բան մաթեմատիկայում դժվար է պատկերացնել): Հասկանալի է, որ նման դատողությունները իրենց մեջ պարունակում են քողարկված սխալներ, որոնք առաջին հայացքից դժվար է նկատել և որոնց հայտնաբերումն էլ բավարարվածություն, ուրախություն է հաղորդում: Այդպիսի իրադրություններ դիտարկվել են դեռևս անտիկ Հունաստանում, սոֆիստների կողմից, որոնք փորձել են «ապացուցել» ակնհայտ կեղծ դրույթներ:

Առաջիկայում՝ ապացուցումների բաժնում մենք կդիտարկենք սոֆիստական ապացուցումների օրինակներ, մասնավորապես՝ Զենոնի որոշ ապորիաներ, որոնք աշակերտների (ինչու միայն աշակերտների) մոտ առաջացնում են ինչպես զարմանք ու տարակուսանք, այնպես էլ զվարճանք ու ծիծաղ:

Բազմազան են նաև բուն մաթեմատիկայում և նրա ուսուցման գործընթացում կիրառվող քողարկված սխալ դատողությունները: Նման օրինակները, ինչպես նշվեց վերևում, հետաքրքրություն, աշխուժություն են հաղորդում դասավանդման գործընթացին, միաժամանակ, դրանք նպատակ ունեն ստուգելու սովորողների իմացության մակարդակը: [63]-[65] դասագրքերում յուրաքանչյուր պարագրաֆից հետո բերված են նման վարժություններ, որոնք վերաբերում են հենց այդ պարագրաֆում զետեղված նյութին: Բերենք մի քանի օրինակներ:

Ապացուցենք, որ 2=3: Իսկապես, ունենք 410=915 կամ 410+(25/4)=315+(25/4) և $2^2 2 \cdot 2 \cdot (5/2)+(5/2)^2=3^2 2 \cdot 3 \cdot (5/2)+(5/2)^2$: Այստեղից կստանանք $(25/2)^2=(35/2)^2$: Հետևաբար՝ 25/2=35/2 և, ուրեմն, 2=3:

Այժմ էլ ցույց տանք, որ 2 > 3: Իսկապես, ունենք ¼ > 1/8: Հետևապես՝ $(1/2)^2 > (1/2)^3$: Անհավասարության երկու մասերը լոգարիթմենք 10 հիմքով, կունենանք՝ $2\lg_{10}(1/2)>3\lg_{10}(1/2)$: Ստացված անհավասարության երկու մասերը բաժանելով $\lg_{10}(1/2)$ թվի վրա, կստանանք 2>3:

Մի՞թե զավարճալի չեն մեր ստացված արդյունքները: Իսկ դրանց հերքո՞ւմը կամ մեր դատողություններում սխալների հայտնաբերո՞ւմը: Դրանք իսկապես բավարարվածություն և հաճույք են պարգևում և մեծ հետաքրքրություն առաջացնում ոչ միայն սովորողների շրջանում:

Ընդհանրապես, խնդրի կամ հանելուկի առաջադրումը և լուծումը իր մեջ պարունակում է կատակերգականի երանգներ և դրանով նպաստում է կյանքի առօրեական տաղտուկի հաղթահարմանը: Սա գիտակցել են նաև մեր նախնիները և խնդիրների ու հանելուկների առաջադրման-լուծման պրակտիկան լայնորեն կիրառել իրենց կենցաղում՝ այն դարձնելով ավանդական խնջույքի կարևոր բաղկացուցիչ մաս: Եվ դա վերաբերում է հայկական իրականության սոցիալական բոլոր խավերին՝ սկսած թագավորից, վերջացրած սովորական գյուղացիով:

Այսպես, հայոց արքաների խնջույքը բաղկացած է եղել երեք մասից. Հացկերույթ, գինարբուք և հոգևոր մաս: Վերջինիս ընթացքում էլ կատարվել է խնդիրների ու հանելուկների վերը նշված առաջադրումը (տես [113]): Ինչպես նշում է Հ. Պետրոսյանը, «միջնադարյան հայ միտքը մեկ անգամ չէ, որ մշակութայինհոգևորբարոյական գաղափարների տարածման համար լայնորեն օգտագործել է ժողովրդական աշխարհընկալման, սովորույթների և ծեսերի զանազան կողմերը» (տես [113]): Նման մտահղացումների իրականացման համար օգտագործվել են ինչպես արդեն ստեղծված մշակութային արժեքները, այնպես էլ գրվել են հատուկ այդ նպատակներին միտված աշխատություններ: Այս տեսակետից հատկանշական են, օրինակ, Ներսես Շնորհալու հանելուկները և Մխիթար Գոշի, Վարդան Այգեկցու առակները, Անանիա Շիրակացու խնդիրները:

Հայտնի է, որ «առաջին եվրոպացի» Կառլոս Մեծը ժամանակակից Եվրոպայի հիմքերը դրեց իր հսկա կայսրության Ախեն մայրաքաղաքում ակադեմիայի հիմնադրմամբ, որը գլխավորելու համար անգլիական Յորք քաղաքից հրավիրեց ժամանակի մեծագույն մտածող գիտնական, աստվածաբան և պոետ Ալկուինին, իսկ վերջինս՝ այդ պաշտոնում առաջին ձեռնարկումներից մեկը եղավ «Մտքի մարզանքի համար» մաթեմատիկական հետաքրքրաշարժ խնդիրների խնդրագրքի կազմումը: Սակայն, դրանից մոտ երկու դար առաջ կիսանկախ և փոքրիկ Հայաստանում Անանիա Շիրակացին գրեց մաթեմատիկայի իր խնդրագիրքը: Այդ խնդրագրքի խնդիրները՝ իրենց հետաքրքրաշարժությամբ թեև չունեին Ալկուինի խնդրագրքի գեղագիտական հմայքը, սակայն անհամեմատ գերազանցում էին վերջինիս մաթեմատիկական բովանդակության խորությամբ և կրթական նշանակությամբ:

Շիրակացու խնդրագիրքը լրացվում է նրա ինը խրախճանականներով: Դրանք, իրենց հիմքում ընկած տրամաբանական կառուցվածքի բարդությամբ և խստությամբ, իրենց հնարամտությամբ դարձյալ զիջում են Ալկուինի խնդիրներին: Սակայն, ինչպես գրում է Հ. Պետրոսյանը, Շիրակացու խրախճանականները ունեցել են խրախճանքների ժամանակ մասնակիցներին առաջադրվելու նպատակ [113]: Շիրակացին ինքն էլ է հաստատում դա, խրախճանականների սկզբում գրելով. «Գրում եմ ձեզ համար խրախճանականներ, որպեսզի դուք [օգտվելով նրանցից], երբ կերուխումի ժամանակ զվարճանում եք և ցանկանում եք զվարճալի և ծիծաղելի մի բան ասել» [111, էջ 62]: Այսպիսով, Շիրակացու խրախճանականները կատարում էին նաև այլ արժեքների հետ ճշմարտական արժեքի արտածգման և փոխլրացման միջոցով հոգևոր արժեքների տարածման և արմատավորման գործառույթ, ինչը չի կարելի ասել Ալկուինի խնդիրների մասին: Նշեք նաև, որ մաթեմատիկական խնդիրների միջոցով նման գործառույթ էր իրականացվում արդեն Լուսավորության շրջանի Հոլանդիայում՝ քաղաքների սյուներին լուծման ենթակա մաթեմատիկական խնդիրներ փակցնելով: Նման խնդիրներից մեկի լուծումը նպաստեց, օրինակ, ֆրանսիական բանակի քսանամյա զինվոր Ռենե Դեկարտի հետագա առաջընթացին՝ գիտության ասպարեզում:

Վերադառնալով Շիրակացու խրախճանականների և, ընդհանրապես, խնդիրների արժեբանական գործառույթներին, նշենք, որ դրանց իրականացման նախադրյալները առկա են այդ խնդիրների բովանդակային տրամաբանական կառույցներում, նրանց կիրառական ֆոնի և շարադրանքի ոճի մեջ: Ինչպես նշում է Հ. Օրբելին, «Անանիայի խնդիրները զբաղեցնող են, կենսալից, պարզ: Խնդիրների թեմաները մեծամասամբ վերցված են Անանիայի շրջապատող կենցաղից, գործողության վայրը նրա հայրենի Շիրակն է և նրան հարևան վայրերը, գործող անձինք, եթե կոչվում են անուններով, տեղական իշխաններն են՝ Կամսարականները, այդ թվում և Անանիայի ժամանակակից Ներսեհը» [343] (տես նաև [112]):

Ավելացնենք, որ Շիրակացու խնդիրների և դրանց լուծման պարզության հետևում հաճախ թաքնված են տրամաբանական խորությունը և անսպասելիությունը, որոնք լինելով գիտական գեղեցիկի հատկանիշներ, լրացուցիչ գեղագիտական հմայք են հաղորդում մաթեմատիկական նյութին: Այս տեսակետից ուշադրության է արժանի Շիրակացու խրախճանականներից առաջինը: Ահա այն.

Ասա ընկերոջդ՝ «Ես կարող եմ իմանալ, թե դու որ ժամին ես ցանկանում ճաշել և քանի նվագ գինի ես ուզում խմել»: Եթե նա ասի քեզ, թե՝ «Իմացիր», ասա նրան. «Մտքումդ պահիր այն ժամերի քանակությունը, երբ ցանկանում ես ճաշել: Կրկնիր այն: Ավելացրու նրա վրա և հինգ: Բազմապատկիր հինգով, նրա վրա ավելացրու տասը և տասով բազմապատկիր: Նրա վրա ավելացրու խմած գինին՝ քանի նվագում ուզում ես խմել»: Երբ նա կատարի քո ասածները, այն ժամանակ հարցրու նրան, թե որքան է հաշված թվերի գումարը: եվ նա ինչ թվով որ ասելու լինի, նրանից միշտ դուրս հանիր 350, մնացած թվի մեջ տես, թե քանի հարյուրավոր կա, այն ժամին է լինելու նրա ճաշը, իսկ հարյուրից պակաս մնացած թիվը իմացիր, որ այդքան նվագ է նա գինի խմելու: Իսկ եթե ընկերդ անհմուտ մեկն է և գինի խմելու նվագը հարյուր լինի, պատասխանիր, որ անհնար է մեկ ժամում հարյուր նվագ գինի խմել» [111]:

Ժամանակակից մաթեմատիկական լեզվով՝ այստեղ Շիրակացին, ըստ էության, խնդրի մոդելավորումը հանգեցնում է երկու անհայտով անորոշ հավասարման, սակայն ոչ անպայման՝ ամբողջ գործակիցներով, ինչպես Դիոֆանտի մոտ է, և Շիրակացու լուծումն էլ ոչ թե կատարվում է նման անորոշ հավասարումների լուծման հայտնի եղանակներով, այլ մաթեմատիկական գիտելիքի և կիրառական ոլորտի հնարամիտ զուգակցմամբ: Նման մոտեցումը բացառիկ է. այն նմանը չունի մաթեմատիկական կրթության հետագա, նաև՝ ժամանակակից դրսևորումներում: Իսկ լուծման անսպասելիությունը, կատակերգականի հետ միասին, խնդրին հաղորդում է վերևում նշված գեղագիտական գրավչությունը:

Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում կատակերգականը հիմնականում դրսևորվում է խնդիրների բովանդակության ու դրանց լուծումների մեջ: Դրանք նաև ծիծաղի կարևոր աղբյուրներ են: Այս տեսակետից ուշագրավ են Գ Օստերի կողմից առաջադրված խնդիրները [346]: Դրանք առաջին հայացքից հեռու են հասարակության կողմից ընդունված բարոյական նորմերից ու մոտեցումներից և, թվում է, կարող են սովորողների մոտ ձևավորել բարոյական ոչ դրական որակներ: Ժամանակին որոշ հայ հեղինակներ իրենց մեթոդական փոքրիկ ձեռնարկում ներառեցին մի քանի նման խնդիրներ, և ֆեյսբուքյան սոցիալական ողջ ցանցը մի քանի օր անընդհատ զբաղված էր այդ հեղինակների «հակամանկավարժական» գործունեությունը դատապարտելով: Ես նույնպես կարդացի այդ թարգմանությունները և, որովհետև հումանիտար ոլորտում ճշմարտության որոնման լավագույն եղանակը պրակտիկան է, փորձեցի այդ խնդիրները քննարկել տարրական դպրոցի աշակերտ իմ Հայկ թոռան ու ընկերոջ հետ: Առաջին խնդիրը կարդալուց հետո ես անհամբեր սպասում էի Հայկի ռեակցիային: Նա զարմացած նայեց ինձ, նայեց, նայեց ու ... բռնկվեց մի վարակիչ ծիծաղով: Դե իր համար մաթեմի դասերը միշտ են հետաքրքիր, բայց խոստովանեց, որ եթե երբեմն-երբեմն դիտարկվեն նման խնդիրներ, ապա այդ դասերը կարող են հետաքրքիր դառնալ նաև ծույլիկների համար: Ահա դրանցից մեկը:

Քառասուն տատիկներ հրավիրված էին մի պապիկի ծնունդին: Նրանցից յուրաքանչյուրը նվեր տարավ երկու սանր: Քանի՞ սանր նվեր ստացավ այդ պապիկը, եթե նա ճաղատ էր:

2.3.2. Հանրահաշվի ուսուցման գործընթացի գեղագիտական գրավչությունը: [94, էջ 342-410]-ում մենք դիտարկել ենք մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի գեղագիտական գրավչության հարցը, որում որոշակի տեղ է հատկացված նաև հիմնական դպրոցի հանրահաշիվ ուսումնական առարկային: Հարցը քննարկվել է մի շարք տեսանկյուններից: Համառոտակի կանգ առնենք դրանց վրա՝ շեշտը դնելով միայն միջին դպրոցի հանրահաշվի վրա:

Մաթեմատիկական կրթության հիմնախնդիրների տեսանկյունից գեղեցիկի ձևավորման հարցը նախ դիտարկվում է մաթեմատիկայի գիտական և հանրակրթական բնագավառների փոխարաբերության դիրքերից: Ցույց է տրվում, որ թեև հանրակրթության մաթեմատիկայի կամ հանրահաշվի դասընթացները չեն համընկնում գիտական համապատասխան բնագավառների հետ, այնուամենայնիվ գեղեցիկի, մանավանդ ճարտարապետության, կերպարվեստի, երաժշտության, խաչքարագործության և արվեստի տարբեր բնագավառներում ունեցած իր կիրառություններով, մաթեմատիկան ունի հանրակրթական դասընթացում և ուսուցման գործընթացում դրսևորվելու լայն հնարավորություն [78], [80], [81], [83], [88] և այլն:

Մաթեմատիկական կրթության հիմնախնդիրներից մեկը մաթեմատիկայի գիտական և հանրակրթական բնագավառների փոխհարաբերության հարցն է. արդյո՞ք վերջինս առաջինի մի՝ թեկուզ և նեղ բաժինը չէ: Հանրության և ուսուցիչների մի ստվար զանգվածի մոտ համոզմունք կա այս հարցադրման դրական պատասխանի վերաբերյալ: Այս վտանգավոր մոտեցումը բերում է նաև մաթեմատիկական կրթության սխալ կազմակերպման, ինչը, ըստ էության, մաթեմատիկական կրթությունը հանգեցնում է ուսուցման միջոցով մաթեմատիկական գիտելիքների և կարողությունների կուտակման:

Մաթեմատիկան աշխարհընկալման, ճանաչողության հատուկ ձև է, բնության և այն ուսումնասիրող գիտությունների համար հետազոտման, օրինաչափությունների ստացման, հաստատման և հավաստման միջոց: Այդ առաքելությունները մաթեմատիկան իրականացնում է իր ճարտարապետական կառույցի միջոցով, որի առանձնահատկություններից մեկն էլ ձևական տրամաբանության հետ կառուցվածքային ձևերի ընդհանրությունն է և մտածողության համահունչ ընթացքը ճշմարտության բացահայտման գործընթացում: Նշված որակները մաթեմատիկան դարձնում են հիմնական թիրախ, որին պետք է միտվել կրթական այնպիսի խնդիրների իրագործման համար, ինչպիսիք են աշխարհընկալումը, աշխարահայացքի ձևավորումը, բնական գիտությունների տարրերի ուսումնասիրությունը, տրամաբանական մտածողության ձևավորումն ու զարգացումը: Վերջինս ավելի նշանակալից է դարձնում հանրակրթության մաթեմատիկական բաղադրիչը, քանի որ հանրակրթության մեջ ներառված չէ տրամաբանությունը՝ որպես ուսումնական առարկա: Ասվածից հետևում է, որ դպրոցական մաթեմատիկան, մաթեմատիկական կրթությունը պետք է դիտել ոչ թե սոսկ որպես մաթեմատիկայի ուսուցում, այլ մաթեմատիկայի ուսուցման միջոցով սովորողի կրթության կազմակերպում:

Իսկ ինչպիսի՞ն պետք է լինի այդ դեպքում մաթեմատիկական կրթության ճարտարապետական կառույցը: Ինչպես և ճարտարապետության մեջ ընդհանրապես, այստեղ նույնպես օգտակար է հետևել Մարկոս Վիթրուվիոսին և ամեն ինչ անել՝ հաշվի առնելով այդ ճարտարապետության ամրությունը, օգտակարությունը և գեղեցկությունը (տես [166] [88]): Մաթեմատիկական կրթության ամրությունը նրա բերած ճշմարտությունն է, ներառարկայական և միջառարկայական կապերի ուժը, օգտակարությունը՝ նրա տված բարիքը. «մաթեմատիկական կրթությունը բարիք է, որից իրավունք ունի օգտվելու յուրաքանչյուր մարդ» [413], [170], իսկ գեղեցկությունը արտահայտվում է նրա բովանդակային կառույցի, լեզվի, կիրառությունների գեղագիտական գրավչությամբ, դրանց մեջ գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշների և ուսուցման գործընթացում գիտական գեղեցիկի սուբյեկտիվ ամենալայն դրսևորումներով:

Եվս մեկ հարց. ինչպիսի՞ն պետք է լինի մաթեմատիկական կրթության հիմնական առանցքը՝ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացը: Հասկանալի է, որ այն զուտ մաթեմատիկայի դասագիրք լինել չի կարող. նրա կարևոր բաղկացուցիչ տարրերից մեկը կիրառական ոլորտն է կամ կիրառական ֆոնը, ինչը տարրալուծվում է դասընթացում ներառվող մաթեմատիկական բոլոր թեմաների մեջ: Միևնույն ժամանակ, մաթեմատիկայի ու նրա կիրառական ֆոնի այդ համադրական նյութի ուսուցումը պետք է նպատակաուղղված լինի սովորողների աշխարհընկալման, մտածողության և հոգեկան այլ գործընթացների, արժեքային ողջ համակարգի ձևավորմանը և զարգացմանը:

Գեղագիտական արժեքները նույնպես մաթեմատիկայում և համապատասխան ուսումնական դասընթացում դրսևորվում են տարբեր կերպ: Եթե մաթեմատիկայում գեղեցիկը կամ տգեղը կարող են հանդես գալ միայն որպես մաթեմատիկական այս կամ այն տեսությանը, հայտնագործությանը, թեորեմին, ապացուցմանը, խնդրին ու նրա լուծմանը տրված գնահատական, ապա մաթեմատիկական կրթության մեջ գեղեցիկը գիտելիքի, ճշմարտության կողքին կանգնած արժեք է, որին և հիմնականում միտված է ուսուցման գործընթացը:

Անշուշտ, մաթեմատիկայի դասընթացում ընդգրկված բուն մաթեմատիկական նյութը առանցքային նշանակություն ունի մաթեմատիկական կրթության կազմակերպման համար: Այդ նյութն է, որ հնարավորություն է տալիս ձևավորել մաթեմատիկայի դասընթացի կիրառական ոլորտը, իրականացնել ուսումնական այլ խնդիրներ, մասնավորապես՝ արժեքների, այդ թվում՝ գեղագիտական արժեքների ձևավորման խնդիրը: Եվ, հետևաբար, առաջանում է ևս մեկ հարց. ի՞նչ սովորեցնել կամ մաթեմատիկական ի՞նչ նյութ ընդգրկել մաթեմատիկայի դասընթացում: Սակայն այս հարցին մենք այստեղ չենք անդրադառնա (տես, օրինակ, [84], [94], [138]):

Գեղեցիկի ձևավորման խնդիրը դիտարկվում է նաև մաթեմատիկական կրթության նպատակների, գործառույթների, արդիականացման տեսանկյուններից: Հարցը քննարկվում է նաև կրթական ավտորիտար և հումանիստական հարացույցերի դիրքերից:

Հանգամանորեն կանգ է առնվում մաթեմատիկական հասկացությունների, թեորեմների, ապացուցումների և խնդիրների ուսուցման գործընթացում գեղեցիկի ձեվավորման հարցի վրա: Հասկացությունների պարագայում մենք, հետևելով Գ. Ի. Սարանցևին [387], դիտարկում ենք դրա ներմուծման տարբեր փուլերը՝ ներմուծման մոտիվացիան, սահմանումը, յուրացումը, կիրառումը և քննարկում գեղեցիկի դրսևորման հարցը այդ փուլերից յուրաքանչյուրում:

Թեորեմների պարագայում կանգ ենք առնում գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշների, մաթեմատիկայի ներքին և արտաքին գեղագիտության, ինչպես նաև թեորեմների ուսուցման մոտիվացիայի և կիրառության վրա:

Հարկ է նկատել, որ հետազոտողների մեծ մասը և, ընդհանրապես, մաթեմատիկայի ուսուցիչները սովորաբար մաթեմատիկայի գեղեցկությունը ընկալում են որպես մաթեմատիկական խնդրի գեղեցկություն: Այդ պատճառով խնդիրների ուսուցման գործընթացում գեղեցիկի ձևավորման հարցը քննարկելիս մենք նախ հատուկ կանգ ենք առնում մաթեմատիկական խնդրի գեղագիտական գրավչության վրա:

Խնդիրը և նրա լուծումը մարդու նպատակների իրականացման կարևոր փուլերից են: Յուրաքանչյուր մարդ, իր կենսագործունեության ընթացքում առնչվելով կենցաղային, մասնագիտական, ինտելեկտուալ ամենատարբեր խնդիրների, պետք է լուծի դրանք, ըմբռնի դրանց էությունը, պատկերացնի առկա միջոցները և մտքի լարման միջոցով հանգի որոշակի պատասխանի: Նման գործընթացը մաթեմատիկական գործունեության բնորոշ առանձնահատկություններից մեկն է: Ավելին, մաթեմատիկան սովորեցնում է լուծել խնդիրը: Մաթեմատիկական խնդիրը աչքի է ընկնում իր հստակությամբ, իսկ նրա լուծումը՝ հուսալիությամբ: Մաթեմատիկան կոչված է նաև մոդելավորել կյանքում և գիտության այլ բնագավառներում առաջացած զանազան խնդիրներ, այսինքն՝ մաթեմատիկայի լեզվով գրել կիրառական խնդիրը և, բնականաբար, նրա լուծումը ստանալ մաթեմատիկական մեթոդներով: Սա էլ մաթեմատիկայի օգնությունն է այլ բնագավառներում ծագած խնդիրները լուծելիս:

Յուրաքանչյուր խնդիր իր պարզության կամ բարդության, լուծման հեշտության կամ դժվարության և այլ հատկանիշների հետ միասին ունի նաև իր գեղեցկությունը: Իսկ ո՞րն է մաթեմատիկական խնդրի գեղեցկությունը, նրա գեղագիտական գրավչությունը: Մ. Ս. Յակիրը, որպես մաթեմատիկական խնդրի գեղեցկության բնութագրման հայտանիշեր, առաջարկում է անկանխատեսելիությունը, անսպասելիությունը, պարզությունը, հեղափոխական քայլի առկայությունը, լավատեսությունը, աշխատանքը [484]:

Անկանխատեսելիությունը հանդես է գալիս, երբ մարդ ի զորու չէ կռահելու խնդրի եզրակացությունը, իսկ անսպասելիությունը՝ երբ խնդրի պայմանները չեն թելադրում նրա եզրակացությունը: Նման դեպքերում երբեմն դժվար է լինում հավատալ խնդրում առաջադրված պահանջի ճշմարտացիությանը:

Անսպասելիության և անկանխատեսելիության լավագույն օրինակ է Դեզարգի թեորեմը (յուրաքանչյուր թեորեմ կարելի է ձևակերպել նաև որպես մաթեմատիկական խնդիր). նրա պայմաններից եզրակացության ստացումը զարմացնում է և գեղագիտական մեծ հաճույք պատճառում:

Բերենք անկանխատեսելի խնդրի մեկ այլ օրինակ: Նախորդ պարագրաֆում սինուսների թեորեմի էմպիրիկ ուսուցման վերաբերյալ մեր դատողություններում մենք դիտարկեցինք եռանկյան կողմերի և անկյունների համեմատականության խնդիրը. ինչպիսի՞ն է այդ համեմատականությունը: Ահա խնդիր, որի արդյունքը դժվար է կռահել, այսինքն՝ այն անկանխատեսելի է: Իսկ այդ արդյունքը նաև շատ հետաքրքիր է ու պարզ, ուրեմն՝ նաև գեղեցիկ է: Պարզվում է, որ ուղիղ համեմատական են եռանկյան կողմերը և նրանց դիմացի անկյունների սինուսները, այսինքն՝ եռանկյան մի կողմը այնքան անգամ է մեծ մյուսից, որքան անգամ մեծ է նրա դիմացի անկյան սինուսը մյուսի դիմացի անկյան սինուսից: Խնդրի պարզությունը վերաբերում է ինչպես նրա բովանդակությանը, այնպես էլ շարադրանքին: Հաճախ խնդիրը անհասկանալի է դառնում նրա ձևակերպման լեզվական անհարթությունների պատճառով, իսկ երբեմն էլ երկար-բարակ ձևակերպված պայմանների ետևում կռահելու բան չի մնում: Հասկանալի է, որ ավելորդ է խոսել նման խնդիրների գեղագիտական գրավչության մասին: Հեղափոխական քայլի առկայությունը, լավատեսությունը և աշխատանքը ավելի շատ վերաբերում են խնդրի լուծմանը: Օրինակ, լուծելով բազմանդամների արմատները նրա գործակիցների միջոցով արմատանշաններով արտահայտելու վերաբերյալ պատմական խնդիրը՝ Էվարիստ Գալուան օգտագործեց խմբի գաղափարը, ինչը հեղափոխական քայլ էր ողջ մաթեմատիկայում, և սկիզբ դրեց հանրահաշվի նոր բնագավառի, որն հետագայում կոչվեց Գալուայի անվամբ: Լավատեսությունը ի հայտ է գալիս խնդրի լուծման, նրա պատասխանի ստացման արդյունքում: Եվ որովհետև մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը հագեցված է խնդիրների լուծմամբ, այն նաև մեծապես նպաստում է սովորողի մոտ կյանքի նկատմամբ լավատեսական կողմնորոշման ձևավորմանը կամ պատճառ է դառնում լատատեսության: Մաթեմատիկական խնդրի լուծումը պահանջում է համառ ու հետևողական աշխատանք: Այդ պատճառով այն ձևավորում է աշխատասիրություն, ինչը, անշուշտ, պարունակում է նաև գեղագիտական հատկանիշներ:

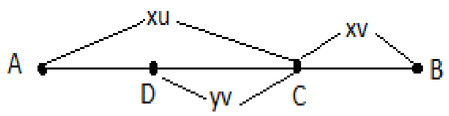
Հետաքրքիր բացահայտումներ են կատարվում մաթեմատիկական խնդրի գեղագիտական գրավչության հարցում, երբ այն դիտարկվում է որպես խաղ: Հետաքրքիր են նաև գեղեցիկի դրսևորումները խնդրի տարբեր գործառույթներում և, մանավանդ, նրա տարբեր տեսակներում [94, էջ 397-411]:

2.3.3. Հանրահաշվի ուսուցման մեթոդների գեղագիտական գրավչությունը: Մեթոդ հունարեն նշանակում է հետազոտման կամ ճանաչողության ուղի, ճանապարհ: Այն որոշակի նպատակի հասնելու կամ խնդրի լուծման համար անհրաժեշտ քայլերի, գործողությունների համակարգված համախմբություն է: Հանրահաշվի ուսուցման գործընթացում կիրառվում են ինչպես գիտական իմացության մեթոդները, այնպես էլ ուսուցման առանձնահատուկ մեթոդներ [84], [177-178], [188], [190], [193], [223], [241], [249], [255-256], [269], [291], [313], [323], [335], [338], [359], [361], [368], [382], [386], [388-392], [409], [415], [418-419], [421], [437], [450], [455], [476-477]:

Գիտական իմացության էմպիրիկ կամ փորձնական մեթոդները՝ փորձը, դիտումը, չափումը, հաշվումը, և ոչ փորձնական մեթոդները՝ նկարագրությունը, վերլուծությունը և համադրությունը, ընդհանրացումը և մասնավորեցումը, վերացարկումը և կոնկրետացումը, համեմատությունը և անալոգիան մարդու, հասարակության, բնության և աշխարհի ճանաչողության ընդհանրական մեթոդներ են, և լայնորեն կիրառվում հանդես են գալիս նաև հանրահաշվի ուսուցման գործընթացի տարբեր փուլերում: [94] աշխատանքում մենք հանգամանորեն քննարկել ենք այդ մեթոդներից յուրաքանչյուրի գեղագիտական գրավչության հարցը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում: Սովորաբար միևնույն թեորեմի ապացուցման կամ խնդրի լուծման ընթացքում անհրաժեշտ է լինում օգտվել տարբեր մեթոդներից, զուգակցել դրանք, երբեմն միևնույն մեթոդը կիրառել մի քանի անգամ և այլն: Ասվածը ցուցադրենք մեկ օրինակի վրա: Լուծենք հետևյալ խնդիրը:

A և B վայրերից իրար հանդեպ, համապատասխանաբար u և v $(u > v)$ արագություններով, շարժվում են երկու ավտոմեքենաներ: Ընդ որում, առաջինը հասնում է B և անմիջապես հետ է վերադառնում և հասնում երկրորդին՝ մինչև վերջինիս A հասնելը: Որքա՞ն ժամանակից հետո տեղի կունենան ավտոմեքենաների առաջին հանդիպումը, և որքա՞ն ժամանակ հետո՝ երկրորդ հանդիպումը, եթե վայրերի միջև հեռավորությունը s է:

Լուծումը: Նախ կատարենք խնդրի նախնական վերլուծությունը. ի՞նչ է տրված: Ունենք՝



A և B վայրերի հեռավորությունը	s
Առաջին՝ A-ից դուրս եկած մեքենայի արագությունը	u
Երկրորդ՝ B-ից դուրս եկած մեքենայի արագությունը	v
Առաջին ավտոմեքենայի արագությունը մեծ է երկրորդի արագությունից	u > v

A և B վայրերը պատկերենք կետերի տեսքով, իսկ նրանց միջև ընկած ճանապարհը՝ AB հատվածի տեքով (տես գծագիրը): Քանի որ մեզ ան-հրաժեշտ է որոշել ավտոմեքենաների շարժումը սկսելու պահից մինչև հանդիպումները նրանց ծախսած ժամանակները, ապա բնական կլինի նշել նաև հանդիպման վայրերը. Դիցուք առաջին հանդիպման վայրը C-ն է, երկրորդ հանդիպման վայրը՝ D-ն: Եթե ենթադրենք նաև, որ առաջին հանդիպումը տեղի է ունեցել ավտոմեքենաների դուրս գալուց x ժամանակ անց, իսկ երկրորդ հանդիպումը՝առաջին հանդիպումից y ժամանակ անց, ապա այդ ընթացքում ավտոմեքենաների անցած ճանապարհները կարտահայտվեն գծագրում նշված մեծություններով:

Այժմ համադրենք կատարված վերլուծության արդյունքները: Պարզ է, որ xu + xv = s: Հետևաբար՝ $x = \frac{s}{u+v}$: Այսպիսով, մենք հեշտությամբ որոշեցինք առաջին հանդիպման համար անրաժեշտ ժամանակը՝

$\frac{s}{\square + v}$:

Կատարենք ևս մեկ վերլուծություն. C կետից D հասնելու համար առաջին ավտոմեքենան անցնում է CB ճանապարհի կրկնապատիկը և CD ճանապարհը և, ըստ ենթադրության, այն դրա համար ծախսում է y ժամանակ: Ուրեմն, նշված ժամանակում կանցնի yu ճանապարհ: Այդ տվյալների համադրումից կստանանք՝ yu = 2xv + yv կամ y $= \frac{2xv}{u-v}$: Բայց մենք ունենին նաև $x = \frac{s}{u+v}$: Համադրելով այս հավասարությունը նա-խորդի հետ մենք կստանանք՝ y $= \frac{2sv}{u^2-v^2}$:

Հաջորդ վերլուծությունը թույլ է տալիս նկատել, որ ավտոմեքենաների երկրորդ հանդիպումը տեղի է ունեցել նրանց դուրս գալուց x + y ժամանակ անց: Կատարելով ստացված արդյունքների նոր համադրում, կստանանք՝

$$x + y = \frac{2sv}{u^2-v^2} + \frac{s}{u+v} = \frac{s}{u-v} :$$

Այսինքն՝ երկրորդ հանդիպման համար անհրաժեշտ ժամանակն է

$\frac{s}{u-v}$:

Բայց խնդրի լուծումը կամ մեր հետազոտությունը այստեղ կանգ չի առնում: Նկատենք, որ խնդրի տվյալները տրված են ընդհանրական՝ տառերի տեսքով, և թվում է, թե խնդիրը ստացել է իր լուծումը ներգրավված տառերի բոլոր թվային արժեքների համար: Օգտվելով գիտական իմացության կոնկրետացման մեթոդից, դիտարկենք այդ տառերի կոնկրետ թվային արժեքներ: Դիցուք՝ u = 6 կմ/ժ, v = 5 կմ/ժ, s = 11 կմ:

Այդ դեպքում C կետում ավտոմեքենաների առաջին հանդիպումը տեղի կունենա 1 ժամ հետո: Երկրորդ ավտոմեքենային մինչև A հասնելու համար կմնա անցնել ևս 6 կմ, ինչը այն կանի 6/5 ժամում: Իսկ առաջին մեքենան C-ից մինչև B կգնա և կվերադառնա 10/6 ժամում: Բայց ակնհայտ է, որ 6/5 < 10/6: Հետևաբար, առաջին ավտոմեքենան չի կարող հասնել երկրորդին՝ մինչև նրա A հասնելը: Ո՞րն է խնդիրը:

Բանն այն է, որ մեր սկզբնական վերլուծությունը մենք կատարեցինք որոշ թերություններով՝ ոչ լրիվությամբ: Խնդրի լուծման համար անհրաժեշտ էր, որ առաջին ավտոմեքենան երկրորդին երկրորդ անգամ հանդիպելու համար պետք է նրան հասներ մինչև վերջինիս A կետ հասնելը: Ահա այս պայմանը մենք հաշվի չենք առել: Իսկ դրա իրականացման համար պետք է երկրորդ հանդիպման վայրը՝ D-ն ընկած լինի A և B կե-տերի միջև: Համադրելով մեր գրառումները, կտեսնենք, որ վերջինս տեղի կունենա, եթե $\frac{s}{u-v} \cdot v < s$, կամ $v < \frac{u}{2}$:

Այս անհավասարումը համադրելով մեր ստացած արդյունքների հետ, կստանանք խնդրի վերջնական պատասխանը.

ա. Առաջին հանդիպումը տեղի կունենա $\frac{s}{u+v}$ ժամանակից հետո:

բ. Երկրորդ հանդիպումը կկայանա, եթե $v < \frac{u}{2}$, և հանդիպումը տեղի կունենա $\frac{s}{u-v}$ ժամանակից հետո:

Այժմ նորից անդրադառնանք կոնկրետացման՝ վերևում բերված օրի-նակին: Բնականաբար այն չի բավարարում $v < \frac{u}{2}$ պայմանին, և չի հանդիսանում խնդրի լուծում (այն կոնկրետացումն է այն խնդրի, որում չի պահանջվում երկրորդ հանդիպումը մինչև երկրորդի A վայրը հասնելը):

Խնդրի լուծման ողջ ընթացքը հագեցված էր ինտելեկտուալ որոնման, գտնելու, հայտնաբերելու, ջանքեր գործադրելու գեղագիտական գործողություններով, որոնց միջոցով դրսևորվում էին գեղեցիկի համապատասխան հատկանիշները և պայմանավորում լուծման գեղագիտական գրավչությունը: Բայց լուծմանը առանձնահատուկ հմայք է հաղորդում երկրորդ պատասխանի անսպասելիությունը, պարզությունը և առաջին պատասխանի հետ նրա համաչափությունը. այն ստացվում է առաջինից՝ նրանում հայտարարի + նշանը - նշանով փոխարինելով:

Գոյություն ունեն նաև զուտ հանրահաշվի ուսուցման տարբեր մեթոդներ, որոնց դասակարգման համար կիրառվում են տարբեր մոտեցումներ: Մաթեմատիկայի ուսուցման ժամանակակից բազմաթիվ մեթոդների շարքում առանձնացվում են էվրիստիկական, ծրագրավորված ուսուցման, պրոբլեմային ուսուցման, մաթեմատիկական մոդելավորման և այլ մեթոդներ: [94] աշխատանքում մենք հանգամանորեն կանգ ենք առել հանրահաշվի ուսուցման գործընթացում այդ մեթոդների և դրանց գեղագիտական գրավչության վրա:

2.4. Հանրահաշվի ուսուցումը և բարոյական արժեքների ձևավորման հիմնահարցը

2.4.1. Բարոյական արժեքները և դրանց ձևավորումը հանրահաշվի ուսուցման գործընթացում: Բարոյական արժեքները կազմում են մարդու արժեհամակարգի կարևորագույն մասը: Բարին ու չարը, սերն ու ատելությունը, հարգանքը, արժանապատվությունն ու պատիվը, առաքինությունն ու արատը, խիղճն ու ամոթը, կյանքի նպատակն ու իմաստը, պարտքը, ազատությունն ու երջանկությունը հիմնական բարոյական արժեքներն են, որոք բնութագրում են յուրաքանչյուր մարդու, նրա հոգևոր աշխարհը, նկարագիրը, էությունը: Այս արժեքները կազմում են նաև զանազան իմաստասիրական և կրոնական ուսմունքների անքակտելի մասը, եղել են մարդկության մեծ ուսուցիչների, անցյալի և ներկայի բարոյախոսների ուսումնասիրության հիմնական առարկաները: Այս պատճառով բարոյական արժեքների ձևավորումը դաստիարակության հիմնական խնդիրներից է, եթե ոչ հիմնականը: Անշուշտ, սովորողների բարոյական արժեքների ձևավորման գործում անհամեմատ ավելի մեծ են գրականության և պատմության կամ հումանիտար ցիկլի մյուս ուսումնական առարկաների հնարավորությունները, որովհետև հերոսության, հայրենասիրության, սիրո և բարոյական այլ որակների ձևավորման համար գրականությունը կամ պատմությունը կարող են դիմել գրական կամ պատմական ստեղծագործությունների, որոնցում առկա են նշված որակները կրող բազմաթիվ հրաշալի կերպարներ ու պատմական դեմքեր: Մինչդեռ մաթեմատիկայի ուսումնական նյութը նման՝ կերպարային մոտեցման հնարավորություններ չի տալիս: Բայցևայնպես, մաթեմատիկան նույնպես ունի բարոյական արժեքների ձևավորման իսկայական ներուժ, ինչը կարող է դրսևորվել ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական ձևերով [70-76], [314]: Հակիրճ անդրադառնանք վերևում նշված արժեքներից յուրաքանչյուրին և հանրահաշվի ուսուցման գործընթացում դրանց ձևավորման խնդրին:

Բարին և չարը: Մարդուն օգուտ բերող ցանկացած արժեք բարիք է: Չարիքը մարդկանց վնաս բերող արժեքն է [135, էջ 148]: Ա. Շվեյցերը բարիք է անվանում այն ամենը, ինչը ծառայում է կյանքի պահպանմանը և զարգացմանը, իսկ չարիքը, ըստ նրա, արգելակում է կյանքի զարգացումը, խորտակում է այն [459], [460]: «Բարի ասելով ես հասկանում եմ հոգատարությունը ուրիշների հանդեպ: Բարությունը մեծագույնն է բոլոր առաքինություններից և արժանիքներից» [140, էջ 377]: Ֆ. Բեկոնը գտնում է նաև, որ բարին հեշտությամբ ներում է վիրավորանքը, որովհետև նրա հոգին վիրավորանքից բարձր է և դրանից կորուստներ չի ունենում, երախտապարտ է փոքր նվերի համար, որովհետև գնահատում է հոգին և ոչ ունեցվածքը [140, էջ 378]:

Գոյություն ունեն տարբեր տեսակետներ այն մասին, թե արդյո՞ք իր բնույթով մարդը բարի է կամ չար: Լուսավորիչ փիլիսոփաները գտնում էին, որ մարդը բնությունից բարի է ծնվում և նրան չար են դարձնում հանգամանքները: Ֆ. Նիցշեն մարդուն բնութագրում է որպես չար կենդանի [331, էջ 421]: Ի. Կանտը նույնպես գտնում է, որ մարդը բնույթով չար է. նա հակված է չարություններ գործել [227, էջ 208]:

Կան նաև այլ մոտեցումներ բարու և չարի բնույթի մասին: Բայց բոլոր մոտեցումներում առկա է դաստիարակության միջոցով բարու իմացումը, բարին մարդկանց մոտ ձևավորելու և զարգացնելու գաղափարը: Ժողովրդական ասացվածքն ասում է՝ հետևիր բարի մարդկանց և դու կդառնաս բարի, այսինքն՝ բարության բարոյական որակը մեծապես պայմանավորված է կրթությամբ: Կրթության դերը բարության ձևավորման մեջ ընդգծում է նաև Ֆ. Լարոշֆուկոն: Նրա կարծիքով, հիմարը չի կարող լինել բարի, քանի որ դրա համար նրա ուղեղը փոքր է [266]: Ի. Կանտը նույնպես գտնում է, որ մարդու մեջ կան բարու նախադրյալներ, և դաստիարակության նպատակն է բարու այդ նախադրյալները զարգացնել, որպեսզի դրանք կարողանան իշխել չարի նկատմամբ ունեցած մարդկային հակվածության վրա [227]:

Մեծագույն բարիք է կրթությունն ընդհանրապես. այն առաջին հերթին հոգևոր հարստության, մարդկային արժեքների ձևավորման հիմնական ճանապարհն է, քանի որ հնարավորություն է տալիս հաղորդակցվել մարդկության ստեղծած մշակութային ժառանգության, արժեքների հետ, զինվել դրանցով, ինչը նաև ստեղծում է բարիք գործելու լայն հնարավորություններ: Մաթեմատիկական կրթությունը բարիք է որպես կրթության բաղկացուցիչ մաս: Այն բարիք է իր կիրառական նշանակությամբ, սովորողների մտածողության, ինտելեկտի ձևավորման ու զարգացման և այլ գործառույթների մեջ ունեցած դերով [88]: 1956 թվականին Ժնևում տեղի ունեցավ միջազգային համաժողով՝ նվիրված մաթեմատիկական կրթությանը, որն ընդունեց

«Համաժողովի երաշխավորությունը ժողովրդական կրթության նախարարներին միջնակարգ դպրոցներում մաթեմատիկայի դասավանդման մասին»: Այդ երաշխավորության սկզբնական դրույթներից մեկը հետևյալն է՝ «Մաթեմատիկական կրթությունը բարիք է, որի իրավունքը ունի յուրաքանչյուր մարդկային էակ՝ անկախ ազգությունից, սեռից, կարգավիճակից և զբաղմունքից» [413]:

Սովորողի մաթեմատիկական կրթության իրավունքը իրականացվում է հանրակրթության միջոցով: Եվ երբ կրթությունը ինչ-որ մեկի համար ձևով հասանելի լինելով, բովանդակությամբ հասանելի չի դառնում, ապա այն դառնում է չարիք. սովորողը դժկամությամբ է մասնակցում դասերին, ատելությամբ է լցվում առարկայի, անգամ՝ ուսուցչի նկատմամբ, նախանձում է լավ սովորող աշակերտներին և այլն: Նման դրսևորումները առանձնապես հատուկ են մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացին: Այստեղ մաթեմատիկական կրթությունը՝ նրա վատ կազմակերպելու արդյունքում կարող է հանդես գալ որպես չարի ձևավորման պատճառ:

Մաթեմատիկական կրթության միջոցով բարու ձևավորումը սերտորեն կապված է ճշմարիտի հետ: «... ճշմարտության որոնումը, այսինքն՝ նրա նկատմամբ սերը և հոգածությունը, ճշմարտության իմացումը, այսինքն՝ նրա ներկայությունը, և հավատը ճշմարտության նկատմամբ, այսինքն՝ նրանից հաճույք ստանալը կազմում են մարդկային բնավորության բարձրագույն բարիքը», նշում է Ֆ. Բեկոնը [140, էջ 352]: Մաթեմատիկան, հանրակրթության միջոցով նրա ուսուցումը ճշմարտության որոնման գործընթաց է, իսկ մաթեմատիկայից ստացած գիտելիքները անառարկելի ճշմարտություններ են:

Հանրահաշվի և, ընդհանրապես, մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի միջոցով բարու ձևավորման և չարը ծնող երևույթների արգելման խնդիրներին մենք անդրադարձել ենք [71] և [76, 8-29] աշխատանքներում: Այստեղ նշենք միայն, որ կոնկրետ բարու արժեքին կարելի է անդրադառնալ նաև հանրահաշվի դասագրքերում՝ հանրահաշվի լեզվի կառուցմանը նվիրված զանազան թեմաներում: Ահա օրինակներ մեր դասագրքերից:

«Հանրահաշիվ 7» դասագրքից [63, 13]:

Որտե՞ղ կդնեիք ստորակետը.

ա. Ատել պետք չէ սիրել, բ. Ուտել չի կարելի նիհարել,

գ. Քայլել պետք չէ վազել, դ. Գնդակահարել չի կարելի ներել:

«Հանրահաշիվ 8» դասագրքից [64, 127]:

Ճշմարի՞տ է, թե՞ կեղծ դատողությունը. բ. Իմ թշնամու թշնամին իմ թշնամին է,

ա.. Իմ բարեկամի բարեկամը իմ բարեկամն է, գ. Ինչ ցանես, այն կհնձես:

Սերը: Սերը մարդկային կյանքը, համակեցությունը կարգավորող, իմաստավորող հիմնական արժեքներից մեկն է: Բանաստեղծական ներշնչումների և ստեղծագործությունների հիմնական աղբյուրներից մեկն է սերը, որտեղ սակայն այն ներկայանում է որպես զգացմունք հակառակ սեռի նկատմամբ: Սակայն սիրո զգացմունքը կարող է դրսևորվել նաև բնության, արվեստի ստեղծագործության և ընդհանրապես գեղեցիկի նկատմամբ: Սերը միայնությունից դուրս գալու, մյուս մարդկանց հետ միավորվելու ձգտումն է: Այն մոտեցնում է մարդկանց, արժևորում է նրանց կյանքը:

Սերը ձևավորվում է ընտանեկան, կրոնական և ընկերային այլ միջավայրերում: Սիրո արժեքի ձևավորման խնդրում կարևոր դեր ունի նաև հանրակրթությունը: Իհարկե, իր այդ խնդիրը հանրակրթությունը իրականացնում է հիմնականում գրականության և հումանիտար ուսումնական այլ առարկաների միջոցով: Սակայն հանրահաշվի, առավել ևս՝ մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը նույնպես ի զորու է նպաստել խնդրի լուծմանը: Այդ հարցը մենք հանգամանորեն քննարկել ենք [76] և [94] աշխատանքներում: Այստեղ նշենք, որ սովորողների մոտ ինչպես բարու, անպես էլ սիրո որակի ձևավորմանը կարելի է ներգրավել մաթեմատիկական առանձին նյութերի դասավանդումը: Ահա նմանատիպ օրինակ-վարժություններ «Հանրահաշիվ-8» [64] դասագրքից, որոնք նաև առիթ են ստեղծում ուսուցչի համար խոսելու սրո և ատելության մասին:

Նշեք փոփոխականի արժեք, որի դեպքում դատողությունը ճշմարիտ է, և արժեք, որի դեպքում դատողությունը կեղծ է.

ա. Աղջիկը սիրում է իր մայրիկին, բ. Նա սիրում է իր հայրենիքը, գ. Նա իմ սիրելի գրողն է, դ. Նա իմ սիրելի նկարիչն է:

Ճշմարի՞տ է, թե՞ կեղծ դատողությունը.

ա.Աշակերտը սիրում է իր ուսուցչին: բ. Ցանկացած մարդ սիրում է իր ծնողին,

գ. Կա աշակերտ, որ ատում է դպրոցը: դ. Յուրաքանչյուրը սիրում է աշխատել:

Որոշեք դատողության ճշմարտային արժեքը.

Եթե մեկին սիրես, նա էլ քեզ կսիրի:

Եթե մեկին չսիրես, ապա նա էլ քեզ չի սիրի և այլն:

Նման վարժությունները մեծ հետաքրքրություն են առաջացնում աշակերտների մոտ, մաթեմատիկայի դասին հաղորդում նոր երանգ, նպաստում բարոյական արժեքների՝ տվյալ դեպքում՝ սիրո արժեքի ճանաչմանը և ձևավորմանը:

Արժանանապատվություն և հարգանք: Մարդը, որպես բանական էակ՝ բանականության կրող, բարձրագույն արժեք է: Այդ առանձնահատուկ արժեքը կամ արժանիքը, որ կոչվում է արժանապատվություն, ստիպում է ուրիշ բանական էակներին (և իրեն նույնպես) հարգել իրեն, ուրիշների հետ համեմատվելիս իրեն գնահատել միայն հավասարության հիմքով: Շատ դժվար է գտնել հարգանքի ճշգրիտ չափը. լինել սիրալիր և ոչ շողոքորթող, գտնել հաղորդակցման ճշգրիտ տոնը երեխաների, մեծահասակների, կանանց, ընկերային խմբերի, տարբեր ազգությունների, ռասսաների պատկանող մարդկանց հետ, նաև լինել իր նկատմամբ պահանջկոտ, բայց ինքնագնահատման մեջ ոչ ցածր և ոչ էլ բարձր:

Որպես արժանապատվության հիմքում ընկած արժեք, բանականության յուրաքանչյուր դրսևորում կարող է ուղեկցվել հարգանքի արտահայտությամբ: Եվ ինչքան նշանակալից է նման դրսևորումը, այնքան մեծ է հարգանքի արտահայտությունը: Այս տեսակետից մաթեմատիկան առանձնահատուկ տեղ է զբաղեցնում հանրակրթության ուսումնական առարկաների մեջ: Մաթեմատիկական խնդիրների լուծման կարողականությունը հաճախ դիտվում է որպես դպրոցականի բանականության, խելքի չափանիշ: Այդ պատճառով մտավորականներից շատերը, որ նույնիսկ մասնագիտությամբ կապ չունեն մաթեմատիկայի հետ, սովորաբար հպարտությամբ են հիշում դպրոցական տարիներին մաթեմատիկայում և, առանձնապես, նրա խնդիրների լուծման մեջ ունեցած հաջողությունները: Նպատակը, անշուշտ, իրենց նկատմամբ հարգանքի մի լրացուցիչ արտահայտություն տեսնելն է:

Հանրահայտ է մաթեմատիկական կրթության դերը սովորողների մտածողության ձևավորման և զարգացման գործում: Եվ քանի որ մտածողությունը կազմում է բանականության հիմքը, ապա հաջողությունը մաթեմատիկայի ուսուցման գործում մեծացնում է սովորողի նկատմամբ հարգանքը:

Իսկ եթե աշակերտը չի կարողանում յուրացնել մաթեմատիկական նյութը, լուծել առաջադրված խնդիրներն ու վարժությունները, ապա նա ենթարկվում է իր և ուրիշների աչքում նսեմանալու վտանգին, ինչը կնշանակեր նաև հարգանքի նվազում: Նման վտանգը հատկապես առաջանում է այն դեպքերում, երբ մաթեմատիկայի դասավանդման գործընթացը վեր է ածվում սոսկ մաթեմատիկայի ուսուցման, վարժությունների ու խնդիրների լուծման, ինչը պահանջում է մաթեմատիկական հատուկ ընդունակություններ, որով օժտված չեն բոլոր աշակերտները:

Նման դեպքերում մաթեմատիկական ընդունակություն ունեցող աշակերտը կարող է մեծամտանալ, արհամարել անընդունակին, չհարգել նրան, իսկ անընդունակի մոտ կարող է ձևավորվել թերարժեքության բարդույթ, ինչը հանգեցնում է սեփական արժանապատվության անտեսման, իր նկատմամբ հարգանքի նվազման և ընդունակ աշակերտների հանդեպ նախանձի:

Հարգանքի զգացմունքը սերտորեն առնչվում է սիրո զգացմունքի հետ: Այնպես, ինչպես ֆիզիկական աշխարհում մարմինները ներդաշնակության մեջ են գտնվում ձգողական և վանողական ուժերի հավասարակշռության շնորհիվ, բարոյական աշխարհում նույնպես մարդկանց միջև բարոյական ներդաշնակությունը իրականացվում է ձգողական և վանողական ուժերի հավասարակշռու-թյան միջոցով: Փոխադարձ սիրո սկզբունքը մարդկանց ձգում է, մոտեցնում իրար, իսկ փոխադարձ հարգանքի սկզբունքը՝ նրանց պահում է որոշ հեռավորության վրա: Եվ բարոյական աշխարհի ներդաշնակությունը, մարդկանց միջև բարոյական ներդաշնակությունը արդյունք է այդ ձգողական ու վանողական ուժերի՝ սիրո և հարգանքի հավասարակշռության (տես

[104]): Ինչպես արդեն նշվեց, մաթեմատիկայի իմացությունը մեծացնում է նրա նկատմամբ մարդկանց սիրո և հարգանքի զգացմունքները: Հետևապես, մաթեմատիկական կրթությունը նպաստում է մարդկանց միջև բարոյական ներդաշնակության հաստատմանը:

Հանրահաշվի և, ընդհանրապես, մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում արժանապատվության և հարգանքի բարոյական արժեքների ձևավորման խնդրին մենք հանգամանորեն անդրադարձել ենք [76] աշխատանքում: Այստեղ նշենք, որ հարգանքի արժեքի ձևավորումը կարելի է իրականացնել նաև մաթեմատիկական կոնկրետ նյութերի դասավանդման ընթացքում: Ահա նման վարժություններ «Հանրահաշիվ-8» դասագրքից [64]:

Որոշեք դատողության ճշմարային արժեքը.

Եթե մեկին հարգես, նա էլ քեզ կարգի:

Եթե մեկին չհարգես, նա էլ քեզ չի հարգի:

Խիղճ և ամոթ: Իր գործողությունները, վարքը, մտքերը, ցանկությունները քննադատաբար գնահատելու, չկատարված պարտքը կամ պարտականությանը գիտակցելու և դրա համար ապրումներ ունենալու ունակությունը մարդու խիղճն է [226,, 261]): Խիղճը ցույց է տալիս մարդու վարքի համապատասխանությունը նրա պարտքին: Կանտը գտնում էր, որ խիղճը «Աստծո ձայնն է մարդու մեջ»: Ամոթը սեփական անձի նկատմամբ տածած բարոյական զզվանքի զգացումն է, որն առաջանում է կոչման և վարքագծի միջև առաջացած խորը հակասության հետևանքով: Ամոթի զգացումն առաջանում է նաև այն դեպքերում, երբ մեր մտքերում, ապրումներում, վարքագծում դիտվում են երևույթներ, որոնք խորթ են մեր կոչմանը, մարդու բարոյական նկարագրին ընդհանրապես [76]: Դեմոկրիտեսը խիղճը դիտարկում է որպես ամոթի մասնավոր տեսակ՝ ամոթ ինքն իր հանդեպ: Նա գրում է. «Մի արա վատ բան, եթե անգամ մենակ ես: Սովորիր ավելի շատ ամաչել ինքդ քեզնից, քան ուրիշներից» [288]: Խիղճը և ամոթը մարդու բարոյական վարքի հիմնական ներքին կարգավորիչներն են: Դրանցով է պայմանավորվում մեր գործողություններին տված մեր գնահատականը: Դրանցով է նաև մեծապես պայմանավորված հասարակության բարոյական նկարագիրը:

Կատարված մեղքի համար խիղճը հակված է տանջելու մարդուն: Իսկ այդ տանջանքների մեջ մարդը ոչ միայն ատում է, զղջում՝ դատապարտում է իրեն, այլև աշխատում է ուղղել իր սխալը՝ քավել մեղքը:

Ընդունված է, որ խղճի և ամոթի արժեքները մարդու մոտ ձևավորվում են դաստիարակության միջոցով [201]: Մաթեմատիկայի դասավանդման գործընթացը նշված տեսակետից ունի երկակի ազդեցություն: Մի կողմից, մաթեմատիկական առաջադրանքների կատարումը պարտքի կատարման և շրջապատի սպասումների արդարացման լավագույն վկայությունն է: Մյուս կողմից, այն դժվար է իրականացնել, որի պատճառով աշակերտը գտնվում է խղճի և ամոթի զգացում ապրելու մշտական վտանգի առջև: Ասվածը ավելի է ընդգծվում մաթեմատիկական ունակություններով չփայլող աշակերտների պարագայում: Այստեղ ուսուցչից պահանջվում է մեծ փորձառություն և հնարամտություն աշակերտին՝ ուժերից վեր առաջադրանքներ հանձնարարելով, բարոյական լուրջ փորձության չենթարկելու համար: Անհրաժեշտ է հաշվի առնել չափորոշիչային պահանջները և դասը հարցնելիս, հարցադրումները առաջադրելիս և դասապրոցեսի այլ փուլերում անպայման նկատի ունենալ աշակերտի ունակությունները: Կարևոր է նաև դասի նյութը նախապես դասակարգել ըստ չափորոշիչային մակարդակների [66], [67], [68]:

Մաթեմատիկայի դասավանդման գործընթացը մեծացնում է մարդու վերլուծական կարողականությունները, ինչը, իր հերթին, հնարավորություն է տալիս ճիշտ գնահատել և քննադատաբար վերաբերվել սեփական գործողություններին, ունենալ կայուն համոզմունքներ և չշեղվել դրանցից: Բնականաբար, այս ամենը կնպաստեն այն բանին, որ մարդու խիղճը լինի մաքուր: Ավելին տես [76]-ում:

Պատիվ: Պատիվը բարոյական այն արժեքն է, որը հասարակության կողմից դիտվում է որպես մարդու արժանիք, արժանիքի չափ: Պատմականորեն պատիվը համարվել է ընկերային կոնկրետ խմբի բացառիկ արժանիք: Եղել է, օրինակ, ասպետի պատիվը, ազնվականի պատիվը և այլն: Ներկայումս պատիվը դիտվում է որպես մարդու ծառայությունների հասարակական ճանաչում: Այն մեծ մասամբ պայմանավորված է մարդու մասնագիտական կամ հասարակության համար արժեք ներկայացնող այլ գործունեությամբ: Այդ պատճառով մարդու պատիվը կապված է առաջին հերթին նրա մասնագիտական գործունեության հետ: Սովորաբար պատվաբեր են համարվում հասարակության համար ավելի մեծ արժեք ներկայացնող մասնագիտությունները: Յուրաքանչյուր մասնագիտություն հասարակությունը կարևորում է իր ընդունած կամ կարևորած արժեքներից ելնելով:

Հաճախ պատիվը պայմանավորվում է մարդու հասարակական դիրքով, նրա պաշտոնով. ինչքան բարձր են մարդու հասարակական դիրքն ու պաշտոնը, այնքան մեծ է հասարակության կողմից նրան տրվող պատիվը: Նման մոտեցումը պարունակում է որոշ կեղծ երանգներ, ինչն արտահայտվում է ավելի բարձր պաշտոնյայի ինքնագոհությամբ և նրա հանդեպ իր ենթակայի քծնանքով: Ինքնագոհություն և քծնանք՝ ահա բարոյական արատներ, որոնք ըստ Ֆ. Բեկոնի, հստակորեն ու անսխալ ցույց են տալիս, որ իրենց տեղում չեն և' պաշտոնյան, և' նրա ենթական [140, էջ 472]:

Չնայած պատիվը ավելի շատ հասուն մարդու արժանիք է, սակայն նրա ձևավորման հիմքերը դրվում են վաղ շրջանում, և մարդուն պատիվ բերող գործողությունները, որ հիմնականում պայմանավորված են նրա հասարակական, ընկերային, մասնագիտական դիրքով և գործունեությամբ, շատ բանով կախված են նրա ստացած կրթությունից: Այստեղ իրականացվող գործընթացները սկսվում են հանրակրթությունից, որի շրջանակներում մեծ է նաև մաթեմատիկական կրթության դերը: Ինչպես արդեն նշվել է, մաթեմատիկական կրթությունը կարևոր դեր ունի մտածողության, երևակայության, հիշողության, ուշադրության, կամքի և հոգեկան այլ երևույթների ձևավորման և զարգացման գործում [7], [14]: Իսկ այդ արժեքները նպաստում են յուրաքանչյուր մասնագիտության մեջ լավագույնս խորանալու, այն տիրապետելու գործընթացներին և, հետևապես, արժանանալու ավելի մեծ պատվի: Նույն նպատակին են ծառայում նաև մաթեմատիկական կրթության կիրառական հսկայական հնարավորությունները. բավական է նշել, որ ժամանակակից շատ մասնագիտություններ օգտագործում են ոչ միայն մաթեմատիկական գիտելիքներ, այլև մեթոդներ: Այնուհետև, մաթեմատիկական կրթությունը մարդուն տալով վերը նշված որակները, ինչպես նաև բարոյական, ճշմարտային, գեղագիտական արժեքների իմացության հնարավորություններ, նրան կարող է դարձնել խելոք, հավասարակշռված, ողջամիտ անհատականություն և, այդպիսով, արժանացնել հասարակության առանձնահատուկ պատվին:

Հարկ է նշել նաև, որ մաթեմատիկական ունակությունները մեծ մասամբ պայմանավորում են ապագա մասնագիտական ընտրությունը, և այդ պատճառով մաթեմատիկայի ուսուցման ուղղությամբ ունեցած հաջողությունները առանձնահատուկ պատվի են արժանացնում աշակերտին:

Ինչ վերաբերում է ինքնագոհությանը և քծնանքին, ապա դասավանդման գործընթացում առաջինը կարող է դրսևորվել ուսուցչի, իսկ երկրորդը՝ աշակերտի կողմից: Քծնանքի առկայությունը բարոյական անառողջ հարաբերությունների անսխալ վկայություն է, որ առանձնապես վտանգավոր է կրթական գործընթացում. ուսուցիչը պետք է բացառի իր հանդեպ աշակերտի նման վերաբերմունքի ցանկացած դրսևորում: Մյուս կողմից, ուսուցչի աշխատանքը այնքան դժվար է ու այնքան բարդ, որ տեղ չի կարող թողնել ինքնագոհության. իր աշակերտի մեծ կամ փոքր յուրաքանչյուր հաջողություն, որ նման դրսևորման առիթ կարող է ստեղծել ուսուցչի համար, նոր աշխատանքի, նոր հաջողությունների, նոր բարձունքների ու նոր նվաճումների սկիզբ կարող է լինել միայն, որ ուսուցչից պահանջում է լրացուցիչ ջանքեր, մանկավարժական նոր մոտեցումներ, նոր սխրանքներ: Ասվածը առավել տիպական է մաթեմատիկայի դասավանդումն իրականացնող ուսուցչի պարագայում, քանի որ մաթեմատիկական նյութը աչքի է ընկնում իր հագեցվածությամբ, խորությամբ, ընկալման դժվարությամբ:

Ազատություն: Ազատությունը սեփական գիտակցության (և ոչ թե արտաքին հանգամանքների, հեղինակությունների կամ ներքին բնական-հոգեկան մղումների ազդեցությամբ) կատարած կամ գիտակցված ընտրությունն է և այդ ընտրության համար պատասխանատվությունը իր վրա վերցնելու վճռականությունը: Ազատությունը մարդու անօտարելի իրավունքն է՝ վարվել իր կամքին համապատասխան:

Մեծ է դաստիարակության դերը ազատության արժեքի ձևավորման խնդրում: Այստեղ իր ուրույն դերն ունի նաև մաթեմատիկական կրթությունը: [74]-ում և [76, էջ 109-137]-ում մենք հանգամանորեն քննարկում ենք մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի կապը, նրա ներուժը ազատության հետ կապված այնպիսի արժեքների ձևավորման գործում, ինչպիսիք են անհրաժեշտությունը, անկախությունը, պատասխանատվությունը: Քննարկվում է մաթեմատիկական կրթության դերը Էպիկուրի քննարկած ազատության երեք տեսակներում՝ ազատություն տանջանքներից, վախից և հասարակությունից [288]:

Ազատությունը կարող է վերաբերել մարդու կյանքի և գործունեության տարբեր կողմերին: Այս տեսակետից առանձնացվում են ապրելու ազատությունը, մտածելու ազատությունը, որոշելու՝ վճիռ կայացնելու ազատությունը և գործելու ազատությունը [204]: Ապրելու և մտածելու ազատությունները կազմում են նաև Բուդդայի կենսափիլիսոփայության առանցքը: Բուդդան մարդու կատարելությունը տեսնում է տառապանքների և հաճույքների հաղթահարման, դրանցից ազատվելու մեջ [428]: [76]-ում հանգամանորեն քննարկվում է մաթեմատիկայի դասավանդման գործընթացի ազդեցությունը տառապանքների հաղթահարման Բուդդայի սահմանած ուղու ութ աստիճաններից յուրաքանչյուրի վրա: Այսպես, օրինակ, մեր շատ տառապանքներ ներկայանում են որոշակի մտքերի տեսքով, և տառապանքի հաղթահարումը այստեղ կայանում է այդ մտքերից ձերբազատվելու մեջ: Ճանապարհը այլ մտքեր մեջտեղ բերելն է կամ այլ բաների մասին մտածելը: Սակայն տառապանք պատճառող մտքերը, ինչպես իրավացիորեն նշում է Բուդդան, անընդհատ վերադառնալու, ներկայանալու սովորություն ունեն: Եվ դրանցից ազատվելու ճանապարհը միտքը այնպիսի հարցերի շուրջ կենտրոնացնելն է, որոնք պահանջվում են որոշակի լարում, մտքի երկարատև ու հետևողական աշխատանք, ունեն հետաքրքիր ու ոչ ակնհայտ լուծումներ և այլն: Հայտնի են բազմաթիվ դեպքեր, երբ անգամ բանտարկյալները իրենց անազատության պատճառած տառապանքը հաղթահարել են գիտական զանազան հարցերի, շախմատի շուրջ համառ մտորումներով, որոնք երբեմն տվել են մեծ ու հրաշալի արդյունքներ: Մտքի լարում, հետևողական ու երկարատև աշխատանք են պահանջում նաև մաթեմատիկական նյութերի յուրացումը և խնդիրների լուծումը, որոնք էլ հաջողությամբ կարելի է օգտագործել վերը նշված նպատակներով:

Հարկ է նկատել, որ քաղաքացիների մտածողության, հատկապես ինտելեկտի զարգացումը երբեմն ձեռնտու չէ իշխանություններին, որովհետև «ինքնուրույն մտածող մարդիկ հեշտ չեն ենթարկվում անհրաժեշտ ազդեցությունների և վարչարարական դժվարությունների աղբյուր կարող են դառնալ» [369]: Մեծ է մաթեմատիկական կրթության դերը մտածողության, ինտելեկտի, բարոյական, ներքին ու արտաքին ազատությունների ձևավորման մեջ: Ինչպես նշում է ակադեմիկոս Վ. Մ. Տիխոմիրովը, «Անկարելի է նշել մարդկային գործունեության որևէ տեսակ (իրավաբան, բնախույզ, բժիշկ, ...), որտեղ մասնագետը կարողանա յոլա գնալ առանց ճշգրիտ մտածողության: Իսկ ճշգրիտ մտածել սովորել կարելի է միայն ինտելեկտուալ արգելքներ հաղթահարելու միջոցով, միայն լուծելով խնդիրներ և ըմբռնելով թեորեմների ապացուցումներ» [413]: Ելնելով սսվածից՝ հանրակրթական դպրոցի հանրահաշվի իմ հեղինակած դասագրքերում առանձնացվում, ի ցույց են դրվում թեորեմների կամ հատկությունների ապացուցումների փաստարկումները կամ հիմնավորումները, վարժությունների համակարգում ներառվում են թեորեմների ապացուցումների փաստարկման կամ հիմնավորման պահանջներ [63]-[65]:

[74] և [76] աշխատանքներում դիտարկվում է նաև մաթեմատիկայի կրթական ներուժը բարոյական վարքի ազատության ձևավորման հարցում, մասնավորապես դրա Աստվածաշնչյան [8] և արիստոտելյան [132] մոտեցումներում:

Կյանքի իմաստը: Կյանքի իմաստը բարոյական բարձրագույն արժեքներից մեկն է: Միևնույն ժամանակ, այն ձևավորվում է մարդու ողջ կյանքի ընթացքում և հաճախ նրա կողմից չի էլ գիտակցվում: Սակայն կյանքը իմաստավորելու, կյանքի ճշմարիտ իմաստը, նպատակը գտնելու և իրագործելու նախադրյալները դրվում են մարդու կյանքի վաղ շրջանում, որտեղ մեծ է հանրակրթության դերը: Հանրակրթական առարկաների մեջ բարոյական այս որակի ձևավորման և դրսևորման գործում իր ուրույն տեղն ունի մաթեմատիկական կրթությունը:

[75] և [76] աշխատաանքներում մենք նախ հակիրճ անդրադառնում ենք մարդու կյանքում մաթեմատիկայի ունեցած դերին: Այնուհետև քննարկում ենք մարդու կյանքի նպատակների հարցը, այդ ուղղությամբ որոշ դասականների տեսակետներ [181], [461], ճանաչում գտած տեսակետը կյանքի երկու հիմնական նպատակների՝ ամուսնության և մասնագիտության ընտրության, դրանց փոխներգործությունը և մաթեմատիկայի

ուսուցման դերը հիմնական և ընդհանրապես նպատակների ընտրության մեջ: Առանձնահատուկ նշվում է մաթեմատիկական գործունեության նպատակային, նպատակամետ բնույթը և դրա շնորհիվ համապատասխան ազդեցությունը նպատակներ նախանշելու և իրագործելու խնդրի վրա: Բերվում են Լ. Տոլստոյի [416], Ա. Քամյուի [225], Գ. Ի. Գուրջիևի [198], Ա. Մասլոուի [285] և Ս. Լ. Ֆրանկի [433] իմաստասիրական մոտեցումները կյանքի իմաստի մասին, բացահայտվում է մաթեմատիկական կրթության ներուժը կյանքի իմաստի բարոյական արժեքը ձևավորելու գործում:

Երջանկություն: Երջանկությունը բարոյական բարձրագույն արժեք է, որին ձգտում է յուրաքանչյուր մարդ: Մարդու երջանկությունը կախված է բախտից, ունեցվածքից, հասարակական դիրքից և այլ հանգամանքներից: Սակայն իրավացի է պոետը, երբ գտնում է, որ յուրաքանչյուր մարդ իր երջանկության դարբինն է. մարդկային երջանկությունը մեծապես պայմանավորված է մասնագիտության ընտրությունից, ամուսնությունից, նպատակների նախանշումից և իրականացումից, մարդու կողմից իրականացվող և նրա կյանքը լցնող այլ հանգամանքներից: Նշանավոր իմաստասեր Ջոն Միլլը գտնում է, որ առանց երջանկության ապրելու ունակությունը երջանկության հասնելու ամենահուսալի զենքն է (տես [294]):

Իսկ ինչպե՞ս հասնել երջանկության, ինչպե՞ս լինել երջանիկ և արդյո՞ք ամեն մարդ կարող է երջանիկ դառնալ: Եվ կրթությունը, մասնավորապես, մաթեմատիկական կրթությունը երջանի՞կ է դարձնում մարդուն կամ նպաստու՞մ է նրա երջանկությանը: Ի՞նչ կարող է առաջարկել կրթությունը մարդուն՝ նրան երջանիկ դարձնելու համար կամ ի՞նչը նրանում կարող է պատճառ դառնալ մարդու ապերջանկության:

Երջանկության մասին եղել են ու կան բազմաթիվ կարծիքներ: Սովորաբար որպես երջանկություն է ընկալվում շատ, անչափ ցանկալի առարկայի ձեռք բերումից, նախանշված նպատակին հասնելուց առաջացած բավարարվածությունը կամ ուրախությունը [201]: Եվ քանի որ տարբեր մարդիկ ունեն տարբեր ցանկություններ ու նպատակներ, ապա երջանկությունն էլ նրանց կողմից ընկալվում է տարբեր կերպ:

Երջանկության տարածված պատկերացումները կապվում են ճակատագրի, բախտի հետ. երջանիկը ինչ-որ իմաստով նույնացվում է բախտավորի հետ: Ոմանք երջանկությունը կապում են հաճույքների, ուրիշները՝ հարստության հետ: Շատերը երջանկությունը տեսնում են իշխանության կամ փառքի մեջ: Ճակատագիրը, բախտը, հարստությունը, հաճույքները և իշխանությունը նպաստում են երջանկությանը, սակայն ոչ նրա համար պատճառ են և, մանավանդ, ոչ էլ նրա բովանդակությունը: Յուրաքանչյուր մարդու մեջ երջանկությունը և ապերջանկությունը գտնվում են իրար կողքի: Ոչ մեկը չի կարող խուսափել սխալներից, հիվանդություններից, մոտիկ ու թանկ մարդկանց կորստից, այն ամենից, ինչը և դառնում է ապերջանկության պատճառ:

Մյուս կողմից, հասարակությունը այնպես է կառուցված, որ բոլորի միաժամանակյա երջանկությունը անհնար է: Հաճախ մեկի երջանկությունը մյուսի ապերջանկության պատճառ կարող է լինել, երբեմն՝ պայմանավորված է հենց դրանով: Հիշենք թեկուզ սպորտային մրցումները կամ երաժշտական մրցանակաբաշխությունները: Եվ այս հակասությունը հաղթահարելու համար հասարակությունը պետք է գնահատի հանդուրժողականությունը, ինքնասահմանափակումը, համակերպումը և այլն: Նշանավոր իմաստասեր Ջոն Միլլը գտնում է, որ առանց երջանկության ապրելու ունակությունը երջանկության հասնելու ամենահուսալի զենքն է [294]: Չնայած ասվածին, այնուամենայնիվ կան բարոյագիտական մոտեցումներ, որոնք թույլ են տալիս գնահատել մարդկային երջանկությունը, մանավանդ՝ այն որակները, որոնք անհրաժեշտ են երջանկության հասնելու համար: Համաձայն դրանցից մեկի (տես, օրինակ, [135], [216]), երջանիկ լինելու համար մարդ պետք է ունենա ֆիզիկական առողջություն և նյութական բարեկեցություն (հարստություն), հոգևոր առողջություն և հոգևոր հարստություն, և այս ամենը շաղախված լինի սիրով ու ստեղծագործությամբ: Այսպիսով, տրվում է երջանկության անհրաժեշտության հետևյալ բանաձևումը:

Երջանկությունը

Նյութական կողմը		Հոգևոր կողմը		Շաղախը
Ֆիզիկական առողջությունը	Նյութական հարստությունը	Հոգևոր առողջությունը	Հոգևոր հարստությունը	Սեր և ստեղ-ծագործություն

[70] և [76] աշխատանքներում մենք փորձել ենք բացահայտել մաթեմատիկական կրթության դերը երջանկության բոլոր այս բաղադրիչների զարգացման մեջ:

2.4.2. Արդարության բարոյական արժեքի ձևավորումը հանրահաշվի ուսուցման գործընթացում: Անդրադառնանք [76] աշխատանքի՝ արդարությանը և առաքինությանը նվիրված բաժիններին: Ի տարբերություն նշած աշխատանքի, այստեղ կդիտարկենք ոչ թե մաթեմատիկայի, այլ միայն հանրահաշվի ուսուցման գործընթացը: Հարկ է նշել, որ միջին դպրոցում մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում բարոյական արժեքների ձևավորման խնդիրը հիմնականում լուծվում է հանրահաշվի ուսուցման գործընթացում:

Արդարությունը հանրակրթության մեջ ամենամեծ կիրառություն ունեցող բարոյական սկզբունքներից է. աշակերտի նկատմամբ ուսուցչի վերաբերմունքի մեջ նրա դրսևորման անհրաժեշտությունը զգացվում է դասապրոցեսի բոլոր փուլերում: Հարկ է նկատել, որ ուսուցչի ամենախոցելի բարոյական արատը աշակերտի նկատմամբ անարդար վերաբերմունքն է, որը երբեք չի ներվում վերջինիս կողմից: Միաժամանակ, ինչպես ուսուցչի անձնական օրինակը, այնպես էլ յուրաքանչյուր առարկայի դասավանդման բուն գործընթացը կարող են մեծապես ազդել արդարության բարոյական արժեքի ձևավորման վրա:

Մաթեմատիկայի դասավանդման գործընթացը ունի արդարության արժեքի ձևավորման առանձնահատուկ ներուժ, ինչը պայմանավորված է նաև արդարության արժեքի հետ ճշմարտային արժեքի խորը կապով. չէ՞ որ ճշմարիտ որոշումը միշտ ընկալվում է որպես արդար որոշում: Իսկ մաթեմատիկան, նրա դասավանդումը կարելի է դիտել որպես ճշմարտության բացահայտմանն ուղղված գործընթացների ամբողջություն:

Արդարությունը մարդկանց, մարդկային խմբերի միջև արժեքների բաշխումը կարգավորող հիմնական սկզբունքներից մեկն է: Արդար է այն մարդը, ով բարի է, կատարում է օրենքները և բարուն պատասխանում է բարությամբ: Անարդար մարդը չի հիշում իրեն արված բարին, խախտում է օրենքն ու այլոց իրավունքը: Բոլոր ժամանակներում արդարություն է համարվել այն, ինչը ընդհանուրին բարիք է բերում

[201]: Արիստոտելը գտնում է, որ արդարությունը առաքինություններից մեծագույնն է. այն կարծեք ուղղություն է տալիս մնացած առաքինություններին [132]:

Ժամանակակից նշանավոր իմաստասեր Ջոն Ռոլզը արդարությունը համարում է հասարակական ինստիտուտների առաջին առաքինությունը [377]: Ասվածից հետևում է, որ արդարությունը մեծ դեր ունի նաև կրթության կազմակերպման գործընթացում՝ որպես հասարակական ինստիտուտի առաջին առաքինություն: Սակայն ոչ միայն դա: Ուղղակի՝ կրթությունը կոչված է դաստիարակելու ապագա քաղաքացուն, նրա մեջ ձևավորելու բարոյական որակներ, որոնց մեջ է մտնում նաև արդարությունը:

Բաշխական և հավասարեցնող արդարությունները հանրահաշվի ուսուցման գործընթացում: Ընդունված է զանազանել արդարության երկու տեսակ՝ բաշխական արդարություն և հավասարեցնող արդարություն: Բաշխական արդարությունը կապված է հասարակության անդամների միջև նյութական (հարստություն, ունեցվածք և այլն) և հոգևոր (պատիվ, պարգևատրում, գնահատում, կոչումներ և այլն) արժեքների բաշխման հետ. այստեղ արդարությունն այն է, որ բաշխումը կատարվում է ըստ արժանիքների, ունեցած ծառայությունների: Հավասարեցնող կամ տեղափոխական արդարությունը կապված է փոխանակման հետ. այստեղ կողմերի արժանիքները հաշվի չեն առնվում և արդարության խնդիրը փոխանակման ընթացքում կողմերի հավասարեցումն է [201]: Ինչպե՞ս են դրսևորվում արդարության բաշխական և հավասարեցնող տեսակները կրթական գործընթացում:

Արդարության սկզբունքի բաշխական տեսակով կրթական արժեքների բաշխումը կատարվում է ըստ արժանիքի. ավելի ընդունակ և, հետևաբար, ավելի արժանի աշակերտը ստանում է ավելի շատ: Արդարության այս տեսակը դրսևորվում է, երբ խոսքը վերաբերում է նոր դասի հաղորդման, վարժությունների լուծման և, հատկապես, գնահատման գործընթացին, որտեղ ավելի լավ պատասխանող աշակերտը ստանում է ավելի բարձր գնահատական:

Ինչպես արդեն նշվել է, արդարության խախտումը՝ անարդարությունը, աշակերտի աչքում ուսուցչի վարքի մեջ ամենախոցելի բարոյական արատն է: Եվ եթե այն մասնակիորեն կարող է դրսևորվել բաշխական արդարության պարագայում, օրինակ՝

վերը նշված գործընթացներում, ապա ամբողջովին իր արտահայտությունն է գտնում արդարության հավասարեցնող տեսակում: Վերջինս ենթադրում է կրթություն ստացողների հավասարություն: Անկասկած, տարբեր ընդունակության տեր աշակերտները, ինչպես նշվեց վերևում, միևնույն դասի շրջանակներում չեն կարող ստանալ միատեսակ գիտելիքներ:

Միևնույն ժամանակ, գաղտնիք չէ, որ շատ ուսուցիչներ իրենց հիմնական ուշադրությունը կենտրոնացնում են տվյալ առարկայի նկատմամբ առավել մեծ հակում ունեցող և ավելի ունակ աշակերտների վրա, իսկ մնացած աշակերտները մնում են ուշադրությունից դուրս և, փաստորեն, չեն մասնակցում ուսումնական գործընթացին:

Ստացվում է որոշ հակասություն արդարության բաշխական և հավասարեցնող տեսակների միջև. պետության կողմից հանրակրթական դպրոցների նյութական հատկացումները կատարվում են ըստ աշակերտների թվի, այսինքն՝ բաշխումը կատարվում է առանց աշակերտների արժանիքները հաշվի առնելու, և մենք ունենք արդարության հավասարեցնող տեսակը, բայց իրականում բաշխումը կատարվում է աշակերտների արժանիքների հաշվառմամբ, այսինքն՝ գործում է արդարության բաշխական տեսակը:

Իհարկե, հակասությունը առաջին հերթին հետևանք է ուսուցման կազմակերպման ձևի՝ դասդասարանային համակարգի անկատարության, որտեղ իրականացվում է տարբեր ընդունակությունների տեր աշակերտների համատեղ ուսուցում: Բայց այդ համակարգից հրաժարվել անհնար է՝ առանց դրա փոխարեն այլ ձևեր առաջարկելու: Հետևապես՝ պետք է մտածել, թե ինչպե՞ս իրականացնել արդարությունը և նշված իրադրության պայմաններում համատեղել նրա բաշխական և հավասարեցնող տեսակները հենց դաս-դասարանային համակարգի պայմաններում: Երաժշտական և ֆիզմաթ դպրոցների և թեքումով դասարանների ստեղծումը, ավագ դպրոցներում հոսքային դասարանների, տասներկուամյա կրթական համակարգում ավագ դպրոցների խորացված ուսուցման համար նախատեսվող ծրագրերի իրականացումը միտված են այս խնդրի լուծմանը: Նույն խնդրի լուծմանն են միտված նաև հանրակրթության առարկայական չափորոշիչներում սովորողին ներկայացվող պահանջների երեք մակարդակները: Սակայն նույն հարցադրումները առաջանում են նաև այս նոր պայմաններում և խնդիրը, ըստ էության, մնում է բաց:

Նկատենք, որ արդարության բաշխական տեսակի (ավելի ունակ աշակերտը ստանում է ավելի շատ) և հավասարեցնող տեսակի (բոլոր աշակերտների հնարավորությունննները պետք է լինեն հավասար) միջև վերը նշված հակասությունը շատերը համարում են բնական: Նրանք գտնում են, որ ոչ բոլոր աշակերտներն են, որ կարող են սովորել տվյալ առարկան, օրինակ՝ մաթեմատիկա, որովհետև չունեն դրա համար անհրաժեշտ մաթեմատիկական ընդունակություններ:

Դպրոցներից մեկում մի ուսուցիչ կարծիք հայտնեց, որ ոչ բոլոր աշակերտներն են, որ կարող են նորմալ դաշնամուր նվագել սովորել, և նույն կերպ էլ՝ մաթեմատիկա կարող են սովորել ոչ բոլոր աշակերտները: Հետևապես՝ ճիշտ պետք է համարել այն, որ մաթեմատիկայի ուսուցիչը իր ուշադրությունը կենտրոնացնում է ունակ աշակերտների վրա: Ի՞նչ կարելի է ասել այդ կապակցությամբ:

Իհարկե, ճշմարիտ է դաշնամուրի և մաթեմատիկայի մասին ուսուցչի դատողությունը: Սակայն մաթեմատիկան, ի տարբերություն դաշնամուրի, ունի կրթական հսկայական ներուժ, ինչն էլ հիմք է ծառայում հանրակրթական դպրոցում «մաթեմատիկա» ուսումնական առարկայի ներգրավման համար: Բայց հանրակրթական դպրոցի «մաթեմատիկա» ուսումնական առարկայի նպատակը ոչ թե մաթեմատիկայի ուսուցումն է, այլ մաթեմատիկայի միջոցով սովորողների կրթությունը՝ հաշվի առնելով մաթեմատիկայի կրթական ներուժը: Եվ այդ կրթությունը նախատեսված է բոլոր աշակերտների համար: Այստեղ տեղին է մաթեմատիկայի, «մաթեմատիկա» ուսումնական առարկայի, սպորտի և ֆիզկուլտուրայի միջև հետևյալ զուգահեռների անցկացումը:

Մաթեմատիկա	«մաթեմատիկա» հանրակրթական ուսումնական առարկա
սպորտ	«ֆիզկուլտուրա» հանրակրթական ուսումնական առարկա

Սպորտը ընդգծում է մարդու ֆիզիկական հնարավորությունների սահմանները, պահանջում է ֆիզիկական ընդունակություններ, տվյալներ և մեծ լարում, ինչը ոչ բոլորի համար է հասանելի: Ֆիզկուլտուրան միտված է մարդու ֆիզիկական առողջության զարգացմանը, որի համար օգտագործվում են նաև սպորտային տարբեր ձևեր, այսինքն՝ ֆիզկուլտուրան մարմնակրթությունն է, նաև՝ սպորտի ներգրավմամբ:

Նույն կերպ էլ մաթեմատիկան պահանջում է վերացական մտածողության բարձր մակարդակ, ինչը հատուկ չէ բոլոր մարդկանց: Բայց կրթական համակարգում ներառված է «մաթեմատիկա» ուսումնական առարկան՝ նկատի ունենալով նրա լայն կիրառությունները, մտածողության զարգացման մեջ ունեցած ներդրումը և այլ կրթական արժեքներ: Եվ «մաթեմատիկա» ուսումնական առարկայի նպատակն էլ առաջին հերթին սովորողների իմացական գործընթացների՝ մտածողության, հիշողության, երևակայության, կիրառական կարողությունների զարգացումն է և այլ արժեքների ձևավորումը:

Իսկ եթե մաթեմատիկայի դասը վերածվում է մաթեմատիկա սովորելուն, ապա նույնն է, թե ֆիզկուլտուրայի դասը վերածվի սպորտային մարզանքի: Բնականաբար, երկու դեպքում էլ աշակերտների ճնշող մեծամասնությունը դուրս կմնա համապատասխան գործընթացից: Նման դասի հոգեբանական անառողջ ներգործության մասին նշվեց բարուն և չարին նվիրված բաժնում (տես նաև [55], [76]): Հետևապես, բուն գործընթացն էլ չի ծառայի իր հիմնական նպատակին և կխախտվեն արդարության գործառույթները, մասնավորապես՝ նրա հավասարեցնող գործառույթը:

Կրկնակի անարդարություն: Կա պարտավորությունների խախտման մի հատուկ տեսակ, որը իրավափիլիսոփայական մտքի մեջ կոչվում է կրկնակի անարդարություն: Կրկնակի անարդարությունը տեղի է ունենում, երբ ինչոր մեկը պարտավորություններ է վերցնում մյուսի հանդեպ և ոչ միայն խախտում է դրանք, այլև այդ պարտավորությունների հետ իրեն տրված արտոնություններն ու դիրքը օգտագործելով՝ մյուսին վնասում է հենց այն բանում, ինչից ինքը պետք է զերծ պահեր նրան:

Ա. Շոպենհաուերը կրկնակի անարդարություն է համարում, երբ սպանությունը իրականացնում է թիկնապահը, երբ գողությունը կատարում է պահակը կամ խնամակալը յուրացնում է իրեն վստահված սեփականությունը, երբ դատավորը կաշառվում է և այլն [469]:

Ճանաչված մանկավարժ Շ. Ամոնաշվիլին հետևյալ կերպ է գնահատում ուսուցչի կողմից աշակերտներին ուսումնական գործընթացից դուրս թողնելը. «աշակերտի հոգևոր աշխարհը նման է տաճարի, որը լքելը հավասարազոր է մանկավարժական հանցագործության» [127]: Սակայն նման վերաբերմունքը նաև ուսուցչի կողմից կրկնակի անարդարություն է հետևյալ պատճառով:

Կրթությունը կազմակերպող կողմը (պետություն, կազմակերպություն կամ անձ), ինչպես նշվեց վերևում, կրթական ոլորտին հատկացումներ է անում ըստ աշակերտների թվի, այսինքն՝ յուրաքանչյուր աշակերտ ստանում է ֆինանսավորում, և ուսուցիչն էլ մտնելով ծառայության՝ պարտավոր է յուրաքանչյուր աշակերտի հատկացնել իր ժամանակի, ուշադրության որոշակի՝ այդ աշակերտին հասանելիք չափաբաժինը:

Եվ եթե ուսուցիչը ինչ-որ աշակերտի անընդհատ պահում է ուշադրության կենտրոնում՝ մշտապես հարցնում է դասը, հրավիրում է գրատախտակի մոտ, իսկ մյուս աշակերտը ընդհանրապես դուրս է մնում ուսումնական գործընթացից, ապա այդ գործընթացն իրականացնող անձը՝ ուսուցիչը կատարում է գործողություններ, որոնք այդ աշակերտին զերծ են պահում իրեն հասանելիք արժեքները ստանալու իրավունքից, նրա մոտ առաջացնում է ատելություն այդ արժեքների նկատմամբ: Սա կրկնակի անարդարություն է, ինչը օտարում է աշակերտին կրթությունից և հաճախ նրա մոտ ատելություն է առաջացնում թե' կրթության, թե' ուսուցչի նկատմամբ:

Մաթեմատիկայի դասավանդման գործընթացում ուսուցչի նման վերաբերմունքը ավելի արագ է հասցնում «արդյունքի»: Իսկապես, մաթեմատիկական կառույցը, որ ուսումնասիրվում է համապատասխան ուսումնական առարկաների միջոցով, ունի կուռ տեսք, հասկացությունները սահմանվում են մեկը մյուսի միջոցով, յուրաքանչյուր պնդում օգտագործվում է հաջորդ պնդումների մեջ, և որոշ փաստերի կամ հասկացությունների չիմացությունը կարող է հանգեցնել առարկայի ուսուցման ձախողմանը ընդհանրապես:

Աշխարհագրություն ուսումնասիրելիս, օրինակ, աշակերտը կարող է Եվրոպա աշխարհամասի ուսումնասիրումը կատարել՝ Ամերիկա աշխարհամասի մասին տեղեկություն չունենալով: Իսկ մաթեմատիկայում սինուսի հասկացությունը, նրա հատկությունները չիմանալով՝ չի կարող անցնել կոսինուսի կամ տանգենսի ուսումնասիրությանը: Իսկ սրանք էլ ընկած են հետագա՝ եռանկյունաչափական ֆունկցիաներին նվիրված ողջ նյութի հիմքում: Եվ ինչքան էլ աշխատի աշակերտը, այդ նյութը՝ առանց սինուսի սահմանումը հասկանալու, չի կարող ըմբռնել: Նա, միևնույն է, պետք է վերադառնա սկզբին՝ իմանա սինուսի սահմանումը և հատկությունները: Հակառակ դեպքում ուսուցումը կկրի սերտողական բնույթ:

Անշուշտ, առանձին նյութերի միջև ներառարկայական կապը գոյություն ունի նաև աշխարհագրության և այլ ուսումնական առարկաների միջև, սակայն դրանք շատ ավելի անկախ են իրարից, քան մաթեմատիկայում ուսումնասիրվող նյութերը: Այդ պատճառով մաթեմատիկայի ուսուցման ընթացքում ուսուցիչը քիչ հնարավորություն ունի հետագայում լրացնելու նախկին թեմաների վերաբերյալ աշակերտի թերացումները: Եվ պատահական չէ, որ աշակերտների շերտավորումը ըստ գիտելիքների և ուսուցիչ-աշակերտ փոխհարաբերությունների, ինչպես նաև աշակերտների գիտելիքների բևեռացումը ավելի շատ նկատվում է հենց մաթեմատիկայի ուսուցման բնագավառում:

2.4.3. Առաքինության բարոյական արժեքի ձևավորումը հանրահաշվի ուսուցման գործընթացում: «Առաքինություն» հունարեն՝ «arte» նշանակում է կատարելություն, իսկ լատիներենում առաքինության համար գործածվում է «virtu» բառը, որ նշանակում է արի, քաջ (դրա հիմքում ընկած «vir» բառը նշանակում է ՝տղամարդ’): Վերածննդի շրջանում «virtu» բառի նշանակությունը մոտենում է առաքինության հունական նշանակությունը. «virtuozo» ը իր գործի մեջ կատարելության հասած արվեստագետն է: Ներկայումս «առաքինություն» եզրը ունի երկու իմաստ: Մի կողմից, այն գործածվում է բարոյականությանը համարժեք իմաստով: Այս տեսակետից ՝առաքինի «մարդ» և «բարոյական մարդ» արտահայտությունները ունեն նույն իմաստը: Այս ընդհանրական իմաստով առաքինությունը հետևյալ կերպ է բնութագրել Ի. Կանտը. «առաքինությունը իր պարտքը ճշգրտորեն կատարելուն ուղղված մտածելակերպ է» [226, հ.4]:

Մյուս կողմից, առաքինությունը բարոյական կոնկրետ, դրական որակ է, որի հակառակ երևույթը արատն է: Եվ առաքինությունները նույնքան տարատեսակ են, ինչքան մարդկային գործունեությունը: Առաքինություններ են ազնվությունը, արդարությունը, անկեղծությունը, կարեկցանքը, մեծահոգությունը, քաջությունը, առատաձեռնությունը, ... Արատներ են դրանց հակառակ երևույթները՝ անազնվությունը, անարդարությունը, կեղծավորությունը, անգթությունը, փոքրոգությունը, վախկոտությունը, ժլատությունը, ... Եվ մարդը կարող է բարոյական այս որակներից մեկով լինել առաքինի, իսկ մյուսով՝ արատավոր: Նա կարող է լինել ազնիվ, բայց վախկոտ, քաջ ու անազնիվ, անկեղծ, բայց ժլատ, առատաձեռն ու անարդար և այլն:

Եթե առաքինությունը որպես բարոյականության համարժեք հասկացություն, մարդու բնավորության ընդհանրական ցուցանիշ է, ապա որպես բարոյական կոնկրետ որակ հանդես է գալիս որպես նեղ, անձնային որակ: Եվ այս երկրորդ մոտեցումը հնարավորություն է տալիս ավելի հանգամանորեն ուսումնասիրել մարդկային բարոյականությունը, նրա հակասականությունը, ավելի արդյունավետ իրականացնել բարոյական դաստիարակության խնդիրները:

Առաքինության մասին առաջին ուսմունքը զարգացրել է Արիստոտելը [132]: Նա առաքինությունը դիտում է որպես երկու ծայրահեղ արատների՝ լիառատության և պակասության միջև ընկած ոսկե միջին: Այսպես՝ վտանգի հանդեպ խիզախությունը խելացնորության և վախկոտության միջինն է, նյութական բարիքների հանդեպ առատաձեռնությունը՝ շռայլության և ժլատության միջինը, պատվի և անպատվության հանդեպ սնափառությունը՝ անբարտավանության և նվաստության, ճշմարտախոսությունը՝ պարծենկոտության և կեղծավորության, սրամտությունը՝ խեղկատակության և անտաշության կամ բռիության, ընկերասիրությունը՝ անհաշտության, կռվասիրության և քծնողության, ամաչկոտությունը՝ անամոթության և երկչոտության և այլն: Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում արիստոտելյան առաքինությունների ձևավորման խնդիրը ներկայացված է Հավելված 5-Ա-ում:

Բարոյագիտության պատմության մեջ առանձնացվում են առաքինությունների երկու հիմնարար խմբեր՝ Հին Հունաստանի «արմատական» առաքինությունները, որոնք են՝ չափավորությունը, խիզախությունը, իմաստությունը, արդարությունը և քրիստոնեության «աստվածաբանական» առաքինությունները՝ հույս, հավատ և սեր [201]: Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում արմատական առաքինությունների ձևավորման խնդիրը ներկայացված է Հավելված 5-Բ-ում (տես նաև [72-73]]):

Վ. Ս. Սոլովևը ինչպես արմատական, այնպես էլ աստվածաբանական առաքինությունները չի համարում ինքնին այդպիսիք. դրանք բարոյական նշանակություն են ձեռք բերում իրենց կիրառման առարկայից կախված: Օրինակ, համարձակորեն կատարված հանցագործությունը չի կարելի խիզախություն համարել կամ թշնամուն հայտնած գաղտնիքը՝ ազնվություն [399]: Նա մարդու առաքինությունների հիմքում դնում է երեք արժեքներ՝ ամոթը, կարեկցանքը, երկյուղածությունը: Ամոթը արտացոլում է մարդու վերաբերմունքը ցածրի, բնական հակումների, ընդհանրապես բնական էության նկատմամբ. մարդը ամաչում է իր վրա դրա ունեցած իշխանությունից և դրան ենթարկվելուց: Կարեկցանքը արտացոլում է մարդու վերաբերմունքը մյուս մարդկանց և կենդանի արարածների նկատմամբ, և կարեկցանքը արտահայտվում է նրանում, որ մարդը վերապրում է ուրիշի տառապանքը, ցույց է տալիս իր համերաշխությունը նրա հետ: Երկյուղածությունը արտացոլում է մարդու վերաբերմունքը բարձրյալի նկատմամբ: Բարձրյալից մարդը չի կարող ամաչել, նրան չի կարող կարեկցել, բայց կարող է խոնարհվել նրան՝ ցույց տալով իր բարեպաշտությունը: Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում սոլովյովյան առաքինությունների ձևավորման խնդիրը ներկայացված է Հավելված 5-Գ-ում:

Տասնութերորդ դարի ԱՄՆ –ի հանրահայտ քաղաքական գործիչ, գրող և գիտնական Բ. Ֆրանկլինը որպես կյանքի հիմնական հայտանիշ համարում է հաջողությունը և, այդ պատճառով, ըստ նրա, առաքինությունը պետք է չափել հաջողության հասնելու համար նրա օգտակարությամբ [434]: Այդ տեսակետից ելնելով, նա առանձնացնում է մի շարք առաքինությունները, իսկ աշխատասիրությունը, դրամական պարտավորությունների ճշգրիտ կատարումը և խնայողությունը համարում է հիմնական:

Ֆրանկլինյան առաքինություններին և մաթեմատիկայի ուսուցման ընացքում դրանց ձևավորման խնդրին մենք անդրադարձել ենք Հավելված 5-Դ-ում:

2.5. Հանրահաշվի ուսուցումը և սովորողների հոգեկանի ձևավորման ու զարգացման հիմնահարցը:

Սովորողի հոգեկան գործընթացների վրա մաթեմատիկայի ազդեցության և դերի խնդիրները ուսումնասիրել են Ջ. Բրուները, Վ. Ա. Կրուտեցկին. Յ. Ի. Սլեպկանը, Ն. Ա. Մենչինսկայան, Ն. Վ. Մետելսկին, Վ. Ն. Օսինսկայան, Ս. Լ. Ռուբինշտեյնը, Լ. Մ. Ֆրիդմանը, Պ. Ֆ. Էսաուլովը, Պ. Յա. Գալպերինը, Լ. Բ. Իտելսոնը, Վ. Ի. Զիկովան: Հարկ ենք համարում հատուկ ընդգծել, որ առանձին հոգեկան հատկանիշների զարգացմանն ուղղված վարժություններն ու մեթոդական հնարքները չափազանց արդյունավետ են և օժանդակում են նաև բուն մաթեմատիկայի ուսուցողական խնդիրների լուծմանը:

2.5.1. Հանրահաշվի ուսուցման գործընթացի հոգեբանական բաղադրիչը կրթության հումանիստական հարացույցի պայմաններում: Սովորաբար հասարակական կյանքի տարբեր ոլորտներում համակեցության անձնակողմնորոշիչ, հումանիստական մոտեցումները հակադրվում են ավտորիտար, հրահանգային մոտեցումներին: Ինչպե՞ս են դրանք դրսևորվում հանրակրթության մեջ և, մասնավորապես, հանրահաշվի ուսուցման գործընթացում: Նախ նկատենք, որ կրթությունն ինքը՝ որպես ուսուցչի և աշակերտի փոխհարաբերություն, որպես մեծահասակի և փոքրահասակի, իմացողի և չիմացողի, վերադասի և ստորադասի, կարգադրողի և ենթարկվողի հակված է ավտորիտար դրսևորման և ավտորիտար ընկալման՝ ինչպես ուսուցչի ու աշակերտի, այպես էլ կրթական և հասարակական միջավայրի կողմից: Այստեղ ուսուցիչը գործունեության սուբյեկտն է, իսկ աշակերտը դիտվում է որպես օբյեկտ, և նրանց փոխհարաբերությունները ըստ էության հանգում են հրահանգների և դրանց կատարման, որտեղ հաշվի չեն առնվում աշակերտի սուբյեկտիվության դրսևորման հնարավորությունները: Այլ՝ հակադիր է պատկերը հումանիստական հարացույցի պայմաններում: Այստեղ աշակերտը նույնպես գործունեության սուբյեկտ է: Իսկ «Լինել սուբյեկտ, նշանակում է լինել սեփական պատմության կերտողը, իր կյանքի ուղու, բախտի տերը. նախաձեռնել և իրագործել պրակտիկ գործունեություն, շփում, վարք, իմացություն և զուտ մարդկային ակտիվության այլ տեսակներ» [155]: Եվ նման գործունեության հնարավորություն, նման դեր աշակերտին տալիս, վերապահում է առաջին հերթին ուսուցիչը: Այդպիսի ուսուցիչը արևմտյան կրթական համակարգերում որակվում է ֆասիլիտատոր եզրով (ֆասիլիտատոր՝ միջնորդ, լատիներեն՝ facilitator, անգլերեն՝ to facilitate – լինել միջնորդ), հումանիստ-ուսուցիչ, այն մարդը, որը հաղորդակցության գործընթացը, տվյալ դեպքում՝ ուսուցման գործընթացը, դարձնում է հարմար և թեթև բոլոր մասնակիցների համար [277]:

Ահա հումանիստ-ուսուցիչը իր և աշակերտի փոխհարաբերությունները կառուցում է սուբյեկտ-սուբյեկտ դիրքերից, որտեղ բացառվում է հրահանգը, ուսուցիչ-սուբյեկտը օգնում է աշակերտին հանդես գալու որպես սուբյեկտ, դրսևորելու սուբյեկտի բոլոր այն գործառույթները, որ թվարկում է Ա. Ա. Բրունշլինսկին: Դրա համար ուսուցիչը իրեն համարում է հավասար աշակերտին, նրա վերաբերմունքը զուգորդվում է ծնողական հոգատարության հետ, իսկ աշակերտը ուսուցչի հետ կիսում է ուսուցման իրականացման և իր զարգացման պատասխանատվությունը: Ուսուցիչը շնորհակալ է աշակերտին վստահության, կոլեկտիվում նրա գործունեության կազմակերպման հնարավորություն ընձեռելու համար: (Նման իրողություն հեշտ է պատկերացնել, եթե մի պահ ենթադրեք, որ այդ աշակերտը ձեր հարազատ երեխան է:) Միաժամանակ, պարտավորությունների և պատասխանատվության ընդհանրությունը առաջացնում է նաև նպատակների ընդհանրության գիտակցություն, ինչը միավորում է ուսուցչին և աշակերտին, ուսուցման գործընթացը հագեցնում հուզական-զգացմունքային ապրումներով, դրան հաղորդում գեղագիտական երանգներ. դասը դառնում է հետաքրքիր ու սիրելի զբաղմունք ինչպես աշակերտի, այնպես էլ ուսուցչի համար: (Ընդ որում, մասնագետները սովորաբար մոռանում են դասի, ուսումնական պարապմունքի ուսուցչին հաղորդած հուզական ապրումների և ընդհանրապես նրան պատճառած հոգեկան բավարարվածության մասին:) Մինչդեռ ավտորիտար ուսուցիչը միայն իրեն է համարում պատասխանատու ուսումնական և դաստիարակչական գործընթացի, աշակերտի զարգացման համար, դա համարում է պարտք, ինչը բխում է պարտավորությունից: «Հոգեբանական իմաստով կարելի է ասել, որ եթե հումանիստական համակարգում սոցիալական ինստիտուտները /այդ թվում դպրոցը/ մարդու համար ապահովում են «բազային բավարարվածության զգացում», ստեղծում են անձնային ներուժի բացահայտման և զարգացման պայմաններ, ապա ավտորիտար հարացույցում դրանք ստեղծված են մարդուն վերահսկելու համար» [134]: Ուսումնական գործընթացի որևէ դրվագի խախտման դեպքում հումանիստական մոտեցումը պահանջում է պատճառների համակողմանի քննարկում՝ բոլոր կողմերի մասնակցությամբ, հետևանքների վերացման համար ջանքերի համադրում, իսկ ավտորիտար մոտեցումը պահանջում է կարգ ու կանոնի, ճնշման ուժեղացում: Հումանիստական կրթությունը նույնպես իրականացվում է կարգ ու կանոնի միջոցով: Սակայն այս դեպքում արդյունքը շատ ավելի մեծ կարող է լինել, որովհետև ուսուցիչը հենվում է աշակերտի հոգեբանության, նրա անհատական առանձնահատկությունների և հոգեկան առանձին որակների վրա:

Անշուշտ հոգեկանի իմացությունը չի խանգարում նաև ավտորիտար փոխհարաբերությունների կառուցման գործընթացին: Սակայն այն այստեղ կարող է հասցվել նվազագույնի: Օրինակ, ավտորիտար փոխհարաբերությունների այնպիսի կարևոր դրսևորման մեջ, ինչպիսին ծեծն է, հոգեկանը մասնակցում է միայն բնազդային՝ ցավ չզգալու պահանջմունքի բավարարման մակարդակով: Ավտորիտար մոտեցումը միտում ունի նույնացնելու մարդկանց, նրանց դիտարկելու մարդկային հավաքական միավորումների մեջ, որտեղ արդեն կոնկրետ մարդուն ավելի դժվար է պահել սեփական դեմքը: Նկատենք, որ որոշ հեղինակներ հումանիտար փոխհարաբերությունը նույնացնում են ժողովրդավարականի հետ կամ վերջինիս վերագրում են հումանիստական գործառույթներ [277]: Սակայն հարկ է նշել, որ եթե ժողովրդավարականի տակ հասկանում ենք ժողովրդի, մեծամասնության կամքի արտահայտությունը, ապա այդ կամքի պարտադրումը մնացածներին ավտորիտար մոտեցման տիպական դրսևորում է: Բնական է, որ նման դեպքերում մարդիկ նորից դիտվում են հավաքական միավորումների դիրքերից, որտեղ անտեսվում են նրանց հոգեբանական առանձնահատկությունները և հոգեբանությունը դրսևորվում է նվազագույն մակարդակով:

Անշուշտ, ուսուցման իրականացումը ուսուցչի և աշակերտի միջև սոկրատեսյան զրույցի միջոցով հումանիստական մոտեցման իդեալի օրինակ կարող է ծառայել, որտեղ լավագույնս կարող են դրսևորվել աշակերտի հոգեկանի առանձնահատկությունները: Սակայն դասարանը, որ նույնպես միավորում է՝ իրենց անձնային, հոգեկան հատկանիշներով իրարից տարբեր երեխաների միավորում միևնույն հիմնական նպատակի՝ ուսումնական նյութի յուրացման շուրջ, արդեն ավտորիտար մոտեցում է և պահանջում է այդ տարբերությունների անտեսում:

Սակայն յուրաքանչյուր աշակերտ այդ նպատակին կարող է հասնել յուրովի, և այստեղ ուսուցման հաջողությունը ուղիղ համեմատական է ուսուցչի կողմից նրա տարիքային (երբ խոսք է գնում կրթական աստիճանների մասին) և անհատական (երբ խոսք է գնում միևնուն դասարանի շրջանակներում ուսուցման կազմակերպման մասին) հոգեկան հատկանիշների, առանձնահատկությունների իմացությանը: Իսկապես, ուսուցման գործընթացը, նրա հաջողությունը մեծապես պայմանավորված է նրանով, թե ինչպիսին են տվյալ երեխայի մտածողությունը, երևակայությունը, հիշողությունը, կամային որակները, հուզական և զգացմունքային աշխարհը: Եվ այդ աշխարհի իմացությունը անհրաժեշտ պայման է ուսուցման հաջողության ապահովման համար:

Նորից անդրադառնալով աշակերտի հանդեպ ուսուցչի պարտականություններին և պարտավորություններին, նշենք, որ Ի. Կանտը զանազանում է ուրիշի հանդեպ պարտականությունների երկու տեսակ: Առաջին տեսակը համարվում է ուրիշի հանդեպ ծառայությունը, որը չի բխում պարտավորություններից, այլ արդյունք է սիրո զգացմունքի, այդ ուրիշի վրա դնում է պարտականություն և պատասխանվում է սիրով և երախտագիտությամբ: Պարտականությունների երկրորդ տեսակը բխում է պարտավորությունից և նրա կատարումը ուրիշի վրա պարտականություն չի դնում և ուղեկցվում է հարգանքի զգացմունքով [227, т. 4]: Ինչպես տեսնում ենք, հումանիստական կրթության դեպքում գերիշխում է պարտավորությունների առաջին տեսակը, իսկ ավտորիտար համակարգում՝ երկրորդը: Նշենք նաև, որ համեմատելով մարդու բարոյական ներաշխարհի հավասարակշռությունը նյութական աշխարհի հավասարակշռության հետ, Ի. Կանտը գտնում է, որ ինչպես նյութական աշխարհում մարմինների միջև ներդաշնակությունը տեղի է ունենում ձգողական և վանողական ուժերի հավասարակշռության շնորհիվ, այնպես էլ բարոյական աշխարհում ներդաշնակությունը տեղի է ունենում սիրո՝ ձգողական և հարգանքի՝ վանողական ուժերի հավասարակշռության շնորհիվ: Այս դիտարկումները ևս մեկ անգամ հաստատում են կրթական գործընթացի կազմակերպման մեջ և՛ ավտորիտար, և՛ հումանիստական մոտեցումների կիրառման և դրանց զուգորդման անհրաժեշտություն:

Ճանաչված հոգեբան Ի. Ա. Բաևան և Լ. Ա. Գայզովան գտնում են, որ «Կրթական միջավայրի հոգեբանական անվտանգության ապահովումը և որպես հետևանք նրա մասնակիցների հոգեկան առողջության պահպանումը պետք է հանդիսանա պրակտիկ հոգեբանության և կրթական ծառայության առաջնահերթ ուղղությունը» [134]: Ընդ որում, հոգեկան առողջությունը այստեղ պետք է հասկանալ ոչ այնքան ուղիղ իմաստով՝ որպես հոգեկան առանձին հիվանդությունների, այլ հոգեկան գործընթացների այնպիսի անցանկալի դրսևորումների բացակայություն, ինչպիսիք են՝ ուշադրության ցրվածությունը, հիշողության մեջ անցանկալի երևույթների հաճախակի ի հայտ գալը, մտքի ծուլությունը, կամքի թուլությունը, նպատակասլացության, հետևողականության բացակայությունը, ինչպես նաև դրական ապրումների և հույզերի առկայություն, մի հոգեվիճակ, որը հնարավորություն է տալիս սովորողին ազատ, անկաշկանդ իրականացնելու մտավոր և հոգևոր գործունեություն:

Թեև վերջին՝ անվտանգ հոգեբանական միջավայր հասկացությունը լայն տարածում ունի հոգեբանների և մանկավարժների շրջանում, սակայն դրա մեկնաբանությունը կատարվում է տարբեր կերպ: Վերը նշված աշխատանքում մենք կարդում ենք. «Դպրոցի «անվտանգ հոգեբանական միջավայր ասելով մենք հասկանում ենք փոխներգործությունների այնպիսի միջավայր, որն ազատ է հոգեբանական բռնություններից, նրանում ընդգրկված սուբյեկտների համար ունի ռեֆերենտային նշանակություն (դրական վերաբերմունքի առումով), բնութագրվում է մասնակիցների հումանիստական կենտրոնացման գերակայությամբ (այսինքն՝ կենտրոնացում իր և այլ մարդկանց շահերի տեսակետից) և արտացոլվում է նրա սուբյեկտների հուզաանձնային և համագործակցային բնութագրերում» [134]: Անվտանգ հոգեբանական միջավայրի այլ բնորոշում կարելի է գտնել [349] աշխատանքում: Նշենք, որ մարդու համար անվտանգության պահանջմունքների կարևորությունը ընդգծել է նաև Մասլոուն՝ իր պահանջմունքների հիերարխիայում [285]:

Անվտանգ հոգեբանական միջավայրի բոլոր բնութագրերում սակայն ընդգծվում է դրանցում հոգեբանական բռնությունների բացակայությունը: Ինչպե՞ս են դրսևորվում նման բռնությունները դպրոցում առհասարակ և ուսուցման գործընթացում մասնավորապես: Արդյո՞ք հանրահաշվի և, ընդհանրապես, մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի մեզանում ընդունված պրակտիկան, օրինակ, երբ ուսուցչի կողմից մաթեմատիկան դիտվում է որպես մի քանի ընտրյալների մենաշնորհ, կամ երբ մաթեմատիկան վերածվում է վարժությունների լուծման և մաթեմատիկական գիտելիքների ու կարողությունների ցուցադրման թատերաբեմի, երբ գիտելիքների և կարողությունների անընդհատ համեմատության միջոցով անտեսվում է սովորողների մի զգալի մասի արժանապատվությունը, ձևավորում է անառողջ հոգեբանական մթնոլորտ (նախանձ, արհամարանք, թերարժեքության բարդույթ և այլն): Տես նաև [315], [76]:

2.5.2. Հոգեկան երևույթները հանրահաշվի ուսուցման գործընթացում: Հանրահաշվի և, ընդհանրապես, մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի հետ հոգեկան երևույթների կապը շարունակաբար գտնվել է ինչպես մաթեմատիկոսների և հոգեբանների, այնպես էլ մաթեմատիկայի ուսուցիչների ուշադրության կենտրոնում (տես, օրինակ, [121], [172], [238]): Հարկ է նշել, որ սովորաբար եթե հոգեբանները կարևորում են սովորողների հոգեբանական անվտանգության կամ հոգեկան առողջության հարցը, ապա մասնագետ-մեթոդիստները և առարկայական ուսուցիչները ավելի շատ շեշտադրում են հոգեկան հարստության խնդիրը, ինչը կարևորվում է նաև ուսումնական առարկաների, մասնավորապես մաթեմատիկայի ուսուցման նպատակների շրջանակներում. «…իր խնդիրները լուծելիս մեթոդիկան, անհրաժեշտության դեպքում օգտվում է հոգեբանական հետազոտություններից» [386, էջ 62]: Սովորաբար, օգտվելով հոգեբանական հետազոտությունների արդյունքներից, մեթոդիստ-մասնագետները և ուսուցիչները առաջին հերթին օգտվում են սովորողների հոգեկան գործընթացներից՝ հիշողությունից, մտածողությունից, երևակայությունից, ուշադրությունից, կամային և հոգեկան այլ դրական որակներից, դրանք նպատակաուղղելով դեպի ուսումնական նյութի յուրացումը հաղթահարելուն, ուսուցման գործընթացի արդյունավետության բարձրացմանը [393]:

Սակայն, ինչպես նշվեց վերևում, հումանիստական կրթության պայմաններում ուսուցման գործընթացը նպատակաուղղվում է ոչ այնքան տվյալ ուսումնական առարկայի ուսումնական նյութի յուրացմանը և գիտելիքների ու կարողությունների կուտակմանը, այլ այդ ուսումնական նյութի միջոցով սովորողների դաստիարակության, արժեհամակարգի ձևավորման խնդրի լուծմանը: Այս պայմաններում, հոգեկանի հետ փոխհարաբերության խնդրում, առաջին պլան է մղվում ոչ թե ուսումնական բնագավառի վերաբերյալ այս կամ այն գիտելիքի իմացությունը, այլ այդ բնագավառի ուսուցման գործընթացի միջոցով հոգեկան երևույթների ձևավորման և զարգացման խնդիրը:

Ընդունված է, որ մաթեմատիկայի ուսուցումը մեծապես նպաստում է սովորողի մտածողության ձևավորման և զարգացման գործընթացին (տես, օրինակ, [172]): Այս տեսակետից մաթեմատիկայի դերը համեմատվում է մարդու ֆիզիկական զարգացման մեջ մարմնամարզության դերի հետ. ասում են՝ «մաթեմատիկան մտքի մարմնամարզությունն է»: Սակայն մաթեմատիկայի, մասնավորապես՝ հանրահաշվի ուսուցման գործընթացը ունի սովորողի հոգեկան այլ երևույթների ձևավորման և զարգացման հսկայական ներուժ, ինչի բացահայտումը և իրագործումը նրա ուսուցման գլխավոր նպատակներից մեկն է:

[14] աշխատանքում հանգամանորեն հետազոտված է մաթեմատիկայի և, առաջին հերթին, հանրահաշվի ուսուցման գործընթացի դերը ուշադրության, նրա զանազան դրսևորումների՝ կենտրոնացման, ծավալի, բաշխման, տեղափոխման, կայունության, լարվածության, տատանումների, ինչպես նաև ուշադրության տեսակների՝ կամածին, ոչ կամածին, հետկամածին, արտաքին և ներքին ուշադրության զարգացման գործում: [7] աշխատանքում նմանատիպ հետազոտություն է կատարված հիշողության երևույթի համար: [69] և [82] աշխատանքներում հետազոտված են մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի ազդեցության խնդիրը սովորողների հոգեկան կոփման, նրանց մոտ նպատակասլացության, վճռականության, համառության, տոկունության, համարձակության, ինքնուրունության և ինքնատիրապետման կամային որակների ձևավորման և զարգացման վրա: [85] աշխատանքում մենք խնդիրը ուսումնասիրել ենք պահանջմունքների, հույզերի, զգացմունքների, երևակայության, ինչպես նաև նախկինում թվարկված՝ ուշադրության, հիշողության և կամային որակների համար, ընդ որում, դիտարկել ենք նաև գեղագիտականի դրսևորման տեսանկյունը նշված բոլոր հոգեկան երևույթներում: Կատարված ուսումնասիրությունները ցույց են տալիս, որ մաթեմատիկայի և, առանձնապես, հանրահաշվի ուսուցման գործընթացը կարող է մեծապես նպաստել ինչպես հոգեկան երևույթների ձևավորման ու զարգացման գործընթացներին, դրանց հաղորդելով ընդգծված գեղագիտական երանգներ: Համառոտակի կանգ առնենք այդ գործընթացների վրա ավելի հանգամանորեն:

Գեղագիտական պահանջմունք: Գեղագիտական պահանջմունքը գեղագիտական արժեքների նկատմամբ մարդու վերաբերմունքը, հետաքրքրությունն ու շահագրգռվածությունն է, գեղագիտականի ձևավորման ելակետային պահը, հիմքը, որը դրսևորվում է մարդկային գործունեության ամենատարբեր ոլորտներում և ամենատարբեր ձևերով [481]: Գեղագիտական պահանջմունքին հատուկ է օգտապաշտության և շահախնդրության բացակայությունը: Այն նաև ունի ուժեղանալու միտում՝ պահանջմունքի առարկայի հետ հանդիպմանը համընթաց:

Գեղագիտական պահանջմունքները ձևավորվում են մանկական վաղ հասակից և շարունակվում են փոփոխվել, զարգանալ մարդու ողջ կյանքի ընթացքում: Դրանք կախված են մարդու ճաշակից, գեղագիտական զարգացվածությունից և այլ գործոններից: Բոլոր մարդիկ, օրինակ, ունեն երաժշտության գեղագիտական պահանջմունքը: Բայց մեկին դուր է գալիս ռաբիզը, մյուսին՝ Կոմիտասը, մեկը բավարարվում է ժողովրդական երգով, մյուսը՝ ունի նաև դասական երաժշտության պահանջմունք: Այստեղ մենք գործ ունենք մարդկանց գեղագիտական տարբեր ճաշակների, զարգացվածության տարբեր մակարդակների հետ:

Գեղագիտական միևնույն արժեքների նկատմամբ ունեցած ընդհանուր պահանջմունքը միավորում է մարդկանց, նշանակալից դարձնում միմյանց համար: Ավելին, առաջին հերթին հենց գեղագիտական արժեքներն են, դրանց պահանջմունքը, որ միավորում են յուրաքանչյուր ազգի զավակներին, երկիրը դարձնում հայրենիք: Հայկական ժողովրդական երգը, Կոմիտասի ու Արամ Խաչատրյանի երաժշտությունը հայի ամենաբարձր ու նվիրական հոգևոր արժեքներն են, որոնց պահանջմունքն ունեցողը իր մեջ կրում է հայոց ազգի ոգին՝ անկախ իր ապրելու վայրից: Այդ պատճառով գեղագիտական պահանջմունքի ձևավորումը հանրակրթական դպրոցի կարևորագույն խնդիրներից է, որի լուծմանը պետք է ակտիվորեն մասնակցեն դասավանդվող բոլոր ուսումնական առարկաները:

Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը նույնպես ունի խնդրի լուծման լայն հնարավորություններ: Դրանք առաջին հերթին ածանցվում են գեղագիտական արժեքների հետ մաթեմատիկայի խորը կապերից և փոխհարաբերություններից (տես [83], [167]):

Ընդհանրապես, յուրաքանչյուր քաղաքակրթություն բերել է գեղեցիկի իր ընկալումը, ինչն էլ առաջադրել է համապատասխան գեղագիտական պահանջմունքներ: Ինչպես քաղաքակրթությունները, այնպես էլ գեղագիտականն ու գեղագիտական պահանջմունքները ապրել են զարգացման իրենց փուլերը: Եվ բոլոր այդ փուլերում մաթեմատիկան ունեցել է իր գործուն մասնակցությունը գեղագիտական արժեքների ու նրանց հիմքում ընկած գեղագիտական պահանջմունքների ձևավորման ու զարգացման մեջ:

[85] և [94] աշխատանքներում մենք, հիմք ընդունելով գեղագիտական պահանջմունքների աղբյուրները, մասնավորապես՝ խաղը [44], և նկատի ունենալով այս ուղղությամբ Ի. Կանտի [227], Ֆ. Շիլլերի [465-467], Ի. Հույզինգայի [446], Ե. Ֆինկի [431], Պ. Լոկհարդի [272], Վ. Տիխոմիրովի [413], Ա. Մասլոուի [285] և այլոց դիտարկումները, քննարկել ենք գեղագիտական պահանջմունքների հետ մաթեմատիկական կրթության առնչությունները, ելնելով աղբյուրներին, մասնավորապես, խաղին և պահանջմունքների ձևավորմանը:

Գեղագիտական հույզերը: Մարդը, որպես կենսաբանական էակ, ապրելու, իր և իր մարդկային տեսակը պահպանելու համար, ունի որոշակի պահանջմունքներ (սովածություն, ծարավ, սեռական հակում, ցավից խուսափել, բավականություն կամ հաճույք ստանալ և այլն): Այդ պահանջմունքների բավարարմանը կամ բավարարման խանգարմանն ուղղված ազդանշանները նա ստանում է իր հուզական աշխարհի՝ հույզերի և զգացմունքների միջոցով: Հույզերը կամ հուզական ապրումները դրսևորվում են այդ պահանջմունքների բավարարման կամ չբավարարման արդյունքում: Դրական հույզերը արտահայտում են մարդու պահանջմունքների բավարարումը, իսկ բացասական հույզերը՝ դրանց բավարարման բացակայությունը: Հույզերի (և զգացմունքների) դրսևորման աստիճանով է պայմանավորված նաև իր պահանջմունքների բավարարմանն ուղղված մարդու գործունեությունը:

Կան բազմաթիվ տեսություններ մարդու հուզական աշխարհի բնութագրման և դասակարգման վերաբերյալ: Գերմանացի հոգեբան և ֆիզիոլոգ, գիտական հոգեբանության հիմնադիր Վ. Վունդտը հույզերը բաժանում է ըստ դրանց գործառույթների [173]: Ըստ այդմ, նա առանձնացնում է բավականություն կամ անբավականություն, լարվածություն կամ լիցքաթափություն և գրգռում կամ արգելակում առաջացնող հուզեր: Ամերիկացի ժամանակակից հոգեբան Կ. Իզարդը գտնում է, որ սկզբնական փուլում մարդու մոտ առաջանում են մի քանի (ինը) բազային հույզեր, որոնք հիմք են հանդիսանում նրա ողջ հուզական աշխարհի ձևավորման համար [221]: Ռուս հոգեբան Իգոր Նեզովիբատկոն փորձում է հիմնավորել, որ դրանք յոթն են՝ հետաքրքրությունը, ուրախությունը, տխրությունը, զզվանքը, զայրույթը, վախը և զարմանքը [325]: Հիմնական հույզերի զանազան զուգորդումներից առաջանում են նոր հույզեր, հուզական վիճակներ և զգացմունքներ, ձևավորվում է մարդու հուզական աշխարհը իր ողջ բազմազանությամբ: Հուզական աշխարհի այդ բազմազանության մեջ մտցվում է որոշ կարգ, տեսակավորում: Ընդունված է մարդու հուզական աշխարհը տրոհել երկու մասի. ցածրակարգ և բարձրակարգ: Առաջինում ներառվում են մարդու կենսաբանական, իսկ երկրորդում՝ հոգևոր հույզերն ու զգացմունքները: Իրենց հերթին, բարձրակարգ հույզերը և զգացմունքները տրոհվում են բանականի, բարոյականի և գեղագիտականի՝ կախված դրանց առաջացման աղբյուրներից: Սակայն հարկ է նկատել, որ միևնույն հույզը կամ զգացմունքը կարող է ունենալ ինչպես բանական, այնպես էլ բարոյական ու գեղագիտական երանգներ, և արված դասակարգումը որոշ իմաստով ունի պայմանական բնույթ: Օրինակ, մենք գեղեցիկ ենք համարում Ջուլիետի բարոյական վարքը, որն ուզում է մեռնել իր սիրելի Ռոմեոյի մահից հետո, կամ Պյութագորասի թեորեմը համարում ենք գեղեցիկ, նկատի ունենալով նրանում առկա կապերի անսպասելի բնույթը: [86] և [94] աշխատանքներում մենք դիտարկել ենք այնպիսի հույզեր, որոնք ունեն ընդգծված գեղագիտական երանգներ և քննարկել դրանց դրսևորումները և ձևավորումը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում:

Վերևում դիտարկված հիմնական կամ հենքային հույզերը՝ հետքրքրությունը, զարմանքը, ուրախությունն ու տխրությունը մաթեմատիկական գործունեության անբաժան ուղեկիցներն են և այստեղ ունեն դրսևորման գեղագիտական երանգներ: Այդ հանգամանքը կարելի է օգտագործել մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը ավելի հետաքրքիր դարձնելու, ուսուցման արդյունավետությունը բարձրացնելու համար: Կարևորելով հենքային հույզերի դերը մարդու հոգեկանի հուզական կողմի մեջ, այնուամենայնիվ մենք կհետևենք Ե. Պ. Իլյինին, որը բնութագրելով հույզերը, կատարում է դրանց ուսանելի դասակարգում [222, էջ 4]: Նա հույզերը խմբավորում է ըստ հետևյալ տեսակների՝ սպասումի և կանխատեսման հույզեր, բավարարվածություն և ուրախություն, ֆրուստրացիոն հույզեր, համագործակցային հույզեր, ինտելեկտուալ հույզեր: Մենք ցույց ենք տալիս, որ այդ տեսակներից յուրաքանչյուրում առկա է գեղագիտական բաղադրիչը, ինչը դրսևորվում է նաև մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում:

Բ. Ի. Կոչուբեյը և Ե. Վ. Նովիկովան զբաղվել են դպրոցականների մոտ առաջացող տագնապի հույզերի ուսումնասիրությամբ [252]: Հետաքրքիր է, որ ըստ նրանց հետազոտությունների, տագնապի ավելի քիչ են ենթարկվում միջակ սովորող աշակերտները:

Տագնապի կարևոր հույզերից է վախը: Ե. Պ. Իլյինը վախը բնորոշում է որպես հուզական վիճակ, որն արտացոլում է մարդու կամ կենդանու պաշտպանական կենսաբանական հակազդումը նրանց առողջության կամ բարեկեցության համար իրական կամ կեղծ վտանգի ապրման դեպքում, ինչից հետևում է վախի օգտակարությունը: Սակայն վախը նաև բացասական դեր է խաղում մարդու նպատակների իրականացման գործում: Նա բերում է վախի պատճառների մի աղյուսակ, որում, սակայն, նշվում են միայն վախի կենսաբանական և սոցիալական պատճառներ՝ բարձրություն, ցավ, միայնություն, խթանիչի հանկարծակի մոտեցում կամ հանկարծակի փոփոխում [222, էջ 163-164]: Սակայն վախը կարող է ունենալ նաև հոգևոր՝ բարոյական, ինտելեկտուալ, գեղագիտական պատճառներ: Այս տեսակետից ավելի ընդունելի են Ք. Իզարդի բացատրությունները, ով գտնում է, որ վախը արտահայտում է պահանջմունքը բավարարել չկարողանալու հնարավորության առկայություն: Մարդը վախ կարող է զգալ ամենատարբեր իրադրություններում, բայց բոլորում առկա է նրա անվտանգությունը կամ բարեկեցությունը կորցնելու վտանգը [221, էջ 292]:

Հույզերի բավարարության և ուրախության խմբում դիտարկում ենք նաև անբավարարության և տխրության, հաճույքի [178], հիացմունքի հույզերը, ֆրուստրացիոն հույզերի խմբում՝ վիրավորանքը, հիասթափությունը, բարկությունը, զայրույթը, զզվանքը, զմայլանքը, վիշտը, միայնությունը, կարոտը, համագործակցային հույզերի խմբում՝ շփոթմունքը, ամոթը, մեղքը, ատելությունը, ինտելեկտուալ հույզերի խմբում՝ հետաքրքրությունը, զարմանքը, տարակուսանքը: Բոլոր այս հույզերը դրսևորվում են նաև մաթեմատիկայի, մասնավորապես՝ հանրահաշվի ուսուցման գործընթացում, ունենալով նաև որոշակի առանձնահատկություններ, որ արդյունք են այդ գործընթացի յուրահատուկ բնույթի: Անդրադարձ է կատարվում նաև հուզական վիճակներին՝ տրամադրությանը, աֆեկտներին, թերարժեքության բարդույթներին, սթրեսներին ֆրուստրացիային, մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում դրանց դրսևորման հնարավորություններին:

Գեղագիտական զգացմունքները: Գեղագիտական զգացմունքները մենք այստեղ տրոհում ենք երկու մասի: Այդ մասերից մեկում ներառում ենք զուտ գեղագիտական զգացմունքները, զգացմունքներ, որոնց դրսևորման աղբյուրները ունեն ընդգծված գեղագիտական բնույթ: Ընդունված է այդպիսիք համարել գեղեցիկը, տգեղը, վեհը, ստորը, կատակերգականը և ողբերգականը, որոնք որպես գեղագիտական արժեքներ, մենք դիտարկեցինք առանձին: Իսկ այստեղ կդիտարկենք այն զգացմունքները, որոնց առարկան կարող է գեղագիտականի հետ միասին ունենալ նաև ինտելեկտուալ կամ բարոյական բնույթ: Ե. Իլյինը [222] աշխատանքում նման զգացմունքների շարքում առանձնացնում է համակրանքը և հակակրանքը, կապվածությունը, բարեկամությունը, սերը, թշնամանքը, նախանձը, խանդը, բավարարվածությունը, երախտագիտությանը, երջանկությունը, սեփական արժանապատվությունը (ակնածանքը իր կյանքի հանդեպ) և հպարտությունը: Չնայած թվարկված բոլոր զգացմունքները սերտորեն առնչվում են մաթեմատիկական կրթության հետ, բայց դրանց ճնշող մասը ավելի ներկայացնում է սուբյեկտի բարոյական կողմը, ինչը մենք քննարկել ենք մաթեմատիկայի և բարոյական արժեքների կապերին նվիրված [76] աշխատանքում: Իսկ այստեղ կդիտարկենք միայն գեղեցիկի նկատմամբ համակրանքի զգացմունքը: (Սիրո զգացմունքի մասին տես [440]):

Բայց նախքան կոնկրետ զգացմունքների հետ մաթեմատիկական կրթության կապերի դիտարկումը, նկատենք, որ նշված բոլոր զգացմունքները կարող են դրսևորվել ինչպես երկկողմ՝ սուբյեկտ-սուբյեկտ և սուբյեկտ-օբյեկտ, այնպես էլ եռակողմ՝ սուբյեկտ-օբյեկտ-սուբյեկտ հարաբերություններում, որտեղ որպես հարաբերության սուբյեկտ կարող են հանդես գալ թե՛ ուսուցիչը, թե՛ աշակերտը, իսկ հարաբերության միջուկը կամ օբյեկտը մաթեմատիկան է, կամ էլ մաթեմատիկական կրթությունը:

Հոգեբան Գ. Ֆելսերը առանձնացնում է համակրանքի առաջացման վեց հատկանիշ՝ նմանությունը, մոտիկությունը, սոցիալական փոխանակումը, մեր նկատմամբ ունեցած համակրանքը, ինչ-որ դրականի հետ զուգորդումը, ֆիզիկական կամ արտաքին գրավչությունը [427]:

Մենք մարդկանց համակրում ենք, եթե նրանք նման են մեզ իրենց արտաքինով, սոցիալական դրությամբ, գաղափարներով, հայացքներով, արժեքային մոտեցումներով, ճաշակով, ազգությամբ, տարիքով, ճակատագրով և այլն: Եթե, օրինակ, որևէ մեկին դուր են գալիս արվեստի այնպիսի գործեր, որոնք նախընտրում ենք մենք, ապա այդ մարդու նկատմամբ մեզ մոտ առաջանում է համակրանքի զգացմունք: Ընդհանրապես, նմանությունը նաև գեղագիտական հատկանիշ է, և դրա առկայությունը կամ դրսևորումը ցանկացած երևույթի հաղորդում է գեղագիտական գրավչություն և այն դարձնում համակրելի: Այդպես է նաև ուսումնական պարապմունքը, դասը. մաթեմատիկական վարժությունների նմանությունը, նոր դիտարկվող ուսումնական նյութի կապը նախորդների հետ դասի նկատմամբ համակրանքի առաջացման կարևոր գործոններ են, ինչը պետք է նկատի ունենա ուսուցիչը:

Տարածական և ժամանակային առումով մոտիկությունը մոտեցնում է մարդկանց, դարձնում համակրելի: Այս տեսակետից ակնառու է ուսումնական գործընթացում դասավանդող ուսուցչի, համադասարանցիների միջև համակրանքի առաջացման հնարավորությունը: Բայց այստեղ պետք է դիտարկել նաև մարդկանց մոտիկությունը համանման գործունեություն կատարելու տեսանկյունից, ինչով այս հատկանիշը մոտենում է նախորդին:

Մեզ դուր են գալիս այն մարդիկ, որոնք մեր նկատմամբ ունեն համակրանք: Մաթեմատիկայի (և, անշուշտ, ցանկացած առարկայի) ուսուցման պարագայում հարկ է, որ յուրաքանչյուր աշակերտ զգա ուսուցչի համակրանքը իր նկատմամբ. Առանց այդ համակրանքի դժվար է պատկերացնել ուսուցման երկու սուբյեկտների նորմալ գործունեությունը կամ համագործակցությունը: Անշուշտ ուսուցչի համար բնական է համակրանքի զգացմունքը իր ուսումնական առարկայից առաջադիմող աշակերտի նկատմամբ: Իսկ ոչ առաջադիմող, թերացող աշակերտի հանդեպ համակրանքը դժվար է առաջանում: Բայց մաթեմատիկայից չառաջադիմող աշակերտներ ինչքան ուզեք. ինչպե՞ս ստեղծել համակրանքը նրանց նկատմամբ: Այստեղ դժվար է կոնկրետ դեղատոմսեր առաջարկել: Բայց մի բան ակներև է. նման աշակերտը չպետք է արժանանա ուսուցչի հակակրանքին:

Ինչ-որ դրական բանի հետ զուգորդումը: Մաթեմատիկայի իմ ուսուցիչը, օրինակ, սովորություն ուներ աշակերտների կողմից առանձին խնդիրների լուծումից հետո նշել, որ այդ գեղեցիկ խնդիրները նախկինում լուծել են իր այն աշակերտները, որոնք հետագայում հասել են հաջողության (յուրաքանչյուր կոնկրետ դեպքում տալիս էր որևէ անուն ու նշում նրա հաջողությունները): Նման դեպքերում միայն տեսնել էր պետք այսպիսի հետաքրքիր զուգորդման միջոցով խրախուսանքի արժանացած աշակերտների ոգևորությունը:

Ֆիզիկական կամ արտաքին գրավչությունը: Այս հատկանիշը առաջին հերթին վերաբերում է մարդկանց արտաքինին, ինչը առաջացնում է համակրանք: Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում ֆիզիկական կամ արտաքին գրավչությունը վերաբերում է ինչպես մաթեմատիկայի ուսուցման արտաքին գեղագիտությանը (գեղեցիկ գրաֆիկներ, բանաձևեր և այլն), այնպես էլ դասի կազմակերպական ձևի գեղեցկությանը (գեղեցիկ վարք, այսինքն՝ հարգալից վերաբերմունք աշակերտի նկատմամբ, գրատախտակի գեղեցիկ օգտագործում և այլն):

[14], [82], [94] աշխատանքներում մենք դիտարկում ենք նաև մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում ուշադրության, հիշողության, երևակայության, կամային որակների ձևավորման խնդիրը: Ստորև կանգ կառնենք միայն դրանցից մեկի վրա, նյութի հետ ամբողջական ծանոթության համար առաջարկելով [94] աշխատանքը:

2.5.3. Երևակայություն, նրա դերը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում: Երևակայությունը (հունարեն՝ ֆանտազիա φαντασία, φαντάζομαι - երևակայում եմ) հոգեկան գործունեություն է, մտային այնպիսի իրավիճակների, պատկերացումների ստեղծում, որոնք նախկինում իրականում չեն եղել, չեն ընկալվել մարդու կողմից: Կան նաև երևակայության այլ բնորոշումներ: Այսպես, երևակայությունը նախկինում նմանը չունեցող պատկերներ ստեղծելու մարդկային գիտակցության ունակությունն է [429]:

երևակայությունը իրականության մեջ կամ մարդու պատկերացումներում գոյություն ունեցող առարկայի պատկերի ներկայացման/պատկերացման ունակություն է՝ այդ առարկայի բացակայության պայմաններում [332]: Երևակայությունը մարդու խորհասուզվելն է իր ներաշխարհ և այնտեղ պատկերների, նկարների և պատկերացումների ստեղծումը [242] (տես նաև [428, 430, 498]):

Եթե ընկալումը ստեղծում է մեր զգայարանների վրա անմիջականորեն ազդող առարկաների և երևույթների պատկերները, ապա երևակայությունը կառուցում է բացակա առարկաների և երևույթների պատկերներ՝ արդեն առկա պատկերների և պատկերացումների հիման վրա: Երևակայության միջոցով մարդը կարող է մտովի տեղափոխվել այլ աշխարհներ ու ապագա, վերադառնալ իր անցյալը:

Մեծ է երևակայության դերը մարդու կյանքում, նրա ցանկացած գործունեություն հաջողությամբ իրականացնելու համար անհրաժեշտ է երևակայության առկայությունը: Առանց երևակայության դժվար է պատկերացնել շատ թե քիչ բարդ հոգեկան որևէ գործընթաց: Կամային երևույթները, մտածողությունը հաջողությամբ իրականացվում են միայն երևակայության առկայության դեպքում:

Մեծ է նաև երևակայության դերը մաթեմատիկական գործունեության մեջ, մասնավորապես՝ մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում: Այստեղ սովորաբար դիտարկվում են երկրաչափության հետ նրա առնչությունները (տես, օրինակ, [185], [330]): Ընդհանրապես մաթեմատիկական օբյեկտները՝ որպես բնության մեջ գոյություն չունեցող առարկաներ, ամբողջությամբ մարդու երևակայության արդյունք են: Հետևաբար, երևակայությունը արմատական նշանակություն ունի ողջ մաթեմատիկայի, նրա ստեղծման համար [317]: Յուրաքանչյուր մաթեմատիկական հայտնագործություն մաթեմատիկական օբյեկտների հատկությունների ու կապերի հայտնաբերում է, ինչին նախորդում են մաթեմատիկոսի երևակայության մեջ նմանատիպ բազմապիսի կապեր ու հատկություններ, որոնք անհրաժեշտ է լինում «գլխի ընկնել», այսինքն՝ առաջադրել որպես վարկածներ, մեծամասամբ՝ հերքել և, իվերջո, դրանցից ընտրել նրանք, որոնք հնարավոր է լինում հաստատել, որոնք դառնում են ճշմարտություններ: Այդ ճշմարսությունները, նախքան հայտնագործումը, նույնպես ունեն երևակայական բնույթ, որովհետև դրանք դեռևս գոյություն չեն ունեցել և առաջին անգամ հայտնվում են մաթեմատիկոսի երևակայության մեջ: Հասկանալի է, որ մաթեմատիկական օրինաչափությունների հայտնագործման այս ընթացքը տեղի է ունենում երևակայության և մտածողության սերտ համագործակցությամբ: Եվ ինտելեկտուալ որոնման այդ ընթացքի մեջ հոգեկան այս երկու երևույթները խաղում են միանգամայն տարբեր դերեր: Բուն որոնման ընթացքը կապված է երևակայության հետ. այն առաջադրում է տարբերակը կամ վարկածը, իսկ մտածողությունը ստուգում է այդ վարկածի ճշմարտացիությունը: Գտնելու, հայտնագործելու վերջնական ակտը, բնականաբար, իրականանում է հոգեկան այս երկու երևույթների համատեղ ու միասնական գործունեության արդյունքում: Այսպիսով, ինտելեկտուալ որոնման գեղագիտական էությունը կապված է երևակայության հետ, իսկ գտնելու և հայտնագործելու գեղագիտական սուբյեկտիվ հատկանիշները դրսևորվում են երևակայության և մտածողության համատեղ ու միասնական գործունեության արդյունքում: Հարկ ենք համարում նշել, որ միայն մտածողության դրսևորմամբ իրականացվող, ասենք, թեորեմի և նրա ապացուցման կամ խնդրի լուծման ուսուցումը դառնում է մեխանիկական սերտում և ուսուցումը զրկում է ինտելեկտուալ որոնման, գտնելու, հայտնաբերելու գեղագիտական հատկանիշների դրսևորման հնարավորությունից: Եվ որպեսզի ուսուցման գործընթացը ուղեկցվի նշված գեղագիտական հատկանիշների դրսևորմամբ, սովորողին ձգի, ուրախություն պարգևի, անհրաժեշտ է, որ սովորողը ինքնուրույն գտնի ոչ միայն խնդրի լուծումը, այլև հնարավորության դեպքում՝ նաև թեորեմի ապացուցումը: Փորձառու ուսուցիչը կարող է նաև մաթեմատիկայի ամենակարևոր օբյեկտների՝ հասկացությունների ուսուցման գործընթացը ուղեկցել գեղագիտական նշված հատկանիշների դրսևորմամբ: Բոլոր այդ դեպքերում գեղագիտական հատկանիշի երևան գալը պայմանավորված է երևակայության դրսևորմամբ:

Երևակայության տեսակները: Երևակայությունը սերտորեն առնչվում է կամքի հետ, և, ըստ այդմ, կարող է լինել կամածին, ոչ կամածին և հետկամածին: Ոչ կամածին երևակայությունը դրսևորվում է մարդու կամքից անկախ, առանց կամային ճիգերի գործադրման: Երբ բարձր դասարանցուն որևէ հեքիաթ են պատմում, ապա նա հեքիաթում նկարագրվող իրադարձությունները պատկերացնում է իր երևակայությամբ, և նման պատկերացումների համար կամային մեծ ճիգեր չի գործադրում: Այսինքն՝ երևակայությունը մոտ է ոչ կամածին տեսակին: Իսկ, եթե նա կարդում է որևէ վեպ, ապա հերոսների կերպարները, դրանց փոխհարաբերությունները պատկերացնելու համար նրան անհրաժեշտ են կամային ճիգեր: Ընդ որում, գործողությունների զարգացմանը զուգընթաց աշխատում է նաև երևակայությունը և գործող հերոսների կերպարներին ու փոխհարաբերություններին ավելացնում է նորանոր երանգներ: Այստեղ դրսևորվող երևակայությունը արդեն կամածին է:

Երևակայության կամածին և ոչ կամածին տեսակները սերտորեն կապված են իրար հետ. եթե առաջին անգամ մեր երևակայության մեջ հայտնված պատկերը ստացվում է կամային որոշակի գործունեության արդյունքում, ապա հետագայում այն ավելի հեշտությամբ է հանդես գալիս, այսինքն՝ դառնում է ոչ կամածին: Նման երևակայությունը անվանվում է նաև հետկամածին: Այսպես, մաթեմատիկական որևէ հասկացության, օրինակ՝ շեղանկյան, ուսուցման սկզբնական փուլում աշակերտը կդժվարանա համապատասխան օրինակը պատկերացնել՝ ելնելով նրա սահմանումից, և դրա համար նրան անհրաժեշտ կլինի կամքի լարում, այսինքն՝ այս դեպքում երևակայությունը կամածին է: Սակայն մի քանի անգամ շեղանկյունը գծագրելուց հետո նրան այլևս անհրաժեշտ չի լինում լարել կամքը որևէ շեղանկյուն պատկերացնելու համար: Այսինքն՝ շեղանկյունը պատկերացնելու գործընթացի նախնական փուլում երևակայությունը կամածին էր, իսկ հետագայում դարձավ ոչ կամածին:

Գիտական գեղեցիկի ինտելեկտուալ որոնման, գտնելու, հայտնագործելու, ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացության, առարկայի էությունը հասկանալու համար գործադրվող ջանքերը, նպատակաուղղված, բարդ ու դժվարին խոչընդոտի հաղթահարման սուբյեկտիվ հատկանիշների դրսևորման գործում պարտադիր է կամածին երևակայության առկայությունը: Իսկ անկանխատեսելիության և անսպասելիության սուբյեկտիվ հատկանիշների դրսևորման հարցում երևակայությունը կարծեք շատ քիչ դեր է խաղում. այդ հատկանիշները երևան են գալիս ոչ մեր երևակայության շնորհիվ:

Գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշների բացահայտումը նույնպես պահանջում է երևակայության մասնակցություն: Կարգի, համաչափության, ներդաշնակության, ռիթմի և այլ հատկանիշների առկայությունը անմիջապես չի բացահայտվում: Սովորաբար դրանք քողարկված են լինում օբյեկտի առանձին մասերի հետևում, ունենում են խորքային դրսևորումներ, երևում են միայն հատվածաբար և այլն, և դրանց բացահայտումը պահանջում է երևակայության ակտիվ միջամտություն՝ մասերը լրացնելու, քողարկվածը ենթադրաբար երևան հանելու և նմանատիպ այլ գործողություններ կատարելու համար:

Մաթեմատիկական գործունեության և նրա ուսուցման գործընթացում հիմնականում դրսևորվում է կամածին երևակայությունը: Արդեն մաթեմատիկական յուրաքանչյուր հասկացության հետ ծանոթացումը՝ իր վերացական բնույթի պատճառով, պահանջում է կամային որոշակի ճիգով ուղեկցվող երևակայական մոտեցում: Նույնը վերաբերում է նաև թեորեմներին, դրանց ապացուցումներին, խնդիրներին և, մանավանդ, դրանց լուծումներին:

Երևակայության հատկությունները: Երևակայությունը կախված է մարդու պատկերացնելու ունակությունից, ինչը առանձնանում է պարզությամբ, հստակությամբ, կայունությամբ և ցայտունությամբ: Ինչքան պարզ է երևակայվող օբյեկտի պատկերացումը մեր երևակայության մեջ, այնքան լավ է այն ծառայում իր նպատակին: Մաթեմատիկայի պարագայում, օրինակ, երկրաչափական գծագրի պատկերացման պարզությունը մեծապես նպաստում է խնդրի լուծման իրականացմանը, իսկ բարդ ու խրթին գծագրերը դժվարացնում կամ անհնար են դարձնում լուծումը: Պետք է ավելացնել, որ պարզությունը՝ որպես գիտական գեղեցիկի հատկանիշ, ունի գեղագիտական գրավչություն և հաճելի է դարձնում երևակայության գործընթացը, միտքը մղում է դեպի այն:

Հստակությունը նույնպես երևակայության կարևոր հատկություն է. կիսատ, թերի, անկատար, անհստակ պատկերացումները դեռևս բավարար չեն նպատակների վերջնական իրականացման համար: Գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշները դիտարկելիս մենք քննարկեցինք պարզության և հստակության հատկանիշների փոխադարձ կապը ճանաչողության և գեղեցիկի ստեղծման գործընթացում, դրանց փոխհակասությունը և փոխլրացումը: Այդ կապը պահպանվում է և կարևորվում նաև երևակայական օբյեկտների կառուցման գործընթացում: Մասնավորապես, մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում հասկացությունների ներմուծման, թեորեմների ձևակերպման և ապացուցումների, խնդիրների առաջադրման և լուծման ընթացքում առանց երևակայության հստակ աշխատանքի անհնար է արձանագրել լուրջ հաջողություններ:

Երևակայության կարևոր հատկություն է նրա կայունությունը: Հաճախ առաջադրվող խնդրի լուծման համար մեր երևակայության մեջ առաջացած պատկերացումը անհրաժեշտ է լինում այնտեղ պահել համեմատաբար երկար, տևական ժամանակով, ինչը պահանջում է մտքի լարում, իսկ վերջինս հնարավոր է լինում իրականացնել կամային դրական որակների առկայության դեպքում: Այդ պատճառով մտքի այս կարևոր հատկանիշը կապված է նաև կամային որակների հետ: Ասվածը առանձնապես կարևոր է մաթեմատիկական գործունեության ընթացքում, որտեղ առաջադրված խնդիրները հաճախ դժվարությամբ են լուծվում և պահանջում են մտքի, ուրեմն՝ նաև երևակայության տևական աշխատանք: Հարկ է նկատել, որ նման աշխատանքը դյուրին է դառնում այն բանի շնորհիվ, որ կայունությունը հանդիսանում է գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշ:

Երևակայության ևս մեկ հատկանիշ է նրա ցայտունությունը: Ինչքան ցայտուն են մեր պատկերացումները երևակայության առարկայի մասին, այնքան դյուրին է այդ առարկայի նկատմամբ նախատեսվող մեր պլանների, գործողությունների իրականացումը: Մեկ անգամ ևս նշենք, որ ինչպես ընկալվող, այնպես էլ երևակայական առարկայի ցայտուն պատկերումը և պահպանումը մեր հիշողության մեջ պայմանավորված է ընկալման կամ երևակայության պահին նրա նկատմամբ ցուցաբերած հետաքրքրությունից, ավելին՝ ցայտունությունը ուղիղ համեմատական է ցուցաբերած հետաքրքրությանը. ինչքան մեծ է հետաքրքրությունը, այնքան ցայտուն, գունագեղ, գեղեցիկ է երևում առարկան:

Երևակայության զարգացումը: Մարդու երևակայությունը զարգանում է նրա տարիքի հետ համընթաց: Սկզբնական շրջանում, երբ փոքր է երեխայի իմացությունը շրջակա աշխարհի մասին, մեծ չէ երևակայվող առարկաների համապատասխանությունը իրականությանը. երեխան պատրաստ է մի քանի գծերի համակցությունը պատկերացնել որպես տուն, ավտոմեքենա և այլն: Տարիքի մեծացման հետ միասին երեխայի երևակայական պատկերացումները սկսում են ավելի ու ավելի շատ համապատասխանել իրականությանը: Եթե սկզբնական շրջանում գերիշխում են երևակայության պարզության և ցայտունության հատկանիշները, ապա հետագայում, աստիճանաբար ավելի են կարևորվում հստակությունը և կայունությունը:

Ասվածը նկատի է առնվում մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում: Այն հատկապես կիրառվում է հասկացությունների ուսուցման գործընթացում: Թվի գաղափարը և թվերի հետ գործողությունները, օրինակ, չափազանց դժվար է պատկերացնել առաջին դասարանցու համար: Այդ պատճառով նման գործընթացները ուղեկցվում են զանազան առարկաների նկարների պատկերումներով, ինչը հեշտացնում է, պարզեցնում երևակայության գործընթացը: Եվ միայն նման բազմաթիվ պատկերումների արդյունքում է երեխայի մոտ ձևավորվում մեկի, երկուսի, երեքի և, ընդհանրապես, բնական թվի գաղափարը:

Կարևոր է նկատել, որ երևակայության զարգացումը նշանակում է դրա հատկանիշների զարգացում, իսկ վերջիններս անմիջականորեն կապված են հստակության, պարզության և կայունության գեղագիտական հատկանիշների հետ: Այսինքն՝ երևակայության զարգացումը նշանակում է նաև երևակայությամբ պատկերվող օբյեկտի գեղագիտական գրավչության մեծացում, ինչը նպաստում է ուսուցման գործընթացի արդյունավետության բարձրացմանը:

Հասկանալի է, որ այս և այլ դեպքերում գոյություն ունեն ընդհանուր մոտեցումներ սովորողի երևակայության զարգացման համար: Նման մոտեցումներ կարելի է գտնել [255]-ում, որտեղ բերվում են նաև կոնկրետ հնարքներ, որոնք օգնում են երևակայության զարգացմանը:

ա. Երևակայական պատկերը սովորաբար կառուցվում է մեր հիշողության մեջ եղած պատկերների զանազան համակցություններից: Այդ պատճառով ինչքան մեծ է նման պատկերների քանակությունը, այնքան ավելի դյուրին է երևակայական պատկերի, պատկերացման կամ մտապատկերի կառուցումը: Ընդ որում, երևակայական պատկերի կառուցման գործընթացում երևակայության հետ, հիշողության հետ միասին, համագործակցում են նաև մտածողությունը, ուշադրությունը, կամքը և հոգեկան այլ երևույթներ: Ասվածը ցայտուն է երևում մաթեմատիկայի և նրա ուսուցման գործընթացում: Այստեղ, որպեսզի հնարավոր կամ ավելի դյուրին լինի երևակայական պատկերների կառուցումը, անհրաժեշտ է նյութի վերաբերյալ գիտելիքների որոշակի պաշար, համապատասխան օրինակների իրականացման փորձ:

բ. Մտովի երևակայական օբյեկտի վրա կենտրոնանալու ունակության զարգացում, ինչի համար անհրաժեշտ է նրա պատկերացումը իր մանրամասնության և ամբողջության մեջ: Նման պատկերացումը հատուկ է մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացին, քանի որ այստեղ մաթեմատիկական օբյեկտի յուրաքանչյուր տարր կարող է վճռական նշանակություն ունենալ խնդրի լուծման մեջ, իսկ դրա ճանապարհների որոնումը մեծ մասամբ կախված է լինում օբյեկտի ամբողջական պատկերումից: Օրինակ, դիցուք մենք ուզում ենք լուծել աստիճանների բազմապատկման վերաբերյալ $(x^3y^5z)\cdot(y^2x^7z^3)$ կամ նմանատիպ որևէ այլ վարժություն: Այստեղ մենք պարտավոր ենք նախ երևակայորեն համակցել միևնույն փոփոխականները իրար հետ, ընդ որում, մենք օգտվում ենք արտադրյալի տեղափոխական և զուգորդական օրենքերի իմացությունից և սկսում ենք հերթականությամբ փոփոխականները պատկերացնել իրար կողք և իրականացնել դրանց բազմապատկումը: Առաջին վարժության լուծման քայլերը մանրամասն կատարելուց հետո, մենք հաջորդ նմանատիպ վարժության մեջ որոշ քայլեր կատարում ենք երևակայորեն ու դրանց գրառումը բաց ենք թողնում: Եվ աշակերտի կարողությունների մեծացմանը զուգընթաց, ավելանում է նաև բաց թողած քայլերի քանակը: Որոշ հմտություն ձեռք բերելուց հետո կարելի է ընդհանրապես տեղափոխվել երևակայական դաշտ և հետագա վարժությունները լուծել երևակայորեն: Հասկանալի է, որ այստեղ ուսուցիչը անպայման պետք է ելնի անհատականացման և մատչելիության դիդակտիկական սկզբունքներց:

Իմ աշխատանքային պրակտիկայում ես հաճախ եմ օգտվել նման օրինակներից և համոզվել, որ այս կերպ կարելի է զարգացնել ոչ միայն աշակերտի երևակայությունը, այլև ուշադրությունը և կամային առանձին որակներ: Հարկ եմ համարում նշել նաև, որ երևակայական կամ ինչպես ընդունված է ասել՝ բանավոր լուծման ընթացքը չի ենթադրում այն գրառելու, տեսնելով ստուգելու և նմանատիպ այլ գործողություններ: Դրանք շատ արագ են կատարվում, քիչ ժամանակ են պահանջում, և առանձնապես արդյունավետ են աշակերտական մեծ խմբերով դասարաններում:

գ. Նպատակի առկայությունը երևակայության զարգացման կարևոր պայման է: Իսկապես, նպատակի իրականացման համար անհրաժեշտ խնդիրների նախանշումը, պլանի կառուցումը, ուղիների մշակումը, միջոցների որոնումը կատարվում է առաջին հերթին մեր երևակայության միջոցով: Այստեղ նույնպես կարևոր դեր ունի մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը: Մաթեմատիկական յուրաքանչյուր թեորեմ, խնդիր առաջադրում է որոշակի նպատակ, իսկ համապատասխան ապացուցումը, լուծումը, ինչպես նաև նոր ապացուցման, նոր լուծման որոնումը հստակ պլաններ մշակելու անվերջանալի գործընթաց է, որում հատկապես կամածին երևակայությունը ունի դրսևորման անսպառ հնարավորություններ: Եվ մաթեմատիկայի երևակայական այս աշխարհում մարդկային միտքը, նրա երևակայությունը հաճախ իրագործում է աներևակայելի թռիչքներ:

դ. Ապրել նշանակում է ստեղծագործել, այսինքն՝ որոնել, գտնել նոր ճանապարհներ, որովհետև հաճախ նախկին ճանապարհով կատարվող ընթացքը անհետաքրքիր է, ձանձրալի: Եվ, հավանաբար, կյանքը այնպես է կառուցված, որ իրար նման, նմանատիպ գործողությունները ընկալվում, ապրվում են որպես մեկ գործողություն, այսինքն՝ կարճացնում են մարդու կյանքը: Նոր վայրեր, նոր մարդիկ, նոր գրքերը, նոր գիտելիքները, նոր խնդիրները պահանջում են որոնել, գտնել, հայտնագործել, այսինքն՝ ստեղծագործություն, որտեղ առաջին պլան է մղվում մարդու երևակայությունը: Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը՝ մաթեմատիկայի հիասքանչ, անվերջանալի ու անսպառ ճարտարապետական կառույցով և նույնքան գեղեցիկ ու բազմապիսի իր կիրառություններով, հոգեկան երևույթների ակտիվ փոխհամագործակցության անսպառ մի ասպարեզ է, ստեղծագործական որոնումների անվերջանալի ընթացք, որի առաջամարտիկը լինելու իրավունքը վերապահված է մարդու երևակայությանը:

ԳԼՈՒԽ 3.
ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎԸ ՈՒՍՈՒՑԻՉՆԵՐԻ ՊԱՏՐԱՍՏՄԱՆ ԵՎ ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՄԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳՈՒՄ

3.1. Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացը

3.1.1. Ընդհանուր դիտարկումներ

Բարձրագույն հանրահաշվի ուսուցման նպատակների մասին: Մաթեմատիկայի ուսուցչի պատրաստման համակարգում բարձրագույն հանարահաշվի ուսուցումը ունի մի շարք նպատակներ: Դրանցից հիմնականներն են.

1) Ապագա ուսուցչին անհրաժեշտ հանրահաշվական կուլտուրայի ձևավորումը, մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի, մասնավորապես՝ դպրոցական «Հանրահաշիվ» ուսումնական առարկայի և ֆակուլտատիվ դասընթացների գիտական հիմունքների տիրապետումը, դպրոցական ֆակուլտատիվ դասընթացների համար նյութերի նախապատրաստումը:

2) Լեզվամտածողության և տրամաբանական մտածողության հետագա զարգացումը:

3) Հոգևոր դաստիարակությունը, մաթեմատիկական ճաշակի ձևավորումը:

4) Հարակից առարկաների, այդ թվում՝ մաթեմատիկակայի և ինֆորմատիկայի բնագավառների առարկաների ուսումնասիրության համար անհրաժեշտ գիտելիքների և կարողությունների ձեռքբերումը:

Ծրագիրը: Բարձրագույն հանրահաշվի ծրագրի կառուցման համար հիմք է հանդիսացել Խորհրդային Միության մանկավարժական բուհերի համար պրոֆեսորներ Լ. Յա. Կուլիկովի և Վ. Ի. Նեչաևի կազմած ծրագիրը [360]: Դրանում կատարված են մի շարք արմատական փոփոխություններ: Մասնավորապես, այդ ծրագրից հանված է տրամաբանության տարրերին նվիրված ծավալուն նյութը ամբողջությամբ. Հանրահաշվի ուսուցումը չի կարելի պայմանավորել ուսանողության կողմից դեռևս չուսումնասիրված տեսությամբ, որի ուսուցումը մաթեմատիկական տրամաբանության շրջանակներում կատարվում է ավելի ուշ՝ մաթեմատիկական որոշակի հմտությունների ձևավորումից հետո:

Ծրագրի (տես հավելված 4-Գ) առաջին երեք թեմաները նվիրված են հանրահաշվի տարրերի կառուցմանը: Հաջորդ հինգ բաժինները ամփոփում են գծային հանարահաշվի ավանդական նյութը: Խմբերի և օղակների տեսությունների տարրերը դիտարկվում են երկու բաժիններում: Երեք բաժին նվիրված է բազմանդամների հանրահաշվի ուսումնասիրությանը. Դիտարկվում են՝ մեկ, շատ փոփոխականներով և թվային դաշտերի վրա տրված բազմանդամների հանրահաշիվները: Վերջին բաժինը նվիրվում է դաշտերի տեսության տարրերի ուսումնասիրությանը:

Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացի կառուցվածքը: Հարկ է նկատել, որ մեր հանրապետությունում բարձրագույն հանրահաշվի առաջին գիրքը գրվել է Յու. Մովսիսյանի կողմից՝ համալսարանի մաթեմատիկական մասնագիտությունների ուսանողների համար [105]: Այս տեսակետից ուշագրավ են նաև Վ. Աթաբեկյանի [2], Ա. Ալեքսանյանի [3] և Վ. Միքայելյանի [102] աշխատանքները:

Առաջին հերթին մանկավարժական բուհերի համար նախատեսված մեր դասընթացքը կազմված է ներածությունից, 15 գլուխներից, հանրահաշվի տերմինների ցանկից և գրականության ցանկից (տես [50], [59], [60]): Դասընթացի առաջին 14 գլուխներում լիովին իրականացվել են բարձրագույն հանարահաշվի դասընթացի ծրագրային պահանջները: Բովանդակային առումով դասընթացը ընդգրկում է նաև լրացուցիչ նյութեր, որոնք ունեն երկու նպատակ.

ա. Կուրսային աշխատանքների համար անհրաժեշտ թեմաների նախապատրաստում,

բ. Գալուայի տեսության ուսուցման համար անհրաժեշտ նյութի նախապատրաստում:

Դասընթացում առանձնապես լայն է ընդգրկված խմբերի տեսության բաժինը: Բացի ծրագրային նյութից այստեղ ընդգրկված են՝ խմբերի ուղիղ արտադրյալի վերաբերյալ նյութը, տեղադրությունների ներկայացումը ցիկլերի տեսքով, Քելլիի թեորեմը և նշանափոխ խմբի պարզ լինելու մասին Գալուայի թեորեմը, վերջավոր խմբերի ճշգրիտ մատրիցային ներկայացումները, կոտորակագծային ֆունկցիաների և պրոյեկտիվ հատուկ գծային խումբը, տրվում է վերջավոր աբելյան խմբերի լրիվ նկարագրությունը, դիտարկվում են նիլպոտենտ և լուծելի խմբերի, խմբերի ավտոմորֆիզմների մի շարք հատկություններ:

Դասընթացի վերջին՝ 15-րդ գլուխը ներառում է հանրահաշվի պատմության ժամանակակից հանրահաշվի մասին ակնարկները, անցյալի մաթեմատիկոսների կյանքի և գործունեության մասին համառոտ տեղեկությունների ցանկը:

Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացի շարադրանքը: Դասընթացի շարադրանքում հաշվի են առնված դիտակտիկայի սկզբունքները, առանձնապես գիտականության և գիտակցականության սկզբունքները: Շարադրանքի համար հիմնականում ընտրված է աքսիոմատիկ մեթոդը: Հանրահաշվական համակարգերը դիտարկվում են որպես կիսաֆորմալ աքսիոմատիկ տեսություններ: Ի տարբերություն բարձրագույն հանրահաշվի ավանդական դասընթացների (տես, օրինակ, [104], [183], [225], [258], [260], [278-279], [341-342], [362-363], [358], [423-424], [453]), ներկա դասընթացում հանրահաշվական հիմնական առարկաների հատկությունների ուսումնասիրություններն ավելի հաճախ իրականացվում են աքսիոմատիկ տեսությունների շրջանակներում: Դեդուկտիվ մոտեցման հետ միասին լայնորեն կիրառվում է նաև մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը, անալոգիան, վերացարկումը և ընդհանրացումը, վերլուծումը և համադրումը:

Օրինակների դիտարկումը ունի համակարգված բնույթ. Յուրաքանչյուր հասկացության համար մեկնաբանության նախապես ընտրված ոլորտներից բերվում են օրինակներ, որոնց դիտարկումը հաջորդում է հասկացության սահմանմանը: Նման դիտարկումը ավելի ընդարձակ է դառնում առանցքային հասկացությունների սահմանման դեպքում: Որոշ պնդումների ապացուցումները թողնվում են ընթերցողին: Նման դեպքերը ձևակերպվում են որպես վարժություններ:

Ընդհանուր մեթոդական դիտարկումներ դասընթացի առանձին թեմաների ուսուցման վերաբերյալ:

ա. Երկտեղ առնչությունները: Դասընթացի առաջին թեման նվիրվում է երկտեղ առնչությունների ուսումնասիրությանը, որի հիմքը կազմում են բազմութունների ինտուիտիվ տեսության տարրերը: Այդ տեսության մեջ այստեղ առանձնապես կարևորվում է ծավալայնության և վերացարկման սկզբունքների իմացությունը: Բազմությունների հետ գործողությունների բաժնում լայնորեն պետք է ներառել հանրահաշվի դպրոցական դասընթացի համապատասխան նյութը: Չնայած թվացող արտաքին պարզությանը, որակական դժվարություն ունի երկտեղ առնչության հասկացության ուսուցումը: Այն, ինչպես նաև առնչությունների հատկությունների հետ կապված մեթոդական դժվարությունները կարելի է հաղթահարել՝ ուսումնասիրությունը ուղեկցելով կոորդինատային հարթության պատկերների, գրաֆների, աղյուսակների տեսքով դրանց պատկերմամբ: Առանձնապես կարևոր է ու էֆեկտիվ մարդկային բազմությունների վրա տրված առնչությունների հատկությունների ուսումնասիրությունը: Իսկ գրաֆների տեսքով պատկերումները այս կամ այն հատկությամբ օժտված առնչությունների օրինակների և ժխտօրինակների կազման լայն հնարավորություններ են ստեղծում: Թեմայում դիտարկվում են առնչությունների երեք հիմնական խմբեր՝ համարժեքությունը, ֆունկցիան և կարգը, առնչություններ, որոնք կենտրոնական դեր են խաղում հետագա ողջ դասընթացում: Համարժեքության պարագայում անհրաժեշտ է հանգամանորեն կանգ առնել դպրոցական դասընթացի հետ կապերին, համարժեքության՝ որպես հավասարության մաթեմատիկական դրսևորման առանձնահատկությունների վրա: Հարկ ենք համարում հանգամանորեն անդրադառնալ այդ խնդրին, քանի որ ուսուցչության շրջանում դրա մասին չկա հստակ պատկերացում (մանրամասները տես իմ վերջին գիրքը):

Հավասարության գաղափարի ձևավորման գործում կարևոր դեր ունի նույնացման վերացարկումը: Այն ստացվում է, երբ մտովի առանձնացվում են դիտարկվող օբյեկտների ընդհանուր հատկությունները և դիտարկվող օբյեկտները նույնացվում են այդ ընդհանուր հատկություններն ունենալու տեսանկյունից: Երբեմն ասում են նաև, որ օբյեկտները ընդհանրացվում են, և նույնացման վերացարկումն էլ անվանում են նաև ընդհանրացնող վերացարկում: Դա, իհարկե, չի նշանակում, որ դիտարկվող օբյեկտները լիովին նույնական են, ինչը տեղի ունի միայն տրված օբյեկտի և իր միջև (չնայած՝ սա նույնպես հարաբերական է, որովհետև յուրաքանչյուր օբյեկտ գտնվում է անընդհատ փոփոխության մեջ): Ընդհանրապես, առանց նույնացման վերացարկման անհնար է իրագործել իմացության գործընթացը: Իրարից տարբերե՞լ, օրինակ, իրար հետ ոչ լիովին նույնական՝ հայերեն միևնույն ա տառի տարբեր գրառումները, շախմատի միևնույն ֆիգուրի տարբեր օրինակները, միևնույն բառի տարբեր գրառումները, միևնույն մարդուն՝ ժամանակի տարբեր պահերին և այլն:

Նույնացման վերացարկումը լայնորեն դիտարկվում և դրսևորվում է նաև մաթեմատիկայում և առանցքային դեր է խաղում հավասարության հասկացության ձևավորման գործում: Այստեղ նրա հիմքում ընկած է համարժեքության առնչությունը: Դիտարկվում է առարկաների կամայական ոչ դատարկ A դաս կամ բազմություն և դրա վրա տրված համարժեքության որևէ առնչություն՝ ρ երկտեղ առնչություն, որն օժտված է հետևյալ երեք հատկություններով.

• անդրադարձելի է, այսինքն՝ այդ A բազմության կամայական a տարր ինքն իր հետ մտնում է այդ առնչության մեջ՝ $a\rho a$,

• համաչափելի է, այսինքն՝ A բազմության կամայական a և b տարրերի համար եթե $a\rho b$, ապա $b\rho a$,

• փոխանցելի է, այսինքն՝ A բազմության կամայական a, b և c տարրերի համար եթե $a\rho b$ և $b\rho c$, ապա $a\rho c$:

Եթե A դասի կամ բազմության իրար հետ համարժեք, այսինքն՝ ρ առնչության մեջ գտնվող տարրերը միավորենք միևնույն ենթաբազմության կամ դասի մեջ, ապա այդ դասերը (համարժեքության կամ վերացարկման դասեր) կլինեն ոչ դատարկ, իրար հետ զույգ առ զույգ չեն հատվի և միավորվելով՝ կառաջացնեն A բազմությունը, այլ կերպ՝ մենք կստանանք A բազմության տրոհում (ստացված տրոհումը՝ առաջացած դասերի բամությունը, մաթեմատիկայում կոչվում է A բազմության ֆակտոր-բազմություն ըստ ρ առնչության): Այդ տրոհման տարրերը, որ A բազմության ենթաբազմություններ են, բնութագրվում են իրենց տարրերից յուրաքանչյուրով և հաճախ նույնացվում են այդ տարրերի հետ: Այդ դեպքում միևնույն դասի տարրերը՝ նույնացման վերացարկմամբ, համարվում են հավասար ըստ ρ հարաբերության, ρ-հավասար կամ ուղղակի հավասար, եթե դա տարակարծությունների տեղիք չի տալիս: Հասկանալի է, որ տրոհումը, ի տարբերություն տրված բազմության, արտահայտում է բոլորովին այլ հասկացության ծավալ, և ձևական տեսակետից ճիշտ չէ այդ նոր հասկացության ծավալի տարրերի հավասարության արտահայտման համար օգտագործել նախկին հասկացության ծավալի տարրերի հավասարությունը: Սակայն այս մոտեցումը հաճախ է կիրառվում մաթեմատիկայում. այն գրառումներին հաղորդում է որոշակի պարզություն և տարակարծությունների տեղիք չի տալիս (մանրամասները տես [471], [59]): Բերենք մի քանի օրինակ հանրահաշվից:

Դիտարկենք բոլոր վերջավոր բազմությունների A դասը և նրա վրա տրված հետևյալ μ առնչությունը. Երկու վերջավոր բազմություններ գտնվում են μ առնչության մեջ, եթե նրանց միջև գոյություն ունի վերադրում՝ փոխմիարժեք և վրա արտապատկերում: Ակնհայտ է, որ μ-ն համարժեքություն է, և մենք կարող ենք ստանալ μ-համարժեքության դասերը և A/μ ֆակտոր բազմությունը: Պարզ է նաև, որ միևնույն համարժեքության դասի մեջ մտնում են այն վերջավոր բազմությունները, որոնք ունեն միևնույն թվով տարրեր: Նույնացման վերացարկմամբ մենք համարժեքության միևնույն դասի տարրերը հավասարեցնում ենք իրար և ստանում բնական թվերը՝ որպես համարժեքության դասեր: Իրականում այդ դասերից յուրաքանչյուրը բնորոշում է մեկ բնական թիվ, ինչի պատճառով հենց այդ դասերն էլ կոչվում են բնական թվեր:

Քննարկենք երկրորդ օրինակը: Հանրահաշվում ռացիոնալ թիվը ներմուծվում է ամբողջ թվերի կարգավորված զույգի գաղափարի վերացարկման միջոցով: Դա արվում է հետևյալ կերպ. Դիտարկվում է ամբողջ թվերի բոլոր այն կարգավորված զույգերի բազմությունը, որոնց երկրորդ բաղադրիչը զրոյից տարբեր է: Այդ բազմության մեջ սահմանվում է հետևյալ առնչությունը. (a, b) զույգը առնչվում է (c, d) զույգի հետ այն և միայն այն դեպքում, եթե ad = bc, որտեղ a, b, c, d-ն կամայական ամբողջ թվեր են և b-ն ու d-ն զրոյից տարբեր են: Առանց դժվարության ցույց է տրվում, որ սահմանված առնչությունը համարժեքություն է: Հետևաբար, կարելի է կազմել դիտարկվող զույգերի բազմության տրոհումը՝ ֆակտոր բազմությունը, որի տարրերն էլ կոչվում են ռացիոնալ թվեր: (a, b) զույգը պարունակող ռացիոնալ թիվը կամ համարժեքության դասը, այսինքն՝ (a, b)-ի հետ համարժեք բոլոր զույգերի բազմությունը նշանակվում է a/b տեսքով և անվանվում է նաև a համարիչով և b հայտարարով կոտորակ: Սակայն ընկալման համար նման մոտեցումը բավականին բարդ է, և մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում կարգավորված զույգերի վերացարկման արդյունքում ստացված ռացիոնալ թիվը կամ համարժեքության դասը նույնացվում է այդ դասի կամայական ներկայացուցչի՝ դասին պատկանող կարգավորված զույգի հետ՝ նրա գրառման համար պահպանելով նույն նշանակումը: Ընդ որում, a ամբողջ թիվը նույնացվում է (a, 1) կարգավորված զույգի կամ a/1 կոտորակի հետ, իսկ a/b կոտորակը հավասարվում է a/1 և b/1 կոտորակների քանորդին, ինչը թույլ է տալիս այն ընկալել որպես a և b ամբողջ թվերի քանորդ կամ հարաբերություն: Նշենք, որ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացներում ռացիոնալ թիվը հենց այդպես էլ սահմանվում է: Իհարկե, այնտեղ չեն քննարկվում դրա հիմքում ընկած այն օրինաչափությունները, որոնց մասին մենք խոսեցինք:

Մաթեմատիկայում վերացարկման կիրառմամբ հասկացությունների ձևավորման կարևոր միջոց է այսպես կոչված՝ կոլեկտիվացնող կամ բնութագրիչ հատկությունը, հատկություն, որն ընդհանուր է տրված բազմության որոշ տարրերի համար և միավորում է այդ տարրերը մի բազմության մեջ, ինչը կազմում է այդ հատկությամբ բնորոշվող մաթեմատիկական հասկացության ծավալը: Եթե A բազմության տարրերի բնութագրիչ հատկությունը նշանակենք P(x)-ով, ապա P(x)-ը ճշմարիտ կլինի այն և միայն այն դեպքում, եթե x є A: Այդ դեպքում ընդունված է A բազմությունը գրառել {x | P(x)} տեսքով՝ A = {x | P(x)}: Օրինակ, եթե P(x)-ը հետևյալ հատկությունն է՝ x-ը զույգ բնական թիվ է, ապա 2Z = {x|P(x)} = {x|xєN, x:2}: Հասկանալի է, որ սա զույգ թվերի բազմությունն է կամ «զույգ թիվ» հասկացության ծավալը: Այս հասկացության ընկալումը բավականին դժվար է, բայց կարևոր նաև մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի համար, քանի որ ավագ դպրոցում այն ուսուցանվում է:

բ. Հանրահաշվական համակարգեր: Այս բաժնում առանցքայինը երկտեղ հանրահաշվական գործողությունն է: Կատարվում է վերացական այս հասկացության լայն մեկնաբանություն ինչպես դպրոցական հանրահաշվից հայտնի, այնպես էլ առարկաների նոր տեսակների օրինակների վրա: Քեյլի-պյութագորասյան աղյուսակների դիտարկումը՝ մանավանդ գործողությունների հատկությունների ուսումնասիրության ընթացքում, չափազանց օգտակար է: Դիտարկվում են գործողությունների այն հատկությունները, որոնցով բնութագրվում են խմբի, օղակի և դաշտի հասկացությունները: Այս թեմայի շրջանակներում դիտարկվում են խմբի, օղակի տարրերի պարզագույն հատկությունները, ենթախմբի, ենթաօղակի և իզոմորֆիզմի հասկացությունները: Հոմոմորֆիզմի հասկացության դիտարկումը այս փուլում նպատակահարմար չէ, քանի որ դրա մեկնաբանության հնարավորությունները շատ սուղ են: Ենթախմբերի ուսումնասիրության շրջանակներում դիտարկվում են նաև տեղադրությունների խումբը և նրա նշանափոխ ենթախումբը: Իսկ օղակների հատկության շրջանակներում ներմուծվում են ամբողջության տիրույթի, դաշտի և մարմնի հասկացությունները: Այս պահին չափազանց կարևոր է ըստ մոդուլի գործողությունների օրինակի դիտարկումը, որ կատարվում է դասընթացում: Մասնավորապես՝ պարզ մոդուլով գումարման և բազմապատկման գործողությունների նկատմամբ ստացված վերջավոր դաշտերը կարևոր են, քանի որ վերջավոր դաշտի եզակի օրինակ են: Հաշվի առնելով այս փուլում օղակի գաղափարի մեկնաբանման համար անհրաժեշտ օրինակների սակավությունը, ինտուիտիվ մակարդակով կարելի է դիտարկել նաև մեկ փոփոխականով բազմանդամների օղակը՝ տեսական խիստ շարադրանքը թողնելով ապագային:

գ. Կոմպլեքս թվեր: Կոմպլեքս թվերի ուսումնասիրությունը հրաշալի հնարավորություն է ստեղծում նախորդ թեմայում անցած տեսական նյութի զգալի մասի մեկնաբանությունը ստանալու համար, ինչի վրա ուշադրություն է դարձվում դասընթացում: Չափազանց կարևոր է կոմպլեքս թվի ներմուծումը կապել հավասարումների լուծման և, հատկապես, արմատ հանելու գործողության հետ: Այս պահին օգտակար է թվային հիմնական համակարգերի համեմատումը և գնահատականը հանրահաշվական գործողությունների հետ նրանց ունեցած առնչությունների տեսակետից: Եվ այդ համեմատության մեջ պետք է շեշտել կոմպլեքս թվերի դաշտի մեծ առավելությունները, մասնավորապես՝ նրա մեջ քառակուսային հավասարումների լուծման համար տարբերիչի հասկացության ավելորդությունը:

դ. Վեկտորական տարածություններ: Վեկտորական տարածության սահանումը ուղեկցվում է առարկայական մեկնաբանությունների, օրինակների մեծ թվով: Արտաքին գործողության սահմանման ներմուծումից առաջ այն ցուցադրվում է օրինակների վրա: Վեկտորական տարածության օրինակների մեջ պետք է առանձնացնել երկչափ և եռաչափ իրական վեկտորական տարածությունները և թվաբանական վեկտորական տարծությունը: Նյութի գիտակցական ըմբռնման տեսանկյունից անչափ կարևոր է կոմլեքս թվերի դաշտի դիտարկումը որպես իրական վեկտորական տարածություն և որպես կոմպլեքս վեկտորական տարածություն: Դասընթացում նշվում է նաև դրանց տարբերությունը և հետագա բոլոր հասկացությունների սահմանումներից հետո կատարվում է նշված երկու տարածություններում դրանց մեկնաբանություն: Գծային կախվածության և անկախության վերաբերյալ կարևորագույն նյութը անցնելիս պետք է չբավարարվել այդ հասկացություններից մեկը մյուսի ժխտում ներկայացնելով: Վեկտորական տարածությունների իզոմորֆիզմի մասին թեորեմը անցնելիս պետք է շեշտել այն իրողությունը, որ փաստորեն վեկտորական տարածությունը բնութագրվում է մեկ բնական թվով (տարածության չափողականությամբ): Ենթատարածության հասկացությունը ներմուծելու ընթացքում օգտակար է ենթախմբի և ենթաօղակի հասկացությունների ներգրավումը և դրանց ու ենթատարածության հասկացությունների միջև զուգահեռների անցկացումը: Ուսուցման արդյունավետությունը կմեծանա, եթե ուսանողները իրենք սահմանեն ենթատարածության հասկացությունը: Սկալյար արտադրյալի դիտարկման ընթացքում չափազանց օգտակար է երկչափ տարածության մեջ տրված այնպիսի սկալյար արտադրյալի դիտարկումը, որի նկատմամբ 30° անկյուն կազմող վեկտորները դառնում են ուղղահայաց: Նման օրինակը վերացնում է կաղապարված մոտեցումը և լավ նախադրյալներ է ստեղծում վերացական հասկացությունները և տեսական ընդհանրացումները հասկանալու համար:

ե. Գծային հանրահաշիվներ և մատրիցներ: Թեման սկսվում է օղակներում և վեկտորական տարածություններում դիտարկվող ներքին և արտաքին գործողությունների մասին ընդհանուր ակնարկով և գծային հանրահաշվի հասկացության ներմուծման անհրաժեշտությունը պայմանավորում դրանք համատեղ դիտարկելու խնդրով: Նյութի յուրացման խորությունը ապահովվում է բազմապատկման երկու գործողությունների մասնակցությամբ, որոնք ունեն տարբեր դերակատարություն, և դիտարկվող բանաձևերը հնարավորություն են տալիս ընդգծելու այդ հանգամանքը: Քվատերնիոնների հանրահաշվի ուսումնասիրությունը պարտադիր նյութի մեջ չի մտնում: Մատրիցների հանրահաշվի նյութը շարադրվում է գծային հանրահաշվի հիմնական տարրերը ուսումնասիրելուց հետո, հաջորդաբար՝ մեկ միասնական շղթայի մեջ դիտարկելով մատրիցների գումարային խումբը, օղակը, վեկտորական տարածությունը և գծային հանրահաշիվը: Մատրիցների վեկտորական տարածության դիտարկման ընթացքում մանրամասն կանգ է առնվում տարրական մատրիցի հասկացության, տարրական մատրիցներից կազմված բազիսի վրա: Մատրիցի ռանգի, չվերածվող լինելու և հակադարձելիության հետ կապված խնդիրների լուծումը, լրիվ գծային խմբի ուսումնասիրումը կատարվում են որոշիչից անկախ:

զ. Որոշիչներ: Մեթոդական տեսակետից ամենադժվարը այստեղ որոշիչի սահմանման յուրացումն է: Փորձը ցույց է տալիս, որ սովորողները անսխալ ձևակերպում են այն, սակայն իմաստը չեն ըմբռնում: Այդ պատճառով նպատակահարմար է որոշիչի ավանդական սահմանումը ուղեկցվում է նրա հիմնական վերլուծության հետ, կատարելով անհրաժեշտ համեմատություններ և անցումներ մեկից մյուսը և հանգամանորեն դիտարկելով երկչափ և եռաչափ դեպքերը: Նույն նպատակին կարող են ծառայել նաև միավոր և անկյունագծային մատրիցների որոշիչների հաշվումը՝ հետևելով սահմանմանը: Որոշիչների հատկությունների ապացուցումները կատարելիս նպատակահարմար է օգտվել որոշիչի հիմնական վերլուծությունից: Մատրիցների հակադարձելիության պայմանները, ռանգի հետ որոշիչի կապը, հակադարձելիության պայմանների համարժեքությունը կարևորագույն հարցեր են և պահանջում են համապատասխան ուշադրություն:

է. Գծային հավասարումների համակարգեր: Բաժնում զետեղված նյութը հանրահաշվի դպրոցական դասընթացում ուսումնասիրվող համանուն թեմայի հետ ունի ամենասերտ կապը, ինչը հաշվի է առնվում: Այդ տեսակետից կարևորվում են համակարգի լուծման, համատեղելիության, համակարգերի համարժեքության հասկացությունները, Կրամերի կանոնը, լուծման Գաուսի մեթոդը: Համասեռ համակարգի լուծումների տարածության ուսումնասիրության մեջ նպատակահարմար է օգտվել մատրիցային գրառումից: Այդ նյութը ծառայում է նաև գծային տարածություններին վերաբերող նյութի համակարգված կրկնության միջոց:

ը. Գծային արտապատկերումներ: Նպատակահարմանր է գծային արտապատկերումը դիտել որպես գծային տարածությունների ուսումնասիրման միջոց, և որպես ուսումնասիրության առարկա: Ինչպես խմբերի և օղակների հոմոմորֆիզմների պարագայում, այստեղ նույնպես սահմանումը կարելի է «ստանալ», արտապատկերումից պահանջելով գործողությունների հետ համապատասխան կապի առկայություն: Գծայնության երկու պայմաններից այլ հատկությունների արտածումը բխում է ուսումնասիրության մաթեմատիկական մեթոդի էությունից, ինչի վրա հարկ է ուշադրություն դարձնել: Օրինակների մեջ կարևորագույնը համընդհանուր գծային արտապատկերումն է: Այստեղ պետք է տալ տերմինի բացատրությունը: Անչափ կարևոր է նաև գծային հավասարումների համակարգի միջոցով կամայական վերջավոր չափողականություն ունեցող թվաբանական վեկտորական տարածությունների միջև գծային արտապատկերման կառուցման օրինակը: Հետագայում, գծային արտապատկերումների, մասնավորապես՝ արտապատկերման կորիզի, դեֆեկտի, պատկերի և ռանգի ուսումնասիրությանը զուգընթաց, այդ օրինակի միջոցով նորովի են բացահայտվում համասեռ գծային հավասարումների համակարգի մի շարք կարևոր հատկություններ, ինչի վրա պետք է ուշադրություն դարձնել: Գծային արտապատկերումների և գծային օպերատորների հետ գործողությունների սահմանումները հանրահաշվական համակարգերի դիտարկման ևս մեկ հնարավորություն են ստեղծում: Գծային օպերատորների և մատրիցների հանրահաշիվների իզոմորֆիզմը մաթեմատիկական իրականության մեջ ճանաչողության կարևոր քայլ է, իսկ նրա իրականացումը կարելի է դիտել որպես պարտադիր տեխնիկական մակարդակ: Էվկլիդյան տարածությունների ձևափոխությունների ուսումնասիրությանը կարելի է պայմանավորել այդ տարածություններում սկալյար արտադրյալի առկայությամբ, ինչը թույլ է տալիս դիտարկելու գծային արտապատկերումների հատուկ տեսակ: Թեման ավարտվում է օրթոգոնալ ձևափոխությունների և օրթոգոնալ մատրիցների միջև եղած մի շարք կապերի բացահայտումով, մասնավորապես, ցույց է տրվում համապատասխան խմբերի իզոմորֆիզմը:

թ. Խմբեր: Խմբի գաղափարը հանրահաշվի դասընթացում խաղում է առանձնահատուկ դեր. Այն ընկած է հիմնական հանրահաշվական համակարգերի՝ օղակների, դաշտերի, վեկտորական տարածությունների, մատրիցների, գծային արտապատկերումների կառույցների հիմքում: Հետևելով ծրագրին, խմբերի ուսուցումը նկատարվում է երկու փուլով: Առաջին փուլում խմբի ու ենթախմբի հասկացությունների ուսուցումը և դրանց առարկայական մեկնաբանությունների նպատակը խմբերի տեսության գործառույթի վերը նշված կողմը ապահովելն է: Այն իրականացվում է հանրահաշվի ուսուցման սկզբներին՝ «Հանրահաշվական համակարգեր» թեմայի շրջանակներում: Ավանդաբար այս փուլում ներառվում է նաև խմբերի հոմոմորֆիամներին նվիրված նյութը: Սակայն այն այս փուլում նախատեսված գործառույթը չի իրականացնում, և միաժամանակ հոմոմորֆիզմը մեկնաբանելու համար անհրաժեշտ առարկաների ցանկը դեռևս աղքատ է: Այդ պատճառով համապատասխան նյութը մենք տեղափոխել ենք ուսուցման երկրորդ փուլ: Ուսուցման երկրորդ փուլում ցիկլային խմբերի բաժնում կատարվում է վերջավոր և անվերջ ցիկլային խմբերի նկարագրություն: Այստեղ նպատակահարմար է վերջավոր ցիկլային խմբերի երկրաչափական պատկերումը: Քվազիցիկլային խմբերի ուսուցման ընթացքում նպատակահարմար է քննարկել Շմիդտի պրոբլեմը. Սա դասընթացի միակ հնարավորությունն է հանրահաշվի ժամանակակից պրոբլեմների մասին խոսք բացելու: Հարակից դասերի ուսումնասիրության մեջ կարևոր տեղ է հատկացվում Լագրանժի թեորեմին, ընդգծելվում և ցուցադրվում է նրա կիրառական նշանակությունը վերջավոր խմբերի նկարագրության մեջ: Նորմալ բաժանարարի ուսուցման ընթացքում օգտակար է S(3) խմբի ենթախմբային գրաֆի պատկերումը և նրանում նորմալ բաժանարարների ենթագրաֆի առանձնացումը: Պարտադիր է նաև տեղադրությունների լրիվ խմբի մեջ նշանափոխ խմբի նորմալ բաժանարար լինելու փաստի ապացուցումը: Խմբերի հոմոմորֆիզմների, մանավանդ՝ հոմոմորֆիզմների թեորեմի ուսուցման մեջ կարևոր տեղ ունի բնական հոմոմորֆիզմը: Բոլոր այս նյութերի շարադրանքը դասընթացում ուղեկցվում է բազմազան օրինակների դիտարկումով:

ժ. Օղակներ: Ինչպես խմբերին, այնպես էլ օղակներին նվիրված նյութի շարադրանքը իրականացվում է երկու փուլով: Առաջին փուլի նպատակը օղակի հասկացության կիրարառումն է մարմնի, դաշտի, մատրիցների, գծային օպերատորների ուսումնասիրության մեջ: Երկրորդ փուլում կատարվում է օղակների տեսության ավելի հիմնարար ուսումնասիրություն: Օղակի իդեալի, հոմոմորֆիզմի և ֆակտոր օղակի ուսուցման ընթացքում նպատակահարմար է խմբերի համապատասխան հասկացությունների հետ զուգահեռների անցկացումը: Իդեալների հետ կապված նյութի շարադրումը ամենուրեք ուղեկցվում է ամբողջ թվերի օղակի վրա համապատասխան հասկացությունների և հատկությունների պարտադիր ցուցադրումով: Օղակների հոմոմորֆիզմի դիտարկման ընթացքում կարևոր էդիտարկվող օղակներում տրված գործողությունները նշանակել տարբեր սիմվոլներով, բնական հոմոմորֆիզմը այստեղ ևս կարևոր դեր ունի: Ամբողջության տիրույթի քանորդների դաշտի գոյության և միակության ապացուցումները պարտադիր են: Գաուսյան օղակների նկատմամբ հետաքրքրությունը կտրուկ մեծանում է, եթե դրանց ուսումնասիրությունը սկսվում է այնպիսի օղակների դիտարկումով, որոնցում խախտվում է պարզ արտադրիչների վերլուծության միակության մասին թեորեմը: Գլխավոր իդեալների ուսումնասիրության մեջ հիմնականը դրանց գաուսյան լինելու փաստի ապացուցումն է, իսկ էվկլիդյան օղակներին նվիրված բաժնում ապացուցվում է, որ գաուսյան ամբողջ թվերի օղակը էվկլիդյան է և յուրաքանչյուր էվկլիդյան օղակ գլխավոր իդեալների օղակ է:

ի. Մեկ փոփոխականով բազմանդամներ: Դիտարկվում են ոչ զրոյական, միավորով, տեղափոխական և զուգորդական օղակների վրա տրված մեկ փոփոխականով բազմանդամները, ընդ որում՝ կատարվում է բազմանդամի ներմուծումը երկու եղանակով. էֆեկտիվ ճանապարհով՝ որպես օղակի տարրերի համարյա ամենուրեք վերջավոր անվերջ հաջորդականություն, և տեսական ճանապարհով՝ որպես օղակի պարզ տրանսցենդենտ ընդլայնում: Մեկ փոփոխականով բազմանդամների տեսության մեջ հիմնականը դաշտի վրա տրված բազմանդամների օղակն է: Նրա հատկություններից կարևոր է էվկլիդյան լինելու փաստը: Արմատի գոյության թեորեմը կարևոր է նաև հանրահաշվի հիմնական թեորեմի ապացույցի տեսակետից, որի համար ընտրվում է հանրահաշվի համեմատաբար ավելի մեծ կիրառությամբ ապացուցում՝ առանց Դալամբերի լեմմի կիրառության: Անցած նյութի կրկնության տեսակետից նպատակահարմար է նաև բազմանդամների օղակի, վեկտորական տարածության և հանրահաշվի, ռացիոնալ կոտորակների դաշտի դիտարկումը: Վերջինս կարևոր է նաև դպրոցական հանրահաշվի նյութի համար գիտական հիմքերի ստեղծման տեսակետից: Հաջորդ բաժնի ուսումնասիրության համար կարևոր նշանակություն ունի նաև բազմանդամների գաուսյան օղակի դիտարկումը, որի հիմնական թեորեմի ապացուցումը պարտադիր է:

լ. Մի քանի փոփոխականով բազմանդամներ: Դիտակվում են միայն դաշտի վրա տրված բազմանդամները: Այստեղ կարևոր են բազմանդամների օղակի կառուցումը և նրա գաուսյան լինելու հանգամանքը: Սիմետրիկ բազմանդամների ուսումնասիրությունը պետք է կատարել հիմնական թեորեմի ապացույցի մակարդակով, որը կիրառվում է հանրահաշվի հիմնական թեորեմի ապացույցի մեջ:

խ. Կոմպլեքս, իրական, ռացիոնալ գործակիցներով բազմանդամներ: Այստեղ դիտարկվող նյութը ավանդական է: Նախատեսվում է հանրահաշվի հիմնական թեորեմի ապացուցումը:

ծ. Դաշտերի ընդլայնումները: Նյութը ոչ ավանդական է: Կառուցումը հետապնդում է նաև երկու մասնավոր նպատակ: Նախ՝ մաթեմատիկայի ապագա ուսուցչի մաթեմատիկական կրթության համար շատ կարևոր է հավասարման քառակուսային արմատանշաններով լուծելիության խնդրի դիտարկումը, ապա՝ Գալուայի տեսության հնարավոր ուսումնասիրության դեպքում՝ դաշտերի տեսության տարրերի անհրաժեշտ իմացությունը:

3.1.2. Մաթեմատիկական գաղափարների ձևավորումը և զարգացումը բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացում:

Երկտեղ առնչություններ: Առնչության հասկացությունը ժամանակակից մաթեմատիկայի հիմնարար հասկացություններից է: Նրա վրա է հենվում հանրահաշվի բուհական ողջ դասընթացը: Միևնույն ժամանակ, հանրահաշվի դպրոցական դասընթացի որոշ կարևոր հասկացությունների ուսուցումը նույնպես ուղղակի կամ անուղղակի ձևով հենվում է առնչության հասկացության վրա: Հետևապես՝ այդ հասկացության ուսուցումը բարձրագույն հանրահաշվի շրջանակներում ունի կարևոր նշանակություն մաթեմատիկայի ապագա ուսուցիչների համար: Դասընթացում առնչություններին վերաբերող նյութի ուղղակի շարադրանքը իրականացվում է հետևյալ թեմաների շրջանակներում՝ «բազմություններ», «երկտեղ առնչությունները և նրանց պատկերումը», «առնչությունների հատկությունները», «համարժեքություն», «ֆունկցիաներ և արտապատկերումներ», «կարգի առնչություն»:

ա. Բազմությունների ուսուցումը: Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացում իրականացվում է միայն բազմությունների ինտուիտիվ տեսության շարադրանքը: Բազմության հասկացության ներմուծման փուլում մեթոդական հատուկ մոտեցում են պահանջում հետևյալ խնդիրների լուծումները:

1) Բազմությունների հավասարության հասկացությունը ենթադրում է «այն և միայն այն դեպքում» տրամաբանական ձևի իմացություն, իսկ ենթաբազմության սահմանման մեջ մասնակցում է «եթե ..., ապա ...» ձևը: Դրանք մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացից ծանոթ չեն սովորողներին, այստեղ հանդիպում են առաջին անգամ և պահանջում են մանրակրկիտ վերլուծություն:

2) Որոշակի դժվարություններ է հարուցում բազմության գրառման ուսուցումը: Վերջավոր բազմությունների գրառման ճիշտ ընկալմանը նպաստում են $1 \in \{1\}$, $1 \notin 1$, $\emptyset \in \{\emptyset\}$, $\emptyset \notin \emptyset$ բանաձևերի ճշմարտացիության հարցի քննարկումը, {1, 2, {1,2,3}} տիպի բազմության տարրերի թվի կամ բոլոր տարրերի որոշումը և այլն, ինչը դիտարկվում է դասընթացում: Ավելի դժվար է անվերջ բազմություններ գրառման, մանավանդ՝ վարացարկման ինտուիտիվ սկզբունի միջոցով որոշվող բազմությունների ուսուցումը: Սովորողները լավ չեն յուրացնում $\{x|x \in A, P(x)\}$ կարևորագույն գրառման իմաստը: Այստեղ հատուկ ուշադրություն պետք է դարձնել նշված գրառման ընթերցման վրա. Առանց ճիշտ ընթերցելու դժվար է այն հասկանալ: Իսկ ճիշտ ընթերցումը, ընդհակառակը, նպաստում է գրառման ընկալմանը: Իհարկե, մեծ է նաև օրինակների դերը: Դասընթացում դիտարկվում են հետևյալները (տես [59], էջ 12).

$\{x|x \in Z, 2<x<2\}=\{1, 0, 1\}$, $\{x|x \in Z, 2 \leq x \leq 2\}=\{2, 1, 0, 1, 2\}$, $\{x|x \in R, 2<x<2\}= (2, 2)$:

Փորձը ցույց է տալիս, որ անհրաժեշտ արդյունքը միանգամից չի ստացվում, և հաջողության հասնելու համար դասախոսից պահանջվում են հետևողական ու համառ ջանքեր հետագա ուսուցման ընթացքում:

3) Սովորողները ուսուցման նախնական փուլում շփոթում են $\in$ և $\subseteq$ նշանները: Այստեղ օգտակար է հետևյալ բանաձևերի ճշմարտացիության հարցի քննարկումը.

$\emptyset \in \{\emptyset\}$, $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$, $\{1\} \in \{\{1\}\}$, $\{1\} \subseteq \{\{1\}\}$, $\{1\} \in \{1, \{1\}\}$, $\{1\} \subseteq \{1, \{1\}\}$:

Վերջին վարժությունը կարևոր է այն տեսակետից, որ նրա երկու բանաձևերն էլ ճշմարտ են:

Վերևում առաջադրված խնդիրների լուծման տեսակետից չափազանց օգտակար են միավորման և հատման հետ ենթաբազմության կապն արտահայտող

$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$ ¨ $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

հատկությունները: Իսկ գործողությունների հատկությունների ուսուցման ընթացքում անհրաժեշտ է հանրահաշվական գործողությունների հետ զուգահեռների անցկացումը:

բ. Երկտեղ առնչությունները և նրանց պատկերումը: Թեև երկտեղ առնչության սահմանումը ունի թվացյալ պարզություն, այն ընդամենը $A \times B$ դեկարտյան արտադրյալի ենթաբազմություն է, բայց և այնպես $(a,b) \in \rho$ գրառումը սովորողներ տվյալ մակարդակի համար ունի վերացարկման բավականին բարձր աստիճան և դժվար է ընկալվում: Ուսուցման այս փուլում սովորողների համար որոշակի դժվարություն է ներկայացնում, օրինակ, (1, 2) $\in$ <, (1, 1) $\in$ = տիպի վերացարկումների ընկալումը: Իսկ դրանց համարժեք $1 < 2$ և $1 = 1$ գրառումները նրանց համար սովորական են: Ամբողջ մեթոդական խնդիրը վերջին գրառումներից առաջիններին անցնելու դժվարության հաղթահարումն է: Իհարկե, նպատակահարմար է նախապես դիտարկել $1 < 2$ և $1 = 1$ գրառումները և նոր միայն անցնել (1, 2) $\in$ <, (1, 1) $\in$ = տիպի վերացարկումների: Իսկ հասկացության գիտակցական ընկալման տեսակետից չափազանց կարևոր է ամեն ինչ սկսել առնչության առօրեական օրինակներից. Նյութի յուրացման արդյունավետությունը չափազանց բարձրանում է, երբ առնչության վերացական հասկացությունը մեկնաբանվում է կոնկրետ օրինակների վրա: Ընդ որում, դասընթացում դիտարկվող նմանատիպ օրինակները բաժանվում են երկու խմբի: Առաջինում մտցվում են այն օրինակները, որոնց դիտարկումը նախորդում է ընդհանուր սահմանումներին և տեսական փաստերի ձևակերպումներին: Այս փուլում առանձնապես օգտակար են առօրեական ակնառու օրինակները: Այս տեսակետից սովորողների մոտ մեծ հետաքրքրություն են առաջացնում մարդկային բազմությունների վրա տրված՝ հայր, մայր, քույր, եղբայր, ծնող լինելու և այլ առնչություններ: Հենց դրանց շարադրանքն էլ դասընթացում նախորդում է առնչություններին նվիրված նյութի բոլոր զարգացումներում հանդես եկող տեսական բանաձևումներին:

Օրինակ՝

1). Ծնող = հայր $\cup$ մայր, 2). Քեռի = եղբայր o մայր,

3). Պապ = հայր o հայր $\cup$ հայր o մայր, 4). Տատ = մայր o հայր $\cup$ մայր o մայր:

Նույն նպատակին կարող է ծառայել նաև դահլիճում տեղերի համարակալման համար թվազույգերի օգտագործումը՝ կարգավորված թվազույգի հասկացության ներմուծման ընթացքում և այլն:

Օրինակների երկրորդ խումբը ուսուցման մեջ ավելի մեծ նշանակություն ունի: Դրանք այն օրինակներն են, որոնք դասընթացում հաջորդում են առնչությունների վերաբերյալ տեսական բանաձևումներին: Դրանցում առնչությունները պատկերվում են թվային բազմությունների, կոորդինատային հարթության վրա, երկտեղ և ՔելլիՊյութագորասի աղյուսակներով: Չափազանց արդյունավետ է և դիտողական գրաֆների տեսքով առնչությունների պատկերումը: Թվարկած բոլոր այս պատկերումները պետք է ուսուցման ընթացքում համադրել իրար հետ, որոշ տեսական բանաձևումների համար օգտվել բոլոր պատկերումներից, իսկ այլ բանաձևումների համար ընտրել առավել նպատակահարմար ու ակնառու տարբերակը: Օրինակ, պատկերի և նախապատկերի հասկացությունների ընկալման համար արդյունավետ է առնչության պատկերումը գրաֆի տեքով, իսկ որոշման և արժեքների տիրույթների ուսուցման ընթացքում օգտակար են կոորդինատային հարթության վրա կատարված պատկերումները:

գ. Առնչությունների հատկությունները: Դասընթացում դիտարկվում են անդրադարձելիության և հակաանդրադարձելիության, համաչափության և հակահամաչափության և փոխանցելիության հատկությունները, հատկություններ, որոնք օգտագործվում են հետագա շարադրանքում: Բոլոր այս հատկությունների ուսուցման ընթացքում պետք է ուշադրության կենտրոնում լինեն մեկնաբանության առարկաները: Ինչպես մնացած դեպքերում, այստեղ նույնպես արդյունավետ են մարդկային բազմությունների վրա տրված հատկությունները: Օրինակ, «արդյո±ք սիրելու առնչությունը համաչափելի է», «բարեկամ կամ թշնամի լինելու առնչությունները փոխանեցելի՞ են» տիպի հարցադրումները սովորողների մոտ աշխույժ հետաքրքրություն են առաջացնում նյութի նկատմամբ: Այս կամ այն հատկությամբ օժտված հատկությունների օրինակների և ժխտօրինակների կառուցման տեսակետից դասընթացում օգտագործվում են գրաֆները:

Նշենք նյութի ուսուցման հետ կապված երկու դժվարություն, որոնք ունեն տրամաբանական արմատներ:

1) Սովորողները դժվարանում են հակաանդրադարձելի և ոչ անդրադարձելի, հակահամաչափելի և ոչ համաչափելի հասկացությունները համեմատելիս և հաճախ դրանք շփոթում են իրար հետ: Պատճառը «ոչ» տրամաբանական կապի ոչ լիարժեք

իմացությունն է: Ինչպես մնացած դեպքերում, այստեղ նույնպես նշված հատկությունների տարբերությունը ցույց տալու համար նպատակահարմար է դիմել գրաֆներով պատկերված հատկությունների օգնությանը:

2) Առանց բացառության բոլոր սովորողները չեն կարողանում ցույց տալ < և > առնչությունների հակահամաչափելիությունը.

A $<$ b ¨ b $<$ a $\Rightarrow$ a = b:

Այստեղ, իհարկե, պատճառը հետևության տրամաբանական ձևի չիմացությունն է: Սովորողները չեն պատկերացնում, որ կեղծ պայմանով և հետևությունը միշտ ընդունում է ճշմարիտ արժեք:

դ. Համարժեքություն: Այս նյութը մեծ նշանակություն ունի մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում ընդգրկված հավասարության կարևորագույն հասկացության համար գիտական հիմունքների ստեղծման տեսակետից: Հավասարության հասկացության էությունը պարզաբանելու վերաբերյալ հարցադրումը շատ կարևոր է: Ուսուցման առաջին փուլում անհրաժեշտ է հաշվի առնել հետևյալ երեք դիտարկումները.

1) հավասարության առնչությունը ունի հարաբերական բնույթ և կախված է իրադրությունից, որում այն դիտարկվում է,

2) անկախ իր հարաբերական բնույթից[a] հավասարության առնչությունը բավարարում է անդրադարձելիության, համաչափության և փոխանցականության պայմաններին,

3) հավասարության առնչությունը մաթեմատիկայում հանդես է գալիս համարժեքության անվան տակ:

Առաջին երկու դիտարկումները պետք է ուղեկցել համապատասխան օրինակների քննարկումներով: Համարժեքության առնչության սահմանումից հետո նպատակահարմար է ամբողջ թվերի բազմության վրա տրված $\rho(n)$ առնչության դիտարկումը. $x\rho(n)y \leftrightarrow n|x-y$: Այս օրինակը օգտակար է նաև նյութի հետագա փուլերում կիրառելու համար, մասնավորապես[a] հարակից դասերի և ֆակտոր բազմության հասկացությունների ուսուցման ընթացքում:

Ֆակտոր բազմության և տրոհման հասկացությունների ուսուցման ընթացքում նպատակահարմար է առօրեական օրինակների վրա կատարել տրոհումից ֆակտոր բազմություն և հակառակ անցումները, և նոր միայն անցնել առկա կապի վերաբերյալ տեսական ընդհանուր հատկության ձևակերպմանը և ապացուցմանը: Դրանից հետո դարձյալ հարկ է դիտարկել համապատասխան օրինակներ, մասնավորապես՝ չափազանց օգտակար է ըստ ρ(n) համարժեքության առաջացած ֆակտոր բազնմության դիտարկումը:

Նշենք, որ չնայած եղած բարդությանը, այս նյութի տեսական մասը այնուամենայնիվ ընկալվում է: Ուսանողները սովորաբար դժվարանում են կոնկրետ համարժեքության համար ֆակտոր բազմության կառուցման ընթացքում: Այդ պատճառով անգամ տեսական պարապմունքի ընթացքում անհրաժեշտ է դիտարկել և լուծել կոնկրետ վարժությունների մի քանի օրինակ:

ե. Ֆունկցիաներ և արտապատկերումներ: Նյութի ուսուցումը նպատակահարմար է սկսել առօրեական իրադրության դիտարկումով, որի մոդելավորումը հանգում է առնչության, ընդ որում[a] իրադրությունը պետք է պարունակի այնպիսի զարգացումներ, որոնք հանգեն ֆունկցիայի, արտապատկերման, տարադրման, վրադրման և վերադրման: Նման իրադրություններ կարող է առաջանալ, օրինակ, դասի ընթացքում ուսանողների և նրա նստած նստարանների առնչությունը դիտարկելիս: Դիտարկված օրինակը պետք է քննարկել նաև ֆունկցիաների հատկություններից յուրաքանչյուրի ուսուցման ընթացքում, միաժամանակ ցույց տալով, որ ֆունկցիայի հատկության կատարյալ լինելը նշանակում է նաև համապատասխան իրադրության «կատարյալություն»: Ֆունկցիայի սահմանման և հատկությունների ուսուցման փուլում հարկ է նշել, որ եթե կիրառական իրադրությունը հանգում է առնչության և նրանում տարրերի առնչությունը նշանակում է բաշխում, ապա՝

1) Առնչության ֆունկցիա լինելը նշանակում է բաշխելիս յուրաքանչյուրը կարելի է տալ միայն մեկին,

2) Առնչության արտապատկերում լինելը նշանակում է բաշխելիս յուրաքանչյուրը կարելի է տալ միայն մեկին և յուրաքանչյուրը պետք է տալ,

3) Առնչության տարադրում լինելը նշանակում է բաշխելիս յուրաքանչյուրը կարելի է տալ միայն մեկին և յուրաքանչյուրին մեկից ավելի չի կարելի տալ,

4) Առնչության վրադրում լինելը նշանակում է բաշխելիս յուրաքանչյուրը կարելի է տալ միայն մեկին և յուրաքանչյուրին պետք է հասնի,

5) Առնչության վերադրում լինելը նշանակում է բաշխելիս յուրաքանչյուրը կարելի է տալ միայն մեկին, յուրաքանչյուրին պետք է հասնի, յուրաքանչյուրին մեկից ավելի չի կարելի տալ և յուրաքանչյուրը պետք է տալ:

Պատկերումների տեսանկյունից պետք է առանձնացնել գրաֆով և, իհարկե, կոորդինատական հարթության վրա տրված ֆունկցիաները:

Թվում է նպատակահարմար հայերեն տարադրում, վրադրում և վերադրում եզրերի գործածումը համապատասխանաբար[a] ինյեկցիա, սուրյեկցիա և բիյեկցի[a] հայ երիտասարդին ոչինչ չասող ֆրանսերեն լեզվով գրված եզրերի փոխարեն:

գ. Կարգի առնչություն: Կարգի առնչությունը նույնպես մաթեմատիկայի հիմնարար հասկացություններից է, որը միաժամանակ հաճախ է հանդիպում և կարևոր դեր է խաղում նաև մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում: Այս հանգամանքը պետք է նկատի ունենալ նյութի ուսուցման ընթացքում: Կարևոր է սովորողների ուշադրությունը հրավիրել այն բանի վրա, որ անհավասարությունը նաև առարկաների հատկությունն է, այն հանդես է գալիս առարկաների համեմատության ընթացքում, ընդ որում՝ հատկանիշներից մեկով կարող է մեծ լինել առարկաներից մեկը, մի այլ հատկանիշով՝ մեծ կարող է լինել մյուս առարկան: Այնուհետև, ինչպես հավասարությունը, անհավասարությունը նույնպես ունի հարաբեական բնույթ և կախված է իրադրությունից, որում կատարվում է անհավասարությունը ի հայտ բերող համեմատությունը: Այս ընդհանրական դիտարկումները, ինչպես նաև անհավասարությունը բնութագրող հատկությունների իմացությունը չափազանց կարևոր են ապագա ուսուցիչների համար, հանգամանք, որ պետք է նկատի ունենալ ուսուցման կազմակերպման ընթացքում:

Նյութի ուսուցման շրջանակների մեջ կարելի է մտցնել նաև մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքը, քանի որ այն կապված է բնական թվերի բազմության լիովին կարգավորված լինելու փաստի հետ: Դրա ուսուցման վրա պետք է դարձնել առանձնահատուկ ուշադրություն, նկատի ունենալով մեթոդի կարևորությունը դասընթացի հետագա բաժինների համար:

Մատրիցներ: Մատրիցների ուսումնասիրությանը նվիրված նյութը կազմում է բարձրագույն հանրահաշվի հիմնական բաժիններից մեկը: Եվ հանրահաշվական նյութի կառույցի մեջ և նրա կիրառություններում այն խաղում է առանցքային դեր: Կատարենք մի քանի մեթոդական նկատառումներ մատրիցներին նվիրված թեմայի շարադրման վերաբերյալ:

Հանրահայտ է տարրական ձևափոխությունների դերը մատրիցների ուսումնասիրության մեջ: Դրանք, օրինակ, մեծ կիրառություն ունեն մատրիցի ռանգի, հակադարձ մատրիցի, մատրիցի որոշիչի հաշվման, գծային հավասարումների համակարգերի լուծման և այլ կարևորագույն խնդիրներում: Ավանդաբար (տես, օրինակ, [258], [261] դասագրքերը) մատրիցի տարրական ձևափոխություն ասելով հասկանում են հետևյալ երեք բնույթի ձևափոխությունները.

ա. Մատրիցի կամայական տողի բազմապատկումը դաշտի զրոյից տարբեր տարրով,

բ. Մատրիցի կամայական երկու տողերի տեղափոխությունը,

գ. մատրիցի կամայական տողի գումարումը նրա մի այլ տողի՝ նախապես գումարվող տողը դաշտի՝ զրոյից տարբեր տարրով բազմապատկելով:

Տարրական են կոչվում նաև մատրիցի սյուների հետ կատարվող համապատասխան ձևափոխությունները, որոնք նշանակենք՝ ա', բ', գ':

Վերը նշված դասագրքերում կիրառվում են նշված ձևափոխությունները և դրանց արտադրյալները: Ըստ էության տարրական ձևափոխությունների կիրառության խնդիրը հանգում է այդ ձևափոխությունների հաջորդական կիրառության արդյունքում ծնված բոլոր ձևափոխությունների կամ, որ նույնն է, դրանցով ծնված G խմբի տարրերի կիրառության: Սակայն, կիրառական օբյեկտների վերաբերյալ որևէ հարց քննարկելիս դիտարկվող օբյեկտի բացահայտվող հատկությունը ստուգվում է ոչ թե G խմբի տարրերի, այլ միայն նշված տարրական ձևափոխությունների համար: Իսկ G խմբի տարրերի համար այդ հատկությունները տեղի են ունենում ակնհայտորեն: Արված դիտողությունը ցույց է տալիս, որ ինչքան փոքր լինի G խմբի ծնորդների թիվը և ինչքան պարզ տեսք ունենան դրանք, տեխնիկական տեսակետից այնքան պարզ կլինի նշված հատկությունների բացահայտումը: Ասվածը հաշվի է առնված դասավանդման մեր փորձում և շարադրված է [59] դասընթացում, որտեղ մատրիցի տարրական ձևափոխություն ասելով հասկացվում է միայն երկու տիպի ձևափոխություն.

Մատրիցի կամայական տողի բազմապատկումը դաշտի զրոյից տարբեր տարրով,

մատրիցի կամայական տողի գումարումը նրա մի այլ տողի:

Տարրական են անվանվում նաև մատրիցի սյուների հետ կատարվող նմանատիպ՝ a' և b' ձևափոխությունները:

Ապացուցվում է թեորեմ այն մասին, որ այդ ձևափոխություններով ծնված խումբը համընկնում է G խմբի հետ:

Իսկապես, ձևափոխությունների

$$\begin{pmatrix} \cdots \\ u_i \\ \cdots \\ u_j \\ \cdots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cdots \\ u_i + u_j \\ \cdots \\ u_j \\ \cdots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cdots \\ u_i + u_j \\ \cdots \\ -u_i \\ \cdots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cdots \\ u_j \\ \cdots \\ -u_i \\ \cdots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cdots \\ u_j \\ \cdots \\ u_i \\ \cdots \end{pmatrix}$$

շղթան ցույց է տալիս, որ մատրիցի ձևափոխությունների արտադրյալի միջոցով ստացվում է նրա բ տեսքի կամայական ձևափոխություն:

Իսկ այն, որ a և b տեսքի ձևափոխությունների արտադրյալի միջոցով բ տեսքի ձևափոխության հետ միասին ստացվում է նաև գ տեսքի ձևափոխությունը, ակնհայտ է: Բավական է քննարկել մատրիցի ռանգի, որոշիչի հիմնական հատկությունների կամ մատրիցի չվերածվող լինելու հետ կապված նյութերը, որպեսզի համոզվել արված դիտողության կարևորության մեջ: Օրինակ, [258] և [261] դասընթացներում տարրական ձևափոխություններ կատարելիս մատրիցի ռանգի անփոփոխության հատկությունը տեխնիկապես բավականին բարդ է և ծավալուն, իսկ հիմնական բարդությունը առաջացնում են բ տեսքի տարրական ձևափոխությունների դեպքում մատրիցի տողային ռանգի անփոփոխության ստուգումը: Մինչդեռ [59]-ում նման ստուգման անհրաժեշտությունը չկա:

Մատրիցների ուսումնասիրության մեջ կարևոր տեղ ունեն նաև տարրական մատրիցները և տրանսվեկցիաները: Տարրական են կոչվում այն մատրիցները, որոնց բոլոր տարրերը զրոներ են, բացառությամբ մեկ տարրի, որը հավասար է 1-ի: Եթե տարրական մատրիցի ij տեղում գրված է 1, ապա այն նշանակվում է e_{ij}-ով: $t_{ij}(a)$-ով նշանակվում է 1_n-ը n-րդ կարգի միավոր մատրիցն է, իսկ a-ն սկալյարների K դաշտի կամայական տարր:

Տեխնիկական տեսակետից չափազանց կարևոր է տարրական մատրիցների բազմապատկման հետևյալ հատկությունը. $e_{ij}e_{lr}$=e_{ir}, եթե j=r և $e_{ij}e_{lr} = 0$, եթե j$\neq r$: Այս հատկության միջոցով հեշտությամբ ցույց է տրվում, որ բոլոր տրանսվեկցիաները հակադարձելի են, բացառությամբ $t_{ii}(-1)$, i=1, 2, … , n տեսքի տրանսվեկցիաների: Ընդ որում.

Եթե i$\neq j$, ապա $t_{ii}(\mathrm{a})^{-1}$=t_{ii}(-a),

եթե a$\neq -1$, ապա $t_{ii}(\mathrm{a})^{-1}$=t_{ij}(-a/(1+a)):

Տարրական մատրիցների վերը նշված հատկության միջոցով ապացուցվում են նաև հետևյալ կարևոր հատկությունները.

մատրիցը ձախից բազմապատկել t_{ij}(a)-ով նշանակում է մատրիցի j-րդ տողը բազմապատկել a-ով և այն գումարել մատրիցի i-րդ տողին,

մատրիցը աջից բազմապատկել t_{ij}(a)-ով նշանակում է մատրիցի ij-րդ սյունը բազմապատկել a-ով և այն գումարել մատրիցի j-րդ սյանը,

մատրիցը աջից բազմապատկել t_{ij}(a)-ով նշանակում է նրա i-րդ սյունը բազմապատկել (1+a)-ով:

Այս հատկությունները թույլ են տալիս կատարելու տրանսվեկցիաների միջոցով մատրիցի հակադարձելիության և չվերածվող լինելու հետևյալ բնութագրումները.

Մատրիցը հակադարձելի է այն և միայն այն դեպքում, եթե այն կարելի է ներկայացնել $t_{ii}(-1)$ (i=1, 2, … , n) տեսք չունեցող մատրիցների արտադրյալի տեսքով,

Մատրիցը չվերածվող է այն և միայն այն դեպքում, եթե այն կարելի է ներկայացնել $t_{ii}(-1)$ (i=1, 2, … , n) տեսք չունեցող մատրիցների արտադրյալի տեսքով:

Վերջին հատկությունը կարևոր է նաև այն տեսակետից, որ օգտագործվում է խմբի ծնորդներին նվիրված թեմայի ուսումնասիրության մեջ և, ըստ էության, տալիս է լրիվ գծային խմբի ծնորդների մի կարևոր ընտանիք. այն է՝ $t_{ii}(-1)$ (i=1, 2, …, n) տեսք չունեցող տրանվեկցիանների բազմությունը:

Հարկ ենք համարում նկատել, որ ինչպես մատրիցի ռանգի, այնպես էլ նրա հակադարձելիության ու չվերածվող լինելու հատկությունների ուսումնասիրությունները տվյալ փուլում չեն կապվում որոշիչի հասկացության հետ, ինչի հնարավորությունը տալիս են տրանսվեկցիաները:

Տրանսվեկցիաները հաջողությամբ օգտագործվում են նաև որոշիչների ուսումնասիրության մեջ: Մասնավորապես, մատրիցների արտադրյալի որոշիչի մասին հանրահայտ հատկությունը ունի շատ պարզ ապացույց տրանսվեկցիաների կիրառմամբ: Այդ հատկության ապացույցը կատարվում է հետևյալ սխեմայով.

1) կամայական A մատրիցի և T տրանսվեկցիայի համար $|TA| = |T||A|$,

2) կամայական A մատրիցի և $T_1, T_2, \dots, T_n$ տրանսվեկցիաների համար

$$|T_1 T_2 \dots T_n A| = |T_1||T_2| \dots |T_n||A|$$

3) կամայական A և B մատրիցների համար $|AB| = |A||B|$:

Այս վերջին հատկությունը ակնհայտ է, եթե B մատրիցը վերածվող է: Իսկ եթե այն չվերածվող է, ապա ներկայացվում է տրանսվեկցիաների արտադրյալի տեսքով և խնդիրը հանգում է նախորդ հատկության կիրառմանը:

Խմբեր: Խմբի գաղափարը ժամանակակից մաթեմատիկայի կարևորագույն գաղափարներից է: Այն մեծ կիրառություն ունի ինչպես մաթեմատիկայում, այնպես էլ կիրառական շատ ոլորտներում: Առանձնահատուկ է նաև խմբերի տեսության դերը հանրահաշվի մեջ: Այն, մի կողմից, հանրահաշվի ճյուղերի մեջ առաջատար է հետազոտությունների արդիականության, ուղենիշային նշանակության տեսանկյունից: Մյուս կողմից խմբերի տեսությունը ընկած է հանրահաշվի այլ տեսությունների հիմքում: Ասվածը ցույց է տալիս նաև այն կարևոր դերը, որ ունի խմբերի տեսությունը մաթեմատիկայի ուսուցիչների պատրաստման համակարգում: Եվ պատահական չէ, որ բարձրագույն հանրահաշվի ժամանակակից դասընթացների շարադրանքը, ըստ էության, խարսխվում է խմբերի տեսության տարրերի վրա (տես [37-39], [57]): Ներկա դասընթացը նույնպես ընդգծվում է խմբերի տեսության կարևոր դերը: Նրանում խմբերի տեսության շարադրանքը կատարվում է երկու ճանապարհով՝

ա. տեսության ուղղակի շարադրանք,

բ. նրա կիրառություն դասընթացի այլ բաժիններում:

ա. Խմբերի տեսության ուղղակի շարադրանքը կատարվում է երկու փուլով:

1) Առաջին փուլում ներմուծվող բաժինը ընդգրկում է խմբերի տեսության այն նվազագույն նյութը, որ անհրաժեշտ է դասընթացի հետագա շարադրանքը իրականացնելու համար: Դրանք են՝ խմբի, ենթախմբի, խմբերի իզոմորֆիզմի, տեղադրությունների լրիվ խմբի և նշանափոխ խմբի հասկացությունները և դրանց պարզագույն հատկությունները: Նշենք, որ այս փուլում տեղադրությունների լրիվ խմբի և նշանափոխ խմբի ուսուցումը պայմանավորված է որոշիչի հասկացության ներմուծման՝ դասընթացում կիրառվող մեթոդիկայով, որը հենվում է այդ հասկացությունների վրա:

Խմբի հասկացության վերացական լինելու հանգամանքը հաշվի առնելով՝ անհրաժեշտ է նրա ուսուցումը ուղեկցել օրինակների առատությամբ: Դասընթացում որպես նման օրինակներ ծառայում են թվային բազմությունների գումարային և արտադրյալային խմբերը, {0, 1, 2, …, n-1} բազմության՝ ըստ n բնական մոդուլի գումարային խումբը, բազմության բուլիանի խումբը՝ սիմետրիկ գումարման գործողության նկատմամբ, ՔելլիՊյութագորասի աղյուսակով տրված խմբերը, ինքնահամատեղումների խմբերը: Վերջիններս դիտողական են դարձնում նյութը և մեծ հետաքրքրություն են առաջացնում սովորողների շրջանում, ապահովում միջառարկայական կապը երկրաչափության հետ:

Խմբերի իզոմորֆիզմի ուսուցման ընթացքում շատ կարևոր է դիտարկվող խմբերում գործողությունները նշել տարբեր նշաններով: Այն հնարավորություն կտա ապահովելու ուսուցման գիտակցականությունը և ստուգելու սովորողի գիտելիքի կայունությունը: Խմբերի իզոմորֆիզմի՝ բավականին բարդ ու վերացական հասկացության նեմուծումը նպատակահարմար է նախորդել այնպիսի օրինակների դիտարկումով, որոնք ցույց կտան իզոմորֆ խմբերի ձևական տարբերությունը և էական ընդհանրությունը: Այդ նպատակին լավագույնս ծառայում են Քելլի-Պյութագորասի աղյուսակով տրված պարզ խմբերը: Դրանք իրարից կարելի է տարբերել շտրիխներով, որոնք դրվում են թե՛ հիմնական բազմությունների տարրերի, թե՛ գործողությունների նշանների վրա: Այդ դեպքում ձևական տարբերությունն ակնառու է: Իսկ էական ընդհանրությունը երևում է այն բանից, որ եթե այդ խմբերից մեկը չլինի, ապա մյուսի և տրված իզոմորֆիզմի միջոցով հնարավոր կլինի վերականգնել մյուսը: Վերջին մոտեցումը հնարավորություն է տալիս նաև հասկանալ իզոմորֆիզմի սահմանման հիմքում ընկած պայմանների նշանակությունը: Իզոմորֆիզմի հասկացության տեխնիկական տիրապետման տեսակետից կարևոր է իզոմորֆիզմի առնչության համարժեքություն լինելու հանգամանքի մանրակրկիտ ապացուցումը, որը նպաստում է նաև սովորողի մաթեմատիկական ընդհանուր մակարդակի բարձրացմանը: Խմբերի իզոմորֆիզմին վերաբերող օրինակների մեջ չափազանց կարևոր է իրական դրական թվերի արտադրյալային խմբի և իրական թվերի գումարային խմբի իզոմորֆիզմը, որն իրականացվում է լոգարիթմական ֆունկցիայի միջոցով: Այստեղ հնարավորություն է ստեղծվում խոսելու լոգարիթմի դերի և այն ստեղծելու դրդապատճառների մասին. այն է՝ լոգարիթմը հնարավորություն է տալիս բազմապատկման գործողությունը փոխարինելու գումարման գործողությամբ, ինչը շատ ավելի դյուրին է:

«Ենթախմբեր» թեմայի ուսուցման ընթացքում անհրաժեշտ է նշել, որ խմբերի տեսության նպատակներից մեկը հնարավորինս շատ խմբեր ճանաչելն է, և այդ նպատակին հասնելու համար որոնումները ավելի դյուրին են, երբ մենք աշխատում ենք գտնել արդեն հայտնի խմբի ենթախմբերը: Պետք է ընդգծել ենթախմբերի մասին պնդման դերը. այն ենթախումբ լինելու վերաբերյալ չորս պայմանները փոխարինում է երկուսով: Սովորողների հանրահաշվական ընդհանուր մակարդակի բարձրացմանն են նպատակաուղղված ենթախմբի առնչությունը կարգի առնչություն լինելու, ամբողջ թվերի գումարային խմբի բոլոր ենթախմբերի նկարագրության, խմբերի իզոմորֆիզմի հետ ենթախմբի հասկացության կապի մասին պնդումները, որ բերվում են դասընթացում: Ուսուցման արդյունավետությունը անհամեմատ ավելի բարձր կլինի, եթե այդ պնդումները սովորողները ապացուցեն ինքնուրույն:

Տեղադրությունների և նշանափոխ խմբերի բաժնում կարևորվում է անցումը տեղափոխությունից տեղադրություն՝ թե դրանց թվի, թե զույգության տեսակետից: Այստեղ բերվում են նաև տեղադրությունների լրիվ խմբի և նշանափոխ խմբի կարգերի մասին պնդումների ապացուցումները, որոնք անհրաժեշտ են հետագայում՝ որոշիչներին վերաբերող նյութի ուսուցման ընթացքում:

2) Խմբերի տեսության ուսուցման երկրորդ փուլում նախատեսվում է ցիկլային խմբերի, նորմալ բաժանարարի հետ կապված նյութի՝ ընդհուպ մինչև հոմոմորֆիզմների մասին թեորեմի ուսուցումը: Դասընթացում շարադրվում են նաև խմբերի ուղիղ արտադրյալի, տեղադրությունների խմբերի (Քելլիի թեորեմը), մատրիցային և աբելյան, ինչպես նաև լուծելի և նիլպոտենտ խմբերի պարզագույն հատկությունները: Ցիկլային խմբերի ուսումնասիրության սկզբում ներմուծվում է խմբի կամայական տարրի ամբողջ ցուցիչով աստիճանի գաղափարը: Այն առնչվում է մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի[a] արտահայտության ամբողջ ցուցիչով աստիճանի հասկացության հետ, և նպատակահարմար է համառոտ անդրադարձը վերջին հասկացությանը և նրա հատկություններին[a] հիմնական նյութին անցնելուց առաջ: Խմբի տարրի ամբողջ ցուցիչով աստիճանի հատկությունների ապացուցումը կարելի է հանձնարարել ինքնուրույն աշխատանքի համար: Z և C(n) խմբերի իմացությունը պետք է պարտադրել բոլոր ուսանողներին: Դրանք, ըստ էության, գոյություն ունեցող բոլոր ցիկլային խմբերն են: Այս փաստը ապացուցվում է ցիկլային խմբերի նկարագրությանը նվիրված կետում: Ցիկլային խմբի օրինակը պետք է դիտարկել նաև խմբի ծնորդներին նվիրված նյութի շրջանակներում[a] որպես մեկ տարրով ծնված խումբ:

Հարակից դասի հասկացությունը կարելի է ներմուծել երկու եղանակով: Կարելի է ներմուծումը կատարել ավանդական եղանակով[a] հարակից դասը դիտարկելով որպես տրված ենթախմբի տարրերի հետ խմբի տրված տարրի արտադրյալների բազմություն: Կարելի է նաև G խմբի և նրա A ենթախմբի համար սահմանել G բազմության վրա տրված $\rho(A)$ առնչությունը հետևյալ կերպ. $x\rho(A)y \leftrightarrow x^{-1}y\epsilon A$: Հեշտությամբ ցույց է տրվում, որ $\rho(A)$ առնչությունը համարժեքություն է, ըստ որի համարժեքության դասերը համընկնում են խմբի հարակից դասերի հետ: Հետագայում ցույց է տրվում, որ նշված համարժեքությունը կոնգրուենցիա է այն և միայն այն դեպքում, եթե A ենթախումբը նորմալ բաժանարար է: Այս մոտեցումը թեպետ և պարունակում է որոշակի դժվարություններ, բայց և լիարժեք բացահայտում է նորմալ բաժանարարի դերը: Զուգահեռաբար, նույն նպատակին է ծառայում նաև ըստ կամայական ենթախմբի հարակից դասերի բազմության վրա երկտեղ գործողության ներմուծման փորձը. Այն հաջողվում է իրականացնել այն և միայն այն դեպքում, եթե տրված ենթախումբը նորմալ բաժանարար է: Այս երկու մոտեցումներն էլ ունեն ճանաչողական կարևոր նշանակություն և լուրջ տեխնիկական դժվարություններ չեն պարունակում: Օրինակների ցանկում կարելի է դիտարկել թվային բազմությունների գումարային և արտադրյալային խմբերի, վեկտորների խմբի, տեղադրությունների և մատրիցային խմբերի ենթախմբերն ու նորմալ բաժանարարները: Դրանք օգտագործվում են նաև հաջորդ[a] ֆակտոր խմբի հասկացության մեկնաբանության ընթացքում:

Հոմոմորֆիզմների մասին թեորեմի ուսուցումը նպատակահամրար է ուղեկցել համապատասխան դիագրամով. Այն նյութը դարձնում է ավելի դիտողական: Պետք է հատուկ կանգ առնել թեորեմի $G/\mathrm{ker}f \cong B$ մասի վրա, որտեղ f–ը G և B խմբերի միջև տրված վրադրող հոմոմորֆիզմ է:

Տեղադրությունների խմբերի ուսումնասիրությունը սկսվում է ցիկլի գաղափարի ներմուծումով: f անշարժ տարրի միջոցով համապատասխան ձևական շարաֆդրանքը ընկալվում է մեծ դժվարությամբ, եթե այն չի ուղեկցվում ինտուիտիվ մոտեցումներով: Այս թեմայում կարևոր նշանակություն ունեն տեղադրության զույգության բնութագրումը նրա դեկրեմենտի միջոցով, նշանափոխ խմբի նորմալ բաժանարարների մասին Գալուայի թեորեմը և կամայական խմբի տեղադրությունների խումբ լինելու մասին Քելլիի հայտնի թեորեմը: Եթե Գալուայի թեորեմի ապացուցման ընթացքում անհնար է առաջ գնալ առանց գրքային արտածման մանրակրկիտ քայլերին հետևելու, ապա

Քելլիի թեորեմը սովորողները կարող են ապացուցել[a] օգտվելով միայն ապացուցման ընդհանուր ուրվագծից:

Ինչպես մատրիցային խմբերի, այնպես էլ խմբերի տեսության մնացած թեմաների շարադրանքը ծրագրային չէ և չի մտնում ուսուցման պարտադիր մակարդակի մեջ: Սակայն այդ թեմաները կարելի է հաջողությամբ օգտագործել կուրսային աշխատանքների կատարման ընթացքում: Թեմաներն ընտրված են այնպես, որ հետագայում Գալուայի տեսությունը անցնելու դեպքում խմբերի տեսության այլ փաստերի կարիք չլինի:

բ. Խմբերի տեսության անուղղակի ուսուցումը կատարվում է դասընթացի այլ բաժիններում տեսության կիրառության միջոցով: Նման կիրառությունները առաջին հերթին վերաբերում են այն հանրահաշվական համակարգերին, որոնց սահմանման մեջ մասնակցում է խմբի հասկացությունը: Դա վերաբերում է օղակներին (օղակի հիմնական բազմությունը գումարման գործողության հետ կազմում է նրա գումարային խումբը), մարմիններին (մարմնի հիմնական բազմությունը գումարման գործողության հետ կազմում է մարմնի գումարային խումբը, իսկ նույն բազմությունը[a] առանց զրոյի կազմում է մարմնի արտադրյալային խումբը), դաշտերին (դաշտի հիմնական բազմությունը գումարման գործողության հետ կազմում է դաշտի գումարային խումբը, իսկ նույն բազմությունը առանց զրոյի կազմում է դաշտի արտադրյալային աբելյան խումբը), վեկտորական տարածություններին և գծային հանրահաշիվներին (դիտարկվում են դրանց գումարային խմբերը): Եթե նկատի ունենանք, որ նշված համակարգերի ուսումնասիրությունը՝ խմբերի ուսումնասիրության հետ միասին, կազմում է բարձրագույն հանրահաշվի հիմնական խնդիրներից մեկը, ապա պարզ կդառնա այն հսկայական նշանակությունը, որ ունի խմբի հասկացության այս անուղղակի ճանապարհով կիրառման մեջ:

Խմբերի տեսության հաջորդ կարևոր կիրառությունը ստացվում է բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացում դիտարկվող հանրահաշվական առարկաների ուսումնասիրության ընթացքում: Դրանք մեծ մասամբ հանգում են առարկաների տվյալ բազմության և նրա վրա սահմանված գործողությունների հատկությունների բացահայտմանը, հատկություններ, որոնք շատ հաճախ լինում են խմբային: Այդպիսիք են կոմպլեքս թվերի գումարային և արտադրյալային խմբերն ու նրանց ենթախմբերը, կամայական բազմության համաչափությունների խմբերը և նրա ենթախմբերը, լրիվ գծային խումբը և նրա ենթախմբերը, գծային տարածության ավտոմորֆիզմների խումբը և այլն: Այստեղ կարևոր է վերջավոր չափողականության գծային տարածության ավտոմորֆիզմների խմբի և լրիվ գծային խմբի իզոմորֆիզմի դիտարկումը: Չափազանց կարևոր է կամայական դաշտի վրա տրված հավասարման արմատների խմբի ուսումնասիրությունը: Նրա հատկություններից կախված է հավասարման արմատանշաններով լուծելիության հարցը, հանգամանք, որը սակայն ուսումնասիրվում է միայն Գալուայի տեսության մեջ: Ինչպես նշվեց վերևում՝ դասընթացում խմբերի տեսության մասով ընդգրկված նյութը լիովի բավարար է Գալուայի տեսության հետագա ուսումնասիրության համար:

Օղակներ: Օղակների տեսության ներառումը բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացում պայմանավորված է մի շարք գործոններով: Նախ՝ թվային կարևորագույն համակարգերը կազմում են օղակներ, օղակներ են նաև մեկ և մի քանի փոփոխականների բազմանդամների, ինչպես նաև՝ մատրիցների, տրված տարածության գծային օպերատորների համակարգերը: Միաժամանակ, օղակների տեսությունը ունի չափազանց մեծ կիրառություն բարձրագույն հանրահաշվի ողջ դասընթացում: Վերջապես, խմբերի տեսության հետ օղակների տեսության առկայությունը զուգահեռների լայն հնարավորություն է ստեղծում և հեշտացնում վերացարկման բարձր աստիճանով օժտված նյութի ուսուցումը: Նշված զուգահեռները հող են նախապատրաստում նաև ընդհանուր հանրահաշվի ուսուցման համար:

Ինչպես խմբերի, այնպես էլ օղակների տեսության ուսուցումը կազմակերպվում է երկու ճանապարհով՝ օղակների տեսության ուղղակի ուսուցում և օղակների ուսուցում այլ նյութերին նվիրված բաժիններում:

ա. Օղակների տեսության ուղղակի ուսուցումը կատարվում է երկու փուլով: Առաջին փուլում ընդգրկված է այն նյութը, որը նպաստում է բարձրագույն հանրահաշվի այլ բաժինների շարադրանքը իրականացնելու համար և իրականացվում է հանրահաշվական համակարգերին նվիրված ընդհանուր բաժնի շրջանակներում: Այստեղ մի կողմից օղակի և նրա հետ կապված կարևորագույն հասկացություններն են՝ մարմին, ամբողջության տիրույթ, դաշտ, հասկացություններ, առանց որոնց հնարավոր չէ կառուցել բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացը, մյուս կողմից բարձրագույն հանրահաշվի կարևորագույն օբյեկտներ՝ թվային, ըստ բնական մոդուլի, կամայական բազմության բուլիանի օղակները, որոնք նույնպես առանցքային դեր են խաղում դասընթացի հետագա բաժիններում: Այս բաժնում կատարվում է նաև օղակների հետագա ուսումնասիրության համար անհրաժեշտ նյութի շարադրանքը[a] կապված օղակների իզոմորֆիզմի, ենթաօղակի և որոշ այլ հիմնարար հասկացությունների հետ:

Երկրորդ փուլում կատարվում է օղակի իդեալի, հոմոմորֆիզմի և ֆակտոր օղակի հետ կապված նյութի ուսուցում՝ հոմոմորֆիզմների թեորեմի ներգրավմամբ: Այնուհետև, դիտարկվում են օղակի բնութագրիչի և նրա նվազագույն ենթաօղակի և ենթադաշտերի կապը: Դպրոցական դասընթացի համար չափազանց կարևոր է ամբողջության տիրույթի քանորդների դաշտին նվիրված նյութը. Այստեղ համապատասխան կառուցումները տեխնիկական տեսակետից շատ նման են ամբողջ թվերի միջոցով ռացիոնալ թվերի ստացման տեխնիկային: Դասընթացում քանորդների դաշտի ընդհանուր հասկացության ներմուծումից հետո, նախկան գոյության թեորեմի ապացուցումը, դիտարկվում են ռացիոնալ թվերի օղակը՝ որպես ամբողջ թվերի ամբողջության տիրույթի քանորդների դաշտ և գաուսյան ռացիոնալ թվերի դաշտը՝ որպես գաուսյան ամբողջ թվերի օղակի քանորդների դաշտ: Հանգամանորեն քննարկվում են գաուսյան, գլխավոր իդեալների և էվկլիդյան օղակները, դրանց կապը, ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի և ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի, ինչպես նաև՝ բաժանականության հատկությունները այդ օղակներում: Այստեղ կատարենք հետևյալ կարևոր դիտարկումները:

1) Չափազանց մեծ նշանակություն ունեն այն հասկացություններն ու հատկությունները մեկնաբանող օրինակները, որոնք իրենց բնույթով տարբերվում են թվային օղակներից: Օրինակ, զրոյի բաժանարարի գոյությունը, պարզ արտադրիչների վերլուծության միակության խախտումը և այլն: Դասընթացում վերջին դեպքի համար

դիտարկվում է $\{m+n\sqrt{-3}|m,n \in Z\}$ թվային օղակը, որի մեջ 2, $1+\sqrt{-3}$, $1-3$ տարրերը պարզ թվեր են և, միաժամանակ,

$$4 = 2 \bullet 2 = (1+\sqrt{-3}) \bullet (1-3):$$

Այսինքն՝ նշված օղակի 4 տարրը երկու ձևով վերլուծվեց պարզ արտադրիչներքի արտադրյալի տեսքով:

2) Կարևոր են նաև թվային օղակների հետ կապված հասկացությունների և հատկությունների ընդհանրացումները: Այս տեսակետից հետաքրքիր են երկու տարրերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի և ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի գոյության փաստերը և նրանց ապացուցումները: Գաուսյան օղակներում այս խնդիրը լուծվում է հեշտությամբ: Դասընթացում շատ պարզ եղանակով ցույց է տրվում, որ եթե ունենք գաուսյան օղակի a, b տարրերի

$$a = cp_1^{k_1} \dots p_n^{k_n},\ b = c'p_1^{l_1} \dots p_n^{l_n},$$

կանոնական վերլուծությունները, որտեղ պարզ արտադրիչների որոշ ցուցիչներ կարող են լինել նաև զրոյական, ապա՝

$$(a, b) = c''p_1^{\min(k_1,l_1)} \dots p_n^{\min(k_n,l_n)},$$

$$[a, b] = c''p_1^{\max(k_1,l_1)} \dots p_n^{\max(k_n,l_n)}:$$

Այսպիսով՝ ամբողջ թվերի համար հայտնի և կարևոր այս հավասրությունները տեղի ունեն նաև կամայական գաուսյան օղակներում:

Ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի հատկությունների հետագա ուսումնասիրությունը իրականացվում է գլխավոր օղակների՝ ավելի նեղ դասում: a_1, a_2, …, a_n ամբողջ թվերի d ընդհանուր բաժանարարի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար լինելու և x_1, x_2, …, x_n համապատասխան թվերի համար

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n = d$$

հավասարության իրավացիության համարժեքության ապացուցումը դասընթացում իրականացվում է գլխավոր իդեալների կամայական օղակի համար: Մասնավորապես, ցույց է տրվում, որ նշված օղակների a_1, a_2, …, a_n տարրերը փոխադարձաբար պարզ են այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունեն նրա այնպիսի x_1, x_2, …, x_n տարրեր, որ տեղի ունենա $x_1a_1 + x_2a_2 + … + x_na_n = 1$ հավասարությունը:

Ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի հասկացության համար նույնպես բերվում է հետաքրքրական կիրառություն գլխավոր իդեալների օղակների համար: Ցույց է տրվում, օրինակ, որ գլխավոր իդեալների օղակի a1, a2, …, an տարրերի համար q ն ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկ է այն և միայն այն դեպքում, եթե

$$(q) = (a_1) \cap (a_2) \cap … \cap (a_n):$$

Ամբողջ թվերի օղակում, օրինակ, 6-ը 2 և 3 թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկն է և $(n) = nZ$, $n \in Z$, $2Z \cap 3Z = 6Z$: Հետևապես՝$(6) = (2) \cap (3)$:

Ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի հետևությունների հետագա ուսումնասիրությունն իրականացվում է էվկլիդեսյան օղակներում: Մասնավորապես, ցույց է տրվում նման օղակների տարրերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը գտնելու համար կիրառելի է էվկլիդեսի ալգորիթմը:

բ. Օղակների անուղակի ուսուցումը կատարվում է կոմպլեքս թվերի դաշտի, կամայական դաշտի վրա տրված մատրիցների հանրահաշվի, գծային արտապատկերումների, մեկ փոփոխականով և մի քանի փոփոխականով բազմանդամների օղակների, կոմպլեքս, իրական և ռացիոնալ գործակիցներով բազմանդամների ուսումնասիրության ընթացքում: Ընդ որում, նշված օղակների մի շարք հատկություններ, օրինակ՝ մի քանի փոփոխականով բազմանդամների չվերլուծվող արտադրիչներ արտադրյալի տեսքով վերլուծման գոյությունը և միակությունը, ապացուցվում են ոչ թե բովանդակային, այլ ֆորմալաքսիոմատիկ մատեցմամբ՝ կամայական օղակի ընդհանուր հատկությունների շրջանակներում: Կատարենք որոշ նկատառումներ նշված օղակների շարադրման վերաբերյալ:

1) Կոմպլեքս թվերի դաշտի՝ դասընթացում բերված հետաքրքիր եղանակը հավանաբար առաջին անգամ կիրառել է Դ. Կ. Ֆադեեվը (տես, օրինակ, [423]):

2) Քվատերնիոնների մարմնի ուսումնասիրությունը չի մտնում ուսումնական ծրագրերի մեջ և համապատասխան նյութը սովորաբար չի ներառվում բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացների մեջ: Սակայն հարկ է հաշվի առնել, որ

քվատերնիոնները ոչ տեղափոխական օղակի կառուցման առաջին հնարավորությունն են ստեղծում, որից չի կարելի չօգտվել: Այդ պատճառով մենք լայնորեն օգտվում ենք այդ մարմնից, սակայն ուսումնասիրությունները կատարվում են գծային հանրահաշիվների շրջանակներում: Քվատերնիոնների և նրանց հետ գործողությունների ներմուծման՝ դասընթացում կիրառված եղանակը ստացվել է կոմպլեքս թվերի կառուցման՝ վերը նշված մոտեցում նմանությամբ:

3) Մատրիցները ուսումնասիրվում են օղակների և վեկտորական տարածությունների զուգորդմամբ, այսինքն՝ դարձյալ գծային հանրահաշիվների շրջանակներում: Սակայն համապատասխան օղակների համար կատարվում են մանրակրկիտ դիտարկումներ: Դասընթացում շեշտվում է մատրիցային օղակի «հարստությունը», մասնավորապես՝ իրականացվում է իրական երկչափ մատրիցների օղակում կոմպլեքս թվերի դաշտի ներդրումը և կոմպլեքս երկչափ մատրիցների օղակում քվատերնիոնների մարմնի ներդրումը:

4) Գծային օպերատորների պարագայում կարևորվում են նաև օղակի այն հատկությունները, որոնք տվյալ օղակում տեղի չունեն: Հատուկ դիտարկվում է տեղափոխական հատկությունը, որը տեղի ունի միաչափ տարածությունների համար և տեղի չունի մեկից բարձր չափողականության տարածությունների համար: Որպես ժխտօրինակ դիտարկվում են հետևյալ f_1, f_2 օպերատորները. $f_1(v_1) = v_1$, $f_1(v_2) = 0$, …, $f_1(v_n) = 0$, $f_2(v_1) = 0$, $f_2(v_2) = v_2$, …, $f_2(v_n) = 0$, որտեղ v_1, v_2, …, v_n համակարգը տրված վեկտորական տարածության բազիս է: Հասկանալի է, բազիսային վեկտորների որ f_1 և f_2 արտապատկերումներով միարժեքորեն վերականգնվում են տրված վեկտորական տարածության գծային օպերատորներ, որոնք տեղափոխական չեն:

5) Բազմանդամների օղակի ուսումնասիրությունը, չնայած թվացյալ պարզության, ունի որոշակի բարդություններ: Դասընթացում նախ ներմուծվում է համարյա ամենուրեք վերջավոր հաջորդականությունների օղակը, այնուհետև, տրվում է օղակի պարզ տրանսցենդենտ ընդլայնման գաղափարը, ցույց է տրվում, որ կառուցված օղակը տրված օղակին իզոմորֆ մի այլ օղակի պարզ տրանսցենդենտ ընդլայնումն է, և օգտվելով իզոմորֆ օղակների՝ դասընթացում լայնորեն կիրառվող մեթոդիկայից,

էֆեկտիվորեն ցույց է տրվում կամայական միավորով, տեղափոխական և զուգորդական օղակների համար պարզ տրանսցենդենտ օղակի գոյությունը: Հարկ է նկատել, որ ինչպես այս կառուցումները, այնպես էլ պարզ տրանսցենդենտ ընդլայնման ընդհանրական հատկությունը նպատակահարմար է դիտարկել ուսուցման ցանկալի մակարդակի շրջանակներում: Սա հատկապես վերաբերում է մի քանի փոփոխականով բազմանդամների մուտքը ապահովող՝ օղակի նկատմամբ հանրահաշվորեն անկախ տարրերի հասկացությամնը, որ բավական դժվարությամբ է ընկալվում սովորողների կողմից: Դասընթացում ռացիոնալ, իրական և կոմպլեքս թվերի դաշտերի ուսումնասիրությանը նվիրված բաժինը ընդգրկում է ավանդական նյութը, իսկ դաշտերի ընդլայնումներին նվիրված բաժինը հատկապես հետաքրքիր է ապագա ուսուցիչների համար, ինչպես նաև նախապատրաստում է Գալուայի տեսության հետագա ուսումնասիրությունը:

3.1.3. Բարձրագույն հանրահաշվի խնդիրների համակարգը

Ինչպես տեսանք երկրորդ գլխում, հանրակրթական դպրոցի հանրահաշվի խնդիրների համակարգը մեթոդական գրականության մեջ ուսումնասիրված է համակողմանիորեն: Չնայած այն բանի, որ կազմվել են բարձրագույն հանրահաշվի մի շարք խնդրագրքեր [342], [362], [424], այնուամենայնիվ, այդ առարկայի և, ընդհանրապես, բարձրագույն դպրոցի մաթեմատիկական առարկաների խնդիրների համակարգը նման ուշադրության չի արժանացել: Այդ է ցույց տալիս բարձրագույն դպրոցում մաթեմատիկայի ուսուցմանը նվիրված Ն. Ն. Մելնիկովի, Ռ. Ա. Լազովսկայայի, Մ. Վ. Պոտոցկու, Ն. Ա. Շմակովի և ուրիշների ատենախոսությունների ուսումնասիրությունը: Հ. Հ. Հովհաննիսյանի հետ համատեղությամբ կատարված մեր [95-99] աշխատանքները հավանաբար առաջիններից են, որոնցում դիտարկվում է խնդիրների համակարգի միջոցով տեսական նյութի ուսուցման հարցը: Այդ աշխատանքներում մենք կանգ ենք առել խմբերի տեսության տարրերի վրա՝ նկատի ունենալով, որ.

ա. խմբերի տեսությունը աչքի է ընկնում վերացարկման բարձր աստիճանով և դասընթացում նրան նվիրված նյութը տիպական է ողջ դասընթացի համար, բ. խմբերի տեսությունը ունի հիմնարար դեր հանրահաշվում և նրան նվիրված դասընթացներում,

գ. Խմբերի տեսությունը հանրահաշվի մնացած բաժիններից առանձնանում է իր բազմապիսի կիրառություններով, ինչն իր արտահայտությունն է գտնում նաև խնդիրների համակարգում:

Այդ աշխատանքներում մենք կանգ ենք առել բուհական ուսուցման շրջանակներում խնդրի գործառույթների վրա, մշակել ենք այն մեթոդական պահանջները, որոնց պետք է նպատակաուղղված լինի բուհական մաթեմատիկական առարկայի խնդիրների համակարգը: Նշենք դրանցից մի քանիսը:

ա. Խնդրի հիմնական սովորեցնող գործառույթը պետք է հանգի նոր նյութի նախապատրաստման, ներմուծման, մեկնաբանման, խորացման, ամրապնդման և կրկնության:

բ. Խնդիրների համակարգը պետք է հանդիսանա բուհական մաթեմատիկայի հասկացությունների և պնդումների յուրացման միջոց:

գ. Խնդիրների համակարգը լավագույնս պետք է ծառայի սովորողների ինքնուրույն աշխատանքների կազմակերման գործընթացին:

դ. Խնդիրների համակարգը մեծապես նպաստում է սովորողների մտածողության և հոգեկան այլ որակների զարգացմանը:

Խմբերի տեսության տարրերը: Ելնելով նախորդ կետում բերված մեթոդական մշակումներց, մենք (Հ. Հովհաննիսյանի համահեղինակությամբ) կազմել ենք խմբերի տեսության տարրերին նվիրված խնդիրների համակարգ [97]:

Ժողովածուն կազմված է երեք բաժիններից՝ գործողություններ, գործողությունների հատկություններ և խմբեր: Առաջին բաժնում ընտրվում է այն առարկայական ոլորտը, որի վրա մեկնաբանվում է խմբի վերացական հասկացությունը: Բազմության բուլիանի վրա տրված՝ միավորման, հատման, տարբերության և սիմետրիկ տարբերության գործողությունների հետ միասին դիտարկվում են որոշ նոր գործողություններ: Հանրահաշվական գործողության գաղափարի քննարկման լայն հնարավորություն են տալիս երկտեղ առնչությունները:

Այստեղ մենք նախ կանգ ենք առնում առնչությունների հատման և միավորման գործողությունների վրա, ապա ներմուծում առնչությունների բազմապատկման գործողությունը, որը ցուցադրում ենք գրաֆների վրա: Սովորողների մոտ մեծ հետաքրքրություն է առաջացնում մարդկանց բազմության վրա տրված առնչությունների հետ կատարվող գործողությունների քննարկումը: Օրինակ՝

ա. քեռի = մայր ▫ եղբայր,

բ. պապ = հայր ▫ հայր ∪ հայր ▫մայր,

գ. Տատ = մայր ▫ հայր ∪ մայր ▫ մայր:

Այնուհետև, կապ ենք ստեղծում առնչությունների՝ ծրագրային նյութից հայտնի հատկությունների և գործողությունների հատկությունների միջև:

Կապված մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի հետ՝ արդյունավետ է հարթության պատկերների վրա տրված գործողությունների ուսումնասիրությունը: Թեման լայն հնարավորություն է տալիս սովորողների ինքնուրույն հետազոտական աշխատանքները կազմակերպելու համար:

Հաջորդ թեմայում քննարկվում են ֆունկցիաների հետ կատարվող գործողությունները: Հատկապես մեծ ուշադրություն է դարձվում այնպիսի վարժությունների վրա, որոնք նպաստում են ֆունկցիաների արտադրյալի գործողության գիտակցական ընկալմանը և վարժանքային կարողությունների ձևավորմանը: Այս հանգամանքը կարևոր է նաև մաթեմատիկայի հանրակրթական խնդիրների իրականացման տեսանկյունից:

Հանրահաշվական գործողությունների մեկնաբանության հիմնական ոլորտներից մեկը բնական թվերի տեսությունն է: Ծրագիրը նախատեսում է բնական թվերի ուսումնասիրությունը սկսել հանրահաշվական գործողության գաղափարից անմիջապես առաջ: Մեր կարծիքով, նպատակահարմար է միահյուսել այդ երկու նյութերի ուսումնասիրությունը՝ առաջինը դիտարկելով որպես մեկնաբանության օբյեկտ երկրորդի համար:

«Բնական թվեր» թեմայում մենք նախ ներմուծում ենք Պեանոյի համակարգի գաղափարը, որն իր պարզությամբ լիովին կարող է հասկանալի լինել ուսանողությանը, և առաջարկում ենք մեկնաբանել այն դրական ամբողջ թվերի օրինակի վրա: Մտածելով այս օրինակի վրա, ուսանողը կզգա, որ բնական թվի գաղափարի իր իմացությունը այնքան էլ հիմնավոր չէ: Կարելի է այստեղ արդեն որպես աքսիոմ ենթադրել Պեանոյի որևէ համակարգի գոյությունը՝ կանգ չառնելով նրա գոյության և միակության հարցերի վրա: Այստեղ բերվում են նաև Պեանոյի համակարգի աքսիոմների անկախության և տարբեր օբյեկտների Պեանոյի համակարգ լինել-չլինելու վերաբերյալ մի շարք վարժություններ, որոնք հնարավորություն կտան սովորողներին հիմնավորապես տիրապետելու իրենց ուսումնառության ամբողջ շրջանում կենտրոնական հանդիսացող հասկացություններից մեկին: Այնուհետև ներմուծվում են բնական թվերի գումարման և բազմապատկման գործողությունները: Դրանց գոյության և միակության վերաբերյալ խնդիրները նույնպես առանձնացվում են աստղանիշերով: Մեր կարծիքով, այստեղ հետաքրքիր և օգտակար կլինի «2 + 2 = 4» տիպի վարժությունների դիտարկումը: Հետաքրքիր կարող է լինել նաև այս էտապում գումարման և բազմապատկման գործողությունների հատկությունների ուսումնասիրությունը: Բանը նրանում է, որ, օրինակ, $x + y = y + x$, $x + (y + z) = (x + y)+ z$ և այլ տեսքի նույնություններ կարող են քննարկվել միայն ավելի ուշ՝ «Գործողությունների հատկությունները» բաժնում: Մեր կարծիքով, այս բացը լրացնելու համար կամայական $f(x_1, x_2, \dots , x_n) = g(x_1, x_2, \dots , x_n)$ նույնության քննարկման փոխարեն այս էտապում պետք է նախ առանձին առանձին դիտարկել f և g n տեղանի գործողությունները և ապա՝ ցույց տալ նրանց հավասարությունը: Նման մոտեցումը նպաստում է նաև գործողության գաղափարի առավել հիմնավոր յուրացմանը: Հետևելով այս տեսակետին, մենք ներմուծում ենք, օրինակ $f(x, y) = x + y$ գործողությունը և առաջարկում ցույց տալ, որ $f = +$: Թեմայի մնացած խնդիրները կազմված են այս ոգով: Նշենք, որ այս թեմայում առաջադրված խնդիրները կարելի է օգտագործել նաև մաթեմատիկայի ֆակուլտետում՝ «Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի գիտական հիմունքները» առարկայի գործնական պարապմունքների ժամանակ՝ «Բնական թվեր» թեման ուսուցանելիս:

Գործողության գաղափարը լայնորեն է մեկնաբանվում նաև «Թվային բազմությունների վրա տրված գործողություններ» թեմայում: Այստեղ հիմնականում դիտարկվում են կոմպլեքս թվերի բազմության և նրա տարբեր ենթաբազմությունների վրա տրված հայտնի գործողություններ:

Բաժնի մյուս թեման նվիրված է ըստ բնական մոդուլի գումարման, հանման և բազմապատկման գործողություններին: Դրանք մի կողմից գործողության ընդհանուր գաղափարի և նրա հատկությունների մեկնաբանության լավագույն միջոց են, մյուս կողմից կարող են հող նախապատրաստել այնպիսի գաղափարների համար, ինչպիսիք են՝ «Ֆակտոր խումբը», «Ֆակտոր օղակը», «Խմբերի իզոմորֆիզմը», «Օղակների իզոմորֆիզմը» և այլն: Հետաքրքիր կարող է լինել նաև այդ գործողությունների (հետագայում նաև նրանց հատկությունների) համեմատումը բնական թվերի հետ կատարվող համապատասխան գործողությունների հետ:

Վերջին թեման նվիրված է վերջավոր բազմությունների վրա գործողությունների ներմուծման ընդհանուր եղանակին՝ Քելլիի աղյուսակներին:

Աշխատանքի երկրորդ բաժինը նվիրված է գործողությունների հատկություններին: Այս բաժնում քննարկվում են զուգորդական, միավորով և հակադարձելի երկտեղ գործողությունները: Հասկանալի է, որ ծրագրի հետագա բաժիններում անհրաժեշտ է լինում դիտարկել նաև գործողությունների այլ հատկություններ: Պարզ է, որ բոլոր այդ հատկությունների համատեղ ուսուցումը այս բաժնում նպատակահարմար է ինչպես թեմայի միասնական ուսումնասիրման, այնպես էլ խմբերի տեսության տարրերին նվիրված թեմային ծրագրում անմիջապես հաջորդ՝ «Օղակներ և դաշտեր» թեման ուսուցանելու համար: Բայց ուսուցման այս էտապում, ելնելով նախատեսված ժամաքանակից, մենք կանգ ենք առել միայն խմբային գործողության հատկությունների վրա:

Բաժինը սկսվում է «Զուգորդելիություն» թեմայով: Այստեղ նախ բերվում են զուգորդական գործողությունների ընդհանուր հատկություններին վերաբերող վարժություններ: Այնուհետև, ըստ հերթականության, ձևակերպվում են վարժություններ, որոնք հնարավորություն են տալիս նախորդ բաժնում ներմուծված գործողություններից առանձնացնել զուգորդական գործողությունները: Բերվում են նաև վարժություններ՝ այդ գործողությունների կամ նախորդ բաժնում ուսումնասիրված թեմաներին վերաբերող որոշ նոր գործողությունների վերաբերյալ: Մասնավորաբար, հետաքրքիր կարող են լինել բնական թվերի գումարման և բազմապատկման ընդհանրացումներին նվիրված վարժությունները: Դիտարկվում են նաև բազմությունների դեկարտյան արտադրյալի վրա տրված գործողություններն ու նրանց զուգորդելիությունը՝ կախված արտադրիչների վրա տրված գործողություններից և այդ գործողությունների հատկություններից:

Թեմայի վերջում առաջարկվում է կազմել որոշ վերջավոր բազմությունների վրա տրված բոլոր զուգորդական գործողությունների Քելիի աղյուսակները: Բերվում են նաև Քելիի աղյուսակներով տրվող մի շարք գործողություններ, որոնց զուգորդականությունը առաջարկվում է ստուգել: Նույն սկզբունքով են կազմված նաև «Միավորով գործողություններ» և «Հակադարձելի գործողություններ» թեմաները:

«Խմբեր» բաժինը կազմված է երկու թեմաներից՝ «Խումբ» և «Խմբերի իզոմորֆիզմը»: Առաջին թեմայում նախ առաջարկվում են խմբի սահմանմանը համարժեք որոշ պնդումների ապացույցներ և ապա՝ վարժություններ, որոնք հիմնականում նվիրված են նախորդ երկու բաժիններում ներմուծված գործողությունների խմբային լինել-չլինելու հատկության բացահայտմանը: Այստեղ ներմուծվում են նաև որոշ նոր խմբային գործողություններ:

«Խմբերի իզոմորֆիզմը» թեման հիմնականում նվիրված է նախորդ թեմաների մեջ դիտարկված բազմազան խմբերի համեմատությանը՝ դրանք իրարից էապես տարբեր լրնել կամ չլինելու տեսանկյունից:

3.2.Հանրահաշվի ուսուցման ոչ ստանդարտ ձևերը

3.2.1. Հանրահաշվի ուսուցումը ընտրովի դասընթացների միջոցով

«Խմբերի սիլովյան տեսությունը» ընտրովի դասընթացի մասին: Ընտրովի դասընթացները բուհական կրթության մեջ կարևոր տեղ են զբաղեցնում: Ի տարբերություն հիմնական ուսումնական առարկաների, որոնց բովանդակությունը պահպանողական բնույթ ունի, ընտրովի դասընթացները աչքի են ընկնում իրենց ճկունությամբ՝ ինչպես գիտության բնագավառի, այնպես էլ թեմատիկայի ընտրության տեսակետից: Դրանք հիմնականում նպատակ ունեն սովորողներին ծանոթացնելու տվյալ գիտության մեջ կատարվող ժամանակակից հետազոտությունների, հետազոտական մեթոդների հետ: Հասկանալի է, որ գիտության զարգացման արդի փուլում բուհի հիմնական ուսումնական առարկաներում ամփոփված նյութերը նման հնարավորություն չեն կարող տալ: Միևնույն ժամանակ հաշվի առնելով ընտրովի դասընթացների սահմանափակ քանակությունը, անհրաժեշտ է շատ բծախնդիր լինել դրանց ընտրության հարցում: Ասվածը ավելի սուր է դրվում մանկավարժական բուհերում, որտեղ ընտրովի դասընթացների թիվը համեմատաբար փոքր է:

Նշված տեսակետը հաշվի առնելով՝ ընտրովի դասընթացների թեմատիկան պետք է կազմել այնպես, որ ուսուցանվող նյութը հիմնարար նշանակություն ունենա գիտության տվյալ բնագավառի համար: Կարևոր է նաև նյութի կիրառական արժեքը՝ մանավանդ մանկավարժական բուհերի համար:

Վերևում նշվեց խմբերի տեսության կարևուրագույն և առաջատար դերը, ինչպես նաև կիրառական նշանակությունը ժամանակակից հանրահաշվի մեջ: Նշվեց նաև խմբերի տեսության կիրառական նշանակությունը ֆիզիկայում, բյուրեղագիտության մեջ և գիտության այլ ճյուղերում: Միևնույն ժամանակ, որպես համաչափության հասկացության մոդելավորում՝ խմբի գաղափարը և խմբերի տեսությունը ունի շատ լայն կիրառություն ճարտարապետության, խաչքարագործության, գրականության մեջ, ինչը լայնորեն հնարավոր է կիրառել մանկավարժական բուհերի կրթական համակարգում: Ասվածը բավարար է ընդգծելու համար այն կարևոր դերը, որ կարող է ունենալ խմբերի տեսությանը նվիրված ընտրովի դասընթացը մանկավարժական բուհերի մաթեմատիկական մասնագիտությունների ուսանողների համար:

Միևնույն ժամանակ, հաշվի առնելով բուն խմբերի տեսության զարգացման ժամանակակից բարձր մակարդակը, անհնար է հասնել վերը նշված նպատակներին՝

խմբերի ընդհանուր տեսությունը ընդգրկող ընտրովի դասընթացի միջոցով: Անգամ խմբերի տեսության առանձին բնագավառների վերաբերյալ ներկայումս հրատարակվել ու հրատարակվում են ծավալուն մենագրություններ, ինչը հաստատում է վերն ասված միտքը:

Հետևապես, հետապնդվող խնդիրներին կարելի է հասնել ընտրովի դասընթացի թեմատիկան ձևավորելով հետազոտական առանձին խնդրի շուրջ, նրանում ներառելով նաև բնագավառի, տվյալ դեպքում՝ խմբերի տեսության հիմնական տարրերը: Այդ նպատակներին լավագույնս կարող է ծառայել խմբերի սիլովյան տեսության ընդհանրական շարադրանքը: Այն մի կողմից խարսխվում է տեսության հիմնարար թեորեմների վրա, մյուս կողմից հնարավորություն է տալիս ուսանողին ընկալելի մակարդակով ներկայացնելու հանրահաշվի ժամանակակից հետազոտական ոլորտներ: Կարևոր ենք համարում նաև այն, որ հետազոտության մեջ կիրառված հիմնական մոտեցումը աքսիոմատիկ մեթոդն է, ինչը անչափ կարևոր է մաթեմատիկայի ապագա ուսուցչի համար:

Առաջարկվող՝ «Խմբերի սիլովյան տեսությունը» ընտրովի դասընթացը հենվում է ինչպես հեղինակի, այնպես էլ հետազոտողների լայն խմբի աշխատությունների վրա: Այն մեր կողմից հաջողությամբ փործարկվել է Խ. Աբովյանի անվան մանկավարժական ինստիտուտի մաթեմատիկայի մասնագիտական խմբերում [39]:

«Խմբերի սիլովյան տեսությունը» ընտրովի դասընթացի համար ծրագրի ուրվագիծը և որոշ նկատառումներ դրա վերաբերյալ:

1) Ներածություն. Խմբերի տեսության տարրերը. Խմբեր և նրանց պարզագույն հատկությունները: Խմբի կենտրոն և ածանցյալ: Աբելյան խմբեր: Նիլպոտենտ խմբեր: Վերջավոր նիլպոտենտ խմբերի նկարագրությունը: Լուծելի խմբեր: Խմբերի դասեր, գործողություններ խմբերի դասերի հետ: Ենթախմբի, հոմոմորֆ պատկերի, ընդլայնման, ենթախմբերի լոկալ համակարգի օպերատորները: Խմբերի որոշ դասերի նկարագրությունը օպերատորների միջոցով:

Ծրագրի այս բաժնի առաջին մասում ընդգրկված նյութը ունի նախապատրաստական բնույթ: Այն ամփոփված է խմբերի տեսությանը նվիրված մենագրություններում (տես օրինակ, [261]): Երկրորդ մասում ընդգրկված նյութը ավելի քիչ տարածում ունի: Այն կարելի է գտնել [499] գրքում:

2) Սիլովի տեսության տարրերը. Խմբի p-ենթախմբերը: Վերջավոր խմբերի մասին Սիլովի երեք թեորեմները: Սիլովի թեորեմների նշանակությունը վերջավոր խմբերի նկարագրության մեջ: Տեղադրությունների և մատրիցային վերջավոր խմբերի սիլովյան ենթախմբերը:

Ծրագրի՝ վերջավոր խմբերի նկարագրության մեջ Սիլովի թեորեմների նշանակության, տեղադրությունների և մատրիցային վերջավոր խմբերի սիլովյան ենթախմբերի վերաբերյալ նյութը կարելի է գտնել [230]-ում:

3) Սիլովի տեսության դասական ընդհանրացումները. Վերջավոր խմբերի Π-ենթախմբերը և Π-բազիսները: Հոլլի թեորեմները վերջավոր լուծելի խմբերի Π-ենթախմբերի և Π-բազիսների մասին: Π-անջատելիություն և Չունիխինի թեորեմները Π-ենթախմբերի և Π-բազիսների մասին: Դիցմանի, Կուրոշի և ՈՒզկովի թեորեմը անվերջ խմբերի սիլովյան ենթախմբերի համալուծության մասին: Ռ. Բեռի արդյունքները: Հոլբերգի տեսությունը: Սիլովի թեորեմը լոկալ վերջավոր խմբերում: Հարթլիի արդյունքները: Ասարի թեորեմը: Մինիմալության պայմանով լոկալ վերջավոր խմբերի սիլովյան ենթախմբերը:

Ծրագրի այս բաժնում նախ դիտարկվում են Հոլլի հայտնի թեորեմները վերջավոր լուծելի խմբերի և Չունիխինի արդյունքները վերջավոր Π-անջատելի խմբերի, Π-ենթախմբերի և Π-բազիսների մասին [261], [491-493]: Անվերջ խմբերի պարագայում դիտարկվում են Դիցմանի, Կուրոշի և Ուզկովի թեորեմը վերջավոր թվով համալուծ ունեցող սիլովյան ենթախմբով անվերջ խմբերի սիլովյան խմբերի ենթախմբերի համալուծության մասին, Բեռի արդյունքները լոկալ նորմալ խմբերի սիլովյան կառուցվածքի վերաբերյալ, անվերջ խմբերի Հոլբերգի սիլովյան տեսությունը, Ասարի թեորեմը հաշվելի թվով սիլովյան ենթախմբեր ունեցող լոկալ վերջավոր խմբերում սիլովյան ենթախմբերի համալուծության մասին, սիլովյան ենթախմբերի համալուծության մասին, սիլովյան ենթախմբերի համալուծության վերաբերյալ Հարթլիի հայտնի արդյունքները, մինիմալության և min-p պայմանով լոկալ վերջավոր խմբերի համալուծության խնդիրները [261], [487-489], [494], [500-501], [504-505], [506-508]:

4) Քարտերյան և վիլանդտյան ենթախմբեր. Քարտերի թեորեմը վերջավոր լուծելի խմբերի մասին: Վիլանդի թեորեմը: Հոլբերգի թեորեմը անվերջ խմբերի վիլանդյան ենթախմբերի մասին: Ստոունիեվերի թեորեմը լոկալ լուծելի պարբերական խմբերի վիլանդյան ենթախմբերի մասին:

Ծրագրի այս բաժինը նվիրված է Քարտերի՝ վերջավոր լուծելի խմբերում իրենց նորմալիզատորի հետ համընկնող նիլպոտենտ ենթախմբերի գոյության և համալուծության մասին հայտնի թեորեմին և Վիլանդտի՝ նիլպոտենտ հոլյան Π-ենթախմբեր ունեցող խմբերում Π-ենթախմբերի համալուծության մասին թեորեմին ու դրանց ընդհանրացումներին: Որպես ընդհանրացումներ դիտարկվում են Հոլբերգի և Ստոունիեվերի արդյունքները (տես [261], [506], [487]):

5) Աքսիոմատիկ մոտեցում Սիլովի տեսության նկատմամբ. Խմբի սիլովյան դասերը, դրանց նկարագրությունը: Խմբերի դասի սիլովյան փակումը: Խմբի սիլովյան X – ենթախմբերը և դրանց համալուծությունը: Խմբի սիլովյան Q-բազիսները: Դասական արդյունքների ընդհանրացումը: Համալուծությունը ավտոմորֆիզմի նկատմամբ: Խմբի Q-քարտերյան ենթախմբերը: Վերջավոր ինդեքս ունեցող Q-ռադիկալով լոկալ վերջավոր խմբի Q-քարտերյան ենթախմբերը: Լոկալ վերջավոր խմբերում Q-քարտերյան ենթախմբեր համալուծության կախվածությունը ֆակտոր խմբի համանման հատկությունից: Q-վիլանդտյան ենթախմբերի համալուծությունը լոկալ վերջավոր խմբերի դասում:

Ծրագրի այս բաժինը նվիրված է խմբերի սիլովյան, քարտերյան և վիլանդյան ենթախմբերի վերաբերյալ ստացված արդյունքների ընդհանրացմանը կամայական սիլովյան դասերի դեպքի համար: Օգտագործված են հիմնականում հեղինակի արդյունքները: Սիլովյան դասի սահմանումը պատկանում է Շպեխտին [503] և Բ. Ի. Պլոտկինին [353], որոնց և հեղինակի [297] աշխատանքի արդյունքների շարադրանքով էլ սկսվում է բաժինը: Խմբի Q-բազիսների վերաբերյալ շարադրվող նյութը ամբողջությամբ ընդգրկում է հեղինակի [295-296], [300-302], [306] աշխատանքները: Խմբի ավտոմորֆիզմի նկատմամբ համալուծությանը վերաբերող նյութը վերցվում է հեղինակի [305-306] աշխատանքներից: Քարտերյան ենթախմբերի ընդհանրացմանն ու հետագա ուսումնասիրությանը նվիրված նյութը վերցվում է հեղինակի [298], [299] աշխատանքներից: Q-վիլանդտյան ենթախմբերի համալուծության վերաբերյալ նյութը վերցվում է հեղինակի [300] աշխատանքից:

6) Սիլովի հակադարձ խնդիրը. Խնդրի դրվածքը: Սիլովի դասական թեորեմի հակադարձումը՝ սիլովյան կանոնավոր դասեր: Վերջավոր սիլովյան կանոնավոր դասերի նկարագրությունը: Սիլովյան կանոնավոր դասերը լոկալ նորմալ և FC – խմբերի դասում:

Վերջավոր խմբերի դասում Սիլովի հակադարձ խնդիրը դիտարկվում և դասընթացում համապատասխան նյութը վերցվում է հեղինակի [301], [303-305] [307], [308] աշխատանքներից: Հեղինակի [309] և [310] աշխատանքներում նկարագրվում են անվերջ խմբերի զանազան դասերում սիլովյան կանոնավոր դասերը: Ցույց է տրվում, օրինակ, որ բոլոր խմբերի դասում գոյություն չունեն s, u–փակ սիլովյան կանոնավոր դասեր: Նման դասեր գոյություն չունեն նաև լոկալ նորմալ խմբերի դասում: Իսկ FC–խմբերի դասում այդպիսին է միայն նորմալ խմբերի դասը: Կարևոր է նաև նորմալ և FC–խմբերի դասերում s-փակ սիլովյան կանոնավոր դասերի նկարագրությունը: Դիտարկվում են նաև լոկալ սիլովյան կանոնավոր և ավտոմորֆ սիլովյան կանոնավոր խմբերի դասերը, կատարվում է դրանց նկարագրությունը որոշ խմբերի դասերում: Ստացված արդյունքները բերվում են դասընթացում:

3.2.2. Հանրահաշվի ուսուցումը կուրսային, ավարտական աշխատանքների և մագիստրոսական թեզերի կատարման միջոցով: ա. Բուհական կրթական համակարգում ուսուցման ոչ ստանդարտ ձևերից են նաև կուրսային աշխատանքները: Դրանց հիմնական նպատակն է սովորողներին ինքնուրույն աշխատանքի վարժեցումը, գիտության ժամանակակից արդյունքների հետ ծանոթացումը, հետազոտական աշխատանքի նախապատրաստումը, սովորողների մոտ մաթեմատիկական ճաշակի ձևավորումը և այլն: Նշված նպատակներին լավագույնս կարող են ծառայել դասախոսի՝ տվյալ բնագավառում կատարված գիտական աշխատանքները:

Երկարամյա աշխատանքի ընթացքում ես նման բազմապիսի աշխատանքներ եմ հանձնարարել առավել առաջադիմող և տվյալ բնագավառի նկատմամբ հակումներ ունեցող ուսանողների:

Ահա նման կուրսային աշխատանքների թեմատիկայի մի քանի նմուշներ:

1) Թեման՝ Լոկալ-վերջավոր սիլովյան դասեր:

Կուրսային աշխատանքի նպատակն է խմբերի դասերի նկատմամբ կիրառվող հիմնական օպերատորների հետ ծանոթացումը, դրանց ներգրավումը խմբերի հայտնի դասերի նկարագրության մեջ, լոկալ-վերջավոր սիլովյան դասերի նկարագրությունը:

Առաջարկվում է աշխատանքի կատարման հետևյալ պլանը.

a. S,Q,E օպերատորների ներմուծում և ուսումնասիրություն:

b. Խմբերի բազմաձևությունները օպերատորներով նկարագրելու մասին թեորեմի ձևակերպում:

c. Լոկալ-վերջավոր սիլովյան դասերի նկարագրությունը օպերատորների միջոցով:

Գրականություն՝ [261], [297]:

2) Թեման՝ Սիլովյան տիպի հակադարձ թեորեմների մասին:

Կուրսային աշխատանքի նպատակն է անվերջ խմբերի որոշ դասերում սիլովյան կանոնավոր, լոկալ սիլովյան կանոնավոր և ավտոմորֆ սիլովյան կանոնավոր դասերի նկարագրությունը:

Առաջարկվում է աշխատանքի կատարման հետևյալ պլանը.

a. Սիլովյան կանոնավոր, լոկալ սիլովյան կանոնավոր և ավտոմորֆ սիլովյան կանոնավոր դասերի սահմանումը:

b. Բոլոր խմբերի դասում սիլովյան կանոնավոր դասերի նկարագրությունը:

c. Լոկալ-նորմալ և FC–խմբերի դասերում սիլովյան կանոնավոր դասերի նկարագրությունը:

d. Լոկալ-նորմալ և FC–խմբերի դասերում լոկալ սիլովյան կանոնավոր դասերի նկարագրությունը:

e. Աբելյան խմբերի դասում ավտոմորֆ սիլովյան կանոնավոր դասերի նկարագրությունը:

f. Գրականություն՝ [261], [310]:

բ. Ի տարբերություն կուրսային աշխատանքների, ավարտական աշխատանքները ավելի ընդգրկուն են և պարունակում են ինքնուրույն, հետազոտական աշխատանքի ավելի մեծ չափեր: Երկարամյա աշխատանքի մեր փորձը ցույց է տալիս, որ խմբերի տեսությանը նվիրված ավարտական աշխատանքնները աչքի են ընկնում մեծ արդյունավետությամբ, եթե դրանք կազմակերպվում են երկու ուղղություններով:

1) Հաշվի է առնվում խմբի գաղափարի դերը պատկերների կամ մարմինների համաչափության բացահայտման մեջ (Ֆյոտորովյան խմբեր, տես [284]): Առանձնակի հետաքրքրություն են ներկայացնում ճարտարապետության, մասնավորապես՝ հայկական ճարտարապետական կոթողների մեջ խմբի գաղափարի կիրառությունները: Հասկանալի է, որ ինչքան բարդ է այս կամ այն կոթողի կամ նրա առանձին դրվագի համաչափությունների խումբը, այնքան հարուստ ու գեղեցիկ է տվյալ կոթողը: Այս իմաստով հետաքրքիր է հայկական ճարտարապետական կոթողների, մասնավորապես՝ եկեղեցիների և խաչքարերի ուսումնասիրությունը: Դրանցում զուգորդվում են մշակութային և մաթեմատիկական արժեքները, ինչը մեծ հետաքրքրություն է առաջացնում սովորողների մոտ: Այս բնույթի ավարտական աշխատանքներ թեման են դարձել և մեր կողմից ուսանողներին առաջադրվել համաչափությունը հայկական խաչքարերում, համաչափությունը Հռիփսիմեի տաճարում, համաչափությունը Գանձասարի և Արցախի ուրիշ ճարտարապետական հուշարձաններում և այլ թեմաներ:

2) Որպես ավարտական աշխատանքի թեմա ծառայում են հեղինակի՝ միևնույն նյութին նվիրված մի քանի աշխատանքներ: Մեր փորձի ընթացքում ԵՊՀ ֆիզիկայի ֆակուլտետում և Մանկավարժական համալսարանի ֆիզմաթ ֆակուլտետում առաջարկել ենք այդպիսի թեմաներ խմբերի սիլովյան տեսությանը՝ [295], [296], [306], [309-311], Սիլովի թեորեմի հակադարձումներին՝ [303], [304], [308], [310], քարտերյան

ենթախմբերին՝ [298], [299], վելանդտյան ենթախմբերին՝ [300] նվիրված մեր աշխատանքներից:

3.3. Հանրահաշիվը ուսուցիչների վերապատրաստման համակարգում

Միջին դպրոցի հանրահաշվի մեր դասընթացների նորարական բնույթը ենթադրում էր լայնածավալ աշխատանքների իրականացում ուսուցիչների վերապատրաստման համակարգում, մեթոդական սպասարկման ապահովում և ուսուցչների հետ այլ աշխատանքների իրականացում: Այդ աշխատանքների շրջանակներում մեր կողմից երկու անգամ՝ ԿԳ նախարարության կողմից կազմակերպված մրցույթներում հաղթելուց հետո, դասագրքերի հրատարակումից առաջ հրատարակվել է մեթոդական ուղեցույց ուսուցիչների համար [41], որտեղ լուսաբանվել են մեր ընդհանրական մոտեցումները հանրահաշվի ուսուցման վերաբերյալ, տրվել են ցուցումներ ինչպես առանձին թեմաների, այնպես էլ դասերի անցկացման, խնդիրների լուծման և մեթոդական այլ հարցերի վերաբերյալ: Հրատարակվել են նաև խնդրի լուսաբանմանը նվիրված մենագրություն [55], մեթոդական ձեռնարկ [45], խնդիրների լուծումների և ցուցումների ուղեցույցեր [66-68], բազմաթիվ հոդվածներ մեթոդական մամուլում (տես գրականության ցանկը): Նշված ուղղությամբ լայնածավալ աշխատանքներ են իրականացրել հանրապետության լավագույն մեթոդիստ-մասնագետները, առաջատար ուսուցիչները, որոնց կողմից նույնպես հրատարակվել են նշված հարցերի վերաբերյալ գիտամեթոդական աշխատանքներ, հոդվածներ, աշխատանքային տետրեր և այլն (տես [5], [6], [18], [103] և այլն):

3.3.1. Առանձին թեմաների ուսուցման մեթոդիկան: [45] աշխատանքում մենք դիտարկել ենք հանրահաշվի դասընթացի բոլոր թեմաները: Տեղի սղության պատճառով այստեղ բավարարվենք միայն մի քանի թեմաների դիտարկումով:

Հանրահաշվի լեզուն: Հանրահաշվի դասընթացը սկսվում է հանրահաշվի լեզվի ձևավորումով: Ուսուցումը հենց սկզբից նպատակահարմար է տանել հայոց լեզվի հետ զուգահեռների անցկացումով: Շատ կարևոր է աշակերտների ուշադրության կենտրոնում պահել հանրահաշվական լեզվի կառուցման ռազմավարական գիծը. Այբուբեն-բառ-նախադասություն ընդհանուր սխեմայի շրջանակներում: Հանրահաշվի այբուբենը կառուցվում է առաջին հինգ դասերի ընթացքում: Աշակերտը պետք է հասկանա, որ թվերը կազմում են ոչ միայն թվաբանության, այլև հանրահաշվի և մեզ շրջապատող իրական աշխարհի ուսումնասիրության հիմքը: Այստեղ պետք է շեշտել իրական թվերի դերը: Անհրաժեշտ է բացատրել «իրական» ածականի գործածության իմաստը: «Տառերը հանրահաշվում» դասը առանցքային նշանակություն ունի ողջ դասընթացի համար: Իրականում հանրահաշիվը գիտություն է տառերի մասին և այս դասը հասկանալու խորությունից և մակարդակից մեծապես կախված է հետագա ուսումնառության հաջողությունը: Տառերի հետ գործողություններն ուսումնասիրելիս ուշադրություն պետք է դարձնել աշակերտների կողմից դրանց ներմուծման անհրաժեշտության գիտակցման վրա: Փակագծերին նվիրված դասի ընթացքում աշակերտը պետք է համոզվի, որ առանց փակագծերի գործածության ինքը չի կարողանա գրառել իր առանձին մտքերը: Լատինական և հունական այբուբենի տառերը այսօր կազմում են ոչ միայն հանրահաշվի այբուբենի, այլև մշակույթի մի բաղկացուցիչ տարրը և դրանց իմացությունը պետք է կարևորել նաև այս հանրակրթական նշանակութան հաշվառումով: Հանրահաշվական արտահայտություններին նվիրված նյութի ուսուցման ընթացքում պետք է տանել բառ – հանրահաշվական արտահայտություն զուգահեռը և շեշտը դնել հանրահաշվական արտահայտությունների կառուցման և հայոց լեզու - հանրահաշիվ, հանրահաշիվ – հայոց լեզու թարգմանությունների վրա: Մեթոդական առումով սա կարևոր հանգամանք է և արժե այն ընդգծել: Փաստորեն, հանրահաշվի լեզուն ունի ներքին ներդաշնակություն բնական լեզվի հետ և, այդ պատճառով, հասկանալի ու հարազատ պետք է դառնա աշակերտին: Նշենք, որ տարրական թարգմանությունները պարտադիր պետք է լինեն բոլոր աշակերտների համար: Հաջորդ դասի մեջ նախ անհրաժեշտ է ցույց տալ փակագծերի մեծ քանակի գործածության աննպատակահարմարությունը արտահայտությունները կառուցելիս. մեծ թվով փակագծերը հաճախ խանգարում են արտահայտության որոշ էական հատկանիշների բացահայտմանը, և նոր միայն անցնել գործողությունների կարգի սահմանմանը: Կարևոր է սովորողների ուշադրությունը հրավիրել կոտորակի փակագծային հատկության վրա:

Հավասարությանը նվիրված «Հավասարությունը հանրահաշվում» և «Հավասարության հատկությունները» դասերի մեջ պետք է ընդգծել այդ հարաբերության նշանակությունը ողջ դասընթացի համար՝ որպես կարևորագույն բանաձև՝ հանրահաշվական նախադասություն: Աշակերտը պետք է հասկանա, որ եթե բանաձևը հավասարություն է, ապա այն արդեն ճշմարիտ է: Ինչպես արդեն նշեցինք, գրականության մեջ առ այսօր հանդիպում են «ճշմարիտ հավասարություն», «ցույց տանք, որ հավասարությունը ճշմարիտ է» տիպի անհեթեթ արտահայտություններ (այդ մասին մենք մեր դիտողությունները շարադրեցինք երկրորդ գլխում): Հավասարության հատկությունների ուսումնասիրությունը անպայման պետք է ուղեկցել դասագրքում բերված կիրառական օրինակների դիտարկումով: Այդ հատկությունները պետք է դիտել նաև որպես հավասարությունների ստացման կարևորագույն աղբյուրներ: Հատուկ ուշադրություն պետք է դարձնել միևնույն արտահայտությանը հավասար արտահայտությունների հատկության և նրա ապացույցի վրա: Այստեղ հանրահաշվում առաջին անգամ է աշակերտը հանդիպում ապացույցի հնարքին: Նրա յուրացումը բնականաբար ուղեկցվում է որոշակի դժվարություններով, ինչին պետք է պատրաստ լինել: Անհավասարություններին ու նրանց հատկություններին նվիրված նյութի ուսուցման սկզբում նույնպես աշակերտի մոտ պետք է մեկընդմիշտ համոզմունք ձևավորել, որ անհավասարությունը արդեն ճշմարիտ բանաձև է: Ուսուցումը այստեղ ևս պետք է ուղեկցվի կիրառական օրինակների դիտարկմամբ: «Արտահայտության թվային արժեքը» դասը նախապատրաստում է «Հավասարումներ» և «Անհավասարումներ» դասերը: Արդեն այս փուլում կարևոր է անցկացնել հավասարություն-հավասարում և անհավասարություն-անհավասարում զուգահեռները:

Աշակերտը պետք է հասկանա, որ հավասարումները և անհավասարումները այնպիսի բանաձևեր են, որոնք կարող են վերածվել հավասարության կամ անհավասարության՝ նրանց մեջ մտնող անհայտների որոշ արժեքների դեպքում, իսկ այլ արժեքների դեպքում՝ այդպիսիք չդառնան: Չպետք է խուսափել դասագրքում բերված առօրեական-կիրառական օրինակների դիտարկումից. Դրանք ունեն հանրակրթական նշանակություն և, միաժամանակ, մեծացնում են նյութի նկատմամբ հետաքրքրությունը:

Տրամաբանության հանրահաշիվը: Ոչ ավանդական այս թեմայի ուսուցումը առաջին հերթին նպատակ ունի հստակեցնել սովորողի լեզվատրամաբանական մտածողության հիմքում ընկած մի շարք կարևոր հասկացություններ, ուսուցման շեշտը տեխնիկական-վարժանքային դաշտից տեղափոխել գաղափարական ոլորտ, առաջին պլան մղել իմանալու խնդիրը՝ կարողանալու խնդրի համեմատությամբ:

Թեման սկսվում է հավասարումների և անհավասարումների նախնական ուսումնասիրությամբ: Ի տարբերություն նախորդ դասարանում անցած այս նյութի, այստեղ ուսումնասիրությունը կատարվում է մասնագիտական ավելի բարձր մակարդակով: Առանձնակի ուշադրություն պետք է դարձնել երկու և երեք անհայտով հավասարումների և անհավասարումների լուծման հասկացության վրա: Անհրաժեշտ է հաղթահարել սովորողների մոտ նկատվող ավանդական հոգեբանական դժվարությունը. հավասարման մեկ լուծումը բաղկացած կարող է լինել մեկից ավելի թվերից:

Թեմայում առաջադրված խնդիրների իրականացման տեսակետից առանձնապես կարևոր է ասույթների տրամաբանության պարզագույն հարցերին նվիրված նյութը: Օգտակար է առօրյա կյանքին վերաբերող օրինակները զուգորդել մաթեմատիկական բնույթի օրինակներով: Զետեղված նյութը հնարավոր է դարձնում նաև հավասարություն – հավասարում և անհավասարություն – անհավասարում զուգահեռների անցկացումը: Տրամաբանական գումարին նվիրված դասը անցնելիս հատուկ ուշադրություն է անհրաժեշտ դարձնել $\pm a$ գրառման վրա: Ինչպես նշվեց վերևում, մաթեմատիկայում մեծ տարածում ունեցող այս գրառումը սովորողների ճնշող մեծամասնությունը չի հասկանում: Տրամաբանական գումարի գաղափարի դիտարկումը լիովին հասկանալի է դարձնում այն:

Ասվածը վերաբերում է նաև ոչ խիստ անհավասարություններին և ոչ խիստ անհավասարումներին: a≤b կարևորագույն բանաձևի իմաստը շատ աշակերտներ չեն յուրացնում: Նախ անհրաժեշտ է սովորողին հասկացնել, որ նշված բանաձևը ներմուծվում է «մեծ չէ» հարաբերությունը հանրահաշվորեն գրառելու համար: Այնուհետև՝ պետք է անցնել բանաձևի ճշմարիտ լինելու խնդրի պարզաբանմանը: Տրամաբանական գումարի գաղափարի առկայությունը հնարավորություն է տալիս հստակորեն իրականացնել այս խնդիրը: Հարկ է հիշել և հաշվի առնել նաև, որ այդ բանաձևի համար նախկինում գործածվող «անհավասարություն» անվանումը սովորողի մոտ առաջացնում է յուրացումն արգելող հոգեբանական պատնեշ. Ինչու՞, օրինակ, բանաձևը անվանենք անհավասարություն, երբ այն 1 = 1 հավասարության և 1<1 բանաձևի տրամաբանական գումարն է: Ոչ խիստ անհավասարումների լուծումը նպատակահարմար է ուղեկցել կիրառական խնդիրներով:

Բանաձևերի տրամաբանական արտադրյալի գաղափարը դիտարկելիս անհրաժեշտ է հասնել նրան, որ սովորողները դրանց միջոցով հստակ յուրացնեն թվային միջակայքերը: Պետք է հաշվի առնել, որ այստեղ երկրաչափական պատկերումների համար անհրաժեշտ նյութի ուսուցանումը կատարվում է հաջորդ թեմայի ընթացքում, ինչը լրացուցիչ դժվարություններ կարող է առաջացնել: Սակայն հաջորդ թեմայի ուսուցման ընթացքում նորից հնարավորություն կա անդրադառնալու միջակայքերին:

Մեծ կարևորություն ունի բանաձևերի համարժեքությանը նվիրված նյութը: Այն պետք է նպաստի սովորողների ճանաչողական որակների զարգացմանը: Հարկ է հիշել, որ սովորաբար սովորողները կարողանում են լուծել բավականին բարդ համակարգեր կամ համախմբեր, սակայն չեն կարողանում թեկուզ և պարզագույն համակարգերի համարժեքության վերաբերյալ տարրական դատողություններ կատարել: Նույնը կարելի է ասել նաև բանաձևի ժխտման ու նրա հատկությունների ուսուցման վերաբերյալ: Մասնավորապես՝ պետք է իմանալ, որ պարզ բանաձևերի ժխտումների գիտակցական իմացությունը սովորողին ապագա հաջողությունների հասնելու կարևոր նախադրյալ է:

Ֆունկցիաներ: Ներկա դասընթացի կարևորագույն առանձնահատկություններից մեկը, եթե ոչ՝ ամենակարևորը, նրանում ֆունկցիայի դերի փոփոխությունն է: Մանրամասն այս մասին դուք կարող եք կարդալ [46]-ում և [55]-ում: Այստեղ նշենք միայն, որ նախկին դասընթացներում ֆունկցիայի գաղափարին վերագրվել էր չափազանցված դեր. այն դրված էր ողջ դասընթացի կառուցման հիմքում: Դա առաջ էր բերել մանկավարժական անլուծելի դժվարություններ: Այստեղ ֆունկցիայի դերը արմատապես փոփոխված է: Ֆունկցիան ներմուծվում է դասընթացի վերջում միայն և հանդես է գալիս որպես՝ ա. նախկինում ուսումնասիրված նյութը համակարգող, բ. հանրակրթական մեծ նշանակություն ունեցող կարևորագույն մաթեմատիկական հասկացություն:

Թեմայի ուսուցումը պետք է սկսել առնչությունների մանրամասն դիտարկումից: Այստեղ կարիք չկա դիմելու խիստ մաթեմատիկական ձևակերպումների. Դրանք լավ հասկանալի չեն լինի տվյալ հասակի աշակերտներին և կվանեն նյութից: Օգտակար է մեծացնել աշակերտի հետ առնչվող օրինակների և ժխտօրինակների քանակը: Հատուկ պետք է հետևել ֆունկցիայի գրառման տարբեր ձևերի վրա, մանրամասն բացատրել f(x) գրառումը, նրա կարևորությունը, ցույց տալ նոր տիպի հավասարումների անհրաժեշտությունը: Աղյուսակներով տրվող ֆունկցիաները դիտարկելիս լայնորեն պետք է օգտվել միջառարկայական կապերից: Յուրաքանչյուր կոնկրետ աշակերտի համար պետք է օգտվել այն առարկայից, որը լավ է տիրապետում այդ աշակերտը: Նման լայն հնարավորություններ են ստեղծում նաև դիագրամները: Այստեղ կարելի է աշակերտներն սովորեցնել օգտվելու զանազան հանրագիտարաններից, համացանցից: Դասագրքում հետաքրքիր ձևով է լուծված ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքների որոշման խնդիրը: Այս նպատակով դիտարկված է Գինեսի գիրքը: Այն, ինչպես նաև զանազան մարզական միջոցառումները՝ համապատասխան գաղափարի իլյուստրացիայի լավագույն միջոց են: Նկատվում է, որ նման հարցերի քննարկումը կտրուկ մեծացնում է աշակերտի հետաքրքրությունը դասավանդվող նյութի նկատմամբ: Նման ձևով կարելի է կազմակերպել ուսուցումը նաև ֆունկցիայի աճման ու նվազման հարցերը դիտարկելիս:

3.3.2. Առանձին դասերի ուսուցման մեթոդիկան: Ուսուցչի մեթոդական ձեռնարկում [41], [62] շարադրված է հանրահաշվի դասընթացի առանձին դասերի ուսուցման մեթոդիկան, իսկ [46]-ում նման շարադրանք իրականացված է դասընթացի բոլոր դասերի համար: Բերենք նմանատիպ մի քանի օրինակ:

Մեծությունների չափումը, չափման միավորները: Դասի առաջին փուլում անհրաժեշտ է աշակերտներին ցուց տալ մեծությունների չափման կարևորությունը: Այստեղ, դասագրքում դիտարկված օրինակների հետ միասին, նպատակահարմար է բերել նաև մեծությունների չափման այնպիսի օրինակներ, որոնց հետ աշակերտը առնչվում է առօրյայում: Ահա նման օրինակներ. Աշակերտի տարիքը, հասակը, քաշը, դասասենյակի և տան մակերեսները, գնած ապրանքի քաշը, օրվա ժամը, ճանապարհի երկարությունը և այլն:

Դասի երկրորդ փուլում ներմուծվում է չափման միավորի հասկացությունը: Այստեղ նույնպես կարևոր են առօրեական օրինակները: Աշակերտը պետք է հասկանա չափման անհրաժեշտությունը կոնկրետ օրինակների վրա: Չափման միավորի դերը ընդգծելու համար անհրաժեշտ է կանգ առնել միևնույն մեծության չափման համար չափման տարբեր միավորների ընտրություն խնդրի վրա:

Դասի երրորդ փուլում կատարվում է անդրադարձ հնում ընտրված չափման միավորներին: Այս պահին կարելի է աշակերտներին հանձնարարել կազմելու աղյուսակներ տարբեր երկրներում ընդունված չափման զանազան միավորների վերաբերյալ: Նման հանձնարարականները նպատակ ունեն նաև.

Ա. ձևավորել գրքի հետ աշխատելու մշակույթ,

բ. տեղեկություն տալ հանրագիտարանի և համացանցի մասին՝ որպես գիտելիքի կարևոր աղբյուրների,

գ. զարգացնել աշակերտի ինքնուրույն աշխատելու ունակությունը:

Այստեղ դասի հիմնական խնդիրն է ցույց տալ, որ հնում ընտրված չափման միավորները ունեին հարաբերական, հանգամանքներով պայմանավորված բնույթ և դրանք առևտրական հարաբերությունների զարգացման փուլում չէին բավարարում մարդկանց՝ նրանց առջև ծառացած խնդիրները լուծելիս:

Դասի վերջին փուլում կատարվում է ֆրանսիացիների կողմից մետրի հասկացության ներմուծման պատմությունը և ցույց է տրվում արված գյուտի կարևորությունը: Այդ կարևորությունը պետք է ընդգծել այնպիսի օրինակների վրա, որտեղ չափումները պահանջում են մեծ ճշգրտություն, և թույլ տրված անգամ փոքրիկ սխալը հանգեցնում է մեծ հետևանքների: Ահա նման օրինակներ. Արկի շարժման հետագիծը, տարադրամի փոխանակման կետում մեկ դրամի արժեքը՝ երբ կատարվում է դրամի մեծ քանակության փոխանակում և այլն:

Աշակերտի համար պարտադիր է.

ա. իրեն շրջապատող առարկաների մոտավոր չափումների իմացությունը,

բ. չափման հիմնական միավորների առարկայական մոտավոր պատկերումը և պատկերացումը:

Քանակությունների միավորումը և գումարումը: Դասը ներառված է «Հանրահաշիվ 6», 1999-ում [42] (տես նաև [53]): Թեմայի առաջին 2 դասերի նպատակը արտադրյալի կարևորագույն մոդելների ուսուցումն է: Դրանցից առաջինը քանակությունների միավորման մոդելն է: Թերևս սա ամենակիրառական, տարածված և կարևոր մոդելն է, և կարիք ունի մանրազնին ուսումնասիրության:

Դասի նախապատրաստական փուլում պետք է ցույց տալ մոդելի օգտակարությունը զանազան գործնական խնդիրներ լուծելիս: Այդ նպատակին լավագույնս ծառայում է դասագրքում՝ դասի սկզբում դիտարկված՝ Արքիմեդի կողմից փիղը կշռելու օրինակը. Այն նաև բավականաչափ հետաքրքիր է և ապահովում է աշակերտների հետաքրքրությունը նյութի հանդեպ: Դասագրքում մանրամասնորեն դիտարկվում են նաև զանգվածի, տարողության, մակերեսի և երկարության միավորման վերաբերյալ կարևոր օրինակներ, որոնք պետք է ծառայեցնել վերը նշված նպատակին: Դասի ընթացքում անհրաժեշտ է ուշադրություն դարձնել նաև հետևյալ մեթոդական խնդիրների վրա:

ա. Միավորման գումարային օրենքը գործում է միայն համասեռ առարկաները միավորելիս. մենք չենք կարող խոսել տարասեռ առարկաների միավորման մեծության մասին: Այս կարևոր դիտողությունը ուսուցանելիս նպատակահարմար է բերել ոչ համասեռ առարկաների միավորման օրինակներ, և հարց դնել նրանց միավորման մեծությունը որոշելու մասին: Այստեղ անչափ օգտակար է դասի 3 վարժությունը:

բ. Միավորման գումարային սկզբունքը կիրառելու համար դիտարկվող համասեռ առարկաները ընդհանուր մաս չպետք է ունենան: Դասագրքում բերված է մեկ ժխտօրինակ: Նպատակահարմար է ընդհանուր մաս ունեցող քանակությունների միավորման այլ օրինակներ ևս բերել, և որոշել նրանց միավորման քանակությունը, որը, բնականաբար, հավասար չի լինի միավորվող առարկաների քանակությունների գումարին: Ահա նման ևս մեկ օրինակ: Ոսկեհատը երկու անգամ խնձոր գնեց: Խնձորի առաջին քանակությունը դույլի հետ միասին կշռեց 9 կգ, իսկ երկրորդ քանակությունը՝ նույն դույլի հետ միասին կշռեց 11 կգ: Որքա՞ն խնձոր գնեց Ոսկեհատը:

գ. Պետք է աշակերտների ուշադրությունը հրավիրել այն բանի վրա, որ միավորման գումարային սկզբունքը կիրառվում է ինչպես հայտնի, այնպես էլ անհայտ քանակությունների համար: Սա նախ նշանակում է, որ եթե մենք գիտենք, օրինակ, Գայանեի ունեցած դրամի քանակությունը, ասենք՝ 1000 դրամ, գիտենք նաև Ոսկեհատի ունեցած դրամի քանակությունը, ասենք՝ 1500 դրամ, ապա նրանց՝ միասին ունեցած դրամի քանակությունը որոշելու համար պետք է գումարենք 1000 դրամը 1500 դրամին: Ընդամենը կստանանք 1000 դրամ + 1500 դրամ: Բայց եթե անգամ մենք չգիտենք Գայանեի և Ոսկեհատի ունեցած դրամի քանակությունները, ապա միևնույն է, նրանց՝ միասին ունեցած դրամի քանակությունը որոշելու համար պետք է գումարենք առանձին-առանձին ունեցած դրամի քանակությունները:

դ. Պետք է առանձնահատուկ ուշադրություն դարձնել առարկաների միավորումը նշելու համար հայոց լեզվում գործածվող բառերի վրա. Դրանց իմացությունը պարտադիր է բոլոր աշակերտների համար: Այս փուլում կարելի է լուծել դասի 7 և 8 վարժությունները (տես նաև հավելված 1-ի 3 աղյուսակը):

ե. Առանձնահատուկ կիրառական նշանակություն ունեն միավորման գումարային սկզբունքի երկու մասնավոր՝ ոչ տրիվիալ կիրառությունները:

1. Գետի հոսանքի ուղղությամբ շարժվելիս նավակի արագությունը հավասար է իր սեփական արագության և գետի արագության և գետի արագության գումարին: Այս բնույթն ունեն դասի 17-19 վարժությունները:

2. Երկու մարմինների միասին անցած ճանապարհի երկարությունը, երբ նրանք շարժվում են տարբեր ուղղություններով (նաև՝ շրջանագծով և իրար հանդեպ), կապված է միավորման գումարային օրենքի հետ: Այս բնույթն ունեն դասի 20-23 վարժությունները:

զ. Ամփոփիչ բնույթ ունի 24 վարժությունը, որը նպատակահարմար է լուծել դասի վերջում:

Հանումը և համեմատումը: Դասը ներառված է [42]-ում և նվիրված է հանման երկրորդ կարևորագույն մոդելին՝ համեմատմանը: Այն կարելի է սկսել Գինեսի գրքում բերված որևէ օրինակի դիտարկումով, ինչպես արված է դասագրքում, կամ կարելի է սկսել թիվ 8 վարժության լուծումով, կամ էլ դիտարկել երկուսը միաժամանակ: Դրանք ապահովում են դասի հետաքրքիր մուտքը: Օրինակներ կարելի է բերել նաև առօրյա կյանքից, շրջակա միջավայրից և այլն: Նպատակահարմար է դասարանի ամենաբարձրահասակ և ամենացածրահասակ աշակերտների հասակների համեմատությունը, ամենածանր, և ամենաթեթև աշակերտների կշիռների համեմատությունը, տղաների և աղջիկների քանակությունների համեմատությունը և այլն :

Քանակությունների համեմատության համար դիտարկվող հանման օրենքը կարիք ունի մանրամասն ուսումնասիրության: Օրենքի իմացությունը պարտադիր է բոլոր աշակերտների համար: Երեք դեպքերից յուրաքանչյուրը պետք է դիտարկել ու բացատրել կոնկրետ օրինակի վրա: Օգտակար է նույնիսկ մեծությունների տարբեր սեռերից վերցրած օրինակների դիտարկումը միևնույն դեպքի համար: Անչափ օգտակար է այնպիսի առարկաների համեմատումը, որոնք բնութագրվում են մեկից ավելի մեծություններով, ընդ որում՝ մի մեծությամբ ավելի առարկաներից մեկը, մյուս մեծությամբ՝ մյուսը: Ահա նման օրինակներ.

Ա. բեռնատար և մարդատար ավտոմեքենաները չափվում են քարշի ուժով, տարողությամբ, քաշով և արագությամբ: Դրանցից առաջին երեք մեծությամբ ավելի է բեռնատարը, իսկ վերջինով՝ մարդատարը:

բ. Դասարանի ամենատարիքով, ամենաբարձրահասակ և ամենածանր աշակերտները: Այստեղ նույնպես համեմատումը շատ պարզ է, պարտադիր չէ, որ ամենատարիքով աշակերտը լինի ամենահասակովը և ամենածանրը:

Նման օրինակները պետք է համոզմունք առաջացնեն աշակերտի մոտ, որ առարկաների համեմատման ժամանակ կարևոր և պարտադիր է նշել այն մեծությունը, ըստ որի կատարվում է այդ համեմատումը:

Առանձնահատուկ ուշադրություն պետք է դարձնել հայոց լեզվում «ավելի» և «պակաս» բառերին զուգընթաց գործածվող բառերի վրա: Ինչպես նախորդ դասին, այստեղ ևս նպատակահարմար է դրանց ցուցակը կազմել աշակերտների ակտիվ մասնակցությամբ (տես հավելված 1, աղյուսակ 2): Դրանց իմացությունը ամրապնդել 5-7 վարժություններով: Դրանցից մեկական կարելի է լուծել դասարանում: Այստեղ նույնպես օգտակար է աշակերտների ուժերով այնպիսի նախադասությունների կազմումը, որոնցում մասնակցում են 5-7 վարժություններում նշված բառերը: Ինչպես դասարանում լուծված, այնպես էլ դասի մնացած վարժությունները պետք է հանձնարարել տնային աշխատանքի համար:

Կշռույթ: Դասը ներառված է [42]-ում: Դասի հիմնական նպատակը կշռույթի հասկացության ուսուցումն է: Ինչպես այս դասը, այնպես էլ կշռույթի հասկացությունն ու համապատասխան տերմինը նորույթ են: Կշռույթ հասկացությունը անգլերեն rate բառի հայերեն թարգմանությունն է: Այն ընդհանրացնում, համակարգում է մի շարք կարևորագույն հասկացություններ՝ գին, արագություն և այլն: Այստեղ օգտակար է հաշվի առնել հետևյալ մեթոդական նկատառումները:

ա. Դասը կարելի է սկսել աշակերտների ուշադրությունը հրավիրելով այն հանգամանքի վրա, որ ավտոմեքենաներում սովորաբար տեղադրված են լինում տարբեր չափիչ սարքեր, որոնցից յուրաքանչյուրը արտահայտում է ավտոմեքենայի որևէ տեխնիկական ցուցանիշ: Կարելի է կանգ առնել ավտոմեքենայի արագության և մեկ կիլոմետրը անցնելու համար ծախսվելիք բենզինի քանակության օրինակների վրա: Աշակերտների հետաքրքրությունը մեծանում է, երբ իրար հետ են համեմատվում տարբեր մեքենաների միևնույն տեխնիկական ցուցանիշները: Նման գիտելիքով սովորաբար աչքի են ընկնում մաթեմատիկայի նկատմամբ առանձնապես լուրջ հակում չունեցող աշակերտները, և այս պահին պետք է օգտագործել նրանց իմացությունը, ինչը իր հերթին կարող է նպաստել այդ աշակերտներին ներգրավելու ուսումնական գործընթացի մեջ:

բ. Անհրաժեշտ է ուսուցման այս նախնական փուլում դիտարկել նաև գնի վերաբերյալ կոնկրետ օրինակներ: Ընդ որում, նպատակահարմար է գնի համար ընտրել չափման տարբեր միավորներ: Օրինակ. Դրամ/կգ, դոլար/դրամ, դրամ/լ, դրամ/մ, դրամ/քառ.մ և այլն:

գ. Կշռույթի հասկացությունը ներմուծելուց հետո, նախքան դասագրքում բերված օրինակներին անցնելը, պետք է հանգամանորեն կանգ առնել կշռույթի գրառման վրա:

դ. Դասի մեջ բերված բոլոր օրինակների դիտարկումը կարևոր է: Անհրաժեշտ է սովորողների ուշադրությունը հրավիրել այն բանի վրա, որ կշռույթի համար դասի մեջ դիտարկված աղյուսակի առաջին սյունակում ընդունված նշանակումները լեզվական կառուցվածքի տեսակետից միասնական բնույթ չունեն: Մի քանի օրինակի դիտարկումից հետո առաջին հայացքից անսովոր թվացող «x առ y» ձևը դառնում է սովորական: Միաժամանակ՝ անհնար է հավելված 1-ի աղյուսակ 4-ի առաջին սյունակի գրառումներին հետևելով, գրառել կամ կարդալ ընդհանրական նշանակումը:

ե. Աղյուսակ 4-ում բերված օրինակները դիտարկելուց հետո աշակերտներից պետք է պահանջել յուրաքանչյուր օրինակի համար մի քանի այնպիսի համեմատականությունների նկարագրություն, որոնց կշռույթը հավասար կլինի տվյալ օրինակում բերված կշռույթին: Այս տեսակետից կարելի է նկատի ունենալ, օրինակ, դասի 8-10 վարժությունները:

Բանաձևերի համախումբը կամ տրամաբանական գումարը: Տրամաբանական գումարին նվիրված այս դասը առանձնահատուկ նշանակություն ունի: Առաջին հերթին անհրաժեշտ է առօրեական իրադրություններում հանդիպող օրինակներով հասկանալի դարձնել «կամ» շաղկապի գործածությունը հայոց լեզվում: Այնուհետև, տրամաբանական գումարի ճշմարիտության հարցի քննարկումը արդյունավետ կլինի, եթե այն սկսվի գրազ գալու վերաբերյալ որևէ իրադրության դիտարկումով: Նման մեկ-երկու օրինակների դիտարկումից հետո միայն կարելի է անցնել տրամաբանական գումարի ճշմարտային արժեքներին: Այստեղ շտապողականությունը օգտակար չէ: Լավ կլինի ճշմարտային աղյուսակի յուրաքանչյուր տողը քննարկել աշակերտների հետ և դրա վերաբերյալ կոնկրետ օրինակի դիտարկման միջոցով որոշել այդ տողում տրամաբանական գումարի արժեքը:

Անհրաժեշտ է մանրամասն կանգ առնել $x = \pm a$ բանաձևի ճշմարտային արժեքների վրա: Այստեղ պետք է հաշվի առնել հետևյալ հանգամանքը: Դասագրքում միևնույն տողում բերված են $1 = \pm 1$ և $-1 = \pm 1$ բանաձևերը: Աշակերտը կարող է օգտվել միևնույն արտահայտությանը հավասար արտահայտության հատկությունից և ստանալ $1 = -1$ «հավասարությունը»: Եթե անգամ սխալվելու նման դեպք չնկատվի, ապա կարելի է կատարել նման մտահանգումներ և առաջարկել աշակերտներին գտնել թույլ տրված սխալը: Իհարկե «գաղտնիքն» այն է, որ տրված բանաձևերը հավասարություններ չեն, չնայած նրանցում մասնակցում է հավասարության նշանը: Հետևաբար՝ չի կարելի կիրառել հավասարության հատկություններից մեկը այդ բանաձևերի նկատմամբ: (Տես նաև դասի 12 վարժությունը):

Բանաձևերի համախմբի լուծումները դիտարկելիս նպատակահարմար է պարզագույն օրինակների վրա բացահայտել տրված թիվը այդ համախմբի լուծում լինել-չլինելու հարցը:

Անհրաժեշտ է այս թեմայի ուսուցման ընթացքում հաշվի առնել նաև հետևյալը: Աշակերտները կարող են հետաքրքրվել «կամ» շաղկապի բացառող իմաստով գործածությամբ: Չէ որ նրանք կարող են լսած լինել որոշ անկարգ աշակերտներին ուղղված՝ ուսուցիչի այսպիսի դատողությունը. «ե՛ս կամ դո՛ւ»: Այսինքն՝ «դասարանում պետք է մնա մեզանից միայն մեկը»: Սա նշանակում է, որ այն դեպքում, երբ «Ա կամ Բ» ասույթի մեջ Ա և Բ բանաձևերը միաժամանակ ընդունում են ճշմարիտ արժեք, «Ա կամ Բ» ասույթը ընդունում է կեղծ արժեք: Սա «կամ» շաղկապի գործածությունն է բացառող իմաստով: Մաթեմատիկայում, ինչպես նաև իրավաբանության մեջ ընդունվում է այդ շաղկապի ոչ թե բացառող, այլ այն իմաստը, որ նրան վերապահված է այս դասագրքում:

Քառակուսային հավասարումներ: Դասը ներառված է [49]-ում: Դասի հիմնական նպատակը քառակուսային հավասարումների լուծման ուսուցումն է: Քառակուսային հավասարումների համարժեքության՝ դասագրքում բերված հատկությունը նախապատրաստական նշանակություն ունի քառակուսային հավասարումների լուծման համար: Դասագրքում վերջին խնդրի լուծումը տարբեր է ավանդականից: Ավանդական մոտեցման ժամանակ վերցնում ենք կամայական քառակուսային եռանդամ, ստանում նրա արմատների բանաձևերը և հետազոտում այն՝ կախված եռանդամի տարբերիչից: Այսինքն՝ քառակուսային հավասարումներ լուծելիս նախ մեխանիկորեն գրում ենք լուծման ընդհանուր բանաձևը, ապա դիտարկում լուծման գոյության և միակության հարցերը՝ կախված տարբերիչից: Ստացվում է, որ հավասարումը կարող է լուծում չունենալ, բայց աշակերտը նրա լուծման բանաձևը սերտողաբար գրում է: Ինչպես մենք նշեցինք ուսուցման գիտակցականությանը նվիրված բաժնում, նման մեթոդիկայով ուսուցման դեպքում ուսուցումը կրում է սերտողական բնույթ: Դասագրքում հենց սկզբից զանազանվում են՝ զրոյից փոքր, զրո, զրոյից մեծ տարբերիչներով քառակուսային հավասարումները և նրանցից յուրաքանչյուրի համար ապացուցվում է քառակուսային հավասարման արմատների մասին համապատասխան հատկությունը: Դրանք իրարից էապես տարբեր դեպքեր են, և դրանց համատեղ դիտարկումը մեթոդապես նպատակահարմար չէ: Եվ կոնկրետ քառակուսային հավասարումներ լուծելիս էլ աշակերտին պետք է սովորեցնել նախ հաշվել հավասարման տարբերիչը, և կախված դրանից՝ ընտրել համապատասխան հատկությունը՝ արմատները գտնելու համար, այսինքն՝ լուծում չունենալու դեպքում կարիք չկա սերտողաբար ինչ որ բանաձև գրել, իսկ մեկ լուծում ունենալու դեպքում էլ առաջարկվում է կիրառել շատ ավելի պարզ բանաձև, քան քառակուսային հավասարումների լուծման ընդհանուր բանաձևն է, որն էլ նպատակահարմար է կիրառել միայն երկու լուծում ունենալու, այսինքն՝ դրական տարբերիչի դեպքում: Հասկանալի է, որ նման ուսուցումը սերտողական տարր չի պարունակում և համապատասխանում է ուսուցման գիտակցականության սկզբունքին:

Կիրառվող ապացուցումները ոչ ավանդական են: Նրանցում անհրաժեշտ է ուշադրություն դարձնել համարժեքության յուրաքանչյուր կոնկրետ դեպքի, այն հիմնավորող փաստարկի կամ փաստարկների վրա:

Դասի 20-23 վարժությունները պարունակում են պարամետրեր և տեսական նյութի ամրապնդման համար կարևոր նշանակություն ունեն: Դրանցից յուրաքանչյուրի մի մասը պետք է պարտադիր լուծել դասարանում, իսկ մյուս մասը հանձնարարել ինքնուրույն աշխատանքի համար: Ընդ որում, այս վարժությունները սկսելուց առաջ որպես պարտադիր վարժություն պետք է աշակերտներին առաջարկել ընդհանուր տեսքով տրված քառակուսային հավասարման արմատների թվի մասին հայտնի խնդրի լուծումը.

$ax^2+bx+c=0$ քառակուսային հավասարումը՝ ե՞րբ.

ա. ունի երկու արմատ , բ. ունի մեկ արմատ, գ. արմատ չունի:

Դասի վերջում պետք է անդրադառնալ կիրառական խնդիրների լուծմանը: Այստեղ չափազանց օգտակար է այդ խնդիրների լուծումը չկտրել տեսական նյութից: Անհրաժեշտ է միշտ նշել, որ ի վերջո քառակուսային հավասարումների հիմնական դերերից մեկը նշված տիպի կիրառական խնդիրների լուծման մեջ է, և առանց քառակուսային հավասարումների լուծման իմացության մենք չենք կարողանա լուծել նաև կիրառական այդ խնդիրները:

Ֆունկցիայի գրառումը: Այս դասը ներառված է Դասը ներառված է [49]-ում: Դասի ընթացքում պետք է նկատի ունենալ հետևյալ մեթոդական խորհուրդները:

ա. Անհրաժեշտ է ընդգծել սլաքների միջոցով ֆունկցիաների գրառման և առավելությունները, և թերությունները: Մեկ անգամ ևս կարելի է ընդգծել, որ այսուհետև համեմատականությունները նույնպես դիտարկվելու են որպես ֆունկ-ցիաներ: Համապատասխան օրինակների դիտարկումը երևի արժե սկսել գ –ից:

բ. Գրառման f(x) ձևի մասին խոսելիս կարելի է անդրադառնալ 10.7 դասի մուտքին, որտեղ մատչելի ձևով հիմնավորված է մեկ փոփոխականով կամայական բազմանդամի f(x) տեսքով ներկայացման նպատակահարմարությունը: Օրինակների դիտարկման ընթացքում նպատակահարմար է յուրաքանչյուր մասնավոր հավասարության դեպքում ընդգծել դրա սովորական իմաստը, ասենք՝ h(Չինաստան) = 9363200 քառ. Կմ հավասարությունը «Չինաստանում տարածքը 9363200 քառ. Կմ է» նախադասության հանրահաշվական գրառումն է: Կամ f(Ֆրանսիա) = Փարիզ գրառումը «Փարիզը Ֆրանսիայի մայրաքաղաքն է» նախադասության հանրահաշվական գրառումն է և այլն:

Այս օրինակների դիտարկում մի անգամ ևս օգտակար է ընդգծել, որ ֆունկցիայի գրառման մեջ f(x)-ը չի կարող նշանակել f-ի և x-ի արտադրյալ. Նման ընկալման անհրաժեշտությունը այստեղ ավելի լավ է երևում:

գ. Ֆունկցիայի գրառման մեջ f(x)-ը մի դյուրընկալում ևս ունի. Հաճախ և շատերը հենց f(x)-ն են անվանում ֆունկցիա: Իրականում f(x)-ը ֆունկցիայի արժեքն է x տարրի համար: Դասի վերջում այս հարցերը դիտարկելիս օգտակար է անել 15բ վարժության մեջ տրված հարցադրումը՝ այդ և այլ օրինակների համար: Նման հարցադրում անելու համար հիմք կարող է ծառայել դասի h և j ֆունկցիաների գրառումները:

դ. Դասի և վարժությունների մեջ եղած օրինակները դիտարկելիս պետք է ամեն կերպ ընդգծել ֆունկցիայի գաղափարի կարևորությունը՝ թեկուզ և կիրառության ոլորտների բազմազանությամբ և ընդարձակությամբ: Այստեղ և հետագայում աչքի առաջ պետք է ունենալ ֆունկցիայի հանրակրթական դերի ընդգծման խնդիրը:

ե. Դասի 14-16 վարժությունների մեջ բերված անհավասարումների լուծումները ոչ միայն նպաստում են միջառարկայական կապերի ամրապնդմանը, այլև նոր որակ են հաղորդում հանրահաշվական հասկացություններին և հարաբերություններին, նրանց նկատմամբ ստեղծում կենդանի հետաքրքրություն:

3.4. Գիտափորձը

Մեր կողմից հիմնականում իրականացվել են հավաստող, ստուգողական և ճշգրտող գիտափորձեր:

Միջին դպրոցի **հանրահաշվի դասընթացի** վերաբերյալ գիտափորձերը ունցել են լայն ընդգրկում ինչպես ժամանակի, այնպես էլ փորձարկվող լսարանի տեսակետից: Առաջին փորձարկումը և, ըստ էության, դասագրքերի ստեղծումը կատարվել է իմ կողմից 1996 թ. ստեղծված «Սասուն Միքայելյան» հանրակրթական մասնավոր դպրոցում, որի տնօրենն ու մաթեմատիկայի ուսուցիչն էի միաժամանակ: Դասընթացի, նրա գաղափարների ձևավորման, ուսուցման հետ կապված իմ դիտարկումները ոչ թե վերացական դատողություններ են մաթեմատիկական կրթության մասին, այլ ուսուցման ընթացքում ուսուցչի կողմից գիտափորձով ստուգված կոնկրետ դատողություններ, մտահանգումներ, դրույթներ: Երբ, օրինակ, ես խոսում եմ ապացուցումների հենցենյան սխեմայի կիրառման մասին, ապա աչքիս առաջ է ութերորդ դասարանցի Հարությունը, ով այնքան էր աճել, որ արդեն ուշադրություն չէր դարձնում սխեմայի արտաքին գեղագիտության, այն իր կողմից խախտելու վերաբերյալ դասընկերների դիտողությունների վրա և էական էր համարում միայն դատողությունների իրարից բխեցման ներքին գործընթացը: Եվ այդ մասին դասընկերներին արված նրա կարճ ու դիպուկ դիտողությունը շատ ավելի մեծ մանկավարժական ներգործություն ունեցավ նրանց վրա, քան իմ երկարաշունչ բացատրությունները:

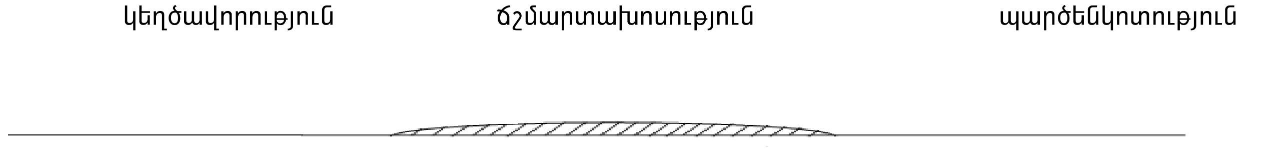
Դասընթացի առաջին մասը լույս տեսավ 1998-ին, իսկ նրա փորձարկումը կատարվեց N128 և հանրապետության մի քանի այլ դպրոցներում: Նույն տարում ԿԳ նախարարությունում և ԿԲԿ-ում կատարվեցին հանրահաշվի իմ կողմից առաջարկված ծրագրի (տես հավելված 4-Բ) քննարկում, որոնց արդյունքում այն ընդունվեց որպես հանրակրթության միջին դպրոցի պետական ծրագիր: Նույն տարում կազմակերպվեց միջին դպրոցի դասագրքերի մրցույթ, որում հավանություն տրվեց իմ կողմից ներկայացված դասագրքերին: Հաջորդ տարվա սկզբներին «Հանրահաշիվ 6» դասագիրքը տրվեց փորձագիտական կարծիքի հանրապետության մոտ հիսուն դպրոցների, որոնց արված բազմապիսի դիտողությունները նկատի ունենալով, արդեն նույն տարվա աշնանը դասագիրքը մտավ հանրակրթական դպրոց: Նույնը կրկնվեց նաև հաջորդ երկու տարիներին «Հանրահաշիվ 7» և «Հանրահաշիվ 8» դասագրքերի համար: Եվ, ըստ էության, 1999-2005 թթ. ՀՀ, Արցախի և Ջավախքի հայկական բոլոր դպրոցները, որոնցում այդ ընթացքում գործում էին նշված դասագրքերը, մեզ համար ստեղծեցին գիտափորձի անփոխարինելի միջավայր: Համաձայն ԿԲԿ-ի տված տեղեկանքի, միայն 1999-2003 թթ. Կենտրոնի մասնագետների հետ միասին կազմակերպել ենք «6-8-րդ դասարանի հանրահաշվի դասագրքերի բովանդակության, դասավանդման արդյունքների և ուսուցման մեթոդների համակարգին նվիրված հանդիպումներ, սեմինարներ ու գործնական պարապմունքներ (ավելի քան 100 հանդիպում) ՀՀ հանրակրթական դպրոցների մաթեմատիկայի ուսուցիչների և մեթոդմիավորումների նախագահների համար, այդ թվում՝ Երևանի բոլոր համայնքներում, բոլոր մարզերում: Հանդիպումների ընթացքում քննարկվել են նաև հանրահաշվի ուսումնական ծրագրին, առարկայական չափորոշիչներին, ինչպես նաև ուսուցիչների վերապատրաստման համակարգին վերաբերող հարցեր: Միաժամանակ հավաքվել են նաև կարծիքներ ու առաջարկություններ դասագրքերի հետագա բարելավման նպատակով»: Փորձագիտության կարևոր միջավայր էր նաև «Մաթեմատիկան դպրոցում» ամսագիրը, որի էջերում տպագրած էին հանրահաշվի ծրագրի ու դասագրքերի վերաբերյալ հանրապետության առաջատար մասնագետների, ուսուցիչների կարծիքները, առանձին կողմերը լուսաբանող աշխատանքները, նաև իմ կողմից հրատարակված մեթոդական ձեռնարկներն ու հոդվածները (տես գրականության ցանկը): Հարկ եմ համարում նշել ԿԲԿ-ի (հետագայում՝ ԿԱԻ) մասնագետների այս և հետագա տարիների հետևողական աշխատանքը ուսուցիչների վերապատրաստման ուղղությամբ:

Այսպիսով, կատարված հավաստող, ստուգողական և ճշգրտող բազմապիսի փորձարկումների արդյունքում կատարվեցին հանրահաշվի առարկայական ծրագրի և դասագրքերի էական բարեփոխումներ, և արդեն 2005-ին պատրաստ էր դասընթացի նոր տարբերակը: Նույն տարում անցկացված դասագրքերի մրցույթում դարձյալ հավանության արժանացան մեր կողմից ներյակացված «Հանրահաշիվ 6, 7, 8» դասագրքերը:

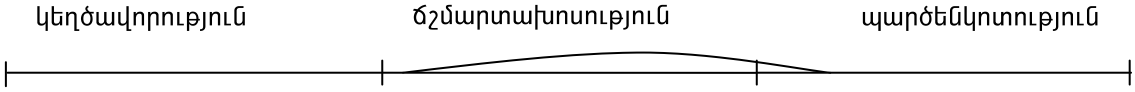
Ուսուցիչների պատրաստման համակարգում արժեբանության և գեղագիտական դաստիարակության ուղղությամբ մաթեմատիկական կրթության ներուժի բացահայտմանը նվիրված մեր երկարամյա փորձը, համապատասխան ուսումնական ծրագրերի ստեղծման, հետազոտությունների արդյունքների ուսումնասիրության վերաբերյալ հավաստող, ճշգրտող և ստուգող փորձարկումները հաստատեցին վարկածն այն մասին, որ հանրահաշվի ուսուցման գործընթացի միջոցով հնարավոր է լուծել սովորողների արժեհամակարգի և հոգեկան գործընթացների ձևավորմանն ուղղված որոշակի գործնական խնդիրներ, տալ դրանց տեսական հիմնավորումները, իրականացնել գեղագիտական դաստիարակության որոշակի գործառույթ:

Մաթեմատիկական կրթության միջոցով բարոյական արժեքների ձևավորման ուղղությամբ գիտափորձեր են կատարվել իմ ղեկավարությամբ մագիստրոսական թեզերի կատարման շրջանակներում: Դրանցում հիմնականում ուղղված են եղել բարոյական արժեքների ձևավորման ուղղությամբ մաթեմատիկական կրթության ներուժի վերաբերյալ մեր կողմից առաջ քաշած հիպոթեզների ստուգմանը և բացահայտմանը: [19] աշխատանքը նվիրված է եղել մաթեմատիկական կրթության հետ առաքինությունների առնչություններին: Ասինգերի թեստի [410] միջոցով ստուգվել են արիստոտելյան առաքինությունների վրա մաթեմատիկական կրթության ազդեցությունները: Համեմատենք մեր ներկայացրած վարկածի և գիտափորձով հաստատված տարբերակների ճշմարտախոսության համար, ինչը Արիստոտելը դիտում է որպես կեղծավորության և պարծենկոտության միջին, վարկածի և գիտափորձի արդյունքները այսպիսին են.

Վարկածը

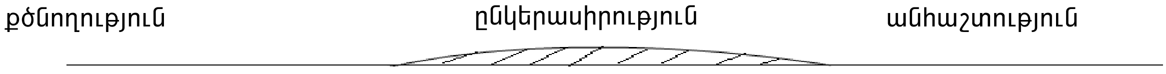


Գիտափորձի տվյալները

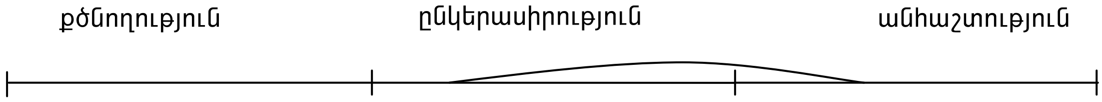


Համեմատենք նաև մեր ներկայացրած վարկածի և գիտափորձով հաստատված տարբերակները ընկերասիրության բարոյական արժեքի համար, ինչը Արիստոտելը դիտում է որպես քծնողության և անհաշտության ծայրահեղությունների միջին:

Վարկածը



Գիտափորձի տվյալները

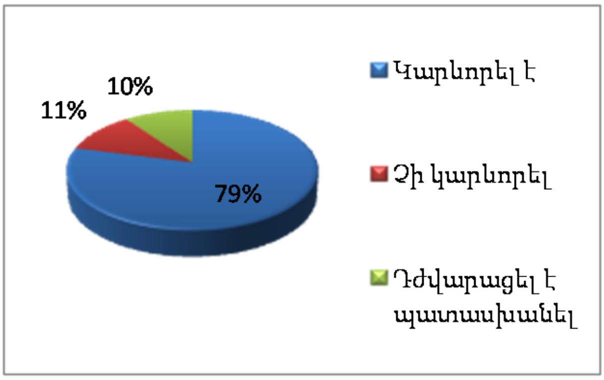


Գիտափորձի արդյունքները երկու դեպքում էլ մոտ են վարկածի տվյալներին: Ճշմարտախոսության դեպքում շեղումը աննշան է: Գիտափորձը կատարված է նաև արիստոտելյան այլ արժեքների համար:

[16] աշխատանքում կատարված է գիտափորձ երջանկության բարոյական արժեքի համար: Անկետավորում է անցկացվել ինչպես աշակերտների, այնպես էլ ուսուցիչների շրջանում: Վերջիններս (մաթեմատիկայի 50 ուսուցիչ) ներկայացվել են հետևյալ հարցերը.

Հարց 1 «Արդյո՞ք մաթեմատիկական կրթությունը բարեկեցիկ կյանքի համար կարևոր ներդրում կարող է ունենալ»:

Հարց 2 «Կարևորու՞մ եք աշակերտների մաթեմատիկական կրթության դերը որպես հետագայում նրանց բարեկեցիկ կյանքի կարևոր գործոն»:



Արդյունքները ներկայացված են դիագրամով, ինչը ցույց է տալիս, որ ուսուցիչների գերակշիռ մասը գիտակցում է մաթեմատիկական կրթության դերն ու նշանակությունը բարեկեցիկ կյանքի և հետևաբար երջանկության ձևավորման գործում: Նրանք բերում են մի շարք փաստեր, որոնք հիմնավորում են իրենց տեսակետը:

Ինչ վերաբերում է գեղագիտական արժեքների ձևավորման խնդրին, ապա դրա վերաբերյալ կատարվել են բազմազան գիտափորձեր (տես [122-124], [199-200], [214-215], [237], [240], [276], [289], [292], [328-329], [371-374], [380], [396], [432], [456], [470], [472], [484]), որոնք հաստատում են մաթեմատիկայի կրթական մեծ ներուժը ինչպես նշված արժեքների ձևավորման, այնպես էլ գեղագիտական դաստիարակության իրականացման ուղղությամբ:

Ուսուցիչների պատրաստման համակարգում հանրահաշվի ուսուցման վերաբերյալ մեր կատարած աշխատանքների առաջին փորձարկումները վերաբերում են խնդիրների համակարգի միջոցով խմբերի տեսության տարրերի ուսուցմանը: Այս ուղղությամբ Հ. Հովհաննիսյանի հետ մեր կատարած համատեղ աշխատանքները մանկավարժական ինստիտուտի մաթեմատիկայի ֆակուլտետի առաջին կուրսերի բարձրագույն հանրահաշվի գործնական պարապմունքներում կատարած փորձարկման արդյունքների մասին մեր նկատառումները ներկայացրինք մասնագիտական մամուլում [95-99], իսկ խնդիրների համակարգը հրատարակեցինք առանձին գրքույկով [97]: Վերջինս հաջողությամբ օգտագործվեց որպես ուսումնաօժանդակ ձեռնարկ և հիմք ծառայեց բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացի խմբերի տեսության տարրերին նվիրված բաժնի վարժությունների համակարգի համար:

Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացը արդյունք է հեղինակի շուրջ 30-ամյա դասավանդման փորձի: Նրանում կիրառված մտահղացումները բազմիցս փորձարկվել, ստուգվել, մշակվել ու հղկվել են: Մեր ամբողջական նկատառումները՝ քննարկվել են մասնագետների և, առանձնապես, դասագրքի խմբագրի և գրախոսողների հետ: Փորձարկման կարևոր փուլ կարելի է համարել նաև ԿԳ նախարարության Կոլեգիայի կողմից այդ աշխատանքի երաշխավորությունը որպես բուհական դասագիրք: Դասագրքի առաջին լայնածավալ փորձարկումը կատարվել է 2001 թվականին: Դասագիրքը առաքվել է ԵՊՀ, Գյումրիի և Վանաձորի մանկավարժական ինստիտուտներ և Արցախի պետական համալսարան: Այդ բուհերից ստացված բազմաթիվ առաջարկությունները, դասավանդող դասախոսների հետ զրույցներն ու քննարկումները հիմնականում հանգում են հետևյալ երեք նկատառումներին:

ա. Դասագիրքը, բացի մանկավարժական ինստիտուտներից, կարող է լիարժեք ծառայել նաև համալսարանների համար, եթե նրանում կատարվեն որոշ հավելումներ:

բ. Դասագիրքը և ուսանողությունը մեծապես կշահեն, եթե նրանում ներկայացված լինի նաև խնդիրների համակարգը:

գ. Դասագրքում առկա են զգալի թվով վրիպումներ, բացթողումներ և անճշտություններ, որոնք անհրաժեշտ է ուղղել:

Մեր կողմից հաշվի են առնվել արված բոլոր նկատառումները: Մասնավորապես, ավելացրել ենք քառակուսային ձևերին և մատրիցների ժորդանյան նորմալ տեսքերին նվիրված նյութերը: 2004 թվականին դասընթացը լույս տեսավ արդեն երկու հատորով [59-60] և առ այսօր օգտագործվում է ՀՀ մանկավարժական բուհերում որպես բարձրագույն հանրահաշվի հիմնական և ԵՊՀ-ում որպես օժանդակ գրականություն:

Այսպիսով, հիմնականում նշված բուհերի դասավանդող դասախոսների ուժերով անցկացված գիտափորձը հաստատեց մեր վարկածն այն մասին, որ հնարավոր է ստեղծել մաթեմատիկայի ուսուցիչների պատրաստման համակարգի համար հանրահաշվի դասընթաց, որը համահունչ կլինի հանրակրթական միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացի հետ և, միաժամանակ, կբավարարի բարձրագույն դպրոցի առջև դրված արդի պահանջներին:

Մանկավարժական բուհում ընտրովի դասընթացների կառուցման, կուրսային և ավարտական աշխատանքների ու մագիստրոսական թեզերի ղեկավարման մեր երկարամյա փորձերի արդյունքում մենք կարողացանք հաստատել վարկածն այն մասին, որ հնարավոր է ստեղծել հանրահաշվական ժամանակակից հետազոտությունների վրա հենված ընտրովի դասընթաց, կուրսային, ավարտական աշխատանքներ, մագիստրոսական թեզեր, որոնք հնարավորություն կտան ապագա ուսուցչին տեսնելու ժամանակակից հանրահաշվի կառույցի որոշ կողմեր, հասկանալու մաթեմատիկական ստեղծագործության առանձնահատկությունները, ձեռք բերելու դրանց բացահայտման ունակություններ, խորությամբ զգալու մաթեմատիկայի ներքին գեղագիտությունը:

Իմ մյուս աշակերտ Ա. Մկրտչյանը կատարել է գիտափորձ Քերոլի սկուտեղի վերաբերյալ՝ նկատի ունենալով այդ ուղղությամբ մեր համատեղ [101] աշխատանքը, ինչպես նաև հենցենյան ապացուցումների արդյունավետության վերաբերյալ [103]: Գիտափորձ կատարվել է Երևանի Նար-Դոսի անվան թիվ 14 դպրոցի 8-րդ դասարանների աշակերտների, ՀՊՄՀ հենակետային վարժարանի 10-րդ դասարանների սովորողների և ՀՊՄՀ-ի «Մաթեմատիկա» բաժնի 4-րդ կուրսի ուսանողների հետ: Աշակերտների հետ նախապես անց են կացվել մի քանի պարապմունքներ, որտեղ պարզաբանվել է հենցենյան ապացույցի էությունը: Աշակերտները սկզբնական փուլում դժվարացել են ապացուցման քայլերի հիմնավորումները կամ փաստարկումները կատարելիս, որոնք զետեղվում են ապացուցման աջ մասում: Ստուգման ընթացքում ընտրվել են մի քանի թեորեմներ, որոնք սովորողներին առաջարկվել են նախ ապացուցել իրենց իմացած մեթոդներով, իսկ այնուհետև, անցում կատարել դեպի այդ մեթոդը:

Ուշագրավ էր այն փաստը, որ սկզբում՝ առաջին թեորեմի (արտադրյալի աստիճանի հատկությունը) ապացուցման ժամանակ սովորողները հաջորդաբար գրում էին բանաձևեր, սակայն դժվարանում էին պատասխանել «ինչի՞ց օգտվելով գրեցիք այդպես» կամ «ինչի՞ց է դա բխում» հարցերին (շատերի համար նույնիսկ անսպասելի էին այդ հարցերը): Նմանապես, նրանց համար դժվար և անսպասելի էր նաև այն հարցը, թե հայերեն բառերով ինչպե՞ս կարող ենք ձևակերպել այս կամ այն բանաձևը, որը գրված է մաթեմատիկական սիմվոլներով (օրինակ՝ $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$): Այն բանից հետո, երբ սովորողներին բացատրվում էր, թե այդ նույն ապացուցումը ինչպես ներկայացնել ծառի տեսքով, և պարզաբանվում էր այդպիսի ապացուցման էությունն ու կատարման ընթացքը, որպես կանոն, փոխվում էր լսարանում տիրող մթնոլորտը և նկատելի էր դառնում ստեղծագործական աշխուժությունը: Դիտարկվող հաջորդ թեորեմի (միևնույն հիմքով աստիճանների արտադրյալի հատկությունը) ապացուցման ժամանակ արդեն ավելի մեծ թվով սովորողներ էին մասնակցում քննարկումներին: Կարևոր էր այն պահը, երբ երկրորդ թեորեմից սկսած, առանց նախապես հիշեցնելու կամ զգուշացնելու, սովորողներն արդեն ինքնակամ փորձում էին ապացուցման ընթացքը ներկայացնել ծառի տեսքով: Անշուշտ, դեռևս շարունակում էին դժվարանալ փաստարկները նշելու գործում, սակայն դա ակտիվ քննարկումների առիթ էր դառնում, որը դասին հաղորդում էր կենդանի աշխուժություն, և սովորողներն ինքնաբերաբար ընդգրկվում էին ուսումնառության գործընթացի մեջ:

«Ծառի տեսքով ապացուցումները ներկայացնելու մեթոդի նկատմամբ սովորողների ցուցաբերած հետաքրքրասիրությունը նույնիսկ գերազանցեց մեր նախնական սպասելիքները: Ապացուցման ծառը պատկերելու փորձեր էին անում նաև այն աշակերտները, որոնք, ուսուցիչների վկայությամբ, մաթեմատիկայի դասերին սովորաբար շատ պասիվ են եղել: Պարապմունքների ամփոփման ժամանակ սովորողները հայտնում էին, որ իրենց շատ դուր է եկել ապացուցման այդ եղանակը, քանի որ սխեմատիկորեն տեսնում են, թե ինչը ինչից է բխում, տպավորիչ է, ներգրավվում են անգամ ցածր առաջադիմություն ունեցողները, ապացուցումը չի վանում, այլ գրավում է, վերացնում է վախը սեփական ուժերի նկատմամբ, դառնում են ավելի ինքնավստահ, պատասխանատվություն են զգում իրենց կատարած քայլերի համար, գիտակցում են, որ այն, ինչ գրեցին, պետք է կարողանան հիմնավորել և պետք է կարևորեն հստակ հայերենով ձևակերպել իրենց մտքերը» [103, 143]: Հենցենյան ապացուցումների վերաբերյալ անցկացված գիտափորձի ընթացքի նկարագրությունը տես [103], էջ 182-187:

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Մաթեմատիկայի հանրահաշվականացումը, որ սկսվեց 17-րդ դարում Դեկարտից և իր գագաթնակետին հասցվեց 20-րդ դարում Բուրբակիների կողմից՝ մաթեմատիկայի բազմահատոր շարադրանքում, իր բնական արտահայտությունը պետք է գտներ նաև կրթության ոլորտում, մասնավորապես՝ հանրակրթության մեջ և ուսուցիչների պատրաստման համակարգում: Սակայն ուսումնասիրությունները ցույց են տալիս, որ հանրակրթության մեջ «հանրահաշիվ» կոչվող ուսումնական առարկան, որ նախատեսվում է միջին դպրոցի ուսումնական պլանով, շատ հեռու է գիտության համապատասխան բնագավառի էական կողմերը արտահայտելուց: Ավելի վատ է վիճակը ավագ դպրոցում, որտեղ թեև ուսումնական առարկան կոչվում է «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրերը», սակայն զուտ հանրահաշվական նյութի պարունակությունը հասցված է նվազագույնի: Պատճառաբանությունն այն է, որ թեև առարկայի անվանումը հանրահաշիվ է, սակայն այն կատարում է միջին դպրոցի երկրաչափության դասընթացից դուրս մնացյալ ողջ մաթեմատիկայի գործառույթները: Համաձայնելով այդ ընդհանուր մոտեցման հետ, պետք է այնուամենայնիվ նշենք, որ հանրահաշվի՝ մաթեմատիկայում ունեցած առանձնահատուկ տեղը կարող է իր արտահայտությունը գտնել նաև հանրակրթության մեջ: Ավելին, կատարված ուսումնասիրությունները, դրանց հիման վրա ստացված տեսական և գործնական արդյունքները ցույց են տալիս, որ.

1) Հանրահաշվի դպրոցական դասընթացի հիմքում կարելի է և նպատակահարմար է դնել ժամանակակից հանրահաշվի ոգուն համապատասխանող ուսումնական նյութ և համակարգ, նրանում կիրառելով աքսիոմատիկ մեթոդը՝ ի դեմս իրական թվերի կարգավորված դաշտի, ռացիոնալ կոտորակների դաշտի և մեծությունների կարգավորված հանրահաշվի բովանդակային աքսիոմատիկ տեսությունների, նյութի շարադրանքը հիմնականում իրականացնել դեդուկտիվ մեթոդով և ապացուցողական հստակ կառույցով: Ապացուցումները կարելի է իրականացնել նաև հենցենյան ծառերի տեսքով և տալ դրանց կառուցման մեթոդիկան (ինչը տալիս է նաև Ի. Լ. Տիմոֆեևայի՝ դրա հնարավորության և իրականացման վերաբերյալ առաջադրած հարցի դրական

պատասխանը): Միևնույն ժամանակ, ապացուցումներին զուգահեռ նպատակահարմար է բերել փաստարկման համակարգը, ինչը կարող է էապես բարելավել սովորողների փաստարկման կարողությունները և տրամաբանական մտածողությունը՝ ընդհանրապես:

2) Դասընթացի կառույցի հիմքում նպատակահարմար է դնել հիմնական հանրահաշվական գործողությունները, իսկ հիմնական բանաձևերի՝ հավասարությունների, հավասարումների, անհավասարությունների և անհավասարումների, ինչպես նաև բազմությունների տեսության որոշ այլ բանաձևերի վերաբերյալ նյութի շարադրանքը տանել գործողություններից յուրաքանչյուրի վերաբերյալ նյութի շարադրանքին զուգահեռ:

3) Նման ձևով ստացված հանրահաշվական լեզուն կարելի է հարստացնել դասընթացի բովանդակության մեջ համակարգված ձևով ներառելով տրամաբանության հիմնական տարրերը, դրանք շաղկապելով մաթեմատիկական նյութի հետ, ինչը կնպաստի ինչպես լեզվամտածողության և տրամաբանական մտածողության զարգացմանը, այնպես էլ մի շարք մաթեմատիկական հիմնարար հասկացությունների յուրացման խնդրում ավանդական սերտողական ուսուցման իրողության վերացմանը և մաթեմատիկական նյութի ուսուցման արդյունավետության բարձրացմանը:

4) Միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացի հանրահաշվական լեզուն պետք է դասընթացում գտնի անհրաժեշտ կիրառություն, իսկ նրա տիրապետումը պետք է դառնա ուսուցման հիմնական նպատակներից մեկը: Դրան կարելի է հասնել համակարգելով հանրահաշվի կիրառական ոլորտը, նրանում ներառելով գործողությունների մոդելները և գործողությունների համեմատականությունները, իսկ ուսուցման գործընթացում ներգրավելով մեծությունները: Նման մոտեցումը արմատապես բարելավում է հայոց լեզվի հետ հանրահաշվի միջառարկայական կապերը, սովորողների լեզվամտածողությունը: Նույն համատեքստում կարելի է նոր ուղիներ գտնել նաև պատմության, աշխարհագրության, ֆիզիկայի, տնտեսագիտության հետ հանրահաշվի միջառարկայական կապերի բացահայտման և կիրարկման խնդրի բարելավման համար:

5) Միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացը լայն հնարավորություններ ունի ձևավորելու սովորողների արժեհամակարգը: Գեղագիտական արժեքների պարագայում մեթոդական գրականության մեջ լայնորեն լուսաբանված է մաթեմատիկայի ուսուցման դերը գեղեցիկի ձևավորման խնդրում: Այս գործընթացում բացահայտելով միջին դպրոցի հանրահաշվի ներուժը, կարելի է ստանալ հնարավորությունների լայն դաշտ նաև տգեղի, վեհի, ստորի, կատակերգականի և գեղագիտական այլ արժեքների ձևավորման համար (տես նաև [87-88]): Իսկ գեղեցիկի պարագայում հանրահաշվի և, ընդհանրապես, մաթեմատիկայի հետ նրա փոխհարաբերությունների ավանդական ոլորտների հետ միասին հնարավոր է դիտարկել ճարտարապետության, խաչքարագործության, գրականության և շախմատի ու նրա դասավանդման հետ բազմազան կապերը, ինչը մեծապես հարստացնում և նոր երանգ է հաղորդում ուսուցման գործընթացին: Միևնույն ժամանակ, մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում մաթեմատիկական գեղեցիկի ներգրավումը ավելի արդյունավետ կդառնա, եթե շրջանառության մեջ դրվեն այդ հասկացության օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ տեսակները:

6) Հետազոտողների կողմից դիտարկված է մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում գեղագիտական ճաշակի ձևավորման հարցը: Մինչդեռ նույն հաջողությամբ այդ գործընթացում կարելի է դիտարկել գեղագիտական հարաբերության, ընկալման, գեղագիտական զարգացման, գեղագիտական իդեալի, գեղագիտական ճշմարիտի, գեղագիտական գնահատականի և սովորողների գեղագիտական դաստիարակության մյուս կատեգորիաների ձևավորման հարցը: Ընդ որում, այստեղ կենտրոնական դեր կարող է խաղալ եռակողմ գեղագիտական հարաբերության հասկացությունը:

7) Բարոյական արժեքները կազմում են մարդու արժեհամակարգի կարևորագույն մասը և դրանց ձևավորումը դաստիարակության հիմնական խնդիրներից է, եթե ոչ հիմնականը: Անշուշտ, բարոյական արժեքների ձևավորման գործում անհամեմատ մեծ են գրականության, պատմության և հումանիտար ցիկլի մյուս ուսումնական առարկաների հնարավորությունները, որովհետև հերոսության, հայրենասիրության, սիրո և բարոյական այլ որակների ձևավորման համար գրականությունը կամ

պատմությունը կարող են դիմել գրական կամ պատմական ստեղծագործությունների, որոնցում առկա են նշված որակները կրող բազմաթիվ օրինակներ՝ հրաշալի կերպարներ, պատմական դեմքեր և այլն: Մինչդեռ մաթեմատիկայի ուսումնական նյութը նման՝ կերպարային մոտեցման հնարավորություններ չի տալիս: Բայցևայնպես, մաթեմատիկան նույնպես ունի բարոյական արժեքների ձևավորման հսկայական ներուժ, ինչը բացահայտված է [76] աշխատանքում մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի միջոցով բարու և չարի, սիրո, արդարության, պարտքի, խղճի և ամոթի, առաքինության և արատի, պատվի, ազատության, կյանքի նպատակի, իմաստի բարոյական արժեքների ձևավորման խնդրի պարզաբանման միջոցով:

8) Նոր մոտեցումներ կարելի է գտնել հանրահաշվի ուսուցման գործընթացի միջոցով սովորողների հոգեկան երևույթների ձևավորման և զարգացման հարցում: Սովորաբար ինչպես հանրահաշվի, այնպես էլ ընդհանրապես մաթեմատիկայի ուսուցման գործըն-թացի հետ հոգեկան երևույթների կապը դիտարկելիս բավարարվում են միայն մտածո-ղության գործընթացով: Ընդ որում, այդ կապը դիտարկվում է միակողմանի. Մեթոդիստ-ներին և մաթեմատիկայի ուսուցիչներին հետաքրքրում է միայն մաթեմատիկայի ուսուցման գործում մտածողության ունեցած դերը: Այնինչ, կասկածից վեր է, որ հոգեկան երևույթները՝ ուշադրությունը, հիշողությունը, երևակայությունը, հույզերը, զգացմունքները, կամքը մարդու համար ունեն շատ ավելի կարևոր, անհամեմատ ավելի մեծ նշանակություն, քան մաթեմատիկայի առանձին փաստերի իմացությունը: Եվ նաև պարզվում է, որ մաթեմատիկայի, մասնավորապես հանրահաշվի ուսուցման գործընթացը ունի հոգեկան այդ երևույթների ձևավորման հսկայական ներուժ:

9) Մաթեմատիկայի ուսուցման միջոցով սովորողների արժեհամակարգի և հոգեկանի ձևավորման խնդիրը մեծապես շաղկապված է մաթեմատիկական կրթության հումանիզացիայի, նրա անձնակողմնորոշիչ ուղղվածության ապահովման հետ:

10) Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացի ուսուցումը կարելի է կազմակերպել այնպես, որ այն ոչ միայն ծառայի որպես հանրահաշվի գիտական բնագավառի հիմունքների հետ ծանոթացման միջոց, այլև ընդգծվի նրա կապը առարկայի հանրակրթական տարբերակի հետ: Միևնույն ժամանակ, այն կարող է լավագույնս

ծառայել նաև որպես ապագա ուսուցչի մասնագիտական, լեզվական և մեթոդական կարողությունների և հմտությունների զարգացման միջոց Այնուհետև, մանկավարժական բուհի ուսանողը հնարավորություն չունի ծանոթանալու ժամանակակից մաթեմատիկական հետազոտությունների հետ, ինչը կարող էր ընդլայնել նրա պատկերացումները ինչպես արդի գիտության, այնպես էլ նրանում կատարվող հետազոտությունների մասին: Սակայն, մաթեմատիկական հիմնական դասընթացների՝ հանրահաշվի, մաթանալիզի և երկրաչափության յուրաքանչյուր դասախոս նշված բացը կարող է մասամբ լրացնել իր կատարած գիտական հետազոտության արդյունքները օգտագործվելով որպես հատուկ դասընթացի ստեղծման և կուրսային, ավարտական աշխատանքների ու մագիստրոսական թեզերի պատրաստման միջոց: (Նման աշխատանք հաջողությամբ իրագործվել է մեր կողմից, օրինակ, խմբերի տեսությանը նվիրված մեր աշխատանքների միջոցով:)

11) Հանրահաշվի ուսուցումը հանրակրթական հիմնական դպրոցում, ուսուցիչների պատրաստման և հետբուհական համակարգերում կարող է միավորվել ինչպես կրթության բովանդակայնի բաղադրիչների, այնպես էլ ուսուցման մեթոդների տեսանկյուններից: Գիտելիքների և կարողությունների բաղադրիչների մասով ինչպես բարձրագույն հանրահաշիվը, այնպես էլ հանրահաշվի հատուկ դասընթացներն ու կուրսային և ավարտական աշխատանքներն ու մագիստրոսական թեզերը ապագա ուսուցչին թույլ են տալիս դպրոցական դասընթացը, նրանում ընդգրկված նյութերն ու նրա կառույցը դիտարկել ավելի ընդհանրական դիրքերից, հասկանալ դեդուկտիվ շարադրանքի և տեսության աքսիոմատիկ կառույցի էությունը, ժամանակակից մաթեմատիկայի, նրանում կատարվող հետազոտությունների բնույթը: Արժեբանական բաղադրիչի տեսանկյունը ավելի նշանակալից է դպրոցական դասընթացում և ավելի ցայտուն է դրսևորվում նրա ուուցման գործընթացում: Ուսուցման մեթոդների տեսանկյունից բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացի ուսուցումը գործնական հնարավորություն է տալիս հասնել նշանակալից արդյունքների մաթեմատիկայի ապագա ուսուցիչների մաթեմատիկական, մանկավարժական, մեթոդական կոմպետենցիաների և խոսքի մշակույթի բարելավման գործում:

Առաջարկվող մոտեցումները ստեղծում են լայն հեռանկարներ հանրակրթական դպրոցի ինչպես մաթեմատիկայի, այնպես էլ ինֆորմատիկայի և բնական գիտությունների ուսումնական բնագավառներում կրթության բովանդակության ավանդաբար դիտարկվող բաղադրիչները՝ գիտելիքները և կարողությունները արժեքների հետ միասնական դիրքերից դիտարկելու և հետազոտելու համար:

Օգտագործված գրականություն

1. Աբրահամյան Ա. Վ., Աշակերտների տրամաբանական զարգացումը մաթեմատիկայի դասերին, Երևան, Լույս, 1978թ., 80 էջ:

2. Աթաբեկյան Վ. Ս., Հանրահաշվի ներածություն, ԵՊՀ, Երևան, 2005թ.:

3. Ալեքսանյան Ա., Հանրահաշիվ. Խմբեր, օղակներ, դաշտեր, ԵՊՀ, Երևան, 2006թ.:

4. Աթանասյան Լ. Ս., Բուտուզով Վ. Ֆ., Կադոմցև Մ. Բ. և ուրիշներ, Երկրաչափություն-7. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 7-րդ դասարանի, Եր., Զանգակ-97, 2011 թ., 128 էջ, Երկրաչափություն-8. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 8-րդ դասարանի, Եր., Զանգակ, 2012 թ., 144 էջ, Երկրաչափություն-9. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 9-րդ դասարանի, Եր., Զանգակ-97, 2013 թ., 144 էջ:

5. Աղայան Է., Արդի հայերենի բացատրական բառարան, հ. 1, 2, Երևան, Հայաստան, 1976թ.:

6. Այվազյան Է.Ի., ‹‹Հանրահաշվի լեզուն›› թեմայի ուսուցման մասին//Մաթեմատիկան դպրոցում, Երևան, 1999թ, N 3-4:

7. Այվազյան Է.Ի., Մաթեմատիկան ապացուցումների ուսուցման մեթոդաբանական հիմունքները, Էդիթ Պրինտ, Երևան, 2004թ., 306 էջ:

8. Ավագյան Ա., Հիշողության երևույթը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում//Մաթեմատիկան դպրոցում, Երևան, 2009թ., №5-6: 1.

9. Բալյան Ա. Ա., Էսթետիկայի դաստիարակության տեսություն, Երևան, ՀՊՄԻ հրատարակչություն, 1980թ., 160 էջ:

10. Գևորգյան Գ. Գ., Սահակյան Ա. Ա., Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 10-րդ դասարանի (ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի համար), Եր., Էդիթ Պրինտ, 2009 թ., 136 էջ, (բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար), Եր., Տիգրան Մեծ, 2009 թ., 208 էջ:

11. Գևորգյան Գ. Գ., Սահակյան Ա. Ա., Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 11-րդ դասարանի (ընդհանուր և

հումանիտար հոսքերի համար), Եր., Էդիթ Պրինտ, 2010 թ., 128 էջ, (բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար), Եր., Տիգրան Մեծ, 2010 թ., 208 էջ:

12. Գևորգյան Գ. Գ., Սահակյան Ա. Ա., Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 12-րդ դասարանի (ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի համար), Եր., Էդիթ Պրինտ, 2009 թ., 128 էջ, (բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար), Եր., Տիգրան Մեծ, 2011 թ., 208 էջ:

13. Գևորգյան Հ. Ա., Բաղդասարյան Վ. Խ., Տրամաբանություն, Եր., Լույս 1994 թ., 264 էջ:

14. Դանիելյան Մ. Ա., Միքայելյան Վ. Հ., Միքայելյան Հ, Ս., Հոգեկան երևույթները մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում, 1. Ուշադրություն //Մաթեմատիկան դպրոցում, 2000թ., №5-6: 3.

15. Եգանյան Ա. Մ., Մաթեմատիկայի հայերեն դասգրքերը և մաթեմատիկայի դասավանդումը հայոց դպրոցներում VII դարից մինչև XIX դարի II կես : Երևան, 1960թ., 21 էջ: Մ3

16. Ենոքյան Ա. Վ., Հարությունյան Գ. Հ., Երջանկությունը և մաթեմատիկական կրթությունը//Մաթեմատիկան դպրոցում, 2015, №2:

17. Ղազարյան Է. Մ. և ուրիշ. (Միքայելյան Հ. Ս.), Հանրակրթության պետական չափորոշիչը, Երևան, ԿԳՆ, 1998 թ., 32 էջ:

18. Էջանացի Ռ., Հանրահաշվի և հանրակրթական դպրոցի հանրահաշվի դասագրքերի մասին//Մաթեմատիկան դպրոցում, 2003, N3.

19. Խաչատրյան Ա., Առաքինությունները և մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը//Մաթեմատիկական կրթություն գիտաժողովի նյութերի ժողովածու, Երևան, 2013 թ., 55-66 էջեր:

20. Կոլոմոգորով Ա.Ն.և ուրիշներ, Երկրաչափություն, 6-8, մաս 1, Երևան, Լույս, 1982 թ. 400 էջ:

21. Կոլոմոգորով Ա.Ն.և ուրիշներ, Երկրաչափություն, 9-10, մաս 1, Երևան, Լույս, 1982 թ. 380 էջ:

22. Կոլմոգորով Ա., Ն. և ուրիշներ, Հանրահաշիվ և անալիզի հիմունքներ, 9-10, Երևան, Լույս, 1994, 253 էջ, 1996, 353 էջ:

23. Կուրոշ Ա. Գ., Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթաց, Երևան, Լույս, 1965թ., 494 էջ:

24. Հակոբյան Հ. Հ., Կերպարվեստը հայոց կրթարաններում, Գիրք 1, Հին շրջան և միջնադար, Երևան, 1996, 144 էջ:

25. Հակոբյան Ս. Է., Երկրաչափություն. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 10-րդ դասարանի (ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի համար), Եր., Տիգրան Մեծ, 2009 թ., 120 էջ :

26. Հակոբյան Ս. Է., Երկրաչափություն 10-12, Ուսուցչի ձեռնարկ, հանրակրթական դպրոցի ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի համար, Եր., Տիգրան Մեծ, 2009 թ., 104 էջ:

27. Հակոբյան Ս. Է., Տրամաբանության և բազմությունների տեսության առնչությունները մաթեմատիկայի դասընթացում//Մաթեմատիկայի ուսուցման արդի հիմնահարցերը, Գիտամեթոդկաան հոդվածների ժողովածու, պրակ 2, ԿԳԲ, 2002:

28. Հակոբյան Ս. Է., Ինդուկցիան մաթեմատիկայում և մաթեմատիկական ինդուկցիան//Մաթեմատիկայի ուսուցման արդի հիմնահարցերը, Գիտամեթոդական հոդվածների ժողովածու, պրակ 3, ԿԳԲ, 2002:

29. Հակոբյան Ս. Է., Տրամաբանության հիմունքները որպես կրթության բովանդակային բաղադրիչ//Մաթեմատիկայի դասավանդման արդի հիմնահարցեր, Պրակ 3, Եր., 2003 թ., 14-21 էջեր:

30. Հակոբյան Ս. Է., Դեդուկցիայի և ինդուկցիայի մասին ավանդական պատկերացումների վերանայումը մաթեմատիկական կրթության հայեցակետից// Գիտության և մշակույթի փիլիսոփայության և մեթոդաբանության հարցեր, ԳԱԱ, Եր., Էդիթ Պրինտ, 2013 թ., 108-127 էջեր:

31. Հարութիւնեանց Ի., Համառոտ տրամաբանություն//Մաթեմատիկան դպրոցում, N1(10), Եր., 2000 թ., 27-32 էջեր:

32. Հանրակրթության պետական կրթակարգ, Միջնակարգ կրթության պետական չափորոշիչ, Անթարես, 2004:

33. Հանրակրթական դպրոցի «Մաթեմատիկա» ուսումնական բնագավառի առարկայական չափորոշիչները //Մաթեմատիկան դպրոցում, N 3-4, 2005:

34. Հանրահաշիվ. Ծրագիր 7-9-րդ դասարանների (հաստատված 2011 թ.), www. aniedu.am, 5 էջ:

35. Հովսեփյան Վ. Ա., Գեղագիտական ուսմունքների պատմություն, Եր., ԵՊՀ հրատ., 1979, 240 էջ:

36. Մաշուրյան Ա., Մայրենին և մաթեմատիկան //Մաթեմատիկան դպրոցում, N1, 1998, N3:

37. Միքայելյան Հ. Ս., Երկտեղ գործողություններ //Մաթեմատիկան և ֆիզիկան դպրոցում, 1983, N1.

38. Միքայելյան Հ. Ս., Երկտեղ գործողությունների հատկությունները //Մաթեմատիկան և ֆիզիկան դպրոցում, 1983, N3.

39. Միքայելյան Հ. Ս., Մանկավարժական բուհում «Խմբերի տեսություն» դասընթացի կառուցման իմ փորձից, Բուհում հանրահաշվի, երկրաչափության և մաթանալիզի դասավանդման հարցեր, ժողովածու, Երևան, 1987 թ., 5 էջ:

40. Միքայելյան Հ. Ս., Հանրակրթական դպրոցի ‹‹Հանրահաշիվ›› առարկայի ծրագրային փոփոխությունների մասին, //Մաթեմատիկան դպրոցում, N 2, 1998:

41. Միքայելյան Հ. Ս., Հանրահաշվի ուսուցումը 6-8-րդ դասարաններում, Ուսուցչի ձեռնարկ, Երևան, Հայ Էդիթ, 1999, 64 էջ:

42. Միքայելյան Հ. Ս., Հանրահաշիվ 6, Հանրակրթական դպրոցի դասագիրք, Երևան, Հայ Էդիթ, 1999, 298 էջ:

43. Միքայելյան Հ. Ս., «Հանրահաշիվ 6, 7, 8» դասագրքերի բնութագրումը //Մաթեմատիկան դպրոցում, N 3-4, 1999:

44. Միքայելյան Հ. Ս., Խաղերը որպես հանրահաշվի ուսուցման արդյունավետության բարձրացման միջոց //Մաթեմատիկան դպրոցում, N 3-4, 1999.

45. Միքայելյան Հ. Ս., Հանրահաշվի ուսուցումը 6-8-րդ դասարաններում, Մեթոդական ձեռնարկ, Երևան, Հայ Էդիթ, 2000, 292 էջ:

46. Միքայելյան Հ. Ս., Հանրահաշիվ 7, Հանրակրթական դպրոցի դասագիրք, Երևան, Հայ Էդիթ, 2000, 298 էջ:

47. Միքայելյան Հ. Ս., Հանրահաշվի կիրառական ուղղվածության խնդիրը «Հանրահաշիվ-6» -ում//Մաթեմատիկան դպրոցում, N 5-6, 2000:

48. Միքայելյան Հ. Ս., Հանրահաշվի -6, Լրացուցիչ խնդիրներ, Երևան, 2000 թ., 104 էջ:

49. Միքայելյան Հ. Ս., Հանրահաշիվ 8, Հանրակրթական դպրոցի դասագիրք, Երևան, Հայ Էդիթ, 2001, 304 էջ:

50. Միքայելյան Հ. Ս., Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթաց, Երևան, Նաիրի, 2001, 464 էջ:

51. Միքայելյան Հ. Ս., Գիտականության դիդակտիկական սկզբունքը հանրահաշվի դասընթացում//Մաթեմատիկան դպրոցում, N 5, 2002:

52. Միքայելյան Հ. Ս., Գիտակցականության դիդակտիկական սկզբունքը հանրահաշվի դասընթացում//Մանկավարժական միտք, N 5, 2002 :

53. Միքայելյան Հ. Ս., Հանրահաշիվ 6, 3–րդ, լրամշակված հրատարակություն, Երևան, 2002, 264 էջ:

54. Միքայելյան Հ. Ս., Անհավասարության ուսուցումը հանրահաշվի դասընթացում //Մաթեմատիկայի ուսուցման արդի հիմնահարցերը, գիտամեթոդական հոդվածների ժողովածու, պրակ 2,ԿԲԿ, 2002:

55. Միքայելյան Հ. Ս., Հանրահաշվի ուսուցման հիմնահարցերը, Երևան, Էդիտ պրինտ, 2003, 186 էջ:

56. Միքայելյան Հ. Ս., Մաթեմատիկան կրթական համակարգում//Մանկավարժ, N1, 2003 :

57. Միքայելյան Հ. Ս., Մաթեմատիկական կրթության արդի հիմնահարցերը// ՄԳԱ գիտական աշխատանքների ժողովածու, N2, 2003:

58. Միքայելյան Հ. Ս., Հանրահաշվի նոր դասագրքերի որոշ առանձնահատկությունների մասին//Գիտական հոդվածաշար, ՄԳԱ, 3, 2004:

59. Միքայելյան Հ. Ս., Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթաց, հ. 1, Երևան, Էդիտ պրինտ, 2004, 352 էջ:

60. Միքայելյան Հ. Ս., Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթաց, հ. 2, Երևան, Էդիտ պրինտ, 2004, 352 էջ:

61. Միքայելյան Հ. Ս., Հայոց լեզվի հետ մաթեմատիկայի միջառարկայական կապերի մասին//Մաթեմատիկան դպրոցում, N2, 2005:

62. Միքայելյան Հ. Ս., Հանրահաշվի ուսուցումը 6-8-րդ դասարաններում, Ուսուցչի ձեռնարկ, Երևան, Էդիտ պրինտ, 2006:

63. Միքայելյան Հ. Ս., Հանրահաշիվ 7, Հանրակրթական դպրոցի դասագիրք, Երևան, Էդիթ պրինտ, 2006, 304 էջ:

64. Միքայելյան Հ. Ս., Հանրահաշիվ 8, Հանրակրթական դպրոցի դասագիրք, Երևան, Էդիթ պրինտ, 2007, 304 էջ:

65. Միքայելյան Հ. Ս., Հանրահաշիվ 9, Հանրակրթական դպրոցի դասագիրք, Երևան, Էդիթ պրինտ, 2008, 304 էջ:

66. Միքայելյան Հ. Ս., Հանրահաշիվ 7 դասագրքի խնդիրների լուծումներ, ցուցումներ, մեթոդական խորհուրդներ, Երևան, Զանգակ-97, 2007, 116 էջ:

67. Միքայելյան Հ. Ս., Հանրահաշիվ 8 դասագրքի խնդիրների լուծումներ, ցուցումներ, մեթոդական խորհուրդներ, Երևան, Էդիտ պրինտ, 2009, 214 էջ:

68. Միքայելյան Հ. Ս., Հանրահաշիվ 9 դասագրքի խնդիրների լուծումներ, ցուցումներ, մեթոդական խորհուրդներ, Երևան, Էդիտ պրինտ, 2010, 174 էջ:

69. Միքայելյան Հ. Ս., Մաթեմատիկական կրթությունը և սովորողների հոգեկան կոփումը//Մանկավարժություն, 2010թ., №1, 19-29 էջեր:

70. Միքայելյան Հ. Ս., Երջանկությունը և մաթեմատիկական կրթությունը //Մաթեմատիկան դպրոցում, N2, 2010թ., 3-20 էջեր:

71. Միքայելյան Հ. Ս., Բարոյական արժեքները և մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը. բարին, չարը, արդարությունը//Մաթեմատիկան դպրոցում, N3, 2010թ., 3-18 էջեր:

72. Միքայելյան Հ. Ս., Բարոյական արժեքները և մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը. առաքինություն և արատ//Մաթեմատիկան դպրոցում, N4, 2010թ., 20-35 էջեր:

73. Միքայելյան Հ. Ս., Բարոյական արժեքները և մաթեմատիկայի դասավանդման գործընթացը. պարտք կամ պարտականություն//Մաթեմատիկան դպրոցում, N5, 2010թ., 18-37 էջեր:

74. Միքայելյան Հ. Ս., Բարոյական արժեքները և մաթեմատիկայի դասավանդման գործընթացը. ազատություն//Մարդ և հասարակություն, N5, 2010թ., 3-28 էջեր:

75. Միքայելյան Հ. Ս., Բարոյական արժեքները և մաթեմատիկայի դասավանդման գործընթացը. կյանքի իմաստը//Մանկավարժություն, N7, 2010թ., 38-48 էջեր:

76.Միքայելյան Հ. Ս., Բարոյական արժեքները և մաթեմատիկայի կրթական ներուժը, Էդիթ պրինտ, 2011թ., 186 էջ:

77.Միքայելյան Հ. Ս., Ազգային արժեքի մասին//Մարդ և հասարակություն, 2012թ., №4:

78. Միքայելյան Հ. Ս., Մաթեմատիկան և ճարտարապետությունը //Մաթեմատիկան դպրոցում, 2012թ., №4, 49-64 էջեր:

79. Միքայելյան Հ. Ս., Գեղեցիկի գիտական բաղադրիչները//Մաթեմատիկան դպրոցում, 2012թ., №5, 3-24 էջեր:

80. Միքայելյան Հ. Ս., Մաթեմատիկան և գրականությունը//Հայոց լեզու և գրականություն, 2012թ., №7, 28-36 էջեր:

81. Միքայելյան Հ. Ս., Համաչափությունը խաչքարերում//Մաթեմատիկան դպրոցում, 2013թ., №1, 3-16 էջեր:

82. Միքայելյան Հ. Ս., Կամային որակների ձևավորումը և մաթեմատիկական կրթությունը//Մարդ և հասարակություն, 2013թ., №2, 26-45 էջեր:

83. Միքայելյան Հ. Ս., Գեղեցիկը և մաթեմատիկան//Մաթեմատիկան դպրոցում, 2013թ., №3, 3-22 էջեր:

84. Միքայելյան Հ. Ս., Մաթեմատիկայի ուսուցման մեթոդների գեղագիտական գրավչությունը//Մաթեմատիկան դպրոցում, 2013թ., №4, 3-21 էջեր:

85. Միքայելյան Հ. Ս., Գեղագիտական պահանջմունքները և մաթեմատիկական գործունեությունը//Մարդ և հասարակություն, 2013թ., №4, 17-29 էջեր:

86. Միքայելյան Հ. Ս., Գեղագիտական հույզերը և մաթեմատիկական կրթությունը//Մաթեմատիկան դպրոցում, 2013թ., №5, էջ 19-39:

87. Միքայելյան Հ. Ս., Վեհը, մաթեմատիկան և մաթեմատիկական կրթությունը//Արժեքների ձևավորումը և մաթեմատիկական կրթությունը. գիտամեթոդական հոդվածների ժողովածու, №1, 2014, էջ 94-106,:

88. Միքայելյան Հ. Ս., Գեղեցիկը, Մաթեմատիկան և կրթությունը, մաս 1, Գեղեցիկը և մաթեմատիկան, Երևան, Էդիթ Պրինտ, 2014, 348 էջ:

89. Միքայելյան Հ. Ս., Մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշները //Մաթեմատիկան դպրոցում, №1, 2014թ., 3-27 էջեր:

90. Միքայելյան Հ. Ս., Մաթեմատիկական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշները//Մաթեմատիկան դպրոցում, №2, 2014թ., 3-18 էջեր:

91. Միքայելյան Հ. Ս., Մաթեմատիկական օբյեկտների ներքին և արտաքին գեղագիտությունը//Մաթեմատիկան դպրոցում, №3, 2014թ., 3-14 էջեր:

92.Միքայելյան Հ. Ս., Գեղագիտական զարգացումը և մաթեմատիկական կրթությունը//Մաթեմատիկան դպրոցում, №1, 2015թ., 21-34 էջեր:

93. Միքայելյան Հ. Ս., Գեղագիտական իդեալը և մաթեմատիկական կրթությունը// Մաթեմատիկան դպրոցում, №2, 2015թ., 3-13 էջեր:

94. Միքայելյան Հ. Ս., Գեղեցիկը, մաթեմատիկան և կրթությունը, հ. 2, Գեղեցիկը և մաթեմատիկայի կրթական ներուժը, Երևան, Էդիտ պրինտ, 2015, 440 էջ:

95. Միքայելյան Հ. Ս., Հովհաննիսյան Հ. Հ., «Հանրահաշվական գործողություններ» թեմայի վերաբերյալ խնդիրների կազմման մեթոդիկայի մասին//Բարձրագույն և միջնակարգ կրթություն, 1979:

96. Միքայելյան Հ. Ս., Հովհաննիսյան Հ. Հ., Մանկավարժական բուհում խմբերի տեսության տարրերի դասավանդման որոշ հարցերի մասին//Բարձրագույն և միջնակարգ կրթություն, 1980:

97. Միքայելյան Հ. Ս., Հ. Հ. Հովհաննիսյան, Խմբերի տեսության տարրերը, խնդիրներ, Երևան, 1980, 64 էջ:

98. Միքայելյան Հ. Ս., Հ. Հ. Հովհաննիսյան, Հանրահաշվական գործողություններ//Մաթեմատիկան և ֆիզիկան դպրոցում, 1981, N5:

99. Միքայելյան Հ. Ս., Մկրտչյան Դ. Ն., Աքսիոմատիկ մեթոդը հանրահաշվի դասընթացում//Մաթեմատիկան դպրոցում, N 4, 2002:

100. Միքայելյան Հ. Ս., Մկրտչյան Ա. Տ., Լուիս Քերոլը, նրա սկուտեղը և սովորողների տրամաբանական մտածողության զարգացման հիմնահարցը //Մաթեմատիկան դպրոցում, N 2 (83), Եր., 2012 թ., 3-17 էջեր:

101. Միքայելյան Հ. Ս.. Ա. Տ. Մկրտչյան, Մաթեմատիկայի դասընթացում տրամաբանության տարրերի ներառումը և արժեքների ձևավորման խնդիրը, Արժեքների ձևավորումը և մաթեմատիկայի կրթական ներուժը. գիտամեթոդական հոդվածների ժողովածու, №1, Երևան, 2014, էջ 107-126:

102. Միքայելյան Վ. Հ., Ալգորիթմական հանրահաշիվ. Կոմուտատիվ օղակներ և դաշտեր, ԵՊՀ, Երևան, 2015թ., 374 էջ:

103. Մկրտչյան Ա. Տ., Տրամաբանության տարրերի ներառումը եվ ուսուցման մեթոդիկան մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում, Ատենախոսություն մանկ. գիտ. թեկն. աստիճանի հայցման, Երևան, 2015, 166 էջ:

104. Մկրտչյան Դ. Ն., Աքսիոմատիկ մեթոդը հանրահաշվի ուսուցման գործընթացում, Ատենախոսություն մանկ. գիտ. թեկն. աստիճանի հայցման, Երևան, 2005, 136 էջ:

105. Մովսիսյան Յու. Մ., Բարձրագույն հանրահաշիվ, Երևան, Զանգակ-97, 1983, 267 էջ:

106. Նահապետյան Բ., Աբրահամյան Ա., Մաթեմատիկա 5. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 5-րդ դասարանի, Եր., ՄԱՆՄԱՐ, 2011 թ., 224 էջ, Մաթեմատիկա 6. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 6-րդ դասարանի, Եր., ՄԱՆՄԱՐ, 2012 թ., 224 էջ:

107. Ներսիսյան Լ. Ս., Կրթություն և գեղագիտություն, Երևան, Զանգակ-97, 2002. 158 էջ:

108. Նիկոլսկի Ս. Մ., Պոտապով և ուրիշներ, Հանրահաշիվ. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 7-րդ դասարանի, (թարգմանիչ և խմբագիր՝ Ռ. Ավետիսյան), Եր., Անտարես, 2011թ., 208 էջ:

109. Նիկոլսկի Ս. Մ., Պոտապով Մ. Կ. և ուրիշներ, Հանրահաշիվ. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 8-րդ դասարանի, (թարգմանիչ և խմբագիր՝ Ռ. Ավետիսյան), Եր., Անտարես, 2012թ., 280 էջ:

110. Նիկոլսկի Ս. Մ., Պոտապով Մ. Կ. և ուրիշներ, Հանրահաշիվ. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 9-րդ դասարանի, (թարգմանիչ և խմբագիր՝ Ռ. Ավետիսյան), Եր., Անտարես, 2013թ., 280 էջ:

111. Շիրակացի Ա., Մատենագիտություն, Երևան, 1979: 400 էջ.

112. Պետրոսյան Գ. Բ., Միջնադարյան Հայաստանի մաթեմատիկայի պատմությունից, Երևան, Սովետական գրող, ՀՍՍՀ ԳԱ հրատ., 1986: 162 էջ:

113. Պետրոսյան Հ. Լ., Անանիա Շիրակացու "Խրախճանականքը" և միջնադարյան խնջույքը, Հայաստանը և քրիստոնյա Արևելքը, Երևան, 2000, էջ 356-361:

114. Պերպերյան Շ., Արժեքաբանութուն կամ արժեքներու իմաստասիրություն, Բեյրութ, Կիլիկիո կաթողիկոսության դպրեվանք, 1976, 160 էջ:

115. Պոգորելով Ա.Վ., Երկրաչափություն, 6-10, Երևան, Լույս, 1987, 310 էջ:

116. Ստեփանյան Մ. Մ. Հանրահաշվի հայերեն տպագիր դասագրքերը XIX դարում: Բնագիտության և տեխնիկայի պատմությունից, գիտական աշխատությունների ժողովածու, № 8 . 1987, էջ 32- 42:

117. Ստեփանյան Մ. Մ., Մաթեմատիկայի հայկական դասագրքերը և դասավանդումը հայկական դպրոցներում 19-րդ դարի երկրորդ կեսում, Ատենախոսություն, մ. գ. թ, Երևան, 1973, 198 էջ:

118. Ստեփանյան Մ. Մ., Մաթեմատիկայի հայերեն դասագրքերը և դասավանդման հարցերը հայկական դպրոցներում XIX դարի II կեսին, Երևան, 1973, 56 էջ:

119. Տեն Հ., Գեղարվեստի փիլիսոփայությունը, Երևան-Մոսկվա, Պետհրատ, 1936, 534 էջ:

120. Տիմոֆեևա Ի. Լ., Ինչպե՞ս է կառուցված ապացուցումը//Մաթեմատիկան դպրոցում, N2, 2005:

121. Адамар Ж., Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М., Советское радио, 1970. 152с.

122. Азевич А. И., Гуманитарно - интегративный подход в обучении математике в средней школе: Дис. ... канд. пед. наук. - М.,1995. 168с.

123. Азевич А. И., Двадцать уроков гармонии, Гуманитарноматематический курс, М., Школа-Пресс, 1998. 160с.

124. Айзенк Г., Проверте свои способности, М., Мир, 1972, 177с.

125. Айзенк Г., Узнай свой собственный коэффициент интеллекта, Н-Новгород, Ай Кью, 1994, 174с.

126. Алимов Ш. А. и другие, Алгебра, учеб. для 9-го кл., М., Просвещение, 2000. 256с.

127. Амониашвили Ш. А., Как живете дети?, М., Просвещение, 1986, 176 с.

128. Ананченко К. О., Обучение индуктивным и дедуктивным умозаключениям в курсе алгебры восмилетней школы. Дисс. на соиск. уч. ст. к.п.н., М., 1978, 168с.

129. Андреюшин А. Н., Основы эстетического воспитания учащихся общеобразовательных учебных заведений в условиях развивающего обучения. Дисс. на соиск. уч. ст. к.п.н., М., 1996, 189с.

130. Антонова Г. П., Различия в мыслительной деятельности школьников при решении задач. В сб.: Тинические особенности умственной деятельности младших школьников. М., Просвещение, 1968.

131. Аринина Н. И., Уроки прекрасного, Из опыта работы, М., Просвещение, 1983. 128 с.

132. Аристотель, Большая этика, Сочинения, т. 4, М., 1983, 830с.

133. Аристотель. Поэтика. М. Амфора, 2008. 320с.

134. Баева И. А., Гаязова Л.А., Психологическая безопасность образовательной среды школы и ее психолого-педагогическое сопровождение, «Психологическая наука и образование» www.psyedu.ru / ISSN: 2074-5885 / E-mail: psyedu@mgppu.ru 2012, №3.

135. Балашов Л. Е., Этика, М., Дашков и К, 2008. 216 с.

136. Барсуков А. Н., Алгебра , М., Просвещение, 1963, 296 с.

137. Баршадский М. М., Реформа среднего образования, //Математика в школе, 2000, N5.

138. Башмаков М. И., Мы учим и учимся математике в нашем общем доме – Европа, //Математика в школе, 2002, N1, с. 3-9.

139. Башмаков, М. И. Алгебра : учеб. для 7 кл. общеобразоват. учреждений Текст. / М. И. Башмаков. М.: Просвещение, 2003, 320 с.

140. Бекон Ф., Сочинения, т. 2, М., Мысль, 1978. 576с.

141. Бердяев Н. А., Самопознание, М., Международные отношения, 1990, 336с.

142. Бёрк Э., Филос. исследование относительно возникновения наших понятий о возвышенном и прекрасном, М., Искусство, 1979. 237с..47

143. Беспалкьо В. П., Програмированное обучение. Дидактические основы, М., Высшая школа, 1970. 300с.

144. Биркгоф Г., Математика и психология. М., Советское радио, 1977. 96с.

145. Блауберг И. В., Краткий словарь по философии, изд. 2. М., Политиздат, 1970. 398с.

146. Болтянский В. Г., Математическая культура и эстетика, Математика в школе. 1982, №2, с. 40-43.

147. Большая советская энциклопедия, Третье издание, М., 1969-1978.

148. Большой психологический словарь. М., Под ред. Б.Г. Мещерякова, акад. В.П. Зинченко.

149. Большой толковый словарь по культурологии. Кононенко Б. И.. М. 2003.

150. Борев Ю. Б., Основные эстетические категории, М., Высшая Школа, 1960, 446с.

151. Борев Ю. Б., Эстетика, М., Высшая школа, 2002, 511с.

152. Борель Э., Как согласовать преподавание в средней школе с прогрессом науки. Математическое просвещение, 1958, N 3, с 89-101.

153. Бранский В., Искусство и философия, М., 1999. 704с.

154. Брунер Дж., Психология познания, М., 1971, 391 с. 56*

155. Брушлинский А. А., Проблема психологии субьекта, М., 1994.

156. Бурбаки Н., Очерки по истории математики, М., Мир, 1963, 292 с.

157. Буткевич О. В., Красота, Л., Наука, 1979, 234 с.

158. Буткевич О. В., Красота: природа, сущность, формы, Л., Художник РСФСР, 1983, 438с.

159. Варга Б., Димень Ю., Лопариц Э., Язык, музыка, математика, М., Мир, 1981, 248 с.

160. Васютинский Н. А., Золотая пропорция. М., Молодая гвардия, 1990, 250 с.

161. Вайль Г., Симметрия, М., Наука, 1968, 296 с.

162. Винкельман И. И., Избранные произведения и письма, М., 1935.

163. Винкельман И. И., История искусства древности, Равель, 1890.

164. да Винчи Л., Книга о живописи, М., 1934.

165. да Винчи Л., Избранные произведения, М., 2000.

166. Витрувий М., Десять книг об архитектуре, М., Искусство, 1936.

167. Волошинов А. В., Математика и искусство, М., Просвещение, 2000, 335с.

168. Волькенштейн В. М., Красота науки, Наука и жизнь.1988. №9. С. 15-19.

169. Волькенштейн В. М., Опыт современной эстетики, М.-Л., Академия, 1931. 188с.

170. Вопросы преподавания математики на 19-той международной конференции в Женеве. В сб.: «Математическое просвещение», вып.1.М., Гостехиздат, 1957.

171. Ворингер В., Абстракция и одухотворение. В сборнике Мигунов С. А., Хренов Н. А., Эстетика и теория искусств 20-го века. Хрестоматия, М., 2008.

172. Восканян К. В., Психологические основы обучения математике, Ереван, Зангак-97, 2002, 348 с.

173. Вундт В., Основы физиологической психологии, в трех томах, М., 1912, 322 с.

174. Выбор методов обучения в средней школе, Под редакцией Ю. К. Бабанского, М., Просвещение, 1981, 448 с.

175. Высютинский Н. Н., Золотая пропорция, М., Молодая гвардия, 1990.

176. Вышневский В. А., Калужнин Л. А., О месте теории множеств и математической логики в преподавании математики в средней школе, Математика в школе, 1970, N1.

177. Гадамер Г. Х., Истина и метод: Основы философской герменевтики. М., Прогресс, 1988, 704 с.

178. Гальперин П. Я. Развитие исследований по формированию умственных действий, В к : ‹‹Психологическая наука в СССР››, М., АПН РСФСР, 1959, 445 с. d98

179. Гартман И., Эстетика, М., 1958.

180. Гегел Г., Эстетика, в 4-х т., М., Искусство, 1968-1973. Т2, 1969, -326с.

181. Гегель Г., Сочинения, Т. 7, М., 1977.

182. Гейзенберг В., Значение красоты в точной науке, Гейзенберг В., Шаги за горизонт. М., Прогресс, 1987, с.268-283.

183. Гельфанд И.М., Лекции по линейной алгебре, М., Наука, 1971, 271 с.76*

184. Генцен Г., Исследования логических выводов, Математическая теория логического вывода. М., Наука, 1967. С. 9-74.

185. Герасимова А. Д., Формирование творческого воображения учащихся в процессе поиска решения планиметрических задач, требующих дополнительных построений, Дисс. к.п.н., Тирасполь, 1994, 264 с.

186. Гетманова А. Д., Учебник по логике, М., Владос, 1995. 303 с.

187. Гладкий А. В.. Математическая логика. М., РГГУ, 1998 78*.

188. Гладкий А. В., Крейдлин Г. Е., Математика в гуманитарной школе//Математика в школе, 1991, N 6, с. 9-13.

189. Гончаров И.Ф., Эстетическое воспитание школьников средствами искусства и действительности, М., Педагогика, 1986, 128 с.

190. Городилова М. А., О природе математической абстракции, Хабаровск, ДВГУПС, 2003, 40 с.

191. Готман Э. Г., Скопец З.А. Задача одна - решения разные. М., Просвещение, 2000.

192. Готт В. С., Симметрия и асимметрия. М.,1965.

193. Груденов Я. И., Совершенствование методики работы учителя математики: Книга для учителя, М., Просвещение, 1990, 224 с.

194. Груденов Я. И., Изучение определений, аксиом, теорем: Пособие для учителей. М., Просвещение, 1981, 113 с. 84.

195. Губа С. Г., О первых доказательствах, Математика в школе, 1971, N 5.

196. Губа С. Г., Стандартные задачи с нестандартными решениями//Математика в школе, 1987, N 2, с. 18-20.

197. Гулыга А. В., Что такое эстетика, М., Просвещение, 1987, 176с.

198. Гурджиев Г. И., Жизнь реальна только тогда, когда “я есть”, М., 2001.

199. Гурова Л. Л., Мыслительные операции в процессе осознанного решения задач. //Математика в школе 1961, N 6.

200. Гусева Н. В., Теоретические и методические основы раскрытия го потенциала школьного курса математики в 5-6 классах. Дисс. к.п.н, Арзамас, 1999, 212 с.

201. Гусейнов А. А., Апресян Р. Г., Этика, М., ГАРДАРИКА, 2007, 474 с.

202. Давидов М. А., Прекрасное в математике. //Педагогическое образование, 1994, №3, С 113-121.

203. Давидов М. А., Проблема развивающего обучения. М., Педагогика, 1986, 239 с.

204. Давидович В. Е., В зеркале философии, Ростов на Дону., 1997

205. Дорофеев Г. В., Гуманитарно-ориентированный курс - основа учебного предмета “математика” в общеобразовательной школе, Математика в школе, 1997, №4.

206. Дышинский Б. А., Методические этюды в задачах, Роль и место задач в обучении математике. Вып.2. М., 1973, С.105-123.

207. Дьедоне Ж., Надо ли учить современной математике. «Математика в школе», 1976, N 1, 2003, N 3.

208. Дьюи Дж., Демократия и образование. М.: Педагогика, 2000, 382с. 90

209. Дьюи Дж., Психология и педагогика мышления. (Как мы мыслим). М., Лабиринт, 1999, 184 с. 91

210. Дьюи, Д. Моя педагогическая вера // Демократизация образовательного процесса в школе : хрестоматия для учителя / ред.-сост. Г.Б. Корнетов. М.: АСОУ, 2007, С. 223-232.

211. Жохов А. Л., Как помочь формированию мировоззрения школьников: Книга для учителя и не только для него. Самара: Изд-во СамГПУ, 1995, 288с.

212. Загоскин М. В., О ценностных ориентациях в психологической науке. [Электронный ресурс]: URL: http://www.vlad-sadovsk.chat.ru/ magazin4/article5.htm. 94

213. Занимательные задачи /Сост. Монжиевская В.В., ч.3. Иркутск, 1993. 95

214. Зенкевич И. Г., Эстетическое воспитание на уроках математики: Дисс. ... канд. пед. наук, М., 1971. -141 с.

215. Зенкевич И. Г., Эстетическое урока математики: Пособие для учителей, - М.: Просвещение, 1981,-79 с.

216. Иванов В. Г., Этика, М., Питер, 2007. 170 с.

217. Иванов О. А., Обучение поиску решения задач//Математика в школе, 1997, N 6, с. 47-51.

218. Иванова Т. А., Гуманитаризация общего математического образования: Монография. Нижний Новгород, НГПУ, 1998, 216с. 98

219. Игнатьев Е. И., В царстве смекалки. - М., Наука,1982, 360 с.

220. Игошин В. И., О применении математической логики при доказательстве обратных теорем. «Математика в школе», 2002, N 10. С .26 – 28.

221. Изард К. Э., Психология эмоций, С.-П., Питер, 1999, 460 с.

222. Ильин Е. П., Эмоции и чувства, 2-е издание, М., С-Петербург, Питер, 2013, 782с.

223. Истомина Н. Б., Методика обучения математике в начальных классах. М.: LINKA - PRESS, 1992, 251 с.

224. Историко-математические исследования. Выпуски: IV –1951 г.; VII – 1954 г.; IX – 1956 г., https://mat.1september.ru/view_article.php?ID=200201601

225. Калужнин Л. А., Введение в общую алгебру, М., Наука, 1973, 447с.

226. Камю А., Бунтующий Человек, Философские науки. М. 1989. № 7.

227. Кант И., Сочинения в 6 т., т. 1- 6. М., Мысль, 1963.

228. Кант И., Критика способности суждения, О возвышенном, 1 в. н. э., рус. пер. 1966.105

229. Кант И., Трактаты и письма. М., Наука, 1980, 647 с.

230. Каргаполов М.И., Мерзляков М. И., Основы теории групп, М., Наука-Физматлит, 1996. 288 с.

231. Кац М., Улам С., Математика и логика: Ретроспектива и перспектива, М., Мир, 1971. 256с.

232. Киселёв А. П., Алгебра, ч. 1-2, физматлит, М., 2006, 2005.

233. Клайн М., Математика, Поиск истины, М., Мир, 1988. 294с.

234. Клейн Ф., Элементарная математика с точки зрения высщей, т.1. М.-Л., Наука, 1933, 413с.

235. Клёнина В. В., е отношение к искусству: вопросы теории и практики, е образование: проблемы и перспективы, Материалы международной научно-практической конференции (15-16 ноября 2007 г., г. Брест), Минск, 2007.

236. Клини С. К., Введение в метаматематику, М., ИЛ, 1957, 526 с.

237. Кобалия О. А., Эстетическое воспитание при обучении геометрии в средней школе: Дис. ... канд. пед. наук. - М., 1985. - 160 с.

238. Ковалев А. Г., Воспитание ума, воли и чувств у детей. Кн. для родителей. Минск: Нар. Асвета, 1974. -143 с.

239. Кованцов Н. И., Математика и романтика. - Киев, Виша пкола, 1976. 96с.

240. Ковешников В. Т., Элементы эстетическое воспитания в преподавании математики. Дис. ... канд. пед. наук. М., 1969, 163 с.

241. Кожабаев К. Г., О воспитательной направленности обучения математики в школе, М., Просвещение, 1988, 80с.

242. Козлов Н. И., nkozlov.ru/library/samorazvit/d4147/#.VaEFBvamqqko.114

243. Колмогоров А. Н., Паркеты из правильных многоугольников, Квант, 1976, №3. с. 7-9.

244. Колмогоров А. Н., Современная математика в современной школе. Математика в школе, 1976, N 1, 2003, N 3, с. 10-11.

245. Колмогоров А. Н., Яглом И.М. О содержании школьного курса математики, Математика в школе, 1965, N 4.

246. Колягин Ю. М. и другие, Об изучении алгебры в 7-9 классах. Математика в школе, 2000, N 6, с. 53-62.

247. Концепция математического образования в 12-летней школе, проект. Математика в школе, 2000, N 2, с. 13-18. d118 119

248. Концепция структуры и содержания общего и среднего образования (в 12-летней школе), проект. Математика в школе, 2000, N 2, с. 6-12. d119 120

249. Котина С. В., Принцип красоты в системе методологических регулятивов естественно - научного познания, Философские науки. 1989. №11. С. 110-117.

Котина С. В., Одна из причин непреходящей й ценности математики, Философские исследования. 1998. №4, С.172-195.

250. Кочетков Е. С., Кочеткова Е. С., Алгебра и элементарные функции, ч.1, М., Просвещение, 1969, 352 с.

251. Кочетков Е. С., Кочеткова Е. С., Алгебра и элементарные функции, ч.2, М., Просвещение, 1967, 288с.

252. Кочубей Б. И., Новикова Е. В., Эмоциональная устойчивость школьника, М., 1988.

253. Краткий словарь по эстетике, CopyrightC, 2012-2015.

254. Кривцун О. А., Эстетика: Учебник. М., Аспект Пресс, 2000. 434 с.

255. Крутецкий В. А., Психология математических способностей школьников. М., Просвещение, 1968. 432 с.

256. Крутецкий В.А. Психология обучения школьников, М., Просвещение, 1976, 303с.

257. Кудррявцев В. Т., Проблемное обучение: истоки, сущность, перспективы, М., Знание, 1991. 80с.

258. Куликов Л. Я., Алгебра и терия чисел, М., Высшая школа, 1979, 560 с.

259. Курант Р., Роббинс Г., Что такое математика? М., Мир, 2001. 568с.

260. Курош А. Г., Курс высшей алгебры, М., Наука, 1971. 432с.

261. Курош А. Г., Теория групп, М., Наука, Физматлит, 1967, 648 с.

262. Кэролл Л., Логическая игра, М., Наука, 1991, 192 с.

263. Ланда Л. Н., Алгоритмизация в обучении. Под редакции Б. В. Гнеденко, М. Просвещение, 1968, 523 с.

264. Ларичев П. А., Алгебра, 1, М., Просвещение, 1958, 240с.

265. Ларичев П. А., Алгебра, 2, М., Просвещение, 1958, 263с.

266. Ларошфуко Ф., Мемуары. Максимы. Л., Наука, 1971. 280с. 125***.

267. Левитин К., Геометрическая рапсодия, М., Знание, 1984. 144с. 125 130

268. Лекции по методике преподавания математики, М., МПГИ им. В. И. Ленина, 1978, 75 с.

269. Лернер И. Я., Процесс обучения и его закономерности, М., Знание, 1981, 96 с.

270. Ликсина Е. В., Подготовка учителя к реализации го ия в процессе обучения математике, Дисс.... к. п. н., Пенза, 2004, 196с.

271. Липпс Т., Эстетика, М., 2006.

272. Локхард П., Плач математика, WWW.livelib.ru/book/1000487179. 130 135

273. Лоповок Л. М., Тысяча проблемных задач по математике. М. Просвещение, 1995, 239 с.

274. Лосев А. Ф., Музыка как предмет логики, Лосев А.Ф. Форма-Стиль-Выражение. М., Мысль, 1995, 406 с.

275. Лосев А. Ф., Шестаков В. П., История эстетических категорий, М.,Искус ство, 1965, 376 с.

276. Лурье Л. И., Математическое образование в пространстве го опыта, //Образование и наука, 2006, N6.

277. Лушин П. В., Личностные изменения как процесс: теория и практика, Одесса, Аспект, 2005, 334 с.

278. Ляпин Е. С., Курс высшей алгебры, М., Учпедгиз, 1955, 367 с.

279. Ляпин Е.С., Айзенштат А.Я., Лесохин М.М. Упражнения по теории групп, М., «Наука», 1967, 264 с.

280. Макарычев Ю. Н. и другие, Алгебра – 6, пробный учебник, М., 1970.

281. Макарычев Ю. Н. и другие, Алгебра – 6, М., 1973.

282. Макарычев Ю. Н. и другие, Алгебра – 6, М., 1989.

283. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Муравин К.С., Функции в 6-м классе. //Математика в школе, 1972, N 4, с. 11.

284. Мальцев А.И., Группы и другие алгебраические системы, Избранные труды, Т1, М., «Наука», 1970, с. 352-421.

285. Маслоу А., Дальные предели человеческой психики, М., СПб., 1997, 234 с.

286. Маслоу А., Мотивация и личноть, М., 2001.

287. Математика и демократия. «Математика в школе», 1999, N 1.

288. Материалисты Древней Греции, М., ГИПЛ, 1955, 240 с.

289. Мерзляк А. Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Неожиданный шаг или 113 красивых задач. Киев, Агрофирма “Александрия”, 1993, 60 с.

290. Метельский Н. В., Дидактика математики, Минск, БГУ, 1982, 256 с.

291. Методика преподавания в восьмилетней школе. Под редакции С.Е. Ляпина. Просвещение, 1965. 744 с.

292. Миганова Е. Ю., Эстетические аспекты подготовки будущих учителей математики, Гуманитаризация среднего и высшего математического образования: методология, теория и практика. ч.2. Саранск, 2002.

293. Мигдал А., О красоте науки, Наука и жизнь. М., 1983. №3, с.59-65.

294. Милль Дж. С., Утилитарианизм, М., 1882

295. Миньковский В. Л., Об элементах эстетического воспитания на уроках математики, Математика в школе, 1963, №4.

296. Микаелян Г. С., О силовских базах бесконечных групп относительно расщепляемой системы силовских классов, Изв. АН Арм. ССР, сер. мат. 5, N 2, 1970, 8 с.

297. Микаелян Г. С., Силовские LQ – базы бесконечных групп, Изв. АН Арм. ССР, сер. мат. 6, N 5, 1971, 13с.

298. Микаелян Г. С., О локально конечных силовских классах, Математические исследования, 6, N 5, Кишинев, 1971, 6 с.

299. Микаелян Г. С., О Q – картеровых подгрупп локально конечных групп, Доклады АН Арм ССР, т. 5, N 1, 1972, 3с.

300. Микаелян Г. С., О Q – картеровых подгрупп локально конечных групп с Q – радикалом конечного индекса, Изв. АН Арм. ССР, сер. мат. 7, N 6, 1972, 11с.

301. Микаелян Г. С., D – теоремы в некоторых классах виландтовых групп, Изв. АН Арм. ССР, сер. мат. 7, N 6, 1977, 14с.

302. Микаелян Г. С., Г–сопряженность силовских баз и холловских подгрупп в одном классе локально конечных групп, Доклады АН Арм ССР, т.5, N1, 1981, 3с.

303. Микаелян Г. С., Об одном обращении теоремы Силова о сопряженности максимальных p–подгрупп конечных групп, Успехи математических наук, т. 36, выпуск 6 (222), М., 1981, 2 с.

304. Микаелян Г. С., О силовски правильных классах групп, Математический сборник, 119 (161), N 3 (11), М., 1982, 8 с.

305. Микаелян Г. С., Сопряженность X – подгрупп относительно некоторого автоморфизма, Доклады АН Арм ССР, т. 75, N 2, 1982, 4 с.

306. Микаелян Г. С., Об одной локальной теореме счетноконечного характера о Г – сопряженности Π - холловских подгрупп локально конечных групп, Алгебра и топология, Ереван, 1983, 11 с.

307. Микаелян Г. С., Обратные теоремы типа Силова, Труды 9 –ой всесоюзного симпозиума по теории групп, М., 1984, 2 с.

308. Микаелян Г. С., Об обратных теоремах типа Силова, Вестник МГУ, Серия 1, Математика и 140*15. механика, N 3, 1985, 1 с.

309. Микаелян Г. С., К силовской теории бесконечных групп, Доклады АН Арм ССР, т. 82, N 2, 1986, 4 с.

310. Микаелян Г. С., Об обратных теоремах типа Силава, Математика (Известия высщих уч. заведений), Казань, N 2, 1987, 13 с.
311. Микаелян Г. С., Прекрасное в шахматах и в математике, шахматы в образовании, Науч.метод. журнал БГУ, h.5, 2014, 10с.
312. Микаелян Г. С., Элементы логики в курсе алгебры общеобразовательной школы республики армения, Современные тенденции физико-математического образования, Соликамский государственный педагогический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «ПГНИУ»; Т. В. Рихтер, 2015, Соавтор Мкртчян А.Т.
313. Микаелян Г. С., Лекция как средство формирования пракческих умений будущего педагога, Актуальные проблемы обучения физико-математическим и естественнонаучным дисциплинам в школе и вузе, Сб. ст. VI Межрег. науч.-практ. конф. учителей [посвящ. 75-летию Педагогического института им. В. Г. Белинского] (г. Пенза, 30–31 января 2015 г.) / под общ. ред. д-ра пед. наук, проф. М. А. Родионова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2015. 5с.
314. Микаелян Г. С., Развивающий потенциал математического образования: школа – ВУЗ, Коллективная монография, Соликамск, СГПИ, 2015, 24с.
315. Микаелян Г. С., Психологическая среда в условиях гуманистического образования, Белорусь, Национальный институт образования, ,,Вестник МГИРО,, ,N 4,2015, 5с.
316. Микаелян Г. С., Проблема эстетического воспитания и математическое образование, Труды международной научной конференции, 28 сентябрь – 2 октябрь, 2015, Горис, РА, с. 117-121.
317. Минасян Л. А., Развитие пространственного воображения учащихся 9-10 классов средней школы в процессе обучения геометрии, Дисс. к.п.н., Ереван, 1983, 166 с.
318. Минковский В. Л., Об элементах эстететического воспитания на уроках математики//Математика в школе, 1963, N4, с. 25-30.
319. Монахов В. Д. и другие, Формирование алгоритмической культуры школьников при обучении математике, М., Педагогика, 1978, 94 с.

320. Монтескье Ш., Избранные произведения, М., Госполитиздат, 1955, 779 с.
321. Мордкович, А. Г. Алгебра. 8 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений Текст. /А. Г. Мордкович. 3-е изд., доработ. М. : Мнемозина, 2001, 223 с.
322. Мордкович, А. Г. Алгебра. 9 кл.: задачник для общеобразоват. учреждений /А. Г. Мордкович, Т. Н. Мишустина, Е. Е. Тульчинская. -4-е изд. М. : Мнемозина, 2002, 143 с.
323. Морозов А. В., Эвристические методы решения творческих задач. http://www.i-u.ru/./.
324. Нагибин Ф. Ф., Достаточные и неоходимые условия, Математика в школе, 3, 1972, с. 23-26.
325. Незовибатько И. В., Эмоции, чувства, действия, М., 2004.
326. Неменский Б. М., Мудрость Кросоты-О проблемах эстетического ия: книга для учителя, М., 1981, 253с.
327. Никольская И. Л., С. В. Варфоломеева, Воспитательные задачи обучения математики: Развитие мышления и речи, М., Просвещение, 1985, 134с.
328. Никольская И. Л., Привытие логической грамотности при обучении математике, Дисс. на соска. уч. ст. к.п.н., М., 1972, 186с.
329. Никольская И. Л., Воспитание логической культуры при обучении алгебры в 6-8 классах. В книге <<Преподавание алгебры в 6-8 классах>>. М., Просвещение, 1980.
330. Никулина Е. В., Развитие пространственного воображения у студентов-математиков классического университета при подготовке к педагогической деятельности, Дисс. к.п.н., Ярославль, 2001, 163 с.
331. Ницше Ф., Сочинения, т. 2, М., Наука, 1990.
332. Новая философская энциклопедия: В 4-х тт., Под редакцией В. С. Степина. М., Мысль, 2001, 708 с.
333. Новиков А. И. К вопросу о реформе математического образования. Математика в школе, 2000, N 6.
334. Новиков П. С., Элементы математической логики, М., Наука, 1973, 400с.

335. Оганесян В. А., Аксионометрический метод в обучении математики, О методах обучения в средней школе, Сб.науч.тр., вып.1, М., НИИ школ МП РСФСР, 1977.

336. Оганесян В. А., Изучение понятия «алгебраическая система» на внеклассных занятиях в старших классах, Роль и место задач в обучении математики, Сб.науч.тр., вып.4, М., НИИ школ МП РСФСР, 1977.

337. Оганесян В. А., Изучение понятия изоморфизма на внеклассных занятиях, Из опыта преподавания математики в средней школе, Пособие для учителей, М., Просвещение, 1979.

338. Оганесян В. А., Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л., Санинский В.Я. Методика преподавания математики в средней школе, Общая методика, М., 1980, 462с.

339. Оганисян Г. О., Задача как средство усвоения основных алгебраических понятий на примере изучения теории групп в институте, Дисс. на соиск.уч.ст.к.п.н., Ереван, 1984, 186 с.

340. Оганесян В. А., Роль и место эстетического воспитания в процессе обучения математике//Воспитание школьников в процессе обучения математике, М., просвещение, 1981, с. 159-164..

341. Окунев Л. Я., Высшая алгебра, М., Просвещение, 1966, 336 с.

342. Окунев Л. Я., Сборник задач по высшей алгебре, М., Просвещение, 1964, 183 с.

343. Орбели И. А., Вопросы и решения вартапета Ананиа Ширакаци, армянского математика 7-го века, “Избранные труды”, Ереван, 1963.

344. Орлов Ю. К., Невидимая гармония, Число и мысль. Сб. Вып.3. М., 1980.

345. Основы эстетического воспитания, Пособие для уителей, /Под ред. Н. А. Кушаева, М., 1986, 238 с..

346. Остер Г. Б., Задачник. Ненаглядное пособие по математике, М., Спарк-М, 1992, 98 с.

347. Пайсон Б.Д., О логической составляющей образовательной области математики. //Математика в школе, 2003, N 3, с. 10.

348. Паскаль Б., Мысли, М., 1905.
349. Педагогическая психология, Ред. А. Орлова, Л.Регуш, М., 2009.
350. Перельман Л. И., Занимательная алгебра, М., Наука, 1974, 200с.
351. Пидоу Д., Геометрия и искусство, М., Мир, 1979. 332 с.
352. Платон. Федр. Тимей. Гиппий Больший. Сочинения в 4 томах. М. 1994.
353. Плоткин Б. И., Абстрактные силовские свойства, ТР. Уральск. Электромех ин-та инж. Ж-д. Транспорта, 1959, вып 2, С. 7-14.
354. Пойа Д., Как решать задачу, М., Учпедгиз, 1961. 208 с.
355. Пойа Д., Математическое открытие. Решение задач: Основные понятия, изучение и преподавание, М., Наука, 1976, 448 с.
356. Понарин Я. П., Задача одна – решений много //Математика в школе, 1992, N1, с. 15-16.
357. Попов Г. Н., Исторические задачи по элементарной математике, М., Вузовская книга, 1999, 215 с.
358. Постников М. М., Теория Галуа, М., Физматгиз, 1963, 220 с.
359. Потоцкий М. В., О педагогических основах обучения математике, М., 1963, 200 с.
360. Программа по алгебре для педагогических институтов, Сост. Куликов Л.Я., Нечаев В.И., М., 1982.
361. Программа по математике, Рук. Фирсов В. В. НИИ содержания и методов обучения АПН СССР, М., 1984.
362. Проскуряков И. В., Сборник задач по высшей алгебре, М., 1962, 384с.
363. Проскуряков И. В., Числа и многочлены, М., Просвещение, 1965, 284с.
364. Псевдо-Лонгин, О возвышенном, 1 в. н. э., рус. пер. 1966.
365. Психологический словарь, peychology.net.ru/dictionaries/psy.html/.
366. Психология. Словарь/ Под общ. ред. А. В. Петровского, М.Г.Ярошевского. М., Политиздат, 1990, 494 с.
367. Пуанкаре А., Математическое творчество, Юрьев (Тарту), 1909, 34с.
368. Пуанкаре А., Наука и метод, М., 1983.

369. Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры. Опыты математического мышления. М., Наука, 1966, 263 с.
370. Рассел Б., Искусство мыслить, М., Идея-Пресс: Дом интелектуал. кн., 1999, 400с.
371. Рижик В. И., 30000 уроков математики, М., Просвещение, 2003, 292с.
372. Родионов М. А., Мотивация учения математике и пути ее формирования, Саранск, 2001, 240 с.
373. Родионов М. А., Мотивация учения математике, От теоретического осмысления к практической реализации, Saarbrucken 2012.
374. Родионов М. А., Актуализация эстетических мотивов учебно-поисковой деятельности школьников в процессе обучения математике, Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, 2013, N5.
375. Родионов М. А., Ликсина Е. В., Эстетическая направленность обучения и пути ее актуализации, Пенза, 2003, 187 с.
376. Розенфельд Д. И., Об ознокомления учащихся с методами обобщения. //Математика в школе, 1, 1965, с. 41-43.
377. Ролз Дж., Теория справедливости, Новосибирск, НГУ, 1995, 500 с.
378. Романенко Ю. М., Философские и эстетические аспекты математического знания, Дисс. … к. ф. н., М., 2005, 170 с.
379. Российская педагогическая энциклопедия, Гл. ред. В. В. Давидов, т. 2, М., БРЭ, 1999.
380. Рощина Н. Л., Формирование го вкуса учащихся в процессе решения планиметрических задач, Дисс. на соиск. канд.пед, наук, М., 1998. 164 с.
381. Рубинштейн С. Л., О мышлении и путях его исследования, М., АН СССР, 1981, 147с.
382. Рузавин Г. И., О природе математического знания, М., Мысль, 1968, 302 с.
383. Руссо Ж. Ж., Об искусстве. М.- Л., 1959.
384. Саввина О. А., Эстетический потенциал истории математики, //Математика в школе. 2001, №3, с. 69-72.

385. Садовский В. Н., Аксиоматический метод построения научного знания, М., 1956.

386. Саранцев Г. И., Методология методики обучения математике, Саранск, Кр. Октябрь, 2001, 144 с.

387. Саранцев Г. И., Эстетическая мотивация и обучение математике. Саранск, ПО РАО, Мордов. Пед. Ин-т, 2003, 136 с.

388. Саранцев Г. И., Общая методика преподавания математики: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и университетов. Саранск, Кр. Октябрь, 1999, 208с.

389. Семенов Е. Е., Размышление об эстетике//Математика в школе, 1995, N6, с. 2-5.

390. Сергеев И. Н., Олехник С. Н., Гашков С. Б. Применим математику. М. Наука, 1989, 240 с.

391. Сизова М. Н., Преемственность в формировании аналогии при обучении математике в начальных и 5-6 классах средней школы, Дисс. ... канд. пед. наук, Самара, 1999, 186 с.

392. Сластенин В. А.,. Чижакова Г. И, Введение в педагогическую аксиологию, М., Академия, 2003, 192 с.

393. Слепкань З. И., Психолого-педагогические основы обучения математике, Киев, Рад. Школа, 1983. 132с.

394. Словарь. Ключевые понятия, термины, актуальная лексика. М.: НМЦ СПО. С.М. Вишнякова. 1999-2003, 538 с.

395. Сноу Ч. П., Две культуры, М., Прогресс, 1973, 142 с.

396. Современные концепции го ия: (Теория и практика)/ Институт философии РАН; Отв. ред. Н.И.Киященко. М., 1998, 302 с.

397. Сойер У. У., Прелюдия к математике. - М.: Просвещение, 1965, 356с.

398. Соколова А. В., И. Г. Зенкевич, Воспитание эстетического восприятия математики, Сб. статей, Сост. А. В. Соколова и др., М., 1979., с.183-186.

399. Соловьев В. С., Определение добра, М., СПб, 1897.

400. Спиноза Б.. Избранные произведения М., 1957, 592 с.
401. Стахов А. П., Гармония мироздания и золотое сечение: древнейшая научная парадигма и ее роль в современной науке, математике и образовании, Часть 1, “Академия Тринитаризма”, М., Эл. N77-6567, публ. 12840, 19.01.2006.
402. Столл Р. Р., Множества. Логика. Аксиоматические теории, М., Просвещение, 1968, 231с.
403. Столович Л. Н., Красота. Добро. Истина. Очерк истории й аксиологии, М., Республика, 1994, 464 с.
404. Столович Л. Н., Природа й ценности, М., Политиздат, 1972, 271с.
405. Столяр А. А., Логические проблемы преподавания математики, Минск, 1965, 192 с.
406. Столяр А. А., Педагогика математики, Минск, Высшая школа, 1974, 383с.
407. Стройк Д. Я., Краткий очерк истории математики, М., Наука, 1990, 256 с.
408. Сухотин А. К., Соотношение критериев простоты и истинности знания, Актуальные проблемы диалектической логики, Алма-Ата, 1971, 263с
409. Тарский А., Введение в логику и методологию дедуктивных наук, М., Иностранная литература, 1948, 326с.
410. Тест А. Асингера, http://psylist.net/praktikum/00002.htm.
411. Тимофеева И. Л., Как устроено доказательство//Математика в школе, 2004, №8, стр. 73-78.
412. Тимофеева И. Л., Методическая система обучения студентов педагогических вузов математической логике на основе теории естественного вывода, Дисс. на соиск. уч. ст. д. п. н., М., МПГУ, 2005, 400 с.
413. Тихомиров В., О значении математики и целей математического образования //Математика в школе, 2007, №4.
414. Требование к уровню подготовки выпускников: обязательный минимум содержания образования (проект). Под редакции В. В. Фирсова. Сборник 1, 2, М., МИПКПО, 2000, 2001.

415. Трещалин В. Ф. и другие, Обсуждаем концепцию 12-летнего обучения в школе Концепция математического образования в 12-летней школе, проект//Математика в школе, 2000, №4.
416. Толстой Л. Н., Исповедь. В чем моя вера, Полн. Собр. Соч. ,т. 90, М., 1957.
417. Толстой Л. Н., Что такое искусство? Собрание сочинений в 22 т. М., 1983. Т. 15.
418. Уайтхед А. Н., Приключение идей, М., ИФРАН, 2009, 383с.
419. Уемов А. И., Аналогия в практике научного исследования. Из истории физико-математических наук, М., Наука, 1970, 264 с.
420. Урманцев Ю. А., Симметрия природы и природа симметрии, М., Мысль, 1974, 229 с.
421. Успенский В. А., Апология математики, М., СПб.:Амфора, 2009, 554с.
422. Учебник для гуманитариев. Математика 10-11. Экспериментальный учебник. /Бутузов В. Ф. и др., М., Просвещение, 1992, 229 с.
423. Фадеев Д. К., Лекции по алгебре, М., 1984, 416 с.
424. Фадеев Д. К., Соминский И.С., Сборник задач по высшей алгебре, М., 1956, 303с.
425. Федь А. М., Эстетическое воспитание на уроках по основам наук. Киев, Радянська школа, 1984, 239 с.
426. Фейнберг Е. Л., Две культуры: интуиция и логика в искусстве и науке, М., Наука, 1992, 251с.
427. Фельсер Г., Шесть признаков для симпатии, Psyfactor.org/lib/sympathy2.htm.
428. Философский энциклопедический словарь, М., Сов. Энциклопедия, 1989, 815с.
429. Философия: Энциклопедический словарь. Под редакцией А. А. Ивина, М., Гардарики, 2004, 1072с.
430. Философский энциклопедический словарь,Гл.редакция:Л.Ф.Ильичёв, П. Н . Фед- осеев и др., М., Сов. Энциклопедия, 1983, 489с.

431. Финк Э., Основные феномены человеческого бытия. Проблемы человека в западной философии, М., 1988, с. 357-402.

432. Фирстова Н. И., Эстетическое воспитание при обучении математике в средней школе, дис. ... канд. пед. наук, М., 1999, 159с.

433. Франк С. Л., Свет во тьме, Опыт христианской этики и социальной философии, М., Факториал, 1998, 255 с.

434. Франклин Б., Избранные произведения, М., Госполитиздат, 1956, 631 с.

435. Фредь Д. С., Эстетическое воспитание на уроках по основам наук, Киев, Рад. Школа, 1984, 240 с.

436. Фридман Л. М., Логико-психологический анализ школьных учебных задач, М., Педагогика, 1977, 207с.

437. Фридман Л. М., Теоретические основы методики обучения математике: Пособие для учителей, методистов и педагогических высших учебных заведений, М., Московский психолого-социальный институт: Флинта, 1998, 224 с.

438. Фройденталь Г., Математика как педагогическая задача, ч.1, М., Просвещение, 1983, 208 с.

439. Фройденталь Г., Математика как педагогическая задача, ч. 2, М., Просвещение, 1983, 192 с.

440. Фромм Э., Искусство любить, М., Педагогика, 1990, 157с.

441. Фукс Л., Частично-упорядоченные алгебраические системы, М., Мир, 1965, 342с.

442. Харди Г., Апология математика, Ижевск, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2000, 104 с.

443. Харди Г., Извинения математика, М., 1966, №5, С. 32-36.

444. Хатчесон Ф., Исследование о происхождении наших идей красоты и добродетели. М., 1979. (Francis Hutcheson, An Inquiry into the Original of Our Ideas of Beauty and Virtue, 1726).

445. Хатчесон Ф., Смит А., Эстетика, М., Искусство, 1973, 478с.

446. Хёйзинга И., Homo Ludens, Человек играющий, М., СПб., Издательство Ивана Лимбаха, 2011, 416 с.

447. Хмелинская М. М., Изучение логических связок в курсе алгебры 6-го класса//Математика в школе, 1968, №3.

448. Хогарт У., Анализ красоты, М. -Л., Искусство, 1987, 284с.

449. Хоцей А. С., Оценки и ценности, http://library-of-materialist.ru/appraciations.htm.

450. Цатурян А. М., Методологический принцип симметрии в курсе физики средней школы, Дисс. канд.пед.наук, Санкт-Петербург, 1991, 189с.

451. Цицерон М. Т.. Философские трактаты, М., Наука, 1985, 384 с.

452. Чавчавадзе Н. З., К специфике истины в искусстве, Философия, культура, человек, Тб., 1988.

453. Чеботарев Н. Г., Основы теории Галуа, ч.1, Л. ; М. : ОНТИ, 1934. 221 с.

454. Черкасов Р. С., Математика и демократия//Математика в школе, 2000, №5.

455. Черкасов Р. С., Столяр А.А. Методика преподавания математики в средней школе, Общая методика, М., Просвещение, 1985, 336с.

456. Черник О. В., Развитие й ности учащихся при обучении математике. Дисс. На соиск. К.п.н., Киров, 2003, 165 с.

457. Чернышевский Н. Г., Избранные философские сочинения, т. 1, М., 1950.

458. Шатуновский Я., Математика как изящное искусство и ее роль в общем образовании//Математика в школе, 2001, №3, стр. 6-11.

459. Швейцер А., Благоговение перед жизнью, М., Проресс, 1992, 576с.

460. Швейцер А., Культура и этика, М., Проресс, 1973, 343с.

461. Шеллинг Ф., Система трансцендентального идеализма, М., 1936, 480с.

462. Шестаков В. П., Гармония как эстетическая категория, М., Наука, 1973, 256с.

463. Шестаков В. П., Эстетические категории: опыт системарического и исторического исследования, М., Искусство, 1983, 358 с.

464. Шефтсбери А., Эстетические опыты, М, 1975.

465. Шиллер Ф., Идеи эстетического воспитания, Т.2. М., 1973.

466. Шиллер Ф., Собрание сочинений в 7 томах, 1955-1957, т. 6.
467. Шиллер Ф.. Статьи по эстетике, М.-Л., 1935, 210 с.
468. Шишов В. С., Арифметика, геометрия, гармония, ... М., 2000.
469. Шопенгауер А., Афоризмы житейской мудрости, М., Советский писатель, 1990, 232с.
470. Шохор-Троцкий С. И., Методика арифметики, М.-Л., Госпедиздат, 1935, 343с.
471. Шрейдер Ю. А., Равенство. Сходство. Порядок, М., Наука, 1971, 254 с.
472. Щиряков А. Н., Эстетика математической задачи//Математика в школе, 1982, №2, стр. 47-50.
473. Энциклопедический словарь педагога,В.С. Безрукова, Екатеринбург, 2000, 937с.
474. Энциклопедический словарь. М., 2009.
475. Энциклопедический словарь по психологии и педагогике,М.,Издательский центр ИЭТ, 2013, 268 с.
476. Эрдниев П. М., Сравнение и обобщение при обучении математики, М., Учпедгиз, 1960, 124с.
477. Эрдниев П. М., Аналогия в математике, М., Знание, 1970, 30 с.
478. Эрдниев П. М, Методика упражнений по математике, М., Просвещение, 1970, 319 с.
479. Эрштейн Л. Б., Запретная теория ценностей: психологические и социологические следствия представления ценностей как динамических запретов, Спб, 2008, 122 с.
480. Эсаулов А.Ф., Психология решения задач, Минск, Высшая школа, 1972, 216с.
481. Эстетика: Словарь, Под общ. ред. А. А. Беляева, М., Политиздат, 1989, 447 с.
482. Эстетическая культура и эстетическое воспитание: Книга для учителя, Сост. Лабковская, М., Просвещение, 1983, 304 с.

483. Эстетическое воспитание в школе: (Вопросы системного подхода)/ Под ред. Б.Т. Лихачева, М., Педагогика, 1980.
484. Якир М. С., Что такое красивая задача?//Математика в школе, 1989, №6, стр. 41-46.
485. Якобсон П. М., Психологические проблемы мотивации поведения человека, М., Просвещение, 1969, 317 с.
486. Якунина М. С., Эстетическое воспитание на уроках математики //Математика в школе, 1982, №5, стр. 48-49.
487. Asar A., A conjugasy thorem for locally finite groups, J. London Math. Soc., vol. 2, N 6, 1973, p. 358-360.
488. Bear R., Sylow theorems for infinite groups, Duke Math. J. 6, 1940, p. 598-614.
489. Dietzmann A.P., Kuros A.G. and Uzkov A.L., Sylowsche Untergruppen von inendlichen Gruppen, Math. Sb. 3, 1938.
490. Hall Ph., A characteristic property of soluble groups, J. London Math. Soc., vol. 12, 1937, p. 201-204.
491. Hall Ph., theorems like Sylow, Proc. London Math. Soc., vol. 6, 1956, 286-304p.
492. Hall Ph., On the Sylow systems for a finite soluble groups, Proc. London Math. Soc., 43, 1937, p. 531-553.
493. Hartley A., Sylow subgroups of locally finite groups, Proc. London Math. Soc., vol. 3, N 23, 1971, p. 159-193.
494. Heineken H., Maximale p-Untergruppen local endlicher Gruppen, Arch. D. Math, 23, 1972.
495. http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_philosophy/7761/%D0%AD.
496. http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_philosophy/7761/эстетическое воспитание.
497. http://esthetiks.ru/ocenka-esteticheskaya.html.
498. http://psyznaika.net/voobragenie.html, Воображение.
499. Kegel O., Locally Finite Groups, Amsterdam, London, New York, 1973, 210 p.
500. Rae A., A class of locally finite groups, Ph.D.Dissertation, Cambrige, 1968.

501. Rae A., Local system and Sylow subgroups in locally finite groups, Pros.Cambrige Phil. Soc. 72. 1972.
502. Schoemfeld Alan H. Purposes and Methods of Research in Mathemamics Education, Notices of the AMS, 2000, Volume 47, N 6.
503. Specht, Groppentheorie, Berlin-Getingen-Heidelberg, 1956, 457 p.
504. Stonehewer S. E., Abnormal subgroups of a class of periodic locally soluble groups. Proc. London Math. Soc. 14, 1964, p. 520-536.
505. Stonehewer S. E., Locally soluble FC-groups, Arch. D. Math., 16, 1965.
506. Wehrfritz A., Conjugacy theorems in locally finite groups, J.London Math. Soc,42, 1967.
507. Wehrfritz A., Sylow therems for periodic linear groups, Proc. London Math. Soc., 18, 1968, p. 125-140.
508. Wielandt H., Zum Satz von Sylow, Math. Zeitschrift, 60, 1954, p. 407-408.

Հավելված 1

Հանրահաշվական որոշ եզրերի հոմանիշները հայոց լեզվում

Աղյուսակ 1

«Մեծ է» և «փոքր է» բառերի փոխարեն հայոց լեզվում գործածվող բառերը

մեծությունը	առարկան	մեծ է	փոքր է
երկարություն	ճանապարհը, գետը	երկար է	կարճ է
	աշտարակը, շենքը	բարձր է	ցածր է
	ծովը, տակառը	խորն է	ծանծաղ է
	հողամասը, ուղղանկյունը	լայն է	նեղ է

	գիրքը	հաստ է	բարակ է
մակերես	հողակտորը, պատկերը	խոշոր է	մանր է
	սենյակը	ընդարձակ է	նեղ է
ժամանակ	ուսումնական պարապմունքը	երկար է	կարճ է
զանգված	մարմինը	ծանր է	թեթև է
ջերմություն	մարմինը, եղանակը	տաք է	սառն է
	եղանակը	շոգ է	զով է
ծավալ	մարմինը	խոշոր է	մանր է
	արկղը	ընդարձակ է	նեղ է
արագություն	շարժումը	արագ է	դանդաղ է
գին	ապրանքը	թանկ է	էժան է
տոկոսադրույք	վարկը	բարձր է	ցածր է

Աղյուսակ 2

«Ավելի» և «Պակաս» բառերի փոխարեն հայոց լեզվում գործածվող բառերը

Առարկայի մեծությունը	«Ավելի» բառին զուգընթաց գործածվող բառերը	«Պակաս» բառին զուգըն-թաց գործածվող բառերը
երկարություն	երկար, խորը, բարձր, մեծ, լայն, հեռու	կարճ, ծանծաղ, ցածր, փոքր, նեղ, մոտիկ
մակերես	մեծ, շատ	փոքր, քիչ
ծավալ	մեծ, շատ, խոշոր	փոքր, քիչ, մանր
զանգված	ծանր, շատ, մեծ	թեթև, քիչ, փոքր
ժամանակ	երկար, շատ	կարճ, քիչ
արագություն	բարձր, մեծ	ցածր, փոքր
ջերմություն	բարձր, շատ	ցածր, քիչ
գին	թանկ, բարձր	էժան, ցածր
տոկոսադրույք	բարձր	ցածր

Աղյուսակ 3

«Ավելացնել» և «պակասեցնել» բառերի փոխարեն գործածվող բառերը

Մեծությունը	Յականիշները	Հարաբերությունը
Երկարություն, մակերես, ծավալ, զանգված, կշիռ, ժամանակ, արագություն, ջերմություն, գին	ավելացնել երկարացնել մեծացնել շատացնել	պակասեցնել կարճացնել փոքրացնել քչացնել
երկարություն	բարձրացնել խորացնել	ցածրացնել ծանծաղացնել
մակերես	ընդարձակել լայնացնել	սեղմել նեղացնել
ծավալ	ընդարձակել հաստացնել ծավալել խոշորացնել	սեղմել բարակացնել կծկել մանրացնել
զանգված	ծանրացնել գիրանալ խոշորացնել	թեթևացնել նիհարել մանրացնել
արագություն	բարձրացնել մեծացնել	ցածրացնել փոքրացնել
ջերմություն	տաքացնել բարձրացնել	սառեցնել իջեցնել
գին	թանկացնել	էժանացնել
տոկոսադրույք	բարձրացնել	իջեցնել

Աղյուսակ 4

Կշռույթի օրինակներ

համեմատականությունը	կշռույթը	հարաբերությունը
մեկ ժամում 100 կմ	100 կմ առ ժամ	100կմ/ժամ
մեկ կիլոմետր 2 ժամում	2 ժամ առ կիլոմետր	2 ժամ/կմ
մեկ կիլոգրամը 100 դրամ	100 դրամ առ կիլոգրամ	100 դրամ/կգ
մեկ ժամում 5 էջ	5 էջ առ ժամ	5 էջ/ժամ
մեկ էջը 12 րոպեում	12 րոպե առ էջ	12 րոպե/էջ
մեկ դոլարին 2 գրամ	2 գրամ առ դոլար	2 գրամ/դոլար
մեկ լիտրով 100 կմ	100 կմ առ լիտր	100 կմ/լիտր
մեկ կիլոմետրին 0,1 լիտր	0,1 լիտր առ կիլոմետր	0,1 լիտր/կմ
մեկ լիտրով 3 րոպե	3 րոպե առ լիտր	3 րոպե/լիտր
մեկ րոպեում 7 լիտր	7 լիտր առ րոպե	7 րոպե/լիտր
մեկ դոլարին 500 դրամ	500 դրամ առ դոլար	500 դրամ/դոլար
մեկ դրամին 0,02 դոլար	0,02 դոլար առ դրամ	0,02 դոլար/դրամ
մեկ լիտրին 500 դրամ	500 դրամ առ լիտր	500 դրամ/լիտր
մեկ դոլարին 1 լիտր	1 լիտր առ դոլար	1 լիտր/դոլար
մեկ դոլարին 10 մետր	10 մետր առ դոլար	10 մետր/դոլար
մեկ մետրին 50 դրամ	50 դրամ առ մետր	50 դրամ/մետր
մեկ դոլարին 2 քառ. մետր	2 քառ. մետր առ դոլար	2 քառ. մ/դոլար
մեկ քառ. մետրին 25 դրամ	25 դրամ առ քառ. մետր	25 դրամ/քառ. մ
մեկ բաժակին 1 գրամ	1 գրամ առ բաժակ	1 գրամ/ բաժակ
մեկ քառ.կմ-ում 20 մարդ	20 մարդ առ քառ.մետր	20 մարդ/ քառ.մ

Աղյուսակ 5

Հանրահաշվական և առարկայական գործողությունների կապը

Առարկայական գործողությունը	Հանրահաշվական գործողությունը	Հատկության անվանումը
Ընդհանուր մաս չունեցող առարկանրի միավորում	ա.Մեծությունների գումարում բ. Թվերի գումարում	Միավորման գումարային օրենքը Ընդհանուր տարրեր չունեցող բազ-մությունների միավորման տարրերի թիվը որոշելու օրենքը
Առարկաների միավորումը	ա.Թվերի գումարում և հանում բ. Մեծության բազ-մապատկում թվով	Բազմությունների միավորման հաշվման հիմնական սկզբունքը Հավասարամեծ առարկաների միավորման մեծությունը
Առարկայի ավելացումը	ա.Մեծությունների գումարում բ.Մեծությունների բազմապատկում	Ավելացման գումարային օրենքը Ավելացման արտադրյալային օրենքը
Առարկայի պակասեցումը	ա.Մեծությունների հանում բ. Մեծության բաժանում թվի վրա	Պակասեցման գումարային օրենքը Պակասեցման արտադրյալային օրենքը
Առարկայի տրոհումը հավասարամեծ մասերի	Մեծության բաժանում թվի վրա	Հավասարամեծ մասերի մեծութունը գտնելու օրենքը
Առարկաների համեմատումը	ա. Մեծությունների հանում բ. Համասեռ մեծութ-յունների բաժանում	Քանակությունների համեմատման հանման օրենքը Քանակությունների համեմատման քանորդային օրենքը

Հավելված 2

Հանրահաշվի դասընթացի աքսիոմները և արտածման կանոնները

Աղյուսակ 1

Իրական թվերի և ռացիոնալ կոտորակների դաշտերի աքսիոմատիկ տեսությունների աքսիոմները և արտածման կանոնները

Աքսիոմները	Անվանումները
$x + y = y + x$	Գումարման տեղափոխական օրենքը
$x + (y + z) = (x + y) + z$	Գումարման զուգորդական օրենքը
$x + 0 = x$	Զրոյի գումարման օրենքը
$x + y = 0$	Հակադիրի գոյության օրենքը
$x \cdot y = y \cdot x$	Արտադրյալի տեղափոխական օրենքը
$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	Արտադրյալի զուգորդական օրենքը
$x \cdot 1 = x$	Մեկի արտադրյալային օրենքը
$x \cdot y = 1$	Հակադարձի գոյության օրենքը
$x\cdot(y + z) = x\cdot y + x\cdot z$	Գումարի նկատմամբ արտադրյալի բաշխական օրենքը
Արտածման կանոնները	Անվանումները
Եթե $x = y$ և $z = t$, ապա $x + z = y + t$	Հավասարությունների գումարման օրենքը
Եթե $x + y = 0$, ապա $y = -x$	Հակադիրի սահմանումը
Եթե $x + y = z$, ապա $y = z - x$	Հանման սահմանումը
Եթե $x \cdot y = 1$, ապա $y = 1/x$	Հակադարձի սահմանումը
Եթե $x = y$ և $z = t$, ապա $x \cdot z = y \cdot t$	Հավասարությունների բազմապատկման օրենքը
Եթե $x \cdot y = z$ և $z \neq 0$, ապա $y = z/x$	Քանորդի սահմանումը
որտեղ x ը, y ը, z ը և t ն կամայական իրական թվեր կամ ռացիոնալ կոտորակներ են:	

Աղյուսակ 2

Իրական թվերի կարգավորված դաշտի կարգին առնչվող արտածման կանոնները

Արտածման կանոնները	Անվանումները
Եթե $x > y$, ապա $y < x$ և հակառակը	$<$ և $>$ նշանները իրարով փոխարինելու օրենքը
Եթե $x < y$ և $y < z$, ապա $x < z$	Անհավասարության փոխանցական օրենքը
Եթե $x < y$ և $y = z$, ապա $x < z$ Եթե $x < y$ և $x = z$, ապա $z < y$	Օրենքներ հավասարության և անհավա-սարության կապի մասին
Եթե $x < y$ և $z = t$, ապա $x + z < y + t$	Անհավասարության և հավասարության գումարման օրենքը
Եթե $x > y$ և $z > 0$, ապա $xz > y z$	Անհավասարության արտադրյալային օրենքը
որտեղ x ը, y ը, z ը և t ն կամայական իրական թվեր են:	

Աղյուսակ 3

Մեծությունների հանրահաշվի աքսիոմատիկ տեսության աքսիոմները և արտածման կանոնները

Աքսիոմները	Անվանումները
$x e + ye = (x + y)e$	Մեծությունների գումարման սկզբունքը
$(xe)y = y(xe) = (yx)e$	Մեծության և թվի բազմապատկման սկզբունքը
$(xi) \cdot (yj) = (xy) (i{\cdot}j)$	Մեծությունների բազմապատկման սկզբունքը
որտեղ x ը և y ը կամայական իրական թվեր են, e ն, i ն և j ն՝ կամայական մեծությունների չափման միավորներ:	
Արտածման կանոնները	**Անվանումները**
$xe = ye$ նշանակում է $x = y$	Մեծությունների հավասարության սահմա-նումը
$xe < ye$ նշանակում է $x < y$ $ae > be$ նշանակում է $a > b$	Մեծությունների անհավասարության սահմանումը
Եթե $x + y = z$, ապա $y = z\ \ x$	Մեծությունների հանման սահմանումը
Եթե $\alpha \cdot y = z$, ապա $y = z:\alpha$	Մեծության և թվի բաժանման սահմանումը

Եթե x · y = z, ապա y = z:x	Մեծությունների բաժանման սահմանումը
Որտեղ a ն, b ն և α-ն կամայական իրական թվեր են, x ը, y ը և z ը՝ մեծություններ:	

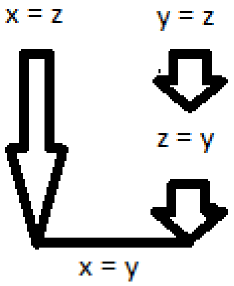
Հավելված 3

Հանրահաշվի դասընթացում կիրառվող ապացուցման սխեմաների օրինակներ

Օրինակ 1 – Հանրահաշիվ 6

Միևնույն արտահայտությանը հավասար արտահայտությունների հատկությունը

Միևնույն արտահայտությանը հավասար արտահայտությունները իրար հավասար են. կամայական x, y և z արտահայտությունների համար՝ եթե x = z, y = z, ապա x = y:

Ապացուցումը	Փաստարկները
	Պայմանները Հավասարության համաչափության օրենքը Հավասարության փոխանցելիության օրենքը

Օրինակ 2 - Հանրահաշիվ 7

Քառակուսի արմատների արտադրյալը

Կամայական ոչ բացասական a և b թվերի համար՝

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$

Ապացուցումը	Փաստարկները
a, b $\sqrt{a}\geq 0 \quad \sqrt{b}\geq 0$ $\Downarrow \quad \Downarrow$ $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\geq 0$	ոչ բացասական իրական թվեր արմատի սահմանումը ոչ բացասական թվերի արտադրյալի

$(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2$=ab $\Downarrow \qquad \Downarrow$ $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$	հատկությունը աստիճանի և արմատի հատկությունները արմատի սահմանումը

Օրինակ 3 - Հանրահաշիվ 8

Զրո տարբերիչով քառակուսային հավասարման լուծումը

Զրո տարբերիչով ax^2+ bx + c = 0 քառակուսային հավասարումն ունի միակ արմատը, որը որոշվում է x = $\frac{b}{2a}$ բանաձևով:

Ապացուցումը և փաստարկները

Հավասարության փոխանցական օրենքը,

քառակուսու հատկությունը

$\Downarrow$

$$\begin{cases} ax^2+bx+c=0 \\ b^2-4ac=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \\ b^2-4ac=0 \end{cases} \Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}$$

$\Uparrow \qquad\qquad \Uparrow$

Քառակուսային հավասարումների համարժեքության հատկությունը

Հավասարման գումարելիի տեղափոխման օրենքը

Հավելված 4-Ա

Ուսումնական ծրագրեր և չափորոշիչներ, որոնք առնչվում են ատենախոսությանը և որոնց կազմմանը մասնակցել է ատենախոսը

NN	Ծրագրի անվանումը	կարգավիճակը
1.	ՀՀ հանրակրթական դպրոցների մաթեմատիկայի Հայեցակարգ և ծրագիր, Ս. Հակոբյան, Յու. Մովսիսյան և ուրիշներ, ԿԳՆ, Երևան, 1996թ.:	ղեկավար
2.	Հանրակրթության պետական չափորոշիչը (նախագիծ). ակադեմիկոս Է. Մ. Ղազարյան (ղեկավար) և ուրիշներ, ԿԳՆ, Երևան, 1998թ. [17]:	անդամ
3.	Հանրակրթական դպրոցի 6-8 դասարանների հանրահաշվի ծրագիր, ԿԲԿ, Երևան, 1999թ.:	կազմող
4.	Հանրակրթական դպրոցի «Մաթեմատիկա» ուսումնական բնագավառի առարկայական չափորոշիչները, Մաթեմատիկան դպրոցում, N 3-4, 2005:	ղեկավար
5.	Մաթեմատիկա: Հանրակրթական դպրոցի առարկայական չափորոշիչ, Ա. Վ. Աբրահամյան, Գ. Կ. Գևորգյան և ուրիշներ, ԿԲԿ, Երևան, 2001:	անդամ
6.	Բարձրագույն հանրահաշվի ծրագիր մանկ. Բուհերի համար, Երևան, 1999:	կազմող
7.	»Խմբերի սիլովյան տեսություն» հատուկ դասընթաց ծրագիր, Երևան, 2000:	կազմող
8.	Հանրակրթական դպրոցների «Մաթեմատիկա» ուսումնական բնագավառի առարկայական չափորոշիչներ, Ս. Հակոբյան և ուրիշներ, Մաթեմատիկան դպրոցում, նո. 3-4, 2005 թ.:	ղեկավար
9.	Հանրակրթական դպրոցների «Մաթեմատիկա» ուսումնական բնագավառի առարկայական ծրագրեր, Ս.	ղեկավար

	Հակոբյան և ուրիշներ, Մաթեմատիկան դպրոցում, նո. 5-6, 2005 թ.:	
10.	Մաթեմատիկական կրթության արդի հիմնահարցերը, ծրագիր մանկավարժական բուհերի մագիստրատուրայի համար, 2011	կազմող
11.	Միջնակարգ կրթության «Մաթեմատիկա» ուսումնական բնագավառի առարկայական չափորոշիչներ և ծրագրեր ավագ• դպրոցի համար, Հ. Միքայելյան, Ս. Հակոբյան, Մաթեմատիկան դպրոցում, նո. 3-4, 2008 թ.:	ղեկավար
12.	Արժեքների ձևավորումը եվ մաթեմատիկայի կրթական ներուժը, ծրագիր մանկավարժական բուհերի մագիստրատուրայի համար, 2012	կազմող
13.	Գեղագիտական դաստիարակությունը և մաթեմատիկայի կրթական ներուժը, ծրագիր մանկավարժական բուհերի բակալավրիատի համար, 2014	կազմող

Հավելված 4-Բ

Հանրակրթական դպրոցի «Հանրահաշիվ» ուսումնական առարկայի ծրագիրը

Հանրահաշվի լեզուն: Թվերը հանրահաշվում, տառերը հանրահաշվում, գործողությունները հանրահաշվում, փակագծերը հանրահաշվում, հանրահաշվի այբուբենը, հանրահաշվական արտահայտություններ, արտահայտությունների հայերեն գրառումը, գործողությունների կարգը, հավասարությունը հանրահաշվում, հավասարության հատկությունները, անհավասարությունը հանրահաշվում, անհավասարության հատկությունները, արտահայտության թվային արժեքը, հավասարումներ, անհավասարումներ:

Հանրահաշվի կիրառությունները: Մեծություններ, մեծությունների չափումը, չափման միավորները, մեծության թվային արժեքը, մեծությունների համեմատումը, մեծությունների համեմատականությունը, բազմություններ:

Գումարումը հանրահաշվում: Քանակությունների միավորումը և գումարումը, քանակության ավելացումը և գումարումը, մեծությունների գումարումը, գումարումը և բազմությունների միավորումը, գումարման օրենքները, զրոն հանրահաշվում, հավասարության գումարային հատկությունները, հակադիրը հանրահաշվում, հակադիրի հատկությունները, հավասարման գումարային հատկությունները, x+a=b հավասարման լուծումը, հաստատուն գումարով համեմատականություններ, չորսի գումարման կանոնը, անհավասարության գումարային հատկությունները, հակադիրը և անհավասարությունը, անհավասարման գումարային հատկությունները:

Հանումը հանրահաշվում: Հանումը հանրահաշվում, հանման, գումարման և հակադիրի կապը, հանումը և պակասեցումը, հանումը և համեմատումը, մեծությունների հանումը, հակադիրը և մեծությունների փոփոխությունը, բազմությունների հատումը, տարբերության հատկությունները, հանրահաշվական գումար, հանումը և հավասարումը, x-a=b հավասարման լուծումը, հաստատուն տարբերությամբ համեմատականություններ, չորսի հանման կանոնը, գումարման ուղիղ և հակադիր համեմատականություններ, հանումը և անհավասարությունը, անհավասարման հանման հատկությունները:

Բազմապատկումը հանրահաշվում: Արտադրյալը և հավասարամեծ առարկաների միավորումը, մակերեսը և ծավալը որպես արտադրյալ, արտադրյալը հաշվման խնդիրներում, մեծության և թվի բազմապատկումը, մեծությունների արտադրյալը, բազմապատկման օրենքները, մեկը հանրահաշվում, հակադարձը հանրահաշվում, հակադարձի հատկությունները, հակադարձը և մեծությունների փոփոխությունը, հավասարության արտադրյալային հատկությունները, հավասարման արտադրյալային հատկությունները, մաս, արտադրյալի գումարային հատկությունները, հաստատուն արտադրյալով համեմատականություններ, չորսի բազմապատկման կանոնը, անհավասարության արտադրյալային հատկությունները, անհավասարման արտադրյալային հատկությունները:

Բաժանումը հանրահաշվում: Բաժանման գործողության սահմանումը, հարաբերության գոյությունը և միակությունը, առարկայի տրոհումը հավասարամեծ մասերի, մեծության և թվի հարաբերությունը, հարաբերություն և համեմատում, համասեռ մեծությունների հարաբերությունը, գին, արագություն, տարասեռ մեծությունների հարաբերությունը, հաստատուն քանորդով համեմատականություններ, չորսի բաժանման կանոնը, կշռույթ, կոտորակների հավասարությունը, հավասարության քանորդային հատկությունները, հավասարման բաժանման հատկությունները, գումարի քանորդը, քանորդների գումարը, զրոյի և հակադիրի քանորդային հատկությունները, կոտորակների հանումը, արտադրյալի քանորդային հատկությունները, կոտորակների արտադրյալը, կոտորակների բաժանումը, տոկոս, գործողություններ կշռույթների հետ, արտադրյալային ուղիղ համեմատականություններ և հակադարձ համեմատականություններ, անհավասարության քանորդային հատկությունները:

Բնական ցուցիչով աստիճան: Քառակուսու մակերեսը և խորանարդի ծավալը որպես աստիճաններ, աստիճանային աճ, բարդ տոկոսներ, արտադրյալը և աստիճանը, աստիճանի աստիճանը, կոտորակի աստիճանը, գումարի աստիճանը, տարբերության աստիճանը, հանրահաշվական գումարի վերլուծումը արտադրյալի, կրճատ բազմապատկման բանաձևերը, աստիճանների հավասարությունը, աստիճանների անհավասարությունը:

Տրամաբանության հանրահաշիվը: Հավասարումներ, հավասարման արմատները կամ լուծումները, անհավասարումներ, անհայտի թույլատրելի արժեքների բազմությունը, նույնություններ, նույնական հավասարումներ, նույնաբար ճշմարիտ անհավասարումներ, ասույթ, ասույթի ճշմարտային արժեքները, բանաձևերի համախումբը կամ տրամաբանական գումարը, ոչ խիստ անհավասարություններ, ոչ խիստ անհավասարումներ, բանաձևերի համակարգը կամ տրամաբանական արտադրյալը, կրկնակի անհավասարումներ, միջակայքեր, բանաձևի ժխտումը, բանաձևերի համարժեքությունը, համարժեքության օրենքները, բանաձևերի համախմբերի և համակարգերի համարժեքության օրենքները, բանաձևերի ժխտման հատկությունները, պարզ բանաձևերի կապը, նույնական ձևափոխություններ:

Պատկերների հանրահաշիվը: Թվային ուղիղը, թվային ուղղի հիմնական հատկությունը, թվերի համեմատումը թվային ուղղի վրա, պարզագույն անհավասարումների լուծումների և միջակայքերի պատկերումը թվային ուղղի վրա, կոորդինատային հարթություն, պատկերի բանաձևը, երկրաչափա-հանրահաշվական պարզագույն թարգմանություններ, բանաձևի գրաֆիկը, պարզագույն հավասարումների գրաֆիկական պատկերումը, պարզագույն անհավասարումների, անհավասարումների համակարգերի և համախմբերի գրաֆիկական պատկերումը, հանրահաշվական արտահայտության գրաֆիկը, համեմատականությունների գրաֆիկական պատկերումը:

Մեկ փոփոխականով բազմանդամների հանրահաշիվը: Մեկ փոփոխականով բազմանդամներ, մեկ փոփոխականով բազմանդամի աստիճանը և կատարյալ տեսքը, բազմանդամների գումարումն ու հանումը, բազմանդամների բազմապատկումը, բազմանդամների արտադրյալի ազատ անդամը և աստիճանը, բազմանդամների բաժանումը, բազմանդամի արժեքները, Բեզուի թեորեմը, բազմանդամի արմատները, բազմանդամների հավասարությունը:

Գծային երկանդամ: Գծային երկանդամներ, գծային հավասարումների լուծումը, գծային հավասարումների լուծման հետազոտումը, գծային անհավասարումների լուծումը, գծային ոչ խիստ անհավասարումներ, գծային երկանդամի նշանը, գծային հավասարումների և անհավասարումների լուծումների պատկերումը թվային ուղղի վրա, գծային անհավասարումների համախմբեր, գծային անհավասարումների համակարգեր, գծային հավասարումների, անհավասարումների, համախմբերի և համակարգերի ժխտումը, բացարձակ արժեք պարունակող հավասարումներ, բացարձակ արժեք պարունակող անհավասարումներ, միջակայքերի եղանակը, գծային երկանդամների արտադրյալներ պարունակող հավասարումներ և անհավասարումներ, գծային երկանդամի գրաֆիկը:

Քառակուսային երկանդամի արմատներ: Քառակուսի արմատ, քառակուսի արմատի գործողությունը, քառակուսի արմատների հավասարությունը, քառակուսի արմատների անհավասարությունը, քառակուսի արմատը և բազմապատկումը, քառակուսի արմատը և բաժանումը, միջին թվաբանական և միջին երկրաչափական, քառակուսի արմատներով հավասարումներ, քառակուսի արմատներով անհավասարումներ:

Քառակուսային եռանդամ: **Քառակուսային հավասարումներ և անհավասարումներ:** Քառակուսային եռանդամ, քառակուսային հավասարումներ, մասնավոր տեսքի քառակուսային հավասարումներ, Վիետի թեորեմը, քառակուսային եռանդամի վերլուծումը արտադրիչների, ռացիոնալ հավասարումներ, քառակուսայինի բերվող հավասարումներ, երկքառակուսային հավասարումներ, քառակուսային եռանդամի նշանը, քառակուսային անհավասարումներ, քառակուսային ոչ խիստ անհավասարումների լուծումը, քառակուսային եռանդամի անսահմանափակությունը, քառակուսային եռանդամի սահմանափակությունը, մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ, քառակուսային անհավասարությունների ապացուցումը, քառակուսային հավասարումների և անհավասարումների համակարգերի լուծումը, ռացիոնալ անհավասարումներ, իռացիոնալ հավասարումներ:

Մի քանի փոփոխականներով բազմանդամների հանրահաշիվը: Մի քանի փոփոխականներով բազմանդամներ, բազմանդամի կատարյալ տեսքը, մի քանի փոփոխականով բազմանդամի աստիճանը, բազմանդամների գումարումն ու հանումը, բազմանդամների բազմապատկման գործողությունը, միանդամի բազմապատկումը բազմանդամով, բազմանդամի վերլուծումը արտադրիչների, մի քանի փոփոխականով բազմանդամների կիրառությունները, բնական թվի դիրքային գրությունը, թվերի բաժանականության հայտանիշները:

Մի քանի անհայտով հավասարումներ և հավասարումների համակարգեր: Երկու անհայտով հավասարումներ, երկու անհայտով հավասարման գրաֆիկը, հավասարումների համակարգեր, երկու անհայտով երկու գծային հավասարումների համակարգերի լուծումը, Կրամերի կանոնը, համակարգի լուծման կախվածությունը գործակիցներից, համակարգի գործակիցների կախվածությունը լուծումից, համակարգերի գրաֆիկական պատկերումը և լուծումը, մեկ առաջին և մեկ երկրորդ աստիճանի հավասարումների համակարգեր, համասեռ հավասարում պարունակող համակարգեր, օժանդակ անհայտի ներմուծումը, լուծման այլ եղանակներ, մի քանի անհայտով հավասարումների համակարգերի լուծումը:

Ամբողջ և կոտորակային ցուցիչով աստիճաններ: Արտահայտության ամբողջ աստիճանը, ամբողջ ցուցիչով աստիճանի հատկությունները, ամբողջ ցուցիչով աստիճանների անհավասարությունը, երկանդամի արմատները, *n*-րդ աստիճանի արմատ, արմատների համեմատությունը, արմատը և բազմապատկումը, արմատը և աստիճանը, արմատը և բաժանումը, միջին թվաբանականը և միջին երկրաչափականը, կոտորակային ցուցիչով աստիճանը, կոտորակային ցուցիչով աստիճանի հատկությունները:

Պրոգրեսիաներ: Հաջորդականություններ, թվաբանական պրոգրեսիա, թվաբանական պրոգրեսիայի բնութագրիչ հատկությունը, թվաբանական պրոգրեսիայի ընդհանուր անդամի բանաձևը, թվաբանական պրոգրեսիայի անդամների գումարը, երկրաչափական պրոգրեսիա, երկրաչափական պրոգրեսիայի բնութագրիչ հատկությունը, երկրաչափական պրոգրեսիայի կապը գործողությունների հետ, երկրաչափական պրոգրեսիայի ընդհանուր անդամի բանաձևը, երկրաչափական պրոգրեսիայի անդամների գումարը, անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիա:

Ֆունկցիա: Ֆունկցիաներ, ֆունկցիայի գրառումը, աղյուսակներ և ֆունկցիաներ, դիագրամներ և ֆունկցիաներ, ֆունկցիայի որոշման տիրույթը և արժեքների տիրույթը, ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները, ֆունկցիայի աճումը և նվազումը, մեկ փոփոխականով բազմանդամները որպես ֆունկցիաներ, քառակուսային ֆունկցիա, նրա գրաֆիկը, $y = k/x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Հավելված 4-Գ

Մանկավարժական բուհերի «Բարձրագույն հանրահաշիվ» առարկայի ծրագիրը

Երկտեղ առնչությունները: Բազմություն, ենթաբազմություն, գործողություններ բազմությունների հետ, բազմությունների դեկարտյան արտադրյալը, երկտեղ առնչություն, առնչությունների պատկերումը, տիրույթները, հատկությունները, համարժեքություն, համարժեքության դասեր, տրոհում և ֆակտոր-բազմություն, ֆունկցիա, ֆունկցիայի հատկությունները, տեղադրություն, կարգի առնչություն, նրա հատկությունները, մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը:

Հանրահաշվական համակարգեր: Երկտեղ հանրահաշվական գործողություն, ֆունկցիաների բազմապատկման գործողությունը, Քելլի-Պյութագորասի աղյուսակներ, գործողությունների հատկությունները, խումբ, ենթախումբ, խմբերի իզոմորֆիզմը, տեղադրությունների լրիվ խումբը, նշանափոխ խումբը, օղակ, ենթաօղակ, օղակների իզոմորֆիզմը, ամբողջության տիրույթ, մարմին, դաշտ:

Կոմպլեքս թվեր: Կոմպլեքս թվեր, գործողություններ նրանց հետ, կոմպլեքս թվերի դաշտը, կոմպլեքս հարթություն, կոմպլեքս թվի եռանկյունաչափական տեսքը, n-րդ աստիճանի արմատ, շրջանի բաժանման հավասարումը:

Վեկտորական տարածություններ: Վեկտորական տարածություն, գծային կախվածություն և անկախություն, բազիս և ռանգ, վեկտորի կոորդինատները, ենթատարածություն, գծային թաղանթ, ենթատարածությունների գումար և ուղիղ գումար, վեկտորների սկալյար արտադրյալը, օրթոգոնալ լրացում, էվկլիդյան վեկտորական տարածություններ, նրանց իզոմորֆիզմը:

Գծային հանրահաշիվներ և մատրիցներ: Գծային հանրահաշիվ, քվատերնիոնների հանրահաշիվը, գծային հանրահաշիվների իզոմորֆիզմը, ենթահանրահաշիվ, մատրիցներ, մատրիցների գումարային խումբը, օղակը, գծային հանրահաշիվը, մատրիցի ռանգը, հակադարձելի և չվերածվող մատրիցներ:

Որոշիչներ: Որոշիչ, նրա հատկությունները, արտադրյալի որոշիչը, մինոր և հանրահաշվական լրացում, որոշչի վերլուծումը ըստ տողի կամ սյան, հակադարձ մատրիցի որոշիչը, մատրիցի ռանգի հաշվումը որոշիչի միջոցով:

Գծային հավասարումների համակարգեր: Գծային հավասարումների համակարգը, նրա համատեղելիությունը, Կրամերի կանոնը, լուծման Գաուսի մեթոդը, համասեռ համակարգերի լուծումը, լուծումների տարածությունը:

Գծային արտապատկերումներ: Գծային արտապատկերումներ, կորիզ և դեֆեկտ, պատկեր և ռանգ, գծային արտապատկերումների գումարային խումբը, վեկտորական տարածությունը, օղակը, գծային հանրահաշիվը, գծային արտապատկերման մատրիցը, գծային արտապատկերումների և մատրիցների հանրահաշիվների իզոմորֆիզմը, հակադարձելի օպերատորներ, վեկտորական տարածության ավտոմորֆիզմների խումբը, սեփական վեկտոր և սեփական արժեք, բնութագրիչ հավասարում, բնութագրիչ արմատներ, պարզ սպեկտրով գծային օպերատորներ, օրթոգոնալ ձևափոխություն, նրա մատրիցը, օրթոգոնալ ձևափոխությունների և մատրիցների խմբերը:

Խմբեր: Ցիկլային խմբեր, ծնորդ, հարակից դաս, նորմալ բաժանարար, ֆակտոր-խումբ, խմբերի հոմոմորֆիզմը, հոմոմորֆիզմի կորիզը, թեորեմ հոմոմորֆիզմի մասին:

Օղակներ: Օղակի իդեալը, ֆակտոր օղակ, պարզ և մաքսիմալ իդեալներ, օղակների հոմոմորֆիզմը, հոմոմորֆիզմի կորիզը, հոմոմորֆիզմների թեորեմը, օղակի բնութագրիչը, ամբողջության տիրույթի քանորդների դաշտը, նրա գոյությունը և միակությունը, գաուսյան օղակներ, ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը և ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը գաուսյան օղակներում, գլխավոր իդեալների օղակ, էվկլիդեսյան օղակ:

Բազմանդամներ: Բազմանդամների օղակը, բազմանդամի արմատները, բազմանդամների էվկլիդեսյան օղակը, բազմանդամի վերլուծությունների դաշտը, ածանցյալը, Վիետի բանաձևերը, բազմանդամների վեկտորական տարածությունը և հանրահաշիվը, ռացիոնալ կոտորակների դաշտը, բազմանդամների գաուսյան օղակը:

Մի քանի փոփոխականով բազմանդամներ: Մի քանի փոփոխականով բազմանդամների օղակը, հատկությունները, սիմետրիկ բազմանդամներ, բազմանդամի ռեզուլտանտը, անհայտների արտաքսումը:

Կոմպլեքս, իրական, ռացիոնալ գործակիցներով բազմանդամներ: Թեմաները. իրական գործակիցներով բազմանդամների արժեքները, կոմպլեքս արմատի գոյությունը, կոմպլեքս գործակիցներով բազմանդամներ, իրական գործակիցներով չբերվող բազմանդամներ, երրորդ և չորրորդ աստիճանի հավասարումների լուծումը, իրական արմատների թիվը, Շտուրմի թեորեմը, ամբողջ գործակիցներով բազմանդամի ամբողջ և ռացիոնալ արմատները, ռացիոնալ գործակիցներով չվերլուծվող բազմանդամներ:

Դաշտերի ընդլայնումները: Դիտարկվում են հետևյալ հարցերը. դաշտի պարզագույն ընդլայնումները, պարզ հանրահաշվական ընդլայնում, վերջավոր հանրահաշվական ընդլայնում, թվային դաշտերի բաղադրյալ հանրահաշվական ընդլայնումները, դաշտի քառակուսային ընդլայնումը, հավասարման լուծելիությունը քառակուսային արմատանշաններով:

Հավելված 4-Դ

Արժեքների ձևավորումը եվ մաթեմատիկայի կրթական ներուժը

Ծրագիր մանկավարժական բուհերի մագիստրատուրայի

1. Արժեքներ: Արժեքների վերլուծությունը. արժեքի սահմանումը, տեսակները, հիմնական և ածանցյալ արժեքներ, արժեքներ և պահանջմունքներ, արժեքներ և նորմեր: Արժեքների համադրությունը. արժեքների համեմատությունը, զուգահեռականությունը, արտածգումը և սեղմումը: Հիմնական արժեքների ձևավորումը և հանրակրթությունը:

2. Բարոյական արժեքներ: Հիմնական բարոյական արժեքները, հանրակրթությունը և մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը. բարին և չարը, սերը, արժանապատվություն և հարգանք, խիղճ, արդարություն, առաքինություն, պարտք,

կյանքի իմաստը և նպատակը, ազատություն, երջանկություն: Բարոյական ճշմարիտը և մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը:

3. Ճշմարտային արժեքներ: Ճիշտը և ճշմարտությունը: Ճշմարտությունը և գիտությունը: Ճշմարտությունը և մաթեմատիկան Ճշմարտային արժեքի ձևավորումը, հանրակրթությունը և մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը:

4. Գեղագիտական արժեքներ: Գեղագիտական արժեքներ, նրանց ձևավորումը հանրակրթությունում և մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում: Հիմնական գեղագիտական արժեքները և մաթեմատիկայի ուուցման գործընթացը. գեղեցիկը և տգեղը, վեհը և ստորը, կատակերգականը և ողբերգականը: Գեղագիտական ճշմարիտը և մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը:

5. Աճանցյալ արժեքներ: Ազգային արժեք, համամարդկային արժեք, կապը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի հետ:

Հավելված 4-Ե

Գեղագիտական դաստիարակությունը և մաթեմատիկայի կրթական ներուժը

Ծրագիր մանկավարժական բուհերի բակալավրիատի

1. Գեղագիտական դաստիարակության հիմունքները և մաթեմատիկական կրթությունը: Գեղագիտական դաստիարակությունը և մաթեմատիկական կրթությունը: Սուբյեկտիվ հարաբերություն: Մաթեմատիկական գեղեցիկի սուբյեկտիվ տեսանկյունը: Մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ տեսանկյունը: Գեղեցիկի արտաքին և ներքին դրսևորումները մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում: Գեղագիտական հիմնական արժեքները և մաթեմատիկական կրթությունը:

2. Գեղեցիկը անձի հոգեկանում և մաթեմատիկական կրթությունը: Գեղագիտական պահանջմունքը և մաթեմատիկական կրթությունը: Գեղագիտական հույզերը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում: Գեղագիտականը զգացմունքները և մաթեմատիկական կրթությունը: Ուշադրության գեղեցկությունը և մաթեմատիկական կրթությունը: Հիշողության գեղեցկությունը և մաթեմատիկական կրթությունը: Կամքի

գեղեցկությունը և մաթեմատիկական կրթությունը: Երևակայության գեղեցկությունը և մաթեմատիկական կրթությունը:

3. Գեղագիտական դաստիարակության կատեգորիաները և մաթեմատիկական կրթությունը: Գեղագիտական հարաբերությունը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում: Գեղագիտական ճանաչումը և մաթեմատիկական կրթությունը: Գեղագիտական գնահատումը և մաթեմատիկական կրթությունը:

4. Մաթեմատիկական կրթության ճարտարապետական ոճերի գեղագիտական գրավչությունը: Իմացության մեթոդները և մաթեմատիկական կրթության գեղեցկությունը: Մաթեմատիկայի ուսուցման մեթոդների գեղագիտական գրավչությունը: Ինդուկցիայի և դեդուկցիայի գեղագիտական գրավչությունը:

5. Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի գեղագիտական գրավչությունը: Մաթեմատիկական կրթության հիմնախնդիրները և գեղեցիկի ձևավորումը: Գեղեցիկի ձևավորումը մաթեմատիկական հասկացությունների ուսուցման գործընթացում: Գեղեցիկի ձևավորումը թեորեմների ուսուցման գործընթացում: Գեղեցիկի ձևավորումը ապացուցումների ուսուցման գործընթացում: Գեղեցիկի ձևավորումը խնդիրների ուսուցման գործընթացում:

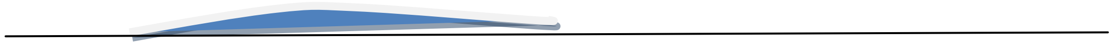
Հավելված 5-Ա

Արիստոտելյան առաքինությունները և մաթեմատիկական կրթությունը

Եթե հետևելու լինենք Արիստոտելի ուսմունքին, ապա մաթեմատիկական կրթությունը, հավանաբար, նպաստում է առաքինությունների ձևավորմանը, քանի որ այն մարդուն հնարավորություն է տալիս ճիշտ գնահատել իրադրությունը, իր հնարավորությունները, հեռու է պահում ծայրահեղություններից, նրան դարձնում է չափավոր: Եթե կոնկրետ առաքինութուններին անդրադառնանք, ապա մաթեմատիկական կրթությունը տարբեր առաքինությունների ձևավորման խնդրում կարող է ունենալ տարբեր նշանակություն: Այստեղ մենք ավելի շատ կանդրադառնանք ոչ թե կոնկրետ առաքինությունների, այլ դրանց վերին և ստորին ծայրահեղությունների ձևավորման խնդրում մաթեմատիկական կրթության ունեցած դերին: Այս մոտեցումը մաթեմատիկայի ուսուցչին հնարավորություն կտա մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը հեռու պահել ավելորդ ծայրահեղություններ կամ արատներ ձևավորելու վտանգից:

Մեզ թվում է, թե մաթեմատիկայի դասավանդման գործընթացը նպաստում է վտանգի զգացողության, իրադրության, նրանում իր հնարավորությունների և վտանգից առաջացած հնարավոր հետևանքների ճիշտ գնահատման, վտանգավոր իրադրության մեջ կշռադատված մոտեցումների ցուցաբերման և ավելորդ զգացմունքայնություն չդրսևորելու որակների ձևավորմանը: Այս որակները մաթեմատիկական կրթություն ստացած մարդուն հնարավորություն են տալիս լինել զգույշ, հեռու մնալ խելացնորությունից և խենթությունից:

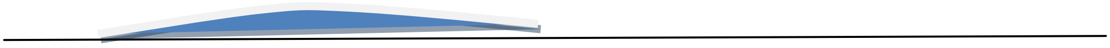
Իսկ առօրեական իրադրություններից, շփումներից հեռու մնալը, որ կարող է տեղի ունենալ մաթեմատիկայով զբաղվելու համար անհրաժեշտ անհատական երկարատև աշխատանքի արդյունքում, վտանգի հանդեպ կարող է առաջացնել վախի զգացում: Հետևապես՝ մեծ սպասելիքներ չպետք է ունենալ, թե մաթեմատիկական կրթություն ստացած մարդը վտանգի հանդեպ կդրսևորի խիզախություն:



վախկոտություն խիզախություն

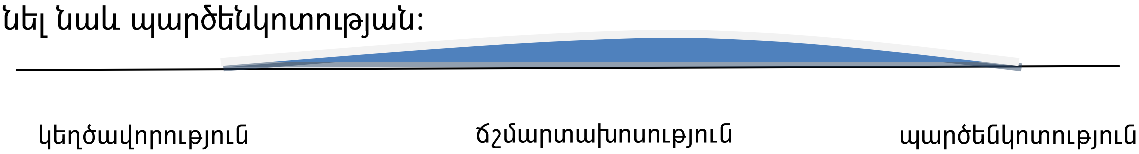
խելացնորություն

Հաշվարկներ կատարելու, պլաններ կազմելու կարողությունների մեծացում, երևակայականի և իրականի անսովոր փոխհարաբերություններ, կշռադատված մոտեցումների ցուցաբերում, ավելորդ զգացմունքայնության պակաս - ահա ունակություններ, որոնց ձևավորմանը և զարգացմանը նպաստում է մաթեմատիկական կրթությունը և, որոնք, միևնույն ժամանակ, չեն նպաստում շռայլության դրսևորմանը: Հետևապես, պետք է ենթադրել, որ մաթեմատիկական կրթությունը նյութական ծախսերի նկատմամբ ավելի շատ դեպի ժլատության է մղում, քան շռայլության, և նման կրթություն ստացած մարդը ավելի քիչ է հակված առատաձեռնության:



ժլատություն առատաձեռնություն շռայլություն

Մաթեմատիկայի իմացությունը մեծացնում է մարդու արժեքը ուրիշների աչքում: Ուրեմն, պետք է սպասել, որ մաթեմատիկական կրթությունը կարող է մարդուն մղել դեպի պարծենկոտության: Միևնույն ժամանակ, ճշմարտային արժեքի ձևավորման գործում մաթեմատիկական կրթության մեծ դերը կարող է հեռացնել մարդուն կեղծավորությունից: Հետևապես, մաթեմատիկական կրթությունը պետք է, որ մարդուն ավելի շատ մղի ճշմարտախոսության, և նման մարդը որոշ չափով կարող է հակված լինել նաև պարծենկոտության:



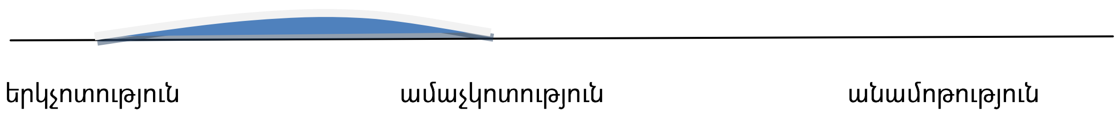
Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը ձևավորում է հստակ մտածողություն, ինչը նպաստում է համաձայնության գալու, հաշտ ապրելու ուրիշների հետ և, հետևապես, նվազեցնում է անհաշտության դրսևորման հնարավորությունը: Միևնույն ժամանակ, այդ գործընթացը, ավելացնելով մարդու ինտելեկտուալ կարողությունների նկատմամբ հավատը, մեծացնում է սեփական արժանապատվության զգացումը, ինչը կարող է խոչընդոտ լինել քծնողությանը:

Այսպիսով, մաթեմատիկական կրթությունը պետք է, որ ձևավորի անհաշտության և քծնողության միջև ընկած ընկերասիրությանն ուղղված որակներ: Մաթեմատիկայի լավ իմացությունը կարող է նաև առաջացնել մեծամտություն, ինչը չի նպաստում ընկերասիրության որակի ձևավորմանը: Ընկերասիրության որակի ձևավորմանը կարող է խոչընդոտել նաև մաթեմատիկական գիտելիքների և կարողությունների ձեռքբերման համար անհրաժեշտ անհատական երկարատև աշխատանքը, որ պահանջում է մեկուսացում: Մեր վարկածը և գիտափորձի արդյունքները ներկայացված են 272 էջում՝ գիտափորձին նվիրված մասում:

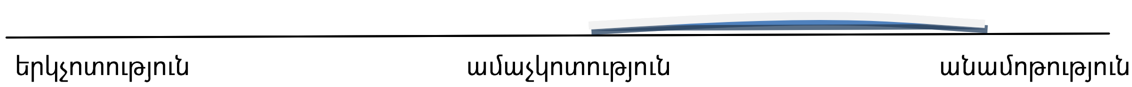
Մաթեմատիկական կրթությունը կարող է նպաստել ավարտին հասցնելու սկսած գործը, պլանավորելու ու սկսելու նոր ձեռնարկումներ: Սրանք մարդուն հաղորդում են վստահություն իր ուժերի նկատմամբ, ինչը իր հերթին բացառում է երկչոտությունը: Եվ նման գործունեության մեջ մեծ վստահությունը երբեմն կարող է բացառել ամոթի որակի դրսևորումը: Սակայն մաթեմատիկայով չափից ավելի տարվելը սովորողին հեռու է պահում առօրեական շփումներից, ինչը պատճառ կարող է դառնալ նման իրադրություններում երկչոտության դրսևորման և համապատասխան որակի ձևավորման:

Ինչ վերաբերում է անամոթությանը, ապա այն կարող է դրսևորվել մեծամտության պատճառով, որակ, որ հնարավորություն ունի ձևավորվելու մաթեմատիկական կրթության արդյունքում: Այսպիսով, մաթեմատիկական կրթությունը հիմնականում չի նպաստում ամաչկոտության առաքինության ձևավորմանը և կարող է ունենալ երկակի նշանակություն. առօրեական իրադրություններում այն տանում է ամաչկոտության ստորին ծայրահեղության՝ երկչոտության որակի ձևավորմանը, իսկ ինտելեկտուալ գործունեության հետ կապված իրադրություններում՝ ամաչկոտության վերին որակի՝ անամոթության (այստեղ ավելի տեղին է գործածել անհամեստության որակը) ձևավորմանը:

Առօրեական իրադրություններ



Ինտելեկտուալ իրադրություններ



Իմ աշակերտ Ա. Խաչատրյանը [19] աշխատանքում կատարել է հատուկ գիտափորձ և ճշգրտել արիստոտելյան առաքինությունների վրա մաթեմատիկական կրթության ազդեցության սահմանները: Դրանց և մեր բերած տվյալների տարբերությունները մեծ չեն:

Հավելված 5-Բ

Հին Հունաստանի «արմատական» առաքինությունները և մաթեմատիկական կրթությունը

Հին Հունաստանի «արմատական» առաքինություններն էին չափավորությունը, խիզախությունը, իմաստությունը և արդարությունը: Ի՞նչ ազդեցություն ունի մաթեմատիկական կրթությունը սովորողների մոտ բարոյական այս որակների ձևավորման գործընթացի վրա:

Չափավորությունը գործողություններում և արարքներում չափավոր լինելու հատկությունն է: Համաձայն [5]-ի, չափավոր նշանակում է ա. ըստ անհրաժեշտ չափի, հարկ եղածի չափ, բ. ծայրահեղությունների չհանգող, միջին չափը պահպանող, պատշաճ կարգը, չափը պահպանող, գ. միջին, համեստ, բավարար, դ. ոչ արմատական, արմատական փոփոխություններ՝ միջոցառումներ չպահանջող:

ա. Այս նշանակությամբ չափավորության որակ դրսևորելու համար նախ անհրաժեշտ է ունենալ չափի զգացում, հարկ եղածի չափը գնահատելու կարողություն: Ինչ վերաբերում է չափի զգացմանը, ապա այն ձևավորվում է համապատասխան փորձի արդյունքում, ինչը ձեռք է բերվում կենսափորձով: Իսկ ահա հարկ եղածի չափը գնահատելու կարողությունը կապված է մտածողության, երևակայության և հոգեկան այլ գործընթացների հետ, որոնց ձևավորման գործում իր որոշակի դերն ունի մաթեմատիկայի դասավանդման գործընթացը: Հետևապես, մաթեմատիկայի դասավանդման գործընթացը նպաստում է այս նշանակությամբ չափավորության առաքինության ձևավորմանը:

բ. Մաթեմատիկական կրթությունը այս նշանակությամբ չափավոր լինելու խնդրում, մեր կարծիքով, դրսևորվում է ըստ հետևյալ աղյուսակի՝

Առօրեական իրադրություններում	միջին չափից ավելի ցածր, երբեմն՝ ծայրահեղության հասնող մոտեցում
Մասնագիտական գործունեության մեջ	միջին չափը պահպանող, ծայրահեղությունների չհանգող մոտեցում

Ինտելեկտուալ գործունեության մեջ	միջին չափից ավելի բարձր, երբեմն՝ ծայրահեղության հասնող մոտեցում

գ. Չափավոր լինելու այս նշանակությունը մոտ է նրա բ նշանակությանը:

դ. Մաթեմատիկական կրթությունը ձևավորում և զարգացնում է այնպիսի ունակություններ, որոնք չեն պահանջում արմատական փոփոխություններ կամ միջոցառումներ: Խիզախությունը, ըստ [5]-ի, խիզախ՝ համարձակ, հանդուգն, անվախ, անվեհեր լինելու հատկությունն է: Միաժամանակ խիզախությունը նորի, գեղեցիկի, վեհի բուռն ձգտումն է: Մաթեմատիկական կրթությունը՝ ինքնամփոփման, երևակայական հասկացությունների հետ երկարատև աշխատանքի արդյունքում մարդուն հեռու է պահում առօրեական իրադրություններից, ինչը կարող է հնարավորություն չտալ այստեղ առաջացած խնդիրների լուծման հարցերում դրսևորել խիզախություն:

Միևնույն ժամանակ, կիրառական կարևոր նշանակությունը, մտածո-ղության, երևակայության և հոգեկան այլ որակների ձևավորման և զարգացման գործում մաթեմատիկական կրթության ունեցած մեծ դերը կարող են նպաստել, որպեսզի մարդը ինտելեկտուալ և մասնագիտական գործունեության ոլորտում, առանձնապես, երբ խոսքը գնում է մաթեմատիկայի կիրառությամբ մասնագիտություններին, իր գործունեության մեջ լինի անվախ, համարձակ, հանդուգն և խիզախ:

Հոգեկան որակների ձևավորման և զարգացման գործում ունեցած մեծ դերով մաթեմատիկական կրթությունը մեծապես նպաստում է նորի բացահայտմանը, մանավանդ, եթե այդ նորը կապված է մաթեմատիկական գիտելիքի հետ: Հետևապես, նման կրթությունը կարող է համարձակություն, խիզախություն հաղորդել մարդուն՝ նորի ձգտելու, դրա բացահայտման հարցերում:

Հանրահայտ է համաչափության մաթեմատիկական գաղափարի դերը ճարտարապետության և երաժշտության մեջ: Համաչափությունը ընկած է ընդհանրապես գեղեցիկի գաղափարի հիմքում. այն կարող է լինել գեղեցիկի չափանիշ գրականության, թատրոնի, կերպարվեստի, քանդակագործության և արվեստի այլ բնագավառների ստեղծագործություններում: Նման մոտեցումը ունի հենքային խորություն և այդ խորքերի բացահայտումը կարող է առաջացնել ձգտում գեղեցիկի նկատմամբ: Միևնույն ժամանակ, մաթեմատիկական օրինաչափությունները, հասկացությունների միջև առկա ներքին խորը կապերը գեղեցիկի անսովոր դրսևորումներ են, որոնց իմացությունը նույնպես նպաստում է գեղեցիկի ձևավորմանը և առաջացնում է որոշակի ձգտում դրա նկատմամբ:

Իմաստությունը, ըստ [5] -ի նշանակում է՝ ա. Իմաստուն լինելը: բ. Երևույթների՝ դեպքերի խորը իմացություն՝ ըմբռնում: գ. Հանճարեղ՝ իմաստալից խոսք՝ միտք՝ առած՝ գրվածք: դ. Խոր իմացականություն, հանճար: Որպես առաքինություն՝ իմաստությունը մենք կդիտարկենք միայն ա և բ նշանակություններով:

ա. Իմաստուն լինելը: Մաթեմատիկական կրթությունը իմաստուն լինելու խնդրում, մեր կարծիքով, դրսևորվում է ըստ հետևյալ աղյուսակի, որի առաջին սյունակում տրված է իմաստուն եզրի ստուգաբանությունը ըստ [5] -ի, իսկ երկրորդ սյունակում՝ մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի ազդեցությունը համապատասխան որակի ձևավորման վրա:

Մտավոր մեծ կարողություններով օժտված, շատ խելոք	Նպաստում է մեծապես
Իմաստությամբ լի	Նպաստում է
Կենսափորձ ու կյանքի խոր ճանաչողություն ունեցող	Չի նպաստում
Ընդհանրապես խելացի	Նպաստում է մեծապես
Իմաստալից բաներ խոսող	Նպաստում է
Հմուտ, ճարտար	Նպաստում է մասամբ
Գիտուն, գիտնական, փիլիսոփա	Նպաստում է

բ. Երևույթների՝ դեպքերի խոր իմացություն՝ ըմբռնում: Շատ երևույթների հիմքերում ընկած են մաթեմատիկական ինչ-ինչ օրինաչափություններ և առանց մաթեմատիկայի կիրառության անհնար է ուսումնասիրել և խորությամբ հասկանալ դրանք: Այդպիսիք են ֆիզիկայի և բնական այլ գիտություններում դիտարկվող երևույթները: Իսկ այլ երևույթների խորը ուսումնասիրությունն ու իմացությունն էլ պահանջում է մտածողության, երևակայության և հոգեկան այլ որակների առկայություն, ինչին մեծապես նպաստում է մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը: Հետևապես, մաթեմատիկական կրթությունը նպաստում է այս իմաստով իմաստության որակի ձևավորմանը և զարգացմանը:

Արդարության առաքինության ձևավորման խնդրում մաթեմատիկական կրթության դերը հանգամանորեն քննարկվել է այդ արժեքին նվիրված բաժնում: Այստեղ ավելացնենք միայն, որ բոլոր ժամանակներում և բոլոր իրադրություններում ծագած ցանկացած խնդրի ճշմարիտ լուծումը համարվել է արդար: Հետևապես՝ նման լուծումներ գտնելու համար անհրաժեշտ պայմաններից մեկը կապված է ճշմարտային արժեքի, մանավանդ՝ տրամաբանական ճշմարիտի իմացության աստիճանից:

Հաշվի առնելով ճշմարտային արժեքի ձևավորման գործում մաթեմատիկական կրթության իսկայական և անփոխարինելի դերը՝ կարելի է վստահորեն ասել, որ մաթեմատիկական կրթությունը մեծապես նպաստում է, ավելին՝ նպատակաուղղված է արդարության բարոյական որակի ձևավորմանը և, մանավանդ, բացահայտմանը:

Հավելված 5-Գ

«Աստվածաբանական» հիմնական առաքինությունները և մաթեմատիկական կրթությունը

Չնայած այն բանին, որ «աստվածաբանական» հիմնական առաքինությունները ուղղված են Արարչին (պետք է հավատալ Արարչին, սիրել նրան և հուսալ նրա օգնությամբ փրկության իրականացմանը), այնուամենայնիվ, մենք կդիտարկենք ընդհանրապես (ոչ միայն Արարչին ուղղված) հավատի, սիրո և հույսի առաքինությունների ձևավորման խնդիրը մաթեմատիկայի դասավանդման գործընթացի միջոցով:

Մարդու կյանքում կարևոր տեղ ունի հավատի առաքինությունը: Ժողովրդական իմաստությունն ասում է. «Կան բաներ, որոնց հավատալու համար պետք է դրանք տեսնել, բայց և կան բաներ, որոնք տեսնելու համար պետք է դրանց հավատալ»:

Առաջին հերթին սա վերաբերում է ուսուցչին, ով պետք է հավատա իր աշակերտին՝ նրա մեջ տեսնելու համար ապագա քաղաքացուն, մասնագետին, մարդուն: Եվ, իհարկե, ասվածը վերաբերում է նաև աշակերտին, որն առանց ուսուցչի բարոյականության, նրա առաքինության հանդեպ ունեցած խոր հավատի, առանց համոզմունքի, որ ուսուցիչը իր բարեկամն է, չի կարող վստահել նրան: Ու եթե ուսուցիչը չի աշխատում, չի կարողանում իր աշակերտի մոտ ձևավորել այդ հավատը, նա հաջողություններ չի կարող արձանագրել այդ աշակերտի ուսուցման և դաստիարակության գործընթացում:

Իսկ արժեքների վերանայման, վերաիմաստավորման ներկա շրջանում, երբ փողը, նյութական արժեքները մեծ տեղ են զբաղեցնում, մեծ կարևորություն ստանում մարդու և հասարակության կյանքում, դժվար է մարդկանց մեջ տեսնել բարոյական արժեքներ, առաքինություններ: Դեռահասը, պատանին նման արժեքների հետ առնչվելու հնարավորություն քիչ ունի, որովհետև դրանք չեն գնահատվում հասարակության կողմից: Եվ դրանք տեսնելու համար պետք է նախ և առաջ նրա մեջ ձևավորել հավատ այդ արժեքների նկատմամբ:

Հանրակրթության մեջ հավատի առաքինության ձևավորման գործում իր դերն ունի նաև մաթեմատիկայի դասավանդման գործընթացը: Ժամանակակից գիտական հետազոտությունների հավաստիությունը մեծապես պայմանավորված է դրանցում մաթեմատիկայի կիրառության աստիճանից: Կարելի է վստահորեն ասել, որ գիտական հետազոտության հավաստիության նկատմամբ մարդկանց հավատը ուղիղ համեմատական է նրանում մաթեմատիկայի մասնակցության չափին:

Նույնն է պատկերը տեխնիկական նորարարությունների պարագայում. դրանց նկատմամբ հավատը պայմանավորված է դրանց հիմքում ընկած մաթեմատիկական հաշվարկներով: Ընդհանրապես, կարելի է ասել, որ բոլոր ժամանակներում հասարակության կողմից մաթեմատիկան դիտվել է որպես ճշմարիտի նկատմամբ հավատի հիմնական աղբյուրներից մեկը: Այս տեսակետից ինչքան մեծ է սովորողի կրթական գործընթացում մաթեմատիկայի չափաբաժինը, այնքան մեծ կարող է լինել նրա մոտ վերը նշված հավատը:

Չափազանց կարևոր է մարդու հավատը սեփական ունակությունների, ուժերի, մանավանդ՝ ինտելեկտուալ կարողությունների նկատմամբ: Եվ այստեղ մաթեմատիկան այն փորձաքարն է, որին բախվելով՝ ստուգվում, նաև՝ ձևավորվում է բարոյական այդ որակը: Մաթեմատիկայի ուսուցիչը պարտավոր է հաշվի առնել այս հանգամանքը: Նա պետք է աշակերտին մաթեմատիկական առաջադրանքներ տալուց անպայման հաշվի առնի նրա ունակությունները. մաթեմատիկայի ուսուցման մեջ ունեցած անգամ փոքր հաջողությունը կարող է թևավորել սովորողին, նրա մոտ ձևավորել հավատ սեփական ինտելեկտուալ կարողությունների նկատմամբ և, հակառակը, մի քանի ձախողումներից հետո սովորողը կարող է թևաթափ լինել, կորցնել հավատը սեփական ուժերի նկատմամբ:

Մաթեմատիկական դատողությունների հստակությունը, մտահանգումների միջոցով ստացած ճշմարտային կոնկրետ արժեքները, խնդիրների ու վարժությունների հստակ պատասխանները ձևավորում են ոչ միայն ճշմարիտի նկատմամբ վերը նշված ընդհանրական հավատի որակը, այլև տալիս են հավատ գործունեության կոնկրետ տեսակի մեջ ակնկալվող արդյունքին, նախանշված նպատակին հասնելու նկատմամբ: Եվ այստեղ նույնպես ուսուցիչը պարտավոր է գործել՝ հաշվի առնելով սովորողի մաթեմատիկական ունակությունները: Հարկ է նշել, որ թե՛ մաթեմատիկայի առարկայական չափորոշիչը՝ իր երեք մակարդակներով, թե՛ դասագրքերը նման մոտեցում ցուցաբերելու հնարավորություն տալիս են: Այս բոլորը գալիս են հաստատելու մաթեմատիկական կրթության մեծ դերը սովորողների մոտ հավատի առաքինության ձևավորման գործում:

Ըստ [42] -ի, որևէ ցանկալի բանի սպասելը՝ դրա իրականանալու հավատով, կամ որևէ բանի իրականանալու, տեղի ունենալու հավանականությունը հույսն է: Հետևապես, նախորդ պարբերությունից հետևում է, որ մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը նպաստում է նաև հույսի առաքինության ձևավորմանը: Ընդ որում, ուսուցչից է մեծապես կախված նման որակի ձևավորման աստիճանը:

Այստեղ նույնպես, եթե ոչ բարձր ունակություններով աշակերտին հանձնարարվում են իր ուժերից վեր առաջադրանքներ, ապա դրա կատարմանը սպասելը՝ իրականանալու հավատով՝ անհնար է, այսինքն՝ սովորողը կորցնում է հույսը. հուսաթափ է լինում, իսկ նման մի քանի փորձերը կարող են ի չիք դարձնել մաթեմատիկայի ուսուցման միջոցով նրա մոտ հույսի որակի ձևավո-րման հնարավորությունները: Եվ հակառակը, իր ուժերին համապատասխանող մի քանի առաջա-դրանքների կատարումը հնարավորություն կտա մաթեմատիկայի դասավանդումը ներառել այդ որակի ձևավորման գործընթացի մեջ:

Հավելված 5-Դ

Ֆրանկլինյան առաքինությունները և մաթեմատիկական կրթությունը

Բ. Ֆրանկլինը առանձնացնում է հետևյալ առաքինությունները, որոնցից առաջին երեքը համարում է հիմնական.

- աշխատասիրություն,
- դրամական պարտավորությունների ճշգրիտ կատարում,
- խնայողություն,
- ուտելու և խմելու մեջ չափավորություն,
- սակավախոսություն՝ դատարկ խոսակցություններից խուսափելու ունակություն,
- կարգապահություն ամեն ինչում,
- վճռականություն ընդունված պլանների իրագործման մեջ,
- անկեղծություն,
- ազնվություն,
- արդարություն,
- չափավորություն,
- մաքրություն հագուկապի և բնակարանի մեջ,
- հանգստություն՝ դատարկ բաներից, սովորական և անխուսափելի անախորժություններից չհուզվելու ունակություն,
- ողջամտություն,
- համեստություն:

Առանց մաթեմատիկական պատշաճ կրթության՝ դժվար է ակնկալել հաջողություն ժամանակակից աշխարհում, մանավանդ՝ մաթեմատիկական կիրառություններ ունեցող մասնագիտություններ ընտրելիս: Հետևապես՝ մաթեմատիկական կրթությունը նպաստում է առաքինության ֆրանկլինյան ընկալման հիմնական հայտանիշի՝ հաջողության ձևավորմանը և զարգացմանը: Իսկ Բ. Ֆրանկլինի առանձնացրած երեք հիմնական առաքինությունների՝ աշխատասիրության, դրամական պարտավորությունների ճշգրիտ կատարման և խնայողության որակների ձևավորման գործում մաթեմատիկական կրթության ունեցած դերի մասին կարելի է ասել հետևյալը:

Մաթեմատիկական կրթությունը տրվում է միայն համառ ու հետևողական աշխատանքի՝ աշխատասիրության շնորհիվ. առանց աշխատասիրության անհնար է հասնել լուրջ հաջողությունների մաթեմատիկայի ուսուցման բնագավառում: Հետևապես՝ հետևողականորեն իրականացվող մաթեմատիկական կրթությունը նպաստում է ֆրանկլինյան առաջին՝ աշխատասիրության առաքինության ձևավորմանը:

Մաթեմատիկական կրթության բովանդակության մեջ ճշմարիտային արժեքի գերակայությունը կարող է նպաստել նաև դրամական պարտավորությունների ճշգրիտ կատարմանը, իսկ նրանում պլանների հստակությունը, նրա միջոցով հաշվարկներ կատարելու ունակությունների անհրաժեշտությունը հիմք են ստեղծում խնայողության որակի ձևավորման համար:

Բ. Ֆրանկլինի դիտարկած մնացած առաքինությունների ձևավորման մեջ մաթեմատիկական կրթության ունեցած դերը, մեր կարծիքով, կարելի է գնահատել հետևյալ կերպ:

Ուտելու և խմելու մեջ չափավորություն: Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը բերում է ինտելեկտուալ տարրի գերակայության, պահանջում է մտավոր ակտիվ գործունեություն. որակներ, որոնք մղում են կենսական պահանջների բավարարման հարցում, այդ թվում՝ ուտելու և խմելու մեջ չափավորության: (Տես նաև չափավորության դիտարկումը արմատական առաքինությունների բաժնում:)

Սակավախոսություն: Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում մաթեմատիկական և կիրառական երևույթների բացահայտմանն ուղղված գործողությունները պահանջում են երկարատև, հետևողական անհատական մտավոր աշխատանք, ինչը նպաստում է սակավախոսության որակի դրսևորմանը:

Կարգապահություն: Մաթեմատիկական կառույցի հստակությունը, նրանում փաստերի հետևողական փոխկապակցվածությունը կարգապահության անկրկնելի օրինակներ են, որոնց ուսուցումը մեծապես կարող է նպաստել նաև կարգապահության բարոյական որակի ձևավորմանը:

Վճռականություն: Մաթեմատիկական կրթությունը առօրեական խնդիրների լուծման վրա քիչ ազդեցություն ունի: Այն մարդուն ավելի շատ կարող է դարձնել անվճռական, քանի որ չի նպաստում նաև առօրեական շփումների իրականացմանը: Իսկ մասնագիտական և ինտելեկտուալ խնդիրների լուծման մեջ մարդուն դարձնում է վճռական, քանի որ մեծացնում է ինտելեկտուալ կարողությունները և մաթեմատիկայի կիրառությունների իրականացման հնարավորություն է ստեղծում:

Անկեղծություն: Մաթեմատիկական գործունեությունը՝ մաթեմատիկայի ուսուցման համար պահանջվող տևական անհատական աշխատանքը մարդուն կարող է դարձնել ինքնամփոփ, ինչը չի մղում անկեղծության: Միևնույն ժամանակ, մաթեմատիկական գիտելիքի անսպասելիությունը, հետաքրքրաշարժությունը, գեղագիտական, կիրառական արժեքները որոշակի հուզական լիցք են առաջացնում դրա կրողի մոտ, ինչը մղում է այլոց հետ դրանք կիսելու, քննարկելու ցանկության: Հետևապես՝ մաթեմատիկական գիտելիքը մարդուն կարող է մղել անկեղծության:

Ազնվություն: Մաթեմատիկական կրթության մեջ ճշմարտային արժեքի ակտիվ մասնակցությունը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում սովորողին կարող է մղել ազնվության: Իսկ այդ նպատակին հասնելու և կրթական գործընթացի ճիշտ կազմակերպման համար արժե մեկ անգամ ևս հիշել մեծ իմաստասեր Լ. Ն. Տոլստոյի մոտեցումը ազնվության մասին. «Որպեսզի ազնիվ ապրել, պետք է խարխափել, զարնվել, սխալվել, սկսել ու թողնել, և նորից սկսել: Իսկ հանգստությունը հոգևոր ստորություն է» [416]: Եվ մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը, հավանաբար ավելի շատ, քան ուսումնական այլ առարկաներինը, լի է սովորողին անհրաժեշտ հոգևոր «անհանգստություն» պարգևող տարրերով:

Իսկապես, դժվար է միանգամից գտնել մաթեմատիկական շատ թե քիչ լուրջ առաջադրանքի լուծման ճանապարհը: Անգամ մեծ մաթեմատիկոսները թույլ են տվել լուրջ սխալներ շատ դժվար խնդիրների լուծման մեջ: Եվ միայն տարիներ անց այդ սխալները նկատվել են այլ մաթեմատիկոսների կողմից: Սակայն նույն սխալները լուրջ ներդրում են ունեցել նոր և ճշմարիտ լուծումներ գտնելու և, ընդհանրապես, մաթեմատիկայի զարգացման համար: Այս տեսակետից անհասկանալի է մաթեմատիկական թեստերի գնահատման այն մոտեցումը, համաձայն որի՝ սովորողը «պատժվում» է առաջադրանքի լուծման սխալ ընթացք ընտրելու համար [76]:

Արդարություն: Արդարության ձևավորման գործում մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը ունի մեծ ազդեցություն (տես առաքինություններին նվիրված բաժինը):

Չափավորության որակը դիտարկված է արմատական առաքինությունների բաժնում:

Մաքրություն հագուկապի և բնակարանի մեջ: Դժվար է սպասել, որ մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը հագուկապի և բնակարանի մեջ և, ընդհանրապես, կենցաղում կարող է նպաստել մաքրության որակի ձևավորմանը, այն անգամ կարող է նպաստել ավելորդ թափթփվածության դրսևորման: Մենք ավելի կարևոր ենք համարում մտածողության մաքրությունը, հստակությունը, ինչի ձևավորման գործում մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը ունի մեծ նշանակություն (տես [62], [64]):

Հանգստություն՝ դատարկ բաներից, սովորական և անխուսափելի անախորժություններից չհուզվելու ունակություն: Մաթեմատիկայի ուսուցումը, մանավանդ, մաթեմատիկական խնդիրների լուծումը, հնարավորություն է տալիս կտրվել առօրեական միջավայրից, չզգալ նրա բերած անախորժությունները, չհուզվել դրանցով և, ուրեմն, կարող է նպաստել դիտարկվող որակի ձևավորմանը:

Ողջամտություն: Տես իմաստության որակի դիտարկումը «արմատական» առաքինություններին նվիրված բաժնում:

Համեստություն: Եթե մաթեմատիկայի դասավանդման գործընթացը նպատակաուղղվում է մաթեմատիկայի՝ որպես իրական աշխարհի երևույթների հիմքում ընկած անընդգրկելի, խորը և գեղեցիկ օրինաչափությունների բացահայտմանը, ապա այն կարող է միայն համեստություն ձևավորել մարդու մեջ: Իսկ եթե այդ գործընթացը նպատակաուղղվում է սովորողի՝ խնդիրներ լուծելու կարողությունների բացահայտմանը, ապա առաջացած բացասական երևույթների մասին արդեն խոսվել է արժանապատվությանը նվիրված բաժնում:

Հավելված 5-Ե

Սոլովյեվյան առաքինությունները եվ մաթեմատիկական կրթությունը

Անդրադառնանք առաքինության սոլովևյան ըմբռնմանը և դրա ձևավորման մեջ մաթեմատիկական կրթության դերին: Ինչպես նշվեց վերևում, Սոլովևը առաքինությունների հիմքում դնում է երեք որակներ՝ ամոթը, կարեկցանքը, երկյուղածությունը:

Եթե հետևելու լինենք ամոթի սոլովևյան ըմբռնմանը, ապա մաթեմատիկական կրթությունը և, ընդհանրապես, մաթեմատիկայով զբաղվելը՝ որպես հոգևոր գործունեություն, պահանջում է ուժերի մեծ լարում, մարդուն հեռու է պահում իր բնական հակումներից և բնական էությունից և, հետևապես, մարդուն հեռու է պահում նաև ամոթի զգացումից:

Ըստ [5]-ի, ամոթ նշանակում է՝ ա. ոչ բարեբարո արարքից անհարմար զգալու կամ զղջալու ներքին խռովություն՝ հուզում, բ. անպատվության՝ ստորացման զգացում, գ. պատշաճության՝ ողջախոհության ընդունված կանոններին հակասող արարքի կամ վիճակի զգացում:

ա. Մաթեմատիկայով զբաղվելը՝ որպես մտավոր բարձր ունակություններ պահանջող զբաղմունք, արդեն հարգանք է ներշնչում այլոց մեջ և նրանով զբաղվողը կարող է անպատվության զգացում չունենալ: Միևնույն ժամանակ, մաթեմատիկայի դասավանդումը տալիս է, մասնավորապես, սեփական արարքները վերլուծելու կարողություն. արարքներ, որոնք կարող են լինել նաև ոչ բարեբարո: Հարկ է նշել, որ սեփական արարքը ճիշտ գնահատելու կարողությունը, անհրաժեշտության դեպքում դրա համար զղջալու զգացումը միանգամայն դրական որակներ են, որոնք կարող են հետագայում մարդուն հեռու պահել ոչ բարեբարո արարքներից: Այսպիսով, մաթեմատիկայի դասավանդման գործընթացը նպաստում է այս իմաստով ամոթի որակի ձևավորմանը:

բ. Մաթեմատիկայի դասավանդման գործընթացը հղի է սովորողին ստորացման վիճակի հասցնելու և համապատասխան զգացում առաջացնելու վտանգով:

Սովորաբար ստորացման զգացումը առաջանում է համեմատության ընթացքում, և այն կարող է համակել համեմատվող կողմերից մեկին, ով մյուսին զիջում է շատ մեծ տարբերությամբ: Այդպիսի զգացման կարող է հանգեցնել, օրինակ, մարզական մրցման ընթացքում կողմերից մեկին՝ նրա նկատմամբ մյուսի շատ մեծ առավելությամբ տարած հաղթանակը: Հարկ է նկատել, որ դպրոցական հասակի երեխաները ավելի խոցելի են այս տեսակետից: Հետևապես, պետք է զգույշ լինել մաթեմատիկայի ուսուցման ընթացքում մրցումներ կազմակերպելիս կամ խմբային ու համագործակցային մեթոդներով ուսուցումը կազմակերպելիս. արդյո՞ք ուսուցումը չի հանգում ունակություններով իրարից խիստ տարբեր աշակերտների միջև մրցման:

գ. Այնուհետև, ինչպես ցույց է տրվել [82]-ում, մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը նպաստում է կամքի ուժի, զսպվածության, հետևողականության հոգեկան որակների ձևավորմանը, որոնք, իրենց հերթին, թույլ են տալիս չգայթակղվել և չշեղվել ընդունված բարոյական նորմերից, չկատարել պատշաճության՝ ողջախոհության ընդունված կանոններին հակասող արարքներ և, հետևապես, չզգալ ամոթ:

Կարեկցանքը ըստ [5]-ի նշանակում է՝ ա. կայուն վերաբերմունք ուրիշի վշտի՝ հուզմունքների նկատմամբ, բ. կարեկից՝ ցավակից լինելը, ցավակցություն, վշտակցություն, գ. գութ, խղճահարություն, դ. բարյացակամ վերաբերմունք:

ա. Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը զուտ ինտելեկտուալ գործունեություն է: Եթե, օրինակ, գրականության դասաժամին գրական ստեղծագործության վերլուծության ընթացքում սովորողը հնարավորություն ունի իր հուզական վերաբերմունքը դրսևորել և դրսևորում է ստեղծագործության այս կամ այն հերոսի նկատմամբ, որը նաև օրինակ է ծառայում սովորողի համար, նաև՝ բարոյական այս կամ այն որակի ընդօրինակման խնդրում, ապա մաթեմատիկայի դասաժամը զերծ է նման հնարավորություններից: Նրանում զգացմունքային տարրը կարող է դրսևորվել ուրախությամբ, որ ծնվում է ուսուցման ընթացքում ծագած դժվարությունների հաղթահարումից, կամ տխրությամբ, որ հետևանք է չհաղթահարված դժվարությունների: Ուսուցիչը կարող է օգտագործել սա և սովորողների մոտ արթնացնել կարեկցանքի զգացմունքը՝ կազմակերպելով փոխօգնություն ուսուցման համագործակցային, խմբային կամ այլ եղանակներով:

բ. Ցավակից լինելու, ցավակցություն, վշտակցություն արտահայտելու իմաստով կարեկցանքի որակը ձևավորվում է մարդկանց հետ շփվելու, նրանց հոգսերը, դժվարությունները տեսնելու, կիսելու և նման այլ գործողությունների ընթացքում: Իսկ մաթեմատիկական կրթությունը, լինելով մտավոր մեծ լարում և երկարատև անհատական աշխատանք պահանջող գործունեություն, մարդուն կարող է հեռու պահել նման գործողություններից և, հետևապես, չնպաստել կամ խանգարել այստեղ նշված իմաստով կարեկցանքի որակի ձևավորմանը:

գ. Գութ կամ գթասրտություն նշանակում է այլոց նկատմամբ բարյացակամ, հոգատար, սիրալիր վերաբերմունք [5]: Ճիշտ կազմակերպելու դեպքում մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը կարող է նպաստել բարոյական այս որակների ձևավորմանը (տես բարու և սիրո արժեքներին նվիրված բաժինները):

դ. Որպես բարյացակամ վերաբերմունք՝ կարեկցանքի ձևավորման գործում մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը ունի մեծ ազդեցություն (տես բարուն և չարին նվիրված բաժինը):

Երկյուղածության որակի ձևավորման մեջ նույնպես մաթեմատիկական կրթությունը ունի կարևոր դեր: Ի տարբերություն ֆիզիկոսների, որոնք միջնադարում իրենց հայտնագործությունների համար կարող էին ենթարկվել ինկվիզիցիայի, մաթեմատիկոսները ի սկզբանե գտել են, որ Աստված, արարելով աշխարհը, նրա կառույցի հիմքում դրել է մաթեմատիկան և մաթեմատիկոսների խնդիրը եղել է միայն ուսումնասիրել այդ աստվածային կառույցը, հայտնաբերել նրա տեսքը (տես [19]): Այդ պատճառով նրանք զերծ են մնացել ինկվիզիցիայի հետապնդումներից: Իսկ աստվածային այդ կառույցի հետ հաղորդակցությունը, որ կատարվում է մաթեմատիկայի դասավանդման ընթացքում, չի կարող մարդուն չհիացնել իր գեղեցկությամբ և հզորությամբ: Իսկ նման ստեղծագործության հեղինակի՝ Աստծո նկատմամբ, մարդը բնականաբար կարող է միայն խոնարհում, երկյուղածություն ունենալ:

Հետևապես, մաթեմատիկական կրթությունը կարող է նպաստել երկյուղածության որակի ձևավորմանը: Միաժամանակ, նման գիտակցումը պահանջում է վերլուծական կարողություններ, ողջախոհություն և նման այլ որակներ, որոնց ձևավորման մեջ նույնպես մաթեմատիկական կրթությունը ունի կարևոր նշանակություն:

Հավելված 6

Ատենախոսության հետ առնչվող դասագրքեր, մենագրություններ, ձեռնարկներ, ուղեցույցեր, որոնք հեղինակել է ատենախոսը

1. Խմբերի տեսության տարրերը: Խնդիրներ, Համահեղինակ Հ.Հ. Հովհաննիսյան, ՀՊՄՀ, Երևան, 1980, 64 էջ:
2. Հանրահաշիվ 6, Հանրակրթական դպրոցի փորձնական դասագիրք, «Մաշտոց», Երևան, 1998, 280 էջ:
3. Հանրահաշվի ուսուցումը 6-8-րդ դասարաններում, Ուսուցչի ձեռնարկ, Հաստատված է ՀՀ ԿԳ նախարարության կողմից, Երևան, 1999:
4. Հանրահաշիվ 6, Հանրակրթական դպրոցի դասագիրք, Հաստատված է ՀՀ ԿԳ նախարարության կողմից, Երևան, Էդիթ պրինտ, 1999, 288 էջ:
5. Հանրահաշվի ուսուցումը 6-8-րդ դասարաններում, Մեթոդական ձեռնարկ, Հաստատված է ՀՀ ԿԳ նախարարության կողմից, Երևան, 2000, 64 էջ:
6. Հանրահաշիվ 7, Հանրակրթական դպրոցի դասագիրք, Հաստատված է ՀՀ ԿԳ նախարարության կողմից, Երևան, Էդիթ պրինտ, 2000, 288 էջ:
7. Հանրահաշիվ 6, Լրացուցիչ խնդիրներ, Երևան, 2000, 104 էջ:
8. Հանրահաշիվ 8, Հանրակրթական դպրոցի դասագիրք, Հաստատված է ՀՀ ԿԳ նախարարության կողմից, Երևան, Էդիթ պրինտ, 2001, 304 էջ:
9. Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթաց, Հաստատված է ՀՀ ԿԳ նախարարության կողմից, Երևան, 2001, Նաիրի, 464 էջ:
10. Հանրահաշվի ուսուցման հիմնահարցերը, Երևան, Էդիտ պրինտ, 2003, 186էջ:
11. Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթաց, հ. 1, Հաստատված է ՀՀ ԿԳ նախարարության կողմից, Երևան, 2004, 352 էջ:
12. Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթաց, հ. 2, Հաստատված է ՀՀ ԿԳ նախարարության կողմից, Երևան, 2004, 298 էջ:
13. Հանրահաշվի ուսուցումը 6-8-րդ դասարաններում, Ուսուցչի ձեռնարկ, Հաստատված է ՀՀ ԿԳ նախարարության կողմից, Երևան, 2006, 92 էջ:

14. Հանրահաշիվ 7, Հանրակրթական դպրոցի դասագիրք, Հաստատված է ՀՀ ԿԳ նախարարության կողմից, Երևան, Էդիթ պրինտ, 2006, 304 էջ:

15. Հանրահաշիվ 8, Հանրակրթական դպրոցի դասագիրք, Հաստատված է ՀՀ ԿԳ նախարարության կողմից, Երևան, Էդիթ պրինտ, 2007, 304 էջ:

16. Հանրահաշիվ 9, Հանրակրթական դպրոցի դասագիրք, Հաստատված է ՀՀ ԿԳ նախարարության կողմից, Երևան, Էդիթ պրինտ, 2008, 304 էջ:

17. «Հանրահաշիվ 8» դասագրքի խնդիրների լուծումներ, ցուցումներ, մեթոդական խորհուրդներ, Երևան, 2009, 208 էջ:

18. «Հանրահաշիվ 8» դասագրքի խնդիրների լուծումներ, ցուցումներ, մեթոդական խորհուրդներ, Երևան, 2010, 120 էջ:

19. Բարոյական արժեքները և մաթեմատիկայի կրթական ներուժը, Էդիթ պրինտ, 2011, 186 էջ:

20. Հանրահաշիվ 7, Հանրակրթական դպրոցի դասագիրք, Երևան, Էդիթ պրինտ, 2011, 244 էջ:

21. Գեղեցիկը, Մաթեմատիկան և կրթությունը, մաս 1, Գեղեցիկը և մաթեմատիկան, Էդիթ Պրինտ, Երևան, 2014, 348 էջ:

22. Գեղեցիկը, մաթեմատիկան և կրթությունը, հ. 2, Գեղեցիկը և մաթեմատիկայի կրթական ներուժը, Երևան, 2015, 440 էջ:

23. Развивающий потенциал математического образования: школа – ВУЗ, Коллективная монография, Соликамск, СГПИ, 2015, с. 5-29.