

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ  
ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ  
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

**ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ ՀԱՅՎ ՍՏԵՓԱՆԻ**

ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԱՎՏՈՄԱՏԱՑՎԱԾ  
ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԻ ԶԱՐԳԱՑՈՒՄ

Ե.13.02 «Ավտոմատացման համակարգեր»

Մասնագիտությամբ տեխնիկական գիտությունների դոկտորի  
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

**ՄԵՂՍԱԳԻՐ**

Երևան 2015

---

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ АРМЕНИИ

**СУКИАСЯН ГАЙК СТЕПАНОВИЧ**

РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук  
по специальности 05.13.02 “Системы автоматизации”

Ереван 2015

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Հայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարանում

Գիտական խորհրդատու՝	տ.գ.դ. Հ.Ա. Թերզյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	տ.գ.դ. Ս.Հ. Սիմոնյան տ.գ.դ. Ա.Խ. Գրիգորյան ֆ.-մ.գ.դ. Ա.Հ. Բաբայան
Առաջատար կազմակերպություն՝	Էներգետիկայի գիտահետազոտական ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կայանալու է 2015 թ. դեկտեմբերի 28-ին, ժամը 14<sup>00</sup> -ին Հայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարանում գործող “Կառավարման, ավտոմատացման և էլեկտրոնիկայի” 032 մասնագիտական խորհրդի նիստում (հասցեն՝ Երևան, Տերյան 105):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ Հայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարանի գրադարանում:

Մեղմագիրն առաքված է 2015թ.նոյեմբերի 28-ին:

032 Մասնագիտական խորհրդի  
գիտական քարտուղար, տ.գ.դ.

 Ա.Գ.Ավետիսյան

---

Тема диссертации утверждена в Национальном политехническом университете Армении

Научный консультант:	д.т.н. А.А.Терзян
Официальные оппоненты:	д.т.н. С.О.Симонян д.т.н. А.Х.Григорян д.ф.-м.н. А.О.Бабаян

Ведущая организация Научно-исследовательский институт энергетики

Защита состоится 28 декабря 2015г. в 14<sup>00</sup> часов на заседании Специализированного совета 032 “Управления, автоматизации и электроники”, действующего при Национальном политехническом университете Армении (адрес: Ереван, Теряна 105). С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Национального политехнического университета Армении.

Автореферат разослан 28 ноября 2015г.

Ученый секретарь Специализированного совета, д.т.н.

 А.Г.Аветисян

## **ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ**

Методы автоматизированного решения краевых задач электромагнитного поля являются одним из важнейших составляющих моделирования электромагнитных полей, а последнее является одним из наиболее востребованных в электротехнике. Среди численных методов наиболее широкое распространение получил в последнее время метод конечных элементов (МКЭ).

МКЭ – это численный метод решения дифференциальных уравнений с частными производными, возникающих при решении задач прикладной физики. В настоящее время предложено большое количество реализаций метода конечных элементов при моделировании процессов диффузии, теплопроводности, гидродинамики, механики деформируемого твердого тела, электродинамики и др.

Для расчета электромагнитного поля МКЭ впервые был применен в 1970г. П.Сильвестером и М.Чари. Однако они пользовались подходами и терминами, идущими из механики. Для решения полевых задач практически любой геометрической сложности, требовалось развитие метода в сторону большей математизации и обобщений.

Сегодня в связи со значительным развитием многопроцессорных вычислительных систем сеточные алгоритмы, в частности МКЭ, стали главным средством решения задач математического моделирования.

Актуальность работы. Моделирование двумерных и трехмерных электромагнитных полей является одной из важнейших задач электромеханики. Точность моделирования электромагнитного поля по существу определяет точность проектирования электрических машин и аппаратов. Решение задачи нелинейного магнитного поля со сложной геометрией связано с огромным количеством вычислений. В связи с этим становится актуальной разработка автоматизированных методов для получения быстрых и точных решений.

Обеспечение сходимости процесса последовательных приближений к решению краевых задач является одной из сложных проблем современной науки. Поэтому актуальной является изучение факторов, влияющих на сходимость итерационного процесса решения задач трехмерного электромагнитного поля.

Сходимость процесса последовательных приближений к решению нелинейных полевых задач сильно зависит от геометрии сетки. В связи с этим необходима разработка методов оптимальной дискретизации расчетных областей, обеспечивающих возможно быструю скорость сходимости. Задача построения оптимальной сетки становится особенно актуальной при адаптивной сетке, когда осуществляется автоматизированная динамическая композиция элементов дискретизации в процессе решения краевой задачи.

Развитие многопроцессорных вычислительных систем открыло новые возможности повышения эффективности вычислительного процесса. В связи с чем актуальной стала разработка таких методов моделирования электромагнитных полей, которые позволяют распараллелить процесс решения.

Цель работы. Целью диссертационной работы является развитие методов автоматизированного решения нелинейных задач электромагнитных полей. Сюда входят следующие подзадачи:

1. Математически описать метод конечных элементов на основе базисных функций на плоскости и в трехмерном пространстве.

2. Разработать схемы автоматизированного построения переменной сетки дискретизации с последовательной коррекцией сеточных элементов в ходе решения задачи в зависимости от поведения получающихся невязок.
3. Дать определение понятия оптимальной сетки, исследовать ее свойства.
4. Оценить критические значения углов расчетной сетки, при превышении которых итерационный процесс решения задачи электромагнитного поля расходится (на плоскости и в трехмерном пространстве).
5. Изучить геометрические характеристики системы уравнений возникающих при численном решении нелинейных полевых задач методом МКЭ.
6. Исследовать поведение вектора магнитной индукции и его нормальных составляющих на границах конечных элементов.
7. Провести сопоставительный анализ расчетных уравнений для решения нелинейного электромагнитного поля методами конечных элементов и конечных разностей.
8. Изучить целесообразность применения триангуляции Делоне в качестве расчетной сетки при решении задач электромагнитного поля методом конечных элементов.
9. Развить новые алгоритмы оценивания качества тетраэдрической сетки.
10. Разработать методы преодоления осложнений, возникающих при практической реализации алгоритмов автоматического построения сетки, связанных с возможным появлением пересекающихся и вырожденных тетраэдров.
11. Развить параллельные алгоритмы автоматизированного решения нелинейных задач электромагнитного поля методом конечных элементов.
12. Предложить способы нахождения предпочтительного числа процессоров при использовании многопроцессорных вычислительных систем.

**Научная новизна.** В процессе исследований получены следующие новые научные результаты:

1. Показано, что среди расчетных уравнений МКЭ и метода конечных разностей наибольшую точность имеет восьмиточечное разностное уравнение, наименьшую - квадратичная аппроксимация четырехугольных элементов.
2. Показано, что МКЭ имеет наименьшую погрешность при линейной аппроксимации треугольных элементов, которая совпадает с погрешностью четырехточечного разностного уравнения.
3. Введены новые понятия: оптимальная сетка, оптимальный алгоритм композиции сеточных узлов, а также понятие индекса сетки.
4. Для векторного магнитного потенциала получена расчетная система линейных уравнений с коэффициентами, зависящими от конфигурации элементов и выбора базисных функций. Для наиболее часто встречающихся на практике элементов (треугольник, прямоугольник, сектор и криволинейная трапеция) вычислены значения расчетных коэффициентов в декартовых и полярных координатах.
5. Получены критические значения тупых углов, приводящих к расходимости процесса решения.
6. Доказано, что для нерегулярной сетки с симметричными шагами аппроксимация трехмерного оператора Лапласа разностным имеет погрешность порядка  $h^2$ .
7. Выведены расчетные уравнения для численного решения трехмерных нелинейных полевых задач методом конечных элементов.
8. Найдено соотношение между числом тетраэдров, содержащих данный узел, и числом соседних узлов, верное для любой тетраэдрической сетки и любого ее узла.

9. Доказано, что в расчетных сетках у тетраэдров, имеющих общую грань, хотя векторы индукции разные, но нормальные (к общей грани) составляющие совпадают.
10. Показано, что для прямоугольной тетраэдреской сетки расчетные уравнения для решения электромагнитного поля методами МКЭ и МКР совпадают по всем трем составляющим векторного магнитного потенциала.
11. Доказано, что триангуляция Делоне минимизирует сумму котангенсов углов всех своих треугольников.
12. Введены новые понятия удачно и неудачно расположенных множеств узлов на плоскости и в трехмерном пространстве.
13. Введены новые понятия косых и сплюснутых тупоугольных тетраэдров.
14. Даны новые неравенства для сечений треугольных пирамид.

**Практическая ценность работы.** В настоящей работе исследованы вопросы автоматизированного решения задач электромагнитного поля методом конечных элементов, как в двумерной, так и трехмерной постановке. В работе предложены новые алгоритмы дискретизации исследуемой области, как для однопроцессорных, так и для параллельных вычислительных систем. В отличие от существующих алгоритмов дискретизации, предложенные алгоритмы не чувствительны к точности машинных вычислений, не требуют первичной триангуляции границ расчетной области и удобны для динамической композиции расчетной области.

Все теоретические утверждения и выкладки сопровождаются практическими примерами и численными экспериментами, подтверждающими их прикладную состоятельность и практическую ценность.

Разработанные математические модели и алгоритмы доведены до практического применения и могут быть широко использованы в инженерной практике.

#### **Положения выводимые на защиту.**

1. Математическое описание метода конечных элементов на основе базисных функций на плоскости и в трехмерном пространстве.
2. Схема автоматического построения переменной сетки дискретизации для решения краевых задач МКЭ, основанная на последовательной композиции сеточных узлов и элементов в ходе решения краевой задачи в зависимости от поведения получающихся невязок.
3. Математическое определение понятия оптимальной сетки и оптимального алгоритма композиции сеточных узлов при конечно-элементном моделировании магнитного поля.
4. Теорема о существовании оптимальной сетки и оптимального алгоритма.
5. Теорема, что оптимальная сетка (и только она) всегда имеет нулевой индекс.
6. Математическое обоснование явления отрицательного влияния на сходимость процесса решения полевой задачи наличия в расчетной сетке тупоугольных треугольников.
7. Оценки критического значения тупого угла в расчетной сетке, при превышении которого итерационный процесс решения задачи электромагнитного поля расходится (на плоскости и в трехмерном пространстве).
8. Анализ геометрических характеристик системы уравнений возникающей при численном решении трехмерных нелинейных полевых задач методом МКЭ.
9. Теорема о том, что нормальная составляющая вектора индукции к любой грани произвольного тетраэдра зависит только от значений магнитного потенциала в вершинах этой грани и не зависит от значения потенциала в четвертой вершине.

10. Исследование поведения вектора магнитной индукции при численном решении трехмерных полевых задач. Доказательство совпадения нормальных составляющих вектора магнитной индукции на границах элементов в рамках МКЭ.

11. Сопоставительный анализ расчетных уравнений для решения задач электромагнитного поля методами МКЭ и МКР на плоскости и в пространстве.

12. Теорема о том, что для любой конфигурации узлов триангуляция Делоне обладает минимальной суммой котангенсов углов всех своих треугольников среди всех возможных треугольных сеток с данным множеством узлов.

13. Теорема о том, что для любой конфигурации сеточных узлов при решении задачи нахождения электромагнитного поля методом МКЭ триангуляция Делоне является наилучшей (в смысле скорости сходимости процесса последовательных приближений) среди всех возможных треугольных сеток с данным множеством узлов.

14. Утверждение о том, что для удачно расположенных узлов триангуляция Делоне не содержит тупоугольных треугольников и обеспечивает сходимость процесса последовательных приближений к решению нелинейных полевых задач.

15. Алгоритмы дискретизации расчетной области при решении нелинейных задач трехмерного электромагнитного поля с использованием однопроцессорной и многопроцессорной вычислительных сред.

16. Методы преодоления трудностей, возникающих при практической реализации алгоритмов автоматического построения сетки, связанных с возможным появлением пересекающихся тетраэдров и вырожденных тетраэдров нулевого объема.

17. Быстрый, нетрудоёмкий алгоритм оценивания качества тетраэдрической сетки на основании экстремального свойства сечений треугольных пирамид.

18. Параллельные алгоритмы решения нелинейной задачи электромагнитного поля методом конечных элементов с разбиением на подобласти без перекрытия и с теньвыми гранями (перекрытием).

19. Выражение для нахождения предпочтительного числа процессоров в зависимости от конфигурации сетки и параметров многопроцессорной вычислительной системы.

20. Сопоставительный анализ последовательного нахождения трехмерного вектора магнитного потенциала на одном процессоре и параллельного решения той же задачи на трех процессорах с различными способами распараллеливания.

**Апробация результатов исследования.** Основные результаты докладывались на следующих международных конференциях: Проблемы нелинейной электротехники, Киев, 1981; I конгресс общества Бернулли, Ташкент, 1986; IV международная конференция по теории вероятностей, Вильнюс, Литва, 1989; Международная конференция Geobild-90, Георгенталь, Германия, 1990; Симпозиум по стохастической геометрии, Обервольфах, Германия, 1991; IV международная конференция Juzel-97, Врнячка-Баня, Югославия, 1997; Семинар проф. Й.Мекке, Университет им. Ф.Шиллера, Йена, Германия, 2007. III Российско-Армянское Совещание по математической физике, Ереван, 2010; Международная конференция SEMSP8, Рафт, Иран, 2011; III международная конференция по микроэлектронике, Опатия, Хорватия, 2011; IV Российско-Армянское Совещание по мат.физике, Красноярск, Россия, 2012.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 32 научных работах, список которых опубликован в конце автореферата.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка использованной литературы. Общий объем диссертации составляет 208 страниц. Список литературы состоит из 166 наименований.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обоснована актуальность темы, сформулирована цель работы, научная новизна, практическая ценность, основные положения, выносимые на защиту, а также краткое содержание работы.

**В первой главе** проведено исследование тематической литературы. Приводится обзор методов решения задач электромагнитного поля, алгоритмов автоматизированного построения сеток, а также обзор исследований, посвященных триангуляции Делоне и обзор методов распараллеливания полевых задач.

**Во второй главе** “Двумерные полевые задачи” дано математическое описание метода конечных элементов для решения двумерной задачи электромагнитного поля на основе базисных функций на плоскости. Дан сопоставительный анализ расчетных уравнений для решения нелинейного электромагнитного поля методами конечных элементов (МКЭ) и конечных разностей (МКР). Предложен метод численного расчета электро-магнитных полей с использованием алгоритмов принятия решения.

Рассмотрим краевую задачу Дирихле:  $L\Phi=f$  в области  $D$ ;  $\Phi(x,y)=\varphi(x,y)$  на границе области  $D$ , где  $\Phi$  - векторный или скалярный потенциал;  $L$  - дифференциальный оператор (например, оператор Лапласа);  $f$  и  $\varphi$  - заданные функции.

Метод конечных элементов сводится к замене краевой задачи вариационной, разбиении области  $D$  на подобласти (элементы) и решении задачи внутри каждого элемента методом Рунца. При этом искомая функция  $\Phi$  аппроксимируется линейно независимыми функциями  $U_i$ , одна из которых удовлетворяет граничному условию, а остальные - обращаются в ноль на границе области. Функция  $\Phi$  заменяется линейной комбинацией:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n C_i U_i,$$

где  $C_i$  - неизвестные параметры. Приравнивание нулю частных производных по  $C_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$  приводит к минимизация функционала. Из полученной системы уравнений находим  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Тогда граничное условие превращается в дискретную функцию, принимающую в граничных узлах постоянные значения. Так как базисные функции  $U_i$  фигурируют с коэффициентами  $C_i$ , то их следует выбирать с точностью до постоянного множителя. Следовательно, функции  $U_i$  в узлах элементов должны принимать значения 0 или 1. Таким образом, в МКЭ в качестве базисных служат функции интерполяции  $\alpha_i(x, y)$ , принимающие значение, равное 1, в  $i$ -той точке элемента, и 0 — во всех остальных узловых точках. Коэффициенты  $C_i$  получаются равными значению  $\Phi_i$  - величине искомой функции  $\Phi(x,y)$  в точке  $i$ .

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^n \Phi_i \alpha_i(x, y).$$

Если линейная функция в трех точках, не лежащих на одной прямой, равна нулю, то она тождественно равна нулю. Так как функция интерполяции  $\alpha_i(x, y)$  в  $p$ -1 узловых точках обращается в ноль, то чтобы  $\alpha_i(x, y)$  отличалась от нуля, надо взять  $p=3$ . Следовательно, предположение о линейности искомой функции внутри каждого элемента требует взять в качестве элементов только треугольники.

Исследуемую область D можно разбить на элементы так, чтобы граница раздела двух сред проходила бы по границам элементов, что является несомненным преимуществом МКЭ. Из-за произвола в выборе элементов это можно сделать для любой геометрии сред, а не только для прямоугольных, как это имеет место в МКР.

Применим МКЭ для двумерного уравнения векторного магнитного потенциала A, получающегося из классических уравнений Максвелла:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -\delta, \quad (1)$$

где  $\nu=1/\mu$  – величина, обратная магнитной проницаемости.

Соответствующим функционалом для вариационной задачи является энергетический функционал

$$I(A) = \frac{1}{2} \iint \left[ \nu \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 - 2\delta A \right] dx dy. \quad (2)$$

Для треугольника  $i, j, m$  единственной линейной функцией, принимающей нулевое значение в точках  $m$  и  $j$ , а в точке  $i$  – значение 1, является

$$\alpha_i(x,y) = [(x-x_m)(y_j-y_m) - (y-y_m)(x_i-x_m)] / [(x_i-x_m)(y_j-y_m) - (y_j-y_m)(x_i-x_m)].$$

Отметим, что знаменатель равен удвоенной площади треугольника и поэтому отличен от нуля. Внутри треугольника  $i,j,m$  принимаем  $\nu$  постоянной, а потенциал A линейным:

$$A(x,y) = A_i[(x-x_m)(y_j-y_m)] / (2\Delta) + A_j[(x-x_i)(y_m-y_i)] / (2\Delta) + A_m[(x-x_i)(y_i-y_j)] / (2\Delta), \quad (3)$$

где  $\Delta$  – площадь треугольника. Подставляя в (2) и дифференцируя по  $A_i$ , получим

$$\frac{\partial I}{\partial A_i} = \frac{\nu}{4\Delta} \left\{ A_i \left[ (y_j - y_m)^2 + (x_j - x_m)^2 \right] + A_j \left[ (y_i - y_m)(y_m - y_i) + (x_j - x_m)(x_m - x_i) \right] + A_m \left[ (y_j - y_m)(y_i - y_j) - (x_j - x_m)(x_i - x_j) \right] \right\} - \frac{\Delta}{3} \delta. \quad (4)$$

Вычислим по (4) производную  $\partial I / \partial A_i$  для каждого узла  $i$  относительно всех треугольников, примыкающих к этому узлу. Сложив их и сумму приравняв нулю, получим систему уравнений относительно неизвестных  $\{A_i\}$ . Количество уравнений при этом будет равно количеству узлов. Решение системы уравнений и будет приближенным значением потенциала A в узловых точках.

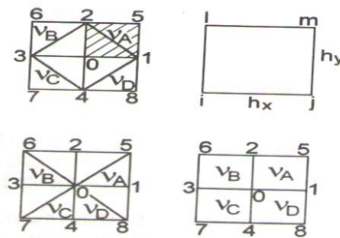


Рис.1.

Для сравнения с МКР применим МКЭ к прямоугольным треугольникам с катетом  $h$  (рис. 1). За точку  $i$  возьмем 0. Примем значение  $\nu$  внутри квадрата 0,1,5,2



равным  $v_A$ , внутри 0,2, 6,3 –  $v_B$  и т. д. В дальнейшем погрешность, вносимая дискретизацией значений магнитной проницаемости, не учитывается. Записав (4) для четырех треугольников, окружающих узел 0, и сложив их, получим

$$2A_0v_S - A_1(v_A + v_D) - A_2(v_A + v_B) - A_1(v_B + v_C) - A_4(v_C + v_D) - (4/3)\delta h^2 = 0, \quad (5)$$

где  $v_S = (v_A + v_B + v_C + v_D)$ . Учитывая, что внутри элементов принимается постоянной, то значение  $v$  на линии раздела двух элементов полагаем равным среднему арифметическому значению  $v$  в этих элементах. Тогда четырехточечная разностная аппроксимация уравнения (1) примет вид (5). Итак, при четырехточечной аппроксимации можно ожидать совпадения погрешностей и скоростей сходимости МКЭ и МКР.

Милном доказано, что погрешность, вызываемая заменой потенциала в точке 0 потенциалами в точках 1,2,3,4 (рис. 1), имеет порядок  $4h^4$ , а в точках 5,6,7,8 - порядок  $(-16h^4)$ . Восьмиточечную разностную аппроксимацию получим, если (5) умножим на 4 и сложим с таким же уравнением (5), записанным относительно точек 5, 6, 7, 8:

$$4[A_0v_S - A_1(v_A + v_D)]/2 - A_2(v_A + v_B)/2 - A_3(v_B + v_C)/2 - A_4(v_C + v_D)/2 - \delta h^2 + \\ + A_0v_S - A_5v_A - A_6v_B - A_7v_C - A_8v_D - 2\delta h^2 = 0, \quad (6)$$

Погрешность полученной разностной аппроксимации будет более высокого порядка, чем  $h^4$ . Оценим погрешность МКЭ для такой же восьмиточечной фигуры. Записав (4) для восьми треугольников, окружающих узел 0, и сложив их, получим в точности выражение (5). Следовательно, МКЭ, примененный для восьми точек, дает четырехточечное разностное уравнение, которое имеет погрешность порядка  $4h^4$ .

Возьмем в качестве элементов прямоугольники со сторонами, параллельными осям координат (рис. 1). Предположим, что нелинейная часть  $A(x,y)$  имеет вид  $sxy$ . Функцией интерполяции будет  $\alpha_i(x,y) = (x-x_i)(y-y_i)/(h_x h_y)$ . Тогда

$$A = [A_i(x-x_j)(y-y_l) - A_j(x-x_i)(y-y_m) + A_m(x-x_i)(y-y_j) - A_l(x-x_m)(y-y_i)] / (h_x h_y). \quad (7)$$

Для прямоугольника  $i, j, m, l$  дифференцируя (2) по  $A_i$ , получим

$$\frac{\partial I}{\partial A_i} = [2h_y^2(A_i - A_j) - h_y^2(A_m - A_l) + 2h_x^2(A_i - A_l) - h_x^2(A_m - A_j)] v / (6h_x h_y) - h_x h_y \delta / 4. \quad (8)$$

Для сравнения с восьмиточечной разностной аппроксимацией примем  $h_x = h_y$ . Запишем равенства (8) для четырех квадратов (рис.1), просуммировав и приравняв их нулю, получим

$$[A_0v_S - A_1(v_A + v_D)]/2 - A_2(v_A + v_B)/2 - A_3(v_B + v_C)/2 - A_4(v_C + v_D)/2 - \delta h^2 + \\ + [A_0v_S - A_5v_A - A_6v_B - A_7v_C - A_8v_D - 2\delta h^2] = 0, \quad (9)$$

Первое слагаемое в (9) представляет собой четырехточечную аппроксимацию относительно точек 1,2,3,4. Второе же слагаемое есть четырехточечная аппроксимация, но уже относительно точек 5,6,7,8 (рис. 1) шагом, равным  $\sqrt{2}h$ . Исходя из результатов Милна, этот метод имеет погрешность  $4h^4 + (-16h^4) = -12h^4$ .

Следовательно, МКЭ, примененный к четырехугольникам, имеет большую погрешность, чем МКР и МКЭ с линейной аппроксимацией треугольников. Можно ожидать, что увеличение числа узлов в элементе повлечет рост погрешности метода. Заметим, что оптимальное восьмиточечное разностное уравнение получится из (9) умножением первого слагаемого на 4.

Пусть  $\Phi_i$  - значение искомой функции  $\Phi(x, y)$  в узле  $i$ . Для каждого элемента  $e$  строятся базисные функции, для узла  $j$ , лежащего на границе элементов  $e_1, e_2, \dots, e_n$  записывается уравнение

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial I \left( \sum \Phi_i \alpha_i^{e_k} \right)}{\partial \Phi_j} = 0, \quad (10)$$

Здесь внутреннее суммирование ведется по всем узлам, принадлежащим элементу  $e_k$ . В результате получается система алгебраических уравнений относительно неизвестных  $\Phi_i$ , причем число уравнений равно числу узлов.

Для произвольного узла  $j$  и связанного с ним элемента  $e$ , принимая  $v$  постоянной внутри  $e$ , будем иметь

$$\frac{\partial I_1 \left( \sum A_i \alpha_i^e \right)}{\partial A_j} = v_e \sum_i A_i \beta_{ij}^e - \delta C_j^e,$$

где

$$\beta_{ij}^e = \beta_{ji}^e = \iint_e \left( \frac{\partial \alpha_i^e}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j^e}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i^e}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j^e}{\partial y} \right) dx dy; \quad C_i^e = \iint_e \alpha_i^e dx dy \quad (11)$$

Итак, получается система уравнений для каждого узла  $j$

$$\sum_e \left( \sum_{i=1}^3 A_i \beta_{ij}^e - \delta C_j^e \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (12)$$

где  $N$  - число узлов сетки. Значения  $\beta_{ij}$  для треугольника  $i, j, m$  имеют вид

$$\beta_{ii} = [(y_j - y_m)^2 + (x_j - x_m)^2] / (4\Delta), \quad \beta_{ij} = [(y_j - y_m)(y_m - y_i) + (x_j - x_m)(x_m - x_i)] / (4\Delta). \quad (13)$$

Рассмотрим в качестве элементов прямоугольники с четырьмя вершинами-узлами (рис. 1). Базисные функции для прямоугольника будут нелинейными, а именно (7). Зная базисные функции, можно вычислить по (11) коэффициенты  $\beta_{ij}$  и  $C_i$ . Например,  $\beta_{11} = (h_x^2 + h_y^2) / (3h_x h_y)$ . Остальные коэффициенты могут быть получены из соображений симметрии:  $\beta_{22} = \beta_{11}$ ,  $\beta_{34} = \beta_{12}$  и т.д. Расчетное уравнение получим подстановкой значений  $\beta_{ij}$  в (12). При помощи полиномов Лагранжа второго порядка получены расчетные уравнения для прямоугольников с шестью узлами и криволинейных фигур - сектора и криволинейной трапеции.

**В третьей главе** «Оптимизация двумерных сеток для метода конечных элементов» описана схема автоматического построения переменной сетки для решения краевых задач МКЭ, основанная на последовательной композиции сеточных узлов и элементов в ходе решения задачи в зависимости от поведения получающихся невязок. Дано строгое математическое определение понятия оптимальной сетки и оптимального алгоритма композиции сеточных узлов. Доказана теорема о существовании оптимальной сетки и оптимального алгоритма. Обосновано явление отрицательного влияния на сходимость процесса решения полевой задачи наличия в расчетной сетке тупоугольных треугольников. Приведена оценка критического значения тупого угла в двумерной сетке, при превышении которого итерационный процесс решения задачи электромагнитного поля расхоится.

При автоматическом построении сетки следует учитывать два условия: а) внутри элемента физическая среда должна быть однородной, т.е. границы раздела сред должны быть границами элементов; б) вершины элементов должны быть как можно ближе друг к другу, чтобы их участие в расчетном уравнении в качестве "соседних узлов" было обоснованным.

Математически условие "б" означает, что минимальный внутренний угол в элементе должен быть как можно больше (но всегда меньше, чем  $\pi/3$ ). Триангуляция проводится в два этапа: вначале строится произвольная треугольная сетка, затем производится коррекция сетки для достижения условий "а" и "б".

Каждое ребро  $d$  сетки является стороной двух треугольников, составляющих вместе четырехугольник  $Q$ . Одна из диагоналей этого четырехугольника и есть  $d$ , обозначим через  $d'$  вторую диагональ. Четырехугольник  $Q$  делится на два треугольника диагональю  $d$  или  $d'$ . Выбор разделяющей диагонали производится с учетом условия "а". Если для обеих диагоналей выполняется условие "а", то проверяется условие "б".

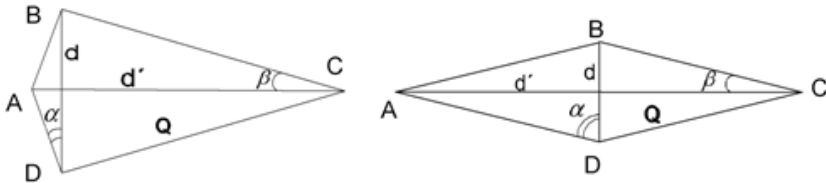


Рис. 2.

Перебирая по всем ребрам, получим оптимальную триангуляцию. Заметим, что длина диагонали имеет второстепенное значение. Например, на рис. 2 угол  $\alpha$  является минимальным для треугольника  $ABD$ , а угол  $\beta$  - минимальным для треугольника  $ABC$ . Слева  $\alpha < \beta$ , а справа  $\alpha > \beta$ , соответственно деление на треугольники производится слева - при помощи диагонали  $d'=AC$ , а справа - при помощи диагонали  $d=BD$ , хотя в обоих случаях имеем  $d < d'$ .

Когда исследуемая область неоднородна и состоит из подобластей с различными физическими и геометрическими свойствами, целесообразно, чтобы совокупность узлов имела различную интенсивность в разных подобластях. Чтобы добиться оптимального распределения густоты узлов, предлагается совокупность узлов не фиксировать, а по ходу решения задачи добавлять узлы (или же исключать).

В МКЭ основным источником погрешности является предположение о постоянстве  $\nu$  внутри элемента. Поэтому имеет смысл добавлять узлы там, где геометрические размеры элемента велики или сильно меняются значения  $\nu$ . Критерием для выбора элемента, где будет добавлен узел, взято произведение  $K = \max(E S)$ , где  $E$  - значение невязки - разницы между значениями искомого потенциала в данной точке до итерации и после;  $S$  - площадь элемента. Первый множитель способствует тому, что узлы добавляются в местах, где велика невязка, а она велика там, где сильно меняются  $\nu$ . Второй множитель обеспечивает уменьшение геометрических размеров элементов.

После того как элемент для композиции выбран, надо выбрать место где будет добавлен узел. Если узел добавить внутри элемента, то неизбежно образуются тупоугольные треугольники, что нежелательно (см. условие "б"). Предлагается узел добавлять в середине наибольшей стороны треугольника.

Если на рис. 2 сторона AC является границей раздела сред, то, согласно условию "а", деление на треугольники обязательно производится при помощи диагонали  $d'=AC$ , каким бы ни был угол  $\beta$ . Чтобы этот угол в процессе композиции не стал бесконечно малым (такое происходит в узких воздушных зазорах), надо препятствовать появлению новых узлов, чересчур близко подходящих к границе раздела сред (на рис.2 это узел В). Это достигается добавлением весового коэффициента при вычислении длин сторон, являющихся границей раздела сред. После каждого изменения множества узлов производится новое автоматическое построение сетки при помощи описанного алгоритма. Таким образом, осуществляется адаптация сетки к особенностям решаемой задачи.

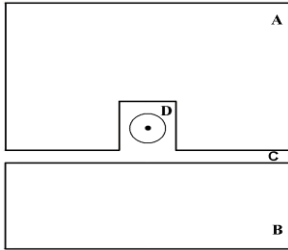


Рис. 3.

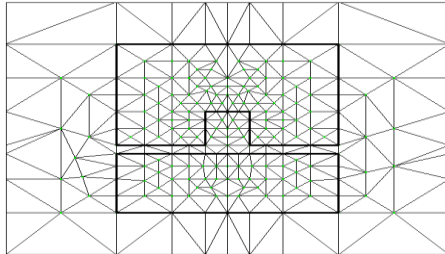


Рис. 4.

Метод апробирован на задаче определения магнитного поля в области, представленной на рис. 3. На этом рисунке показано электромагнитное устройство с ферромагнитными участками А и В, разделенными воздушным зазором С. Устройство содержит обмотку D, обтекаемую током. Для определения поля в устройстве краевую задачу необходимо решить с нулевыми граничными условиями на бесконечности. Учитывая, что поле вне устройства достаточно быстро затухает, можно ограничиться рассмотрением конечной области воздушного пространства, и принять на границе нулевые значения потенциалов.

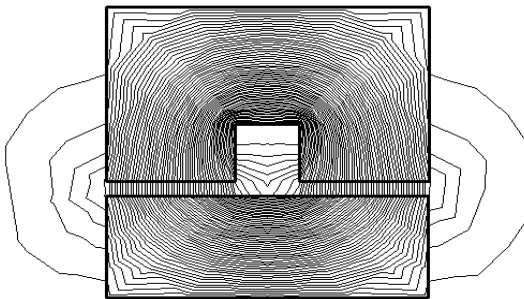


Рис. 5.

Вначале формируется область с начальной, грубой сеткой. С запуском описанной программы осуществляется адаптация сетки по результатам расчета поля с одновременным определением качества элементов. Процесс динамической композиции завершается при достижении условия  $S/l < g$  (где  $S$  – площадь, а  $l$  – периметр конечного элемента;  $g$  - заданный уровень останова), а итерации продолжают до достижения заданной точности расчета.

В качестве критерия сходимости здесь и далее используется поведение невязки. Под невязкой понимается максимальная разность двух последовательных приближений к решению.

На рис. 4 показана конечная сетка, полученная в результате динамической композиции. В итоге осуществленной адаптации сетка из 49 начальных внутренних узлов преобразилась в сетку, состоящую из 204 внутренних узлов. На рис. 5 показано полученное распределение магнитного поля.

Для сопоставительного анализа проведены также расчеты с использованием постоянной сетки (рис. 4). При динамической композиции сетки задача решена за 1377 итераций, без использования адаптационных процедур та же задача решена за 1667 итераций (при той же точности решения  $10^{-4}$ ).

В нелинейных полевых задачах со сложной геометрией найти аналитический вид оптимальной сетки практически невозможно, и приходится приближаться к оптимальной сетке путем последовательной композиции сеточных узлов. Выше был предложен интуитивный алгоритм динамической композиции конечно-элементной сетки, основанный на добавлении узлов в элементах с наибольшей суммарной невязкой в их трех вершинах. Ниже дано строгое математическое определение понятиям “оптимальная сетка” и “оптимальный алгоритм” композиции сеточных узлов на основе непрерывного отображения регулярной треугольной сетки.

Рассмотрим на плоскости  $P$  магнитное поле, созданное электрическим током, причем токонесящую область полагаем одноточечной. Обозначим через  $F$  совокупность факторов, влияющих на магнитное поле (геометрия ферромагнетиков, их кривая намагничивания, значения токов и т.д.). Задачу нахождения поля при наличии факторов  $F$  обозначим через  $Z_F$ , решить задачу  $Z_F$  означает определить распределение векторного магнитного потенциала  $A$  на всей плоскости  $P$ . Соответствующую эквипотенциальную линию уровня  $A_k$  обозначим через  $L(F, A_k)$ .

Векторный магнитный потенциал  $A$  удовлетворяет уравнению Максвелла в среде, поэтому он обязан быть дважды непрерывно дифференцируемым во всех точках плоскости. Следовательно, эквипотенциальные линии  $L(F, A_k)$  суть непрерывные замкнутые гладкие кривые. Гладкость понимается в смысле существования криволинейного интеграла по длине дуги. Пусть  $Z_0$  - задача нахождения магнитного поля на плоскости  $P_0$ , в которой отсутствуют ферромагнетики. Очевидно, для этой задачи эквипотенциальные линии  $L(0, A_k)$  суть концентрические окружности радиуса  $r_k$  с центром в токонесящей области. С точки зрения математической топологии, линии  $L(F, A_k)$  и  $L(0, A_k)$  эквивалентны (с точностью до преобразования деформации). Поэтому имеет место утверждение.

**Теорема 1.** Для каждой задачи  $Z_F$  существует отображение  $f_F: P \rightarrow P_0$ , плоскости  $P$  в плоскость  $P_0$ , такое, что для всех уровней  $A_k$  эквипотенциальные линии  $L(F, A_k)$  переходят в концентрические окружности, т.е.  $f_F(L(F, A_k)) = L(0, A_k)$ . Это отображение является взаимнооднозначным и непрерывным.

Заметим, что зная отображение  $f_F$ , можно найти распределение магнитного потенциала, и наоборот. Решение полевой задачи  $Z_F$  эквивалентно нахождению  $f_F$ .

Так как на плоскости  $P_0$  задача  $Z_0$  является тривиальной, то многие понятия легко определяются для задачи  $Z_0$ . Затем эти понятия с помощью отображения  $f_F$  переносятся на задачу  $Z_F$ . Так, из соображений симметрии следует, что для задачи  $Z_0$  оптимальной является регулярная сетка  $S_0$  из равносторонних треугольников (пчелиные соты). Заметим, что при отображении  $f_F$  тройка точек на плоскости  $P$  переходит в

три точки на плоскости  $P_0$ . Следовательно, треугольник переходит в треугольник, а сетка из треугольных элементов переходит опять же в сетку из треугольников.

**Определение 1.** Сетка из треугольных элементов  $S$  называется оптимальной для данной полевой задачи  $Z_F$ , если при отображении  $f_F$  она переходит в регулярную сетку  $S_0$  из равносторонних треугольников:  $f_F(S)=S_0$ . Для введения в множество возможных сеток понятия “лучше” (хуже) нам нужно ввести в плоскости  $P$  метрику (неевклидово расстояние), зависящую от ферромагнетиков  $F$ . Обычное евклидово расстояние между точками  $x, y$  плоскости  $P_0$  обозначим через  $e(x,y)$ .

**Определение 2.** Расстоянием, индуцированным полевой задачей  $Z_F$ , называется функция двух точек  $R_F(x,y)$ , равная евклидову расстоянию их образов при отображении  $f_F$ :  $R_F(x,y)=e(f_F(x), f_F(y))$ ,  $x, y \in P$ .

**Теорема 2.** Для каждой задачи  $Z_F$  функция  $R_F$  определяет расстояние на деформированной плоскости.

Заметим, что в метрике  $R_F$  эквипотенциальные линии  $L(F, A_k)$  суть concentрические окружности, и решение задачи  $Z_F$  эквивалентно нахождению расстояния  $R_F$ .

Для данной сетки  $S$  и задачи  $Z_F$  обозначим  $M=\max R_F(x,y)$ ,  $m=\min R_F(x,y)$ , где максимум и минимум берутся по всем парам соседних узлов сетки  $S$ .

**Определение 3.** Индексом сетки  $S$  из треугольных элементов для данной полевой задачи  $Z_F$  называется число  $(M - m)/M$ .

Отметим, что расстояние  $R_F$  и индекс сетки зависят от ферромагнитных факторов  $F$ , одна и та же сетка может иметь разный индекс для разных задач. Индекс показывает удаленность сетки от оптимальной, чем меньше индекс, тем “лучше”. Оптимальная сетка (и только она) всегда имеет нулевой индекс.

С целью уменьшения индекса сетки предлагается менять количество узлов по ходу решения задачи. При этом желательно добавлять узлы так, чтобы два наиболее удаленных друг от друга соседних узла перестали бы быть соседними.

**Определение 4.** Алгоритм композиции сеточных узлов назовем оптимальным, если новый узел добавляется между двумя наиболее удаленными друг от друга (в метрике расстояния  $R_F$ ) соседними узлами. Оптимальный алгоритм композиции сеточных узлов обязательно приводит к уменьшению индекса сетки.

Заметим, что для построения оптимального алгоритма композиции сеточных узлов не нужно знать все значения функции  $R_F$  (что эквивалентно решению всей полевой задачи), достаточно знать поведение функции лишь для пар близких точек. А для последних можно сложную функцию  $R_F$  аппроксимировать более простыми функциями, пренебрегая влиянием далеких факторов.

Неудачные алгоритмы автоматической композиции сеточных узлов приводят к деформации сетки и расходимости соответствующего процесса итераций численного решения полевой задачи. Следовательно, с помощью численных экспериментов можно судить, насколько удачна аппроксимация функции расстояния. Мы предполагали в нижеописанных экспериментах, что функция расстояния для пар  $x, y$  близких точек зависит лишь от трех переменных: евклидова расстояния между ними  $e(x,y)$ , суммарной невязки  $w$  в точках  $x$  и  $y$ , а также коэффициента  $k$ , зависящего от признака среды, оцениваемого эмпирическим путем  $R(x,y)=R(e,w,k)$ .

Алгоритм динамического улучшения сетки апробирован на задаче определения магнитного поля в области, представленной на рис. 3. В ходе решения задачи начальная грубая сетка подвергается динамической композиции по предложенному алгоритму. Эффективность работы алгоритма зависит от выбора функции  $R(x,y)$ . В проведенном эксперименте в качестве функции  $R(x,y)$  принято

выражение  $R(x,y)=kwe^2$ . Большое влияние на формирование сетки оказывает выбор значения  $k$ . Так, в случае  $k=1$  в воздухе,  $k=2$  в ферромагнетике,  $k=1.5$  на границе раздела сред образуются тупоугольные треугольники, что приводит к расходимости процесса решения задачи. Наилучшая сетка (рис. 6) получена в случае  $k=1$  в воздухе,  $k=2$  в ферромагнетике,  $k=4$  на границе раздела сред. На рис. 7 показан процесс сходимости решения задачи с динамической декомпозицией сетки (кривая 1). На том же рисунке (7) показан процесс сходимости (кривая 2) решения той же задачи с конечной (рис. 6) фиксированной сеткой. Как видно из рис. 7, динамическая декомпозиция по предложенному алгоритму приводит к решению задачи за 627

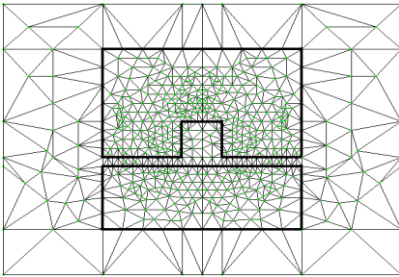


Рис.6.

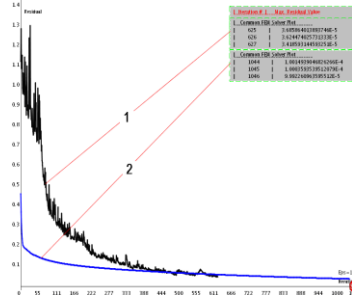


Рис. 7.

итераций, а при фиксированной сетке - за 1046 итераций.

Рассмотрим систему линейных уравнений относительно неизвестных  $A_1, \dots, A_N$  с матрицей коэффициентов  $(c_{ij})$ :

$$\sum_{i=1}^N c_{ij} A_i = d_j, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (14)$$

Хорошо известен принцип доминирования диагонали: если диагональные элементы  $c_{jj}$  существенно превосходят недиагональные, то итерационный процесс решения системы (14) сходится. Рассмотрим разности

$$g_j = |c_{jj}| - \sum_{i \neq j} |c_{ij}|, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

В соответствии с вышеизложенным принципом, если для всех  $j$  величины  $g_j$  положительны, то итерационный процесс решения системы (14) обязательно сходится при любом начальном приближении.

Если невязка стремится к нулю, то процесс решения системы уравнений (14) сходится; если невязка стремится к бесконечности, то процесс решения расходится, если же невязка не имеет предела, то процесс колеблется. Если все величины  $g_i$  равны нулю или отрицательны, то могут иметь место все три случая (сходимость, расходимость, колебательный процесс). При этом чем меньше величины  $g_j$ , тем сходимость менее вероятна. И, наконец, при очень малых диагональных элементах процесс расходится.

Если для всех  $j$  существует номер  $i$  такой, что  $|c_{ij}| < |c_{ii}|$ ,  $j=1, 2, \dots, N$ , то итерационный процесс решения системы (14) расходится. Из (13) получаем

$$\beta_{ij} = -0,5 \operatorname{ctg} \beta_m, \quad \beta_{ij} = b^2 / (4\Delta), \quad (15)$$

где  $b$  - длина стороны с вершинами  $i, m$ ;  $\beta_m$  - угол при вершине  $m$ . Но длина отрезка,

величина угла и площадь треугольника не зависят от выбора системы координат. Отсюда следует, что система (13), получающаяся при численном расчете двумерного магнитного поля методом МКЭ, не зависит от выбора системы координат. Заметим, что данное утверждение неочевидно, так как коэффициенты (13) зависят от координат (x,y) вершин треугольника, а те, в свою очередь, - от положения начала координат и направления осей.

Рассмотрим два соседних сеточных узла  $j$  и  $i$ . Ниже мы пренебрегая влиянием магнитной проницаемости, т.е. считаем значение  $\nu$  вокруг узла  $j$  приблизительно одинаковым. Пусть отрезок, соединяющий узлы  $j$  и  $i$  лежит на границе элементов  $e1=(j,i,m)$  и  $e2=(j,i,k)$ . Из (15) следует

$$c_{ij} = \nu_{e1} \beta_{ij}^{e1} + \nu_{e2} \beta_{ij}^{e2} = -0,5(\nu_{e1} \text{ctg} \beta_m + \nu_{e2} \text{ctg} \beta_k). \quad (16)$$

Произведя элементарные тригонометрические преобразования можно видеть, что в каждой строке матрицы диагональный элемент равен сумме недиагональных элементов данной строки, взятых с противоположным знаком. Если в сетке нет ни одного тупоугольного треугольника, то в (16) все котангенсы будут положительными, а все недиагональные элементы отрицательными. Для слагаемых, имеющих одинаковый знак, имеет место  $|\sum c_{ij}| = \sum |c_{ij}|$ . Отсюда следует, что все  $g_j$  равны нулю. Таким образом, если в треугольной сетке, нет ни одного тупоугольного треугольника, то все величины  $g_j$  равны нулю, то есть при подходящем выборе начального приближения итерационный процесс сходится.

Однако иная картина в случае наличия тупоугольных треугольников. Если узел  $j$  является вершиной острого угла тупоугольного треугольника, т.е. в (16) угол  $\beta_m$  тупой, то  $\text{ctg} \beta_m < 0$ , и соответствующий недиагональный элемент может стать положительным, тогда как основная масса недиагональных элементов не являются положительными, и доминирования диагонали не происходит. Оценим, при каких углах происходит доминирование недиагональных элементов, т.е. когда имеет место  $|c_{ij}| < |c_{ij}|$ . Имеем условие  $c_{ij} = \sum b^2 / (4\Delta) < 0,5 \text{ctg} \beta$ . Обозначим через  $h_e$  высоту, проведенную к стороне  $b_e$  треугольника  $e$ . Тогда  $2\Delta_e = h_e b_e$ , и условие доминирования недиагональных элементов примет вид  $\text{ctg} \beta > \sum b_e / (2h_e)$ . Последнюю сумму можно оценить как периметр окружности, описанной вокруг узла, разделенный на ее диаметр, т.е. числом  $\pi$ . Итак, задача расходится, когда  $\text{ctg} \beta > \pi$  или  $\beta < 12^\circ$ . Такие углы появляются, когда в сетке есть треугольник с тупым углом большим, чем  $180^\circ - (12^\circ + 12^\circ) = 156^\circ$ . Следовательно, если в треугольной сетке, используемой при численном расчете двумерного магнитного поля МКЭ, есть треугольники с тупым углом большим, чем  $156^\circ$ , то независимо от начального приближения, итерационный процесс расходится.

Полученные результаты апробированы на задаче численного определения магнитного поля в области, представленной на рис. 3. На рис.8а представлена расчетная сетка, где отсутствуют тупоугольные треугольники, и как видно из рис 8б, процесс решения задачи сходится достаточно успешно. С изменением положения линии  $ab$  (рис. 9а) в сетке образуются два тупоугольных треугольника  $d$  с критическим углом  $156^\circ$  процесс решения расходится (рис. 9б). На рисунках 8б и 9б видны затемненные участки изменения невязки, которые соответствуют зонам



чувствительных изменений  $v$  и отражают колебательный процесс, связанный с пересчетом после каждой итерации магнитной проницаемости.

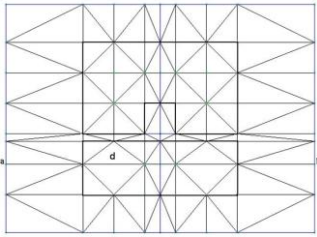


Рис. 8а.

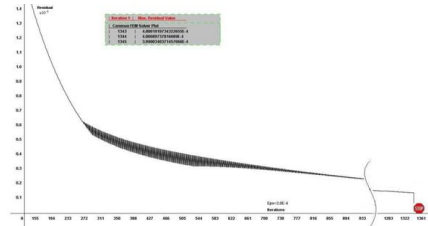


Рис. 8б.

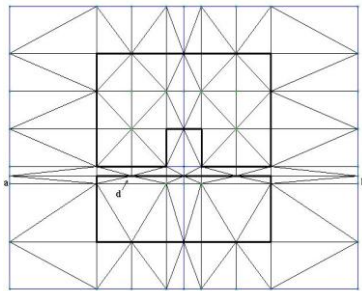


Рис.9а.

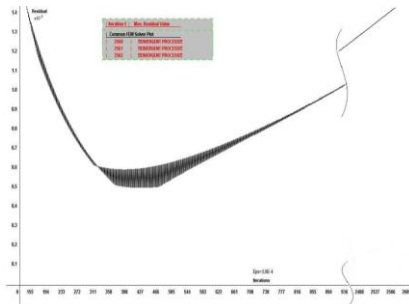


Рис. 9б.

**В четвертой главе** «Трехмерные полевые задачи» исследована погрешность аппроксимации трехмерного оператора Лапласа разностным оператором для нерегулярной сетки. Проведен анализ геометрических характеристик системы уравнений, возникающей при численном решении трехмерных нелинейных полевых задач методом конечных элементов. Исследовано поведение вектора магнитной индукции, полученного при численном решении трехмерных полевых задач методом конечных элементов. Доказано, что совпадение нормальных составляющих вектора магнитной индукции на границах элементов имеет место в рамках МКЭ. Приведена оценка критического значения тупого угла в трехмерной сетке. Дан сопоставительный анализ расчетных уравнений для решения нелинейного электромагнитного поля методами конечных элементов и конечных разностей в трехмерной постановке. Показано, что для прямоугольной тетраэдрической сетки расчетное уравнение для метода конечных элементов совпадает с уравнением для метода конечных разностей.

Из практического опыта численного решения двумерных краевых задач замечено, что наличие в сетке тупоугольных треугольников отрицательно сказывается на сходимости процесса решения. В главе 3 дано строгое математическое обоснование этого явления и оценено критическое значение угла, при превышении которого итерационный процесс расходится. Ниже результаты, полученные в предыдущей главе для двумерных полевых задач, обобщены на трехмерный случай. Доказано отрицательное влияние на сходимость итерационного процесса наличия в тетраэдрической сетке тупых углов. Здесь и далее под тетраэдром будем понимать произвольный четырехгранник (необязательно правильный).

В трехмерных полевых задачах составляющие векторного магнитного потенциала зависят от выбора направления координатных осей. Следовательно, и расчетные уравнения для нахождения этих составляющих неявно зависят от направления координатных осей. В работе коэффициенты расчетной системы линейных уравнений разложены на сомножители явно зависящие от направления координатных осей и на сомножители инвариантные относительно вращений. Показано, что сходимость итерационного процесса решения полевых задач зависит только от сомножителей второго типа, следовательно не зависит от выбора направления координатных осей (хотя само решение и зависит).

Постоянное магнитное поле, созданное электрическим током, подчиняется уравнению Максвелла  $\text{rot } v(\text{rot } A) = \delta$ . Пусть  $A = (A^x, A^y, A^z)$  - векторный магнитный потенциал,  $\delta = (\delta^x, \delta^y, \delta^z)$  - вектор плотности тока,  $\mu$  - величина магнитной проницаемости. В декартовой системе координат уравнение Максвелла имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial x} A^y - \frac{\partial}{\partial y} A^x \right) + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial x} A^z - \frac{\partial}{\partial z} A^x \right) = \delta^x. \quad (17)$$

Две другие составляющие получаются аналогично перестановкой индексов  $x, y, z$ .

Прямое решение (17) затруднительно из-за нелинейности задачи: величина  $\mu$  зависит от потенциала и тоже является неизвестной. В МКЭ задача решения (17) заменяется вариационной, т.е. рассматривается некий функционал, минимум которого достигается на точном решении уравнений (17). С помощью уравнения Эйлера-Лагранжа доказывается, что минимум следующего функционала достигается на решении уравнения Максвелла:

$$F = \iiint_{\Omega} (f_x + f_y + f_z) dx dy dz, \quad ,$$

где  $\Omega$  - рассматриваемая область и

$$f_x = \frac{1}{2\mu} \left[ \left( \frac{\partial A^x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial A^x}{\partial z} \right)^2 - \frac{\partial A^y}{\partial x} \frac{\partial A^x}{\partial y} - \frac{\partial A^z}{\partial x} \frac{\partial A^x}{\partial z} \right] - \delta^x A^x, \quad (18)$$

Выражения для  $f_y$  и  $f_z$  получаются аналогично перестановкой индексов  $x, y, z$ .

Дискретизируем задачу, разбив рассматриваемую область  $\Omega$  на тетраэдры (элементы) и приняв, что внутри элемента  $e$  магнитная проницаемость  $\mu$  постоянна, а потенциалы являются линейными функциями вида

$$A^x = \sum_{t \in W_e} A_t^x b_t^e(x, y, z), \quad A^y = \sum_{t \in W_e} A_t^y b_t^e(x, y, z), \quad A^z = \sum_{t \in W_e} A_t^z b_t^e(x, y, z), \quad (19)$$

где  $W_e = (i, j, k, m)$  - множество вершин элемента  $e$ ,  $A_t$  - значение потенциала  $A$  в узле  $t$ ,  $b_t(x, y, z)$  - базисная функция, равная единице в узле  $t$  и нулю в остальных трех вершинах тетраэдра  $e$ . Подставляя (19) в (18), получим дискретный аналог системы (17). Функционалы (17) зависят от неизвестных функций  $A^x, A^y, A^z$ , тогда как сейчас неизвестными являются числа  $A_t$  - значения потенциала  $A$  в узле  $t$ . Искомую систему уравнений получим, приравняв нулю соответствующие производные

$$\frac{\partial F}{\partial A_k^x} = \sum_{e \in E_k} \left[ v_e \sum_{t \in W_e} (a_{kt}^{xx} A_t^x - a_{kt}^{xy} A_t^y - a_{kt}^{xz} A_t^z) - \delta^x a_k^e \right] = 0. \quad (20)$$

Аналогично,  $\partial F / \partial A_k^y = 0$  и  $\partial F / \partial A_k^z = 0$ , где  $v_e$  - значение  $v=1/\mu$  внутри  $e$ ,  $a_{kt}$  - коэффициент взаимодействия вершины  $k$  с вершинами  $t$  в элементе  $e$ , причем

$$a_{kt}^{xx} = \iiint_e \left( \frac{\partial b_k^e}{\partial y} \frac{\partial b_t^e}{\partial y} + \frac{\partial b_k^e}{\partial z} \frac{\partial b_t^e}{\partial z} \right) dx dy dz, a_k^e = \iiint_e b_k^e dx dy dz, \\ a_{kt}^{xy} = \frac{1}{2} \iiint_e \frac{\partial b_k^e}{\partial y} \frac{\partial b_t^e}{\partial x} dx dy dz, a_{kt}^{xz} = \frac{1}{2} \iiint_e \frac{\partial b_k^e}{\partial z} \frac{\partial b_t^e}{\partial x} dx dy dz. \quad (21)$$

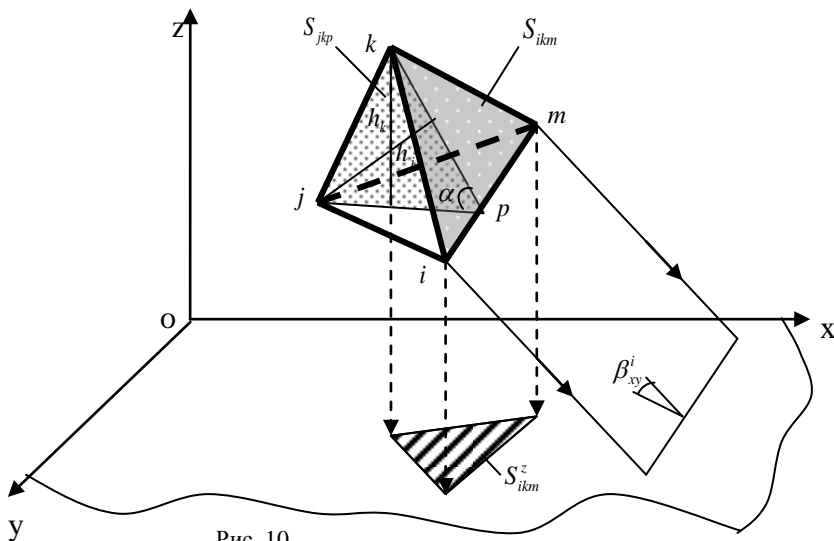


Рис. 10.

В (20) внешнее суммирование ведется по множеству  $E_k$  элементов, содержащих узел  $k$ , а внутреннее суммирование - по всем узлам  $i, j, k, m$ , содержащимся в элементе  $e$ . Таким образом, численный расчет трехмерного магнитного поля методом МКЭ сводится к решению системы уравнений (20). Заметим, что для узла  $k$  в (20) принимают участие только непосредственные соседи узла  $k$ . Получается система уравнений с неизвестными  $A_k$ , причем количество уравнений равно количеству неизвестных и равно утроенному количеству некраевых узлов.

Преобразуя коэффициенты (21), чтобы выделить их геометрические характеристики, получаем

$$\frac{\partial}{\partial z} b_j^e(x, y, z) = \frac{2S_{ikm}^z}{3V_e},$$

где площадь проекции треугольника с вершинами  $i, k, m$  на плоскость перпендикуляр-

ную координатной оси  $z$  обозначена через  $S_{ikm}^z$ . Обозначим через  $\beta_{xy}^i$  угол между плоскостью треугольника  $i,k,m$  и плоскостью  $xoy$  (рис 10). Согласно свойству проекции имеем  $S_{ikm}^z = S_{ikm} \cos \beta_{xy}^i$ . Объем и площадь связаны соотношением  $3V = S_{ikm} h_k$ , где  $h_k$  - высота опущенная из вершины  $k$  на противоположную грань тетраэдра  $e$ . Следовательно

$$\iiint_e \frac{\partial b_k^e}{\partial z} \frac{\partial b_j^e}{\partial z} dx dy dz = \frac{4V_e}{h_k h_j} \cos \beta_{xy}^k \cos \beta_{xy}^j. \quad (22)$$

Из (4.5) и (4.6) получаем уравнение для расчета потенциала  $A^x$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E_k} V_e \frac{4V_e}{(h_k^e)^2} (\cos^2 \beta_{xy}^k + \cos^2 \beta_{xz}^k) A_k^x = \\ = \sum_{e \in E_k} V_e \sum_{t=i,j,m} \frac{V_e}{h_t^e h_k^e} \left[ \begin{aligned} & (\cos \beta_{xy}^k \cos \beta_{xy}^t + \cos \beta_{xz}^k \cos \beta_{xz}^t) A_t^x \\ & - \cos \beta_{xz}^k \cos \beta_{yz}^j A_t^y - \cos \beta_{xy}^k \cos \beta_{yz}^j A_t^z \end{aligned} \right] - \delta^x a_k^e \end{aligned} \quad (23)$$

Согласно (23), недиагональные элементы  $k$ -той строки матрицы системы линейных уравнений будут больше, чем диагональный элемент данной строки, если

$$V_e (h_t^e h_k^e)^{-1} \gg V_e (h_k^e)^{-2} \quad (24)$$

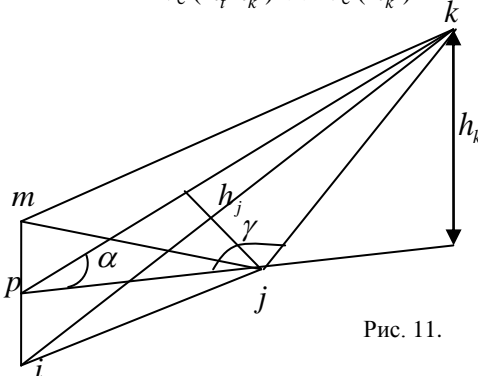


Рис. 11.

т.е. если в сетке существует тетраэдр  $e$  с существенно разными длинами высот  $h_t \ll h_k$ . В силу принципа доминирования диагонали в таком случае итерационный процесс расходится. Следовательно, при  $h_t \ll h_k$  хотя бы один недиагональный элемент  $k$ -той строки будет больше, чем диагональный. Условие (24) накладывает ограничение и на углы тетраэдра. Рассмотрим плоскость, перпендикулярную ребру  $im$  (рис. 11). Имеем  $3V_e = S_{jkr} l_{im}$ , где  $S_{jkr}$  - площадь образуемого треугольника с вершинами  $jkr$ ,  $l_{im}$  - длина ребра с вершинами  $i$  и  $m$ . Каким должен быть угол  $\alpha$  между плоскостями треугольников с вершинами  $ijm$  и  $ikm$ , чтобы выполнялось условие (24)?

Известна классическая формула Эйлера, которая связывает количество  $G$  граней,  $R$  ребер и  $W$  вершин любого выпуклого многогранника:  $G-R+W=2$ . Предположим, что все грани многогранника являются треугольниками. Тогда

каждая грань содержит три ребра и каждое ребро лежит на границе двух граней. Следовательно,  $3G=2R$ . Подставляя это равенство в формулу Эйлера, получим

$$2W=4-2G+2R=4+G \quad (25)$$

Таким образом, для любой тетраэдрической сетки и любого ее внутреннего узла  $O$  число  $G$  тетраэдров, содержащих узел  $O$ , обязательно четное и связано с числом  $W$  соседних узлов соотношением (25)

Для правильного тетраэдра телесный угол при каждой вершине равен  $\pi/6$ , а полный телесный угол равен площади единичной сферы  $4\pi$ . Следовательно, узел можно окружить 24 правильными тетраэдрами. Согласно (25) такой узел будет иметь 14 соседних узлов.

Следовательно, для любой тетраэдрической сетки число тетраэдров, содержащих данный узел, в среднем равно 24, а число узлов соседствующих с данным узлом в среднем равно 14. Учитывая полученную среднюю оценку, предположим, что вершина тупого угла соседствует с 14 узлами. Если  $V_e$

$$V_e (h_i^e h_k^e)^{-1} > 14 V_e (h_k^e)^{-2},$$

то в матрице расчетной системы уравнений элемент  $k$ -той строки и  $j$ -того столбца будет больше диагонального элемента этой строки. Из рисунка 11 видно, что  $S_{jkr} = h_j h_k / (2 \sin \alpha)$ . Следовательно, (24) будет выполнено, если  $\sin \alpha < 1/7$ , т.е.  $\alpha < 8,2^\circ$ . Последнее неравенство выполняется, если  $\gamma > 180^\circ - 8,2^\circ - 8,2^\circ = 163,6^\circ$ .

Дадим математическое обоснование того, что в рамках МКЭ хотя векторы индукции в разных элементах и разные, но нормальные составляющие совпадают.

Предположим, что в треугольнике 1,2,3 векторный магнитный потенциал  $A$  меняется линейно. Тогда индукция  $B$  будет постоянной и полностью определяется значениями потенциала  $A$  в вершинах 1, 2 и 3. Обозначим через  $N$  ось, направленную перпендикулярно стороне 1,2 в правую сторону.

**Теорема 3.** Проекция  $B_N$  вектора индукции на ось  $N$  зависит только от значений  $A_1, A_2$  потенциала  $A$  в вершинах 1,2 и не зависит от значения  $A_3$ , а именно  $B_N = (A_1 - A_2) / \rho_{12}$ , где  $\rho_{12}$  - длина стороны 1,2.

**Следствие.** В треугольниках, имеющих общую сторону, хотя векторы индукции разные, но всегда нормальные (к общей стороне) составляющие совпадают.

Аналог теоремы 3 справедлив и для трехмерного случая. Предположим, что в тетраэдре 1,2,3,4 векторный магнитный потенциал  $A$  меняется линейно. Тогда индукция  $B$  будет постоянной и полностью определяется значениями потенциала  $A$  в вершинах 1,2,3 и 4. Пусть перпендикуляр к грани 1,2,3 имеет направление  $N$ . Рассчитаем нормальную составляющую  $B_N$  к грани 1,2,3.

**Теорема 4.** Для произвольного тетраэдра 1,2,3,4 нормальная составляющая  $B_N$  вектора индукции к грани 1,2,3 зависит только от значений  $A_1, A_2, A_3$  потенциала  $A$  в вершинах 1,2,3 и не зависит от значения  $A_4$ , а именно:

$$B_N = [A_1^x (x_2 - x_3) + A_2^x (x_3 - x_1) + A_3^x (x_1 - x_2)] / (2\Delta) + [A_1^y (y_2 - y_3) + A_2^y (y_3 - y_1) + A_3^y (y_1 - y_2)] / (2\Delta) + [A_1^z (z_2 - z_3) + A_2^z (z_3 - z_1) + A_3^z (z_1 - z_2)] / (2\Delta),$$

где  $\Delta$  - площадь треугольника 123.

**Следствие.** В тетраэдрах, имеющих общую грань, хотя векторы индукции разные, но всегда нормальные (к общей грани) составляющие совпадают.

**Пятая глава** «Оптимизация трехмерных сеток для метода конечных элементов» посвящена основной Теореме: для любой конфигурации сеточных узлов

при решении задачи нахождения электромагнитного поля методом конечных элементов триангуляция Делоне является наилучшей (в смысле скорости сходимости процесса последовательных приближений) среди всех возможных треугольных сеток с данным множеством узлов.

Введены понятия удачно и неудачно расположенных множеств узлов на плоскости и в трехмерном пространстве. Показано, что для удачно расположенного множества узлов триангуляция Делоне не содержит тупоугольных треугольников и обеспечивает сходимость процесса последовательных приближений к решению нелинейных полевых задач.

Изучены методы преодоления трудностей, возникающих при практической реализации алгоритмов автоматического построения сетки, связанных с возможным появлением пересекающихся тетраэдров и вырожденных тетраэдров нулевого объема.

Пусть  $M_2 = \{P_i\}_{i=1}^n$  - заданное множество точек (узлов) на плоскости.

Множество  $\{D_j\}$  выпуклых многоугольников на плоскости называется сеткой с системой узлов  $M_2$ , если 1) внутренности многоугольников попарно не пересекаются; 2) вершины всех многоугольников принадлежат  $M_2$ ; 3) объединение многоугольников заполняет всю выпуклую оболочку точек  $M_2$ .

При решении задачи нахождения электромагнитного поля методом конечных элементов внутри каждого элемента индукция предполагается постоянной, а следовательно, величина векторного магнитного потенциала предполагается линейной. Так как количество неизвестных параметров у линейной функции двух переменных равно трем, то количество узлов в каждом элементе также должно быть равно трем. Следовательно, при решении полевых задач методом конечных элементов сетка  $\{D_j\}$  должна состоять исключительно из треугольников.

Треугольная сетка  $\{D_j\}$  называется триангуляцией Делоне на базе системы узлов  $M_2$ , если выполнено условие: для каждого треугольника  $D_j$  внутри описанного вокруг него круга нет точек из  $M_2$ .

**Утверждение 1.** Для любой конфигурации узлов  $M_2$  триангуляция Делоне обладает минимальной суммой котангенсов углов всех своих треугольников среди всех возможных треугольных сеток с данным множеством узлов.

Вышеприведенное утверждение можно применить при анализе процесса решения одного класса систем линейных уравнений, зависящих от сетки. Пусть на плоскости задана треугольная сетка  $T = \{D_j\}$  с системой узлов  $M_2$ . Если узел принадлежит выпуклой оболочке сетки, то он называется граничным, в противном случае - внутренним. Обозначим через  $I(T)$  множество внутренних узлов сетки  $T$ , а их количество - через  $N$ . Введем также обозначения:  $V(D_j)$  - множество вершин треугольника  $D_j$  и  $E_i$  - совокупность треугольников из  $T$ , содержащих вершину  $P_i$ .

Рассмотрим следующую систему линейных уравнений относительно неизвестных  $x_1, \dots, x_N$ , их количество равно числу внутренних узлов  $N$ :

$$\sum_{D \in E_i} \sum_{v \in V(D) \cap I(T)} ctg \alpha(v, D) x_k = b_i, \quad P_i \in I(T), \quad i = 1, \dots, N. \quad (26)$$

Здесь  $\alpha(v, D)$  - внутренний угол треугольника  $D$  при вершине  $v$ , имеющей номер  $k$ , т.е.  $v = P_k$ . Отметим, что система линейных уравнений (26) зависит от геометрии сетки  $T$ . Предположим, что мы собираемся численно решать (26) методом последовательных итераций. Тогда сходимость процесса последовательных приближений к решению системы (26) зависит от конфигурации сетки. Согласно принципу доминирования

диагонали скорость сходимости процесса последовательных итераций увеличивается при уменьшении недиагональных элементов матрицы системы линейных уравнений. Отсюда, используя Утверждение 1, приходим к следующему результату.

**Утверждение 2.** Для любой конфигурации узлов  $M_2$  при решении системы линейных уравнений (26) методом итераций триангуляция Делоне является наилучшей среди всех возможных треугольных сеток с данным множеством узлов.

При решении задачи нахождения электромагнитного поля методом конечных элементов возникает следующая система линейных уравнений относительно неизвестных значений векторного магнитного потенциала  $A_k$  в узле  $k$ :

$$\sum_{D \in E_i} \sum_{v \in V(D) \cap I(T)} \text{ctg } \alpha(v, D) \frac{A_k}{\mu(D)} = b_i(\delta), \quad P_i \in I(T), \quad i = 1, \dots, N. \quad (27)$$

Здесь  $\mu(D)$  - величина магнитной проницаемости, принимаемая постоянной внутри треугольника  $D$ , правая часть  $b_i(\delta)$  зависит от плотности тока  $\delta$ . Количество уравнений в (27) равно числу внутренних узлов  $N$ .

**Утверждение 3.** Для любой конфигурации узлов  $M_2$  при решении задачи нахождения электромагнитного поля методом конечных элементов и последующем решении возникающей системы линейных уравнений (27) методом последовательных итераций триангуляция Делоне является наилучшей среди всех возможных треугольных сеток с данным множеством узлов.

Всегда ли возможно построить сетку без тупоугольных треугольников? Ответ зависит от расположения сеточных узлов. Рассмотрим 4 узла, расположенных в вершинах выпуклого четырехугольника. Возможны два варианта: 1) тупые углы четырехугольника находятся друг против друга (рис. 5.1а). Тогда короткая диагональ четырехугольника уничтожит оба тупых угла, и мы получим сетку Делоне без тупоугольных треугольников. Такое расположение узлов назовем удачным; 2) оба тупых угла четырехугольника находятся рядом (рис. 5.1б). Тогда каждая диагональ четырехугольника уничтожает один тупой угол, сохранив второй. Такое расположение узлов назовем неудачным.

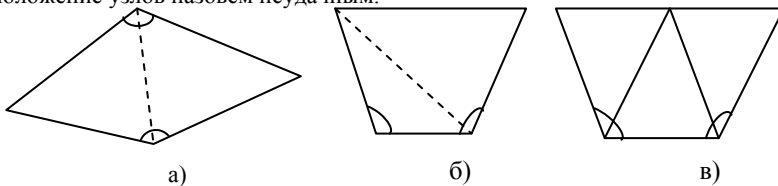


Рис. 12.

Дадим общее определение неудачно расположенных узлов. Множество узлов  $M_2$  называется неудачно расположенным, если существуют два концентрических круга  $K_r$  и  $K_R$  с близкими радиусами  $0,9R < r < R$  такие, что внутри меньшего круга нет ни одного узла, а больший круг содержит, по крайней мере, четыре узла из  $M_2$ , т.е.

$$\#(K_r \cap \{P_i\}) = 0, \quad \#(K_R \cap \{P_i\}) > 3,$$

где  $\#$  означает количество точек. Если таких кругов нет, то множество узлов называется удачно расположенным.

Как бы мы ни построили сетку на неудачно расположенных узлах, она будет содержать тупоугольный треугольник. Избавиться от тупых углов можно только добавлением дополнительных узлов на большей стороне (рис. 12в).

В силу (16), чтобы минимизировать сумму недиагональных элементов матрицы получающейся системы уравнений, надо минимизировать сумму котангенсов всех внутренних углов всех треугольников сетки. Согласно Утверждению 1 триангуляция Делоне обладает минимальной суммой котангенсов углов всех своих треугольников среди всех возможных треугольных сеток с данным множеством узлов, а согласно Утверждению 3, для любой конфигурации узлов при решении задачи нахождения электромагнитного поля методом конечных элементов триангуляция Делоне является наилучшей среди всех возможных треугольных сеток с данным множеством узлов.

Однако триангуляция Делоне не гарантирует отсутствия тупоугольных треугольников и сходимости процесса последовательных приближений. *Для удачно расположенного множества узлов триангуляция Делоне не содержит тупоугольных треугольников и обеспечивает сходимость процесса последовательных приближений к решению нелинейных полевых задач.*

Вышеприведенное определение неудачно расположенных узлов можно обобщить на трехмерный случай. Множество узлов в трехмерном пространстве называется неудачно расположенным, если существуют два концентрических шара  $B_r$  и  $B_R$  с близкими радиусами  $0,9R < r < R$  такие, что внутри меньшего шара нет ни одного узла, а больший шар содержит, по крайней мере, пять узлов из данного множества, т.е.

$$\#(B_r \cap \{P_i\}) = 0, \quad \#(B_R \cap \{P_i\}) > 4.$$

Однако это определение непрактично в том смысле, что для большого числа узлов, крайне трудно проверить, удачно расположены узлы или нет, так как число возможных шаров бесконечно.

Ниже предложен метод нахождения подобластей, где узлы неудачно расположены, а также нахождения тупоугольных тетраэдров без трудоемкого процесса вычисления всех углов всех тетраэдров. Метод основан на свойстве двойственности трехмерных сеток Делоне и многогранных мозаик Вороного. Предлагается вначале строить на данных узлах трехмерного пространства мозаики Вороного, а затем уже переходить к тетраэдрическим сеткам Делоне.

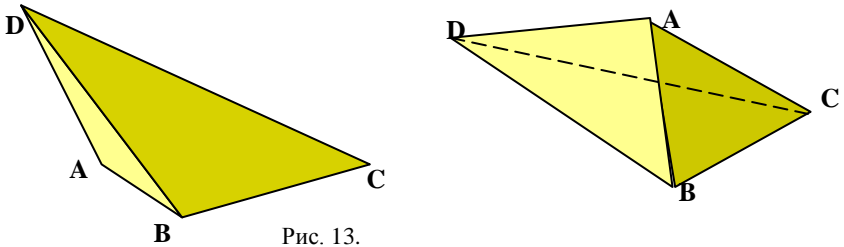
Пусть  $M_3 = \{P_i\}_{i=1}^n$  - заданное множество точек (узлов) в трехмерном пространстве. Множество  $\{D_j\}$  тетраэдров (четырёхгранников, не обязательно правильных) называется тетраангуляцией Делоне на базе системы узлов  $M_3$ , если выполнены следующие условия: внутренности тетраэдров попарно не пересекаются; все вершины всех тетраэдров из  $M_3$ ; объединение тетраэдров заполняет всю выпуклую оболочку точек из  $M_3$ ; для каждого тетраэдра  $D_j$  внутри описанного шара  $S_j$  нет ни одной точки из  $M_3$ .

Множество  $V_i$  точек, расстояние которых до узла  $P_i$  меньше, чем до остальных узлов  $P_j$ ,  $i \neq j$ , называется многогранником Вороного относительно системы узлов  $M_3$ .

Множество  $\{V_i\}_{i=1}^n$  многогранников называется мозаикой Вороного на базе системы узлов  $M_3$ , если каждый  $V_i$  является многогранником Вороного относительно той же системы узлов. Отметим, что в отличие от сетки Делоне, состоящей из четырёхгранников, в мозаике Вороного количество многогранников равно количеству базовых узлов, и количество граней отдельного многогранника может быть произвольным.



**Утверждение 4.** Для любой конфигурации узлов  $M_3$  всегда существует (притом единственная) мозаика Вороного на базе системы  $M_3$ . Все элементы мозаики Вороного являются выпуклыми многогранниками.



В отличие от плоского треугольника, который может иметь только один тупой угол, трехмерный тетраэдр может иметь несколько тупых углов. На рис. 13 слева изображен тетраэдр, у которого плоский угол при одном ребре (AB) является тупым. Такой тетраэдр назовем косым тупоугольным тетраэдром. Справа изображен тетраэдр, у которого плоские углы при трех ребрах (AC, AB, AD) являются тупыми. Эти ребра имеют общую вершину. Такой тетраэдр назовем “сплюснутым” тупоугольным тетраэдром.

Рассмотрим выпуклый многогранник, имеющий пять вершин, назовем его пятивершинником. Такой многогранник можно разбить на два или на три тетраэдра. В последнем случае все три тетраэдра имеют общее ребро, лежащее внутри пятивершинника. Сумма трех плоских углов при общем ребре равна  $360^\circ$ .

Следовательно, при разбиении пятивершинника на три тетраэдра образуется два (или 3) косых тупоугольных тетраэдра. Отсюда получается следующий критерий удачного расположения узлов: если пятивершинник при триангуляции Делоне делится на два тетраэдра, то узлы расположены удачно, и оба тетраэдра остроугольные. Если же пятивершинник при триангуляции Делоне делится на три тетраэдра, то узлы расположены неудачно. Вопрос что хуже: три косых тупоугольных тетраэдра, или два сплюснутых тупоугольных тетраэдра. Ответ: лучше добавить на общем ребре дополнительный узел.

Полученные теоретические утверждения применены в компьютерной программе для автоматического обнаружения подобластей трехмерных сеток с неудачным расположением узлов. Для данного множества узлов вначале строится мозаика Вороного. Для этого вокруг каждого узла строится шар малого радиуса с центром в данном узле так, чтобы не задевать другие узлы. Затем все шары одновременно “разбухают”, при этом их радиусы растут с равной скоростью. Когда два шара соприкасаются, их рост в данном направлении прекращается, и их центры запоминаются, как пара соседних узлов. Соединяя соседние узлы, получим трехмерную триангуляцию Делоне.

Разноцветная окраска шаров на экране компьютера позволяет визуально наблюдать построение тетраэдров и обнаруживать недостатки сетки. На рис.14 цифрами 1,...,5 обозначены узлы тетраэдров, которые являются центрами шаров  $1', \dots, 5'$ . Видно, что все пять шаров соприкасаются друг с другом, поэтому получаются три тупоугольных тетраэдра, т.е. узлы расположены неудачно. На рисунке 15 шары с центрами в узлах 1 и 2 не соприкасаются, получаются два остроугольных тетраэдра.

Построение тетраэдрической сетки - трудоемкий и длительный этап автоматизированного моделирования электромагнитного поля. Является актуальным развитие параллельных алгоритмов построения тетраэдрической сетки при помощи многопроцессорных машин. Распараллеливание сеточной задачи путем разбиения исходной области на параллельные блоки (подобласти) приводит к уменьшению размеров матриц и резкому ускорению процесса решения системы уравнений.

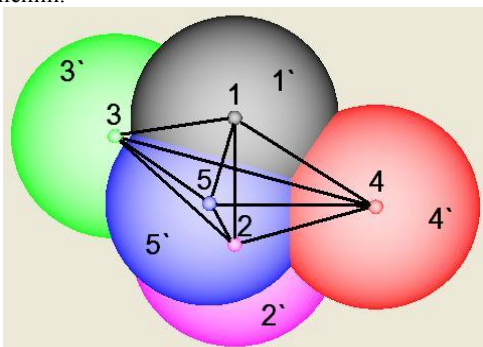


Рис. 14.

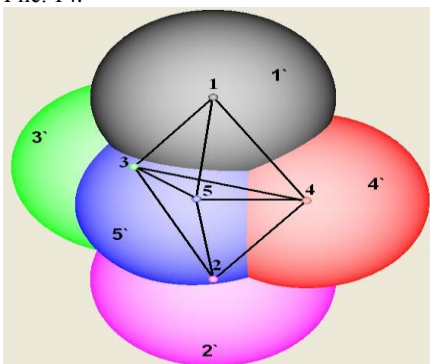
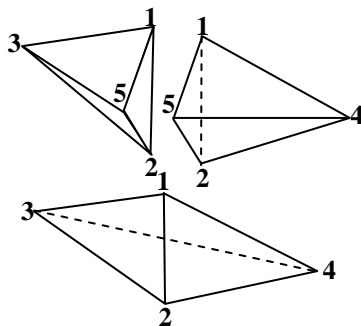
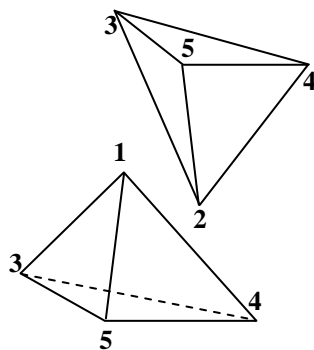


Рис. 15.



Однако при этом наряду с арифметическими операциями возникают межпроцессорные обменные операции. Кроме того, при неравномерном разбиении области на параллельные блоки возникает неравномерность времени арифметических операций отдельных процессоров, что приводит к простоям части процессоров. Поэтому при разбиении исследуемой области на параллельные блоки следует учитывать: а) густоту участков сетки; б) ширину возникающих лент; в) длину дополнительных границ между блоками, а также количество процессоров, оптимальное для данной сетки.

Два узла  $P_i$  и  $P_j$  назовем соседними, если соответствующие многогранники Вороного  $V_i$  и  $V_j$  имеют общую границу. Соединяя соседние узлы, получим тетраэдрическую сетку Делоне. Однако, в отличие от мозаики Вороного, для некоторых конфигураций узлов тетраэдризация Делоне не единственна. Единственность может нарушаться для вырожденных конфигураций узлов, когда четыре узла оказываются в одной плоскости и получается несколько тетраэдризаций

Делоне. Надо из них выбрать такую, у которой отсутствуют пересекающиеся элементы и вырожденные элементы нулевого объема.

Разработанный подход реализован в виде компьютерной программы для параллельного построения тетраэдрической сетки с использованием многопроцессорных вычислительных систем. Эксперименты проводились на модели реле с использованием 48-ядерного кластера.

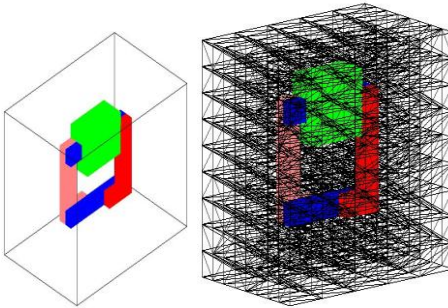


Рис.16.

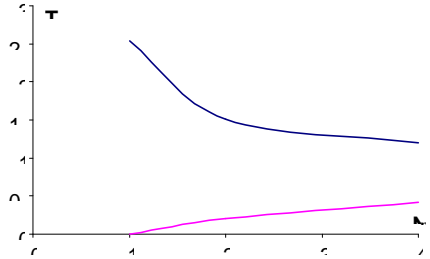


Рис.17.

На рис. 16 изображены исследуемая область и тетраэдрическая сетка, полученная с использованием реализованной программы. На рис. 17 представлены зависимости общего времени  $T$  построения расчетной сетки (верхняя кривая), а также времени, затраченного на межпроцессорный обмен (нижняя кривая) от количества процессоров  $N_p$ . Графики показывают, что по мере увеличения числа процессоров, несмотря на увеличение времени межпроцессорного обмена, общее время построения сетки уменьшается, что свидетельствует о несомненной эффективности параллелизации задач данного типа.

**Оценка качества тетраэдрической сетки.** При численном решении нелинейных задач методом конечных элементов на сходимость процесса последовательных приближений сильное влияние оказывает качество тетраэдрической сетки. Главным критерием качества сетки до сих пор было наличие тупых углов. Однако вычисление всех углов тетраэдров трехмерной сетки - весьма трудоемкая и громоздкая задача. В работе создан быстрый нетрудоемкий метод оценивания качества тетраэдрической сетки.

Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве треугольную пирамиду (тетраэдр)  $T$ , которую пересекает случайная плоскость  $e$ . Вероятностное распределение сечения  $e \cap T$  инвариантно относительно группы движений пространства, т.е. не зависит от местоположения пирамиды  $T$  и ее пространственной ориентации. Вероятность того, что случайная плоскость проходит через какую-либо вершину пирамиды, равна нулю. Следовательно, сечение  $e \cap T$  является либо треугольником, либо четырехугольником. Обозначим через  $P_3$  (соотв.  $P_4$ ) вероятность события, что сечение  $e \cap T$  является треугольником (соотв. четырехугольником).

Для любой треугольной пирамиды имеют место неравенства  $P_3 > P_4$ ,  $P_3 > 0,71$ ,  $P_4 < 0,29$ . Величина  $P_3$  достигает своего минимума, а  $P_4$  - своего максимума для правильного тетраэдра, у которого все ребра равны.

Пересечем сетку несколькими независимыми плоскостями и посчитаем число  $N_3$  треугольников и  $N_4$  четырехугольников, образованных в сечении плоскости с

тетраэдрами сетки. Затем вычислим соответствующие доли:  $m_3=N_3/(N_3+N_4)$ ,  $m_4=N_4/(N_3+N_4)$ , где  $m_3$  – доля появления треугольников в сечении плоскости с тетраэдрами сетки;  $m_4$  – доля появления четырехугольников. Критерий качества тетраэдрической сетки: чем меньше доля четырехугольников  $m_4$ , тем хуже сетка.

Критическим углом в сетке, при превышении которого процесс приближений к решению полевой задачи заведомо расходится, равен  $163^\circ$ . Ему соответствует доля 9%. Если доля появления четырехугольников меньше 9%, то среди элементов сетки заведомо имеются тетраэдры с тупым углом, превышающим  $163^\circ$ . Отметим, что при конечно-элементном моделировании имеется строгое требование к сетке: внутренности элементов не должны пересекаться, а внутри сетки не должно быть пустот, не покрытых элементами. Если в двумерном случае визуально видно, выполнено ли это требование, то для трехмерной сетки проверка выполнения полноты сетки и непересекаемости элементов представляет определенную трудность.

Вышеприведенные неравенства позволяет провести тест: если на какой-либо плоскости, пересекающей тетраэдрическую сетку, возникли пятиугольники или получено неравенство  $N_3 < N_4$ , то сетка имеет дефекты – нарушено требование полноты сетки или непересекаемости элементов.

Предложенный алгоритм оценивания качества тетраэдрической сетки реализован для сетки, полученной при моделировании реле (рис. 16). В среднем получены следующие вероятности:  $m_3 = 75,8\%$ ,  $m_4 = 24,2\%$ .

Количество треугольников  $N_3=171$ , количество четырехугольников  $N_4=56$ .

**В шестой главе** «Распараллеливание краевых задач на многопроцессорных вычислительных системах» исследованы параллельные алгоритмы решения задач электромагнитного поля методом конечных элементов с разбиением на подобласти без перекрытия и с теневыми гранями (перекрытием). Получена формула для нахождения предпочтительного числа процессоров в зависимости от конфигурации сетки и параметров многопроцессорной вычислительной системы. Дан сопоставительный анализ методов нахождения трехмерного вектора магнитного потенциала с различными схемами распараллеливания.

Распараллеливание сеточных задач обычно осуществляется путем разбиения исходной области на параллельные блоки (подобласти). В вычислительной практике используются два вида разбиений – декомпозиция без перекрытий и декомпозиция с теневыми гранями (перекрытием). На рис. 18 представлена исследуемая область модельной задачи. На этом рисунке показано электромагнитное устройство с ферромагнитными участками А и В, разделенными воздушным зазором С.

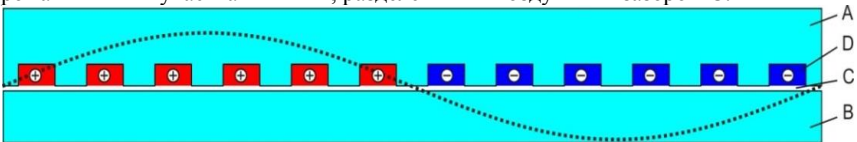


Рис. 18.

Устройство содержит обмотку D, обтекаемую током с синусоидальным распределением вдоль зазора. Для определения электромагнитного поля в устройстве краевую задачу необходимо решить с нулевыми граничными условиями на краях (рис. 19).

**Декомпозиция с перекрытием.** Зона перекрытия двух соседних подобластей состоит из двух слоев узлов: теневой границы и явной границы. При этом теневая граница одной подобласти является явной границей (краем) соседней подобласти и наоборот. Так, например, на рис. 20а в процессоре N пунктир является теневой

границей, а в процессоре N+1 сплошные линии являются теньвыми границами, а пунктирные линии – наоборот, краевыми границами. Для каждой подобласти на отдельном процессоре решается краевая задача. При этом узлы из тневой границы считаются внутренними, и для них ведется численный расчет, а в краевых узлах значение  $A$  не меняется.

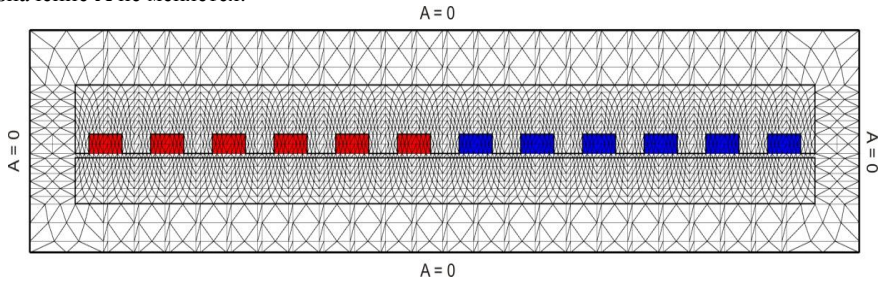


Рис.19.

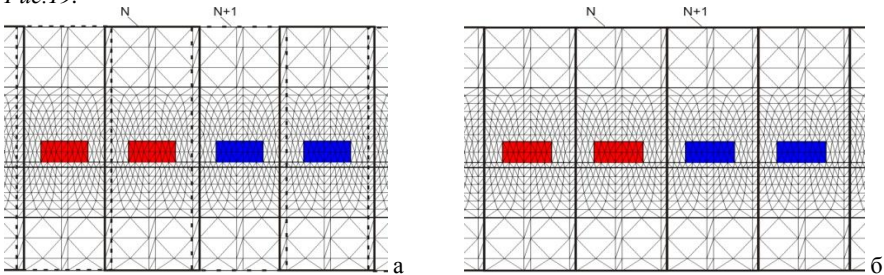


Рис. 20.

После нескольких итераций работа процессоров приостанавливается и происходит межпроцессорный обмен граничными значениями.

**Декомпозиция без перекрытия.** Зона пересечения двух соседних подобластей состоит из одного слоя граничных узлов (см. рис. 20б). Эти узлы являются краевыми для обеих подобластей. Для каждой подобласти на отдельном процессоре решается краевая задача. При этом в граничных узлах численный расчет не ведется, и значения потенциала  $A$  не меняются. После нескольких итераций происходит межпроцессорный обмен этих граничных значений.

Имеется класс алгоритмов (например, метод наилучшей выборки в задачах принятия решения), для которых распараллеливание тем эффективнее, чем больше число используемых процессоров, т.е. оптимальное число процессоров бесконечно. В сеточных задачах количество процессоров заведомо ограничено, оно не может быть больше числа сеточных узлов. Следовательно, становится актуальным выбор оптимального числа используемых процессоров.

Пусть исследуемая область есть прямоугольник, имеющий  $m$  узлов в длину и  $n$  узлов в ширину. Разделим область на подобласти  $h$  горизонтальными и  $v$  вертикальными линиями. Получим  $(h+1)(v+1)$  подобластей, имеющих  $mn/(h+1)(v+1)$  узлов. Число тневых граничных узлов, используемых для межпроцессорного обмена, равно  $(m-2)v+(n-2)h$ . Обозначим через  $t_p$  удельное время решения сеточной задачи, приходящееся на один внутренний узел, через  $t_o$  - удельное время межпроцессорного обмена, приходящееся на один граничный узел. Наша цель – выбрать числа  $h$  и  $v$  (при

заданных  $m$ ,  $n$ ,  $t_p$  и  $t_0$ ) таким образом, чтобы было минимальным общее время работы. Для этого приравняв нулю производные по  $h$  и  $v$  и решая полученную систему уравнений найдем числа  $h$  и  $v$ , которые дают предпочтительное число процессоров  $(h+1)(v+1)$ . Отсюда вытекает правило: следует так разделить исследуемую область на подобласти, чтобы в подобластях количества узлов в длину и ширину по возможности были близки. Это следует и из известного геометрического принципа: среди прямоугольников фиксированной площади наименьший периметр имеет квадрат.

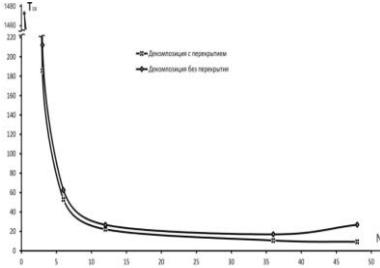


Рис.21.

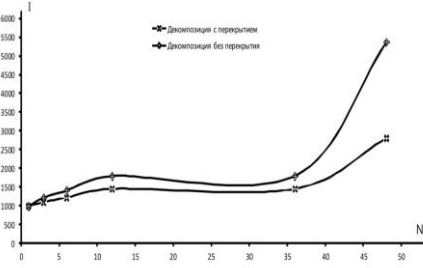


Рис. 22.

Рассмотрены различные декомпозиции исходной задачи, требующие соответственно 6, 36 и 48 параллельных процессоров (ядер). Для модельной задачи найдено распределение магнитного поля методом МКЭ с разбиением на параллельные подобласти с перекрытием и без перекрытия. На рис. 21

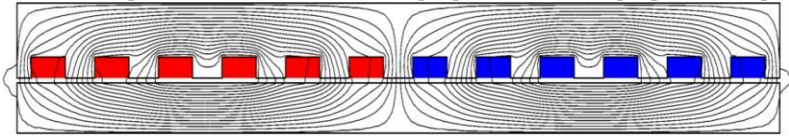


Рис. 23.

и 22 показаны зависимости времени расчета и числа итераций, необходимых для достижения заданного уровня невязки, в зависимости от числа процессоров. На рис.23 изображено полученное распределение магнитного поля в исследуемой среде. Вместе с тем анализ полученных результатов показывает, что существует предпочтительное количество процессоров, при превышении которого процесс ускорения решения сеточной задачи резко замедляется. Для рассмотренного нами случая предпочтительным числом процессоров является 36.

Для реализации параллельного алгоритма создания тетраэдрической сетки необходимо исследуемую область разбить на процессорные пространства, т.е. подобласти решаемой задачи, которые исследует данный процессор. Процессорное пространство задается ограничивающими плоскостями. Эти процессорные пространства имеют общую граничную плоскость и находятся по разные стороны от нее. При этом узлы, лежащие на граничной плоскости, принадлежат обоим процессорным пространствам. На основе узлов на граничной плоскости необходимо произвести двумерную триангуляцию Делоне с ограничениями в виде запрета элементов, находящихся в разных средах.

Параллельный алгоритм пузырька состоит в том, что для данного множества узлов вначале строится многогранная мозаика Вороного. Для этого каждому узлу приписывается шар малого радиуса с центром в данном узле так, чтобы не задевать



другие узлы. Затем все шары одновременно “разбухают”, при этом их радиусы растут с равной скоростью. Когда два шара соприкасаются, их рост в данном направлении прекращается, и их центры записываются, как пара соседних узлов. Соединяя соседние узлы, получим трехмерную триангуляцию Делоне.

Решим одну и ту же трехмерную задачу магнитостатики разными методами и сравним затраченное время и поведение невязки. Пусть исследуемая область представляет собой параллелепипед, имеющий  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  внутренних узлов в длину, ширину и глубину, причем  $n_1 < n_2 < n_3$ .

**Последовательное** нахождение трехмерного вектора магнитного потенциала методом конечных элементов на одном процессоре. В МКЭ задача решения системы дифференциальных уравнений (23) сводится к решению системы линейных уравнений с матрицей ленточного типа. Каждому узлу соответствуют три неизвестных значения составляющих вектора магнитного потенциала в данном узле. Таким образом, количество неизвестных (и количество уравнений) в расчетной системе будет равно  $3n_1n_2n_3$ . Соответствующая матрица имеет размер  $3n_1n_2n_3 \times 3n_1n_2n_3$ . Для уменьшения ширины ленты матрицы узлы сетки выгоднее нумеровать вдоль более коротких сторон. Тогда ширина ленты не будет зависеть от длины наибольшей стороны (т.е. от  $n_3$ ) и имеет порядок  $9n_1n_2 + 3n_1$ .

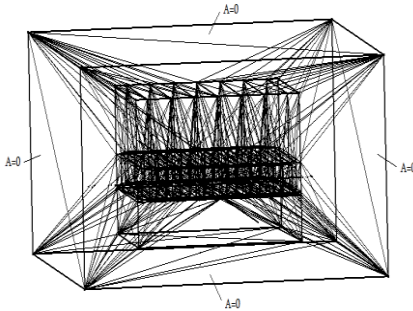


Рис. 24.

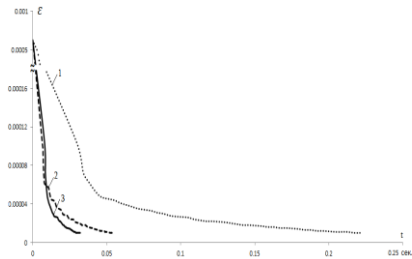


Рис. 25.

**Параллельное** решение трехмерной полевой задачи методом конечных элементов на трех процессорах с распараллеливанием процесса решения путем разбиения исследуемой области на три подобласти. Количество неизвестных (и количество уравнений) на каждом процессоре равно  $n_1n_2n_3$ . Соответствующая матрица имеет размер  $n_1n_2n_3 \times n_1n_2n_3$ , а ширина ее ленты имеет порядок  $n_1n_2 + n_1$ .

Если  $n_1 < n_2 < n_3/3$ , то как и в последовательном случае имеет порядок  $9n_1n_2 + 3n_1$ . Если  $n_1 < n_3/3 < n_2$ , то после разбиения области на три подобласти длиной наибольшей стороны будет  $n_2$ . Ширина ленты имеет порядок  $3n_1n_3 + 3n_1$ . Если же  $n_3/3 < n_1 < n_2$ , то после разбиения на три подобласти длиной наименьшей стороны будет  $n_3/3$ . Ширина ленты имеет порядок  $3n_1n_3 + n_3$ .

Время затрачиваемое на межпроцессорный обмен пропорционально числу узлов на границе подобластей. Для регулярной сетки оно равно  $2n_1n_2$  для средней подобласти и  $n_1n_2$  для крайних подобластей.

Сопоставление реализовано на модельной линейной электрической машине. На рис. 24 представлена расчетная сетка, состоящая из 212 узлов и 1096 тетраэдров. Краевым условием является равенство нулю составляющих вектора магнитного потенциала по краям сетки. На рис. 25 представлен график невязки при расчете поля: 1 -

последовательное решение на одном процессоре, 2 - параллельное решение на трех процессорах с разбиением на три подобласти. Из него видно, что распараллеливание эффективнее последовательного решения.

## **ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ**

1. Дано развернутое математическое описание метода конечных элементов на основе базисных функций на плоскости и в трехмерном пространстве [1, 2, 4, 15].

2. Исследована погрешность аппроксимации трехмерного оператора Лапласа разностным оператором для нерегулярной сетки [10, 32].

3. Предложен и реализован подход к автоматическому построению сетки дискретизации для решения краевых задач методом конечных элементов. Подход основан на последовательной композиции сеточных узлов и элементов в ходе решения задачи в зависимости от поведения получающихся невязок [11].

4. Дано математическое определение применяемым в численных расчетах поля понятиям “оптимальная сетка” и “оптимальный алгоритм композиции узлов сетки”. Для решения полевых задач методом конечных элементов предложен и реализован подход к автоматическому построению сетки дискретизации, аппроксимирующей оптимальную сетку [12].

5. Исследована зависимость сходимости процесса последовательных приближений от геометрических параметров дискретизационной сетки при решении двумерных нелинейных полевых задач методом конечных элементов. Даны оценки критических значений параметров, при превышении которых задача расходится [14].

6. Получены и исследованы геометрические характеристики системы уравнений, возникающей при решении трехмерных полевых задач методом конечных элементов. Доказано отрицательное влияние на сходимость итерационного процесса наличия в сетке тупых углов. Дана оценка критического угла [19, 26].

7. Показано, что для автоматизированного нахождения электромагнитного поля методом МКЭ при заданном наборе узлов из всех возможных сеток наилучшей (в смысле скорости сходимости процесса последовательных приближений) является триангуляция Делоне [17, 31].

8. Показано, что для удачно расположенного множества узлов триангуляция Делоне не содержит тупоугольных треугольников и обеспечивает сходимость процесса последовательных приближений к решению нелинейных полевых задач [18].

9. Развита метод построения тетраэдрических сеток Делоне для расчета трехмерных магнитных полей методом конечных элементов. Метод основан на двойственности трехмерных сеток Делоне и многогранных мозаик Вороного. Метод удобен для распараллеливания [3, 5, 8, 9].

10. Рассмотрены параллельные алгоритмы решения нелинейной задачи электромагнитного поля методом конечных элементов. Сравнены декомпозиции с перекрытием и без перекрытия. Предложена формула для нахождения предпочтительного числа процессоров [6, 25].

11. Развита параллельные алгоритмы построения тетраэдрической сетки для решения задач трехмерного электромагнитного поля [20-24].

12. Исследовано поведение вектора магнитной индукции, полученного при численном решении трехмерных полевых задач. Показано, что совпадение нормальных составляющих вектора магнитной индукции на границах элементов имеет место в рамках МКЭ [26, 27].

13. Исследованы расчетные уравнения для решения электромагнитного поля



методами МКЭ и МКР в двумерной и трехмерной постановке. Показано, что для прямоугольной сетки расчетные уравнения МКЭ и МКР совпадают [1, 28].

14. Дан сопоставительный анализ последовательного и параллельного методов нахождения трехмерного вектора магнитного потенциала. Показана эффективность распараллеливания процесса решения полевых задач [30].

15. Предложен метод численного расчета электромагнитных полей с использованием алгоритмов принятия решения [13, 16].

16. Предложен метод оценивания качества тетраэдрической сетки [7, 29].

**Результаты исследований опубликованы в следующих работах**

1. Терзян А., Сукиасян Г. К определению магнитных полей численными методами // Известия АН СССР, Энергетика и Транспорт. - 1977. - №5. - С. 115-121.

2. Терзян А., Сукиасян Г. К решению нелинейных полевых задач методом конечных элементов // Известия АН Латв.ССР. Сер. Физ.тех наук. - 1977- №6. - С. 104-114.

3. Сукиасян Г. О случайных треугольниках на плоскости // Доклады АН Арм.ССР. - 1978. - Т. 66, №3. - С. 150-155.

4. Терзян А., Сукиасян Г. Метод конечных элементов с переменными базисными функциями // Известия АН Латв.ССР. Сер. Физ.тех наук. - 1979. - №5. - С. 93-98.

5. Сукиасян Г. Комбинаторные свойства случайных треугольников // В кн. Комбинаторные принципы в стохастической геометрии. - 1980.- изд.АН Арм.ССР, Ереван. - С. 57-80.

6. Терзян А., Сукиасян Г. Параллельный алгоритм решения нелинейных полевых задач // Тезисы докл. Конф. Проблемы нелинейной электротехники, Киев, Наукова Думка - 1981. С. 57-80.

7. Сукиасян Г. О случайных сечениях многогранников // Доклады АН СССР. - 1982. - Т. 263, №4. - С. 809-812.

8. Sukiasian H. Two results on triangle shapes // В кн. Stochastic Geometry, Statistics, Stereology. -1984 – Teubner-Texte z.Math. b. 65, pp. 210-221.

9. Сукиасян Г. О характеристике случайных решеток // Известия АН Арм.ССР. Сер.Математика. - 1985. - Т. 20, №4, 299-306.

10. Терзян А., Сукиасян Г. К оценке погрешности численного решения трехмерного уравнения Лапласа с нерегулярной сеткой // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2000. - Т. 53, №3. - С. 359-363.

11. Терзян А., Сукиасян Г., Пароникян А. О расчете магнитных полей методом конечных элементов с динамической композицией элементов дискретизации // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2005. - Т. 58, №2. - С. 332-339.

12. Терзян А., Сукиасян Г., Пароникян А. Об оптимизации сетки для расчета магнитных полей методом конечных элементов // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2005. - Т. 58, №3. - С. 570-578.

13. Терзян А., Сукиасян Г., Саркисян Г. Генетический алгоритм принятия решения с использованием понятия близости особей // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2006. - Т. 59, № 2. - С. 399-405.

14. Терзян А., Сукиасян Г., Пароникян А.Е. Об углах треугольной сетки для расчета магнитных полей методом конечных элементов // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. Т.Н. - 2007. - Т. 60, № 3. - С. 523-532.

15. Терзян А., Сукиасян Г., Акопян А. К расчету трехмерных магнитных полей методом конечных элементов//Известия НАН РА, Сер. ТН.-2008- Т.61, № 2. с.305-317.

16. Терзян А., Сукиасян Г., Хачатурян В. Применение алгоритмов принятия решения в задачах электромагнитного поля // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. -

2009. - Т. 62, № 3. – С. 337-342.

17.Сукиасян Г. Триангуляция Делоне в уравнениях математической физики в среде // Кр.Сообщения 3-го Рос-Арм.Совещания по мат.физике, 2010, С. 142-145.

18.Терзян А., Сукиасян Г., Акопян А., Геворгян А. К построению оптимальной расчетной сетки для решения полевых задач методом конечных элементов // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2010. - Т. 63, № 3-С. 319-327.

19.Терзян А., Сукиасян Г. О численных методах решения задач электромагнитного поля // Известия Вузов, Электромеханика, 2010, № 2, С. 222-234.

20.Gevorkyan A., Abajyan H., Sukiasyan H. A new parallel algorithm for simulation of spin-glasses in external fields // Conf. of Microelectronics, Croatiya, 2011, pp. 191-196.

21.Gevorkyan A.S., Abajyan H., Sukiasyan H. Statistical Properties of Ideal Ensemble of Disordered 1D Spatial Spin-Chains // Mathematical problems of computer sciences, 2011, vol. 35, pp.86-98.

22.Gevorkyan A., Abajyan H., Sukiasyan H. A new parallel algorithm for simulation of spin-glass systems on scales of space-time periods of an external fields // Journal of Modern Physics, 2011, vol. 2, № 6, pp. 488-497.

23.Терзян А., Сукиасян Г., Акопян А. К построению тетраэдрической сетки на многопроцессорных системах для решения задач трехмерного электромагнитного поля методом конечных элементов // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2012. - Т. 65, № 1. - С.83-93.

24.Терзян А., Акопян А., Сукиасян Г., Оганнисян Л. Параллельное построение тетраэдрической сетки при конечно-элементном моделировании трехмерных электромагнитных полей // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2012. - Т. 65, № 2. - С.213-218.

25.Терзян А., Сукиасян Г., Геворгян А. Распараллеливание краевых задач на многопроцессорных вычислительных системах // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2012. - Т. 65, № 3. - с.313-320.

26.Терзян А., Сукиасян Г., Акопян А. О свойствах векторных характеристик при конечно-элементном моделировании трехмерного магнитного поля // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2012. - Т. 65, № 4. - с.406-414.

27.Терзян А., Сукиасян Г., Акопян А., Геворгян А. О свойствах дивергенции вектора магнитного потенциала при трехмерном конечно-элементном моделировании нелинейного магнитного поля // Известия НАН РА и ГИУА. Сер.ТН. 2013. - Т. 66, № 2. с.177-181.

28.Терзян А., Сукиасян Г., Акопян А., Геворгян А. К решению нелинейного магнитного поля при трехмерном конечно-элементном и конечно-разностном моделировании // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2013. - Т. 66, № 3. - С.258-265.

29.Сукиасян Г. Об оценке качества тетраэдрической сетки при решении трехмерных краевых задач // Известия НАН РА. Сер. ТН. - 2013. - Т. 66, № 4. - С.384-388.

30.Терзян А., Сукиасян Г., Акопян А., Геворгян А., Егиазарян Н. Сопоставительный анализ методов расчета вектора магнитного потенциала при трехмерном конечно-элементном моделировании магнитного поля // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2014. - Т. 67, № 2. - С.213-219.

31.Сукиасян Г. Экстремальное свойство триангуляции Делоне и его применение при решении полевых задач // Известия НАН РА, Сер. ТН. - 2014. -Т.67,№4,С.452-457.

32. Сукиасян Г., Терзян А. О погрешности трехточечной аппроксимации оператора Лапласа // Известия НАН РА. Сер. ТН. - 2015. - Т. 68, № 3. - С.203-208.

## ԱՄՓՈՓԱԳԻՐ

Ատենախոսական աշխատանքը նվիրված է էլեկտրամագնիսական դաշտի ոչ գծային խնդիրների ավտոմատացված լուծման մեթոդների զարգացմանը: Աշխատանքում ստացվել են հետևյալ արդյունքները:

1. Նկարագրված է եզրային խնդիրների լուծման վերջավոր տարրերի մեթոդը՝ հիմնված բազիսային ֆունկցիաների հասկացողության վրա հարթության և եռաչափ տարածության համար [1, 2, 4, 15]:

2. Հետազոտված է Լապլասի եռաչափ օպերատորի տարբերություններով մոտարկման սխալանքը ոչ ռեգուլյար ցանցի համար [10, 32]:

3. Առաջարկված և իրականացված է եզրային խնդիրների վերջավոր տարրերի մեթոդով լուծման համար դիսկրետացման ցանցի ավտոմատացված կառուցման մոտեցում: Այդ մոտեցումը հիմնված է ցանցային հանգույցների և տարրերի հաջորդական կառուցման վրա՝ կախված խնդրի լուծման ընթացքում ստացված սխալանքի վարքից [11]:

4. Մաթեմատիկորեն սահմանված են մագնիսական դաշտի թվային հաշվարկում կիրառվող այնպիսի հասկացողություններ, ինչպիսիք են “օպտիմալ ցանց” և “ցանցային հանգույցների կառուցման լավագույն ալգորիթմ”:

Առաջարկված է ոչ գծային դաշտային խնդիրների վերջավոր տարրերի մեթոդով լուծման համար օպտիմալ ցանցի մոտարկման ավտոմատացված կառուցման մոտեցում [12]:

5. Հետազոտված է հաջորդական մոտավորությունների զուգամիտման կախվածությունը դիսկրետացման ցանցի երկրաչափական գործակիցներից: Գտնված են այդ գործակիցների կրիտիկական արժեքների գնահատականները, որոնց գերազանցումը բերում է խտրացիոն գործընթացների տարամիտման [14]:

6. Եռաչափ ոչ գծային մագնիսական դաշտի վերջավոր տարրերի մեթոդով թվային լուծման գործընթացը հանգեցնում է գծային հավասարումների համակարգի լուծման: Ուսումնասիրված են ստացվող հավասարումների համակարգի երկրաչափական բնութագրիչները: Ապացուցված է քառանիստային ցանցում բուլթ անկյունների առկայության բացասական ազդեցությունը իտերացիաների գործընթացի զուգամիտման արագության վրա: Որոշվել են այդ բուլթ անկյունների կրիտիկական արժեքների գնահատականները, որոնց գերազանցումը բերում է խնդրի տարամիտման [19, 26]:

7. Ցույց է տված, որ եռաչափ մագնիսական դաշտի վերջավոր տարրերի մեթոդով թվային լուծման համար հանգույցների կամայական հաստատագրված բազմության համար օպտիմալ ցանց է այդ հանգույցներով ծնված Դելոնեի քառանիստապատումը: Այստեղ “օպտիմալ ցանց” արտահայտությունը հասկացվում է հաջորդական մոտավորությունների գործընթացի զուգամիտման արագության իմաստով [17, 31]:

8. Ներմուծված է նոր հասկացողություն՝ “հաջող դասավորված հանգույցների բազմություն”:

Ցույց է տված, որ հաջող դասավորված հանգույցների համար Դելոնեի եռանկյունապատումը չի պարունակում

բութանկյուն եռանկյուններ և ապահովում է հաջորդական մոտարկումների զուգամետ ձգտումը մագնիսական դաշտի թվային լուծմանը [18]:

9. Եռաչափ ոչ-գծային մագնիսական դաշտի վերջավոր տարրերի մեթոդով թվային լուծման համար զարգացված է Դելունեի քառանիստային ցանցի ավտոմատացված կառուցման մեթոդը: Մեթոդը հիմնված է Դելունեի քառանիստապատման և Վորոնոյի խճանկարի երկակիության հատկ ության վրա և հարմար է գործընթացի զուգահեռականացման համար [3, 5, 8, 9]:

10. Էլեկտրամագնիսական դաշտի ոչ գծային խնդիրների վերջավոր տարրերի մեթոդով ավտոմատացված լուծման համար զարգացրած են զուգահեռացման ալգորիթմները: Կատարված է համեմատական վերլուծություն փոխձածկով և առանց փոխձածկման տրոհումների միջև: Առաջարկված է պրոցեսորների նախընտրելի քանակի որոնման բանաձև, որը կախված է բազմապրոցերային հաշվողական համակարգի պարամետրերից [6, 25]:

11. Զարգացված են զուգահեռացման ալգորիթմներ՝ դաշտային խնդիրների քառանիստային ցանցերի ավտոմատացված կառուցման համար [20-24]:

12. Հետազոտված են վերջավոր տարրերի մեթոդով եռաչափ դաշտային խնդիրների թվային լուծման ընթացքում ստացված մագնիսական ինդուկցիայի վեկտորի վարքը տարրերի եզրում: Ապացուցվել է, որ վերջավոր տարրերի մեթոդը կիրառելիս հարևան տարրերի եզրանիստում մագնիսական ինդուկցիայի վեկտորի նորմալ բաղադրիչները համընկնում են [26, 27]:

13. Հետազոտված են ոչ գծային մագնիսական դաշտի վերջավոր տարրերի և վերջավոր տարբերությունների մեթոդներով ստացված գծային հավասարումների համակարգերը հարթության և եռաչափ տարածության համար: Համեմատական վերլուծությունը ցույց է տվել, որ ուղղանկյուն ցանցի դեպքում վերջավոր տարրերի և վերջավոր տարբերությունների մեթոդներով ստացված հաշվարկային հավասարումները (և դրանց սխալանքների կարգը) համընկնում են [1, 28]:

14. Կատարվել է եռաչափ էլեկտրամագնիսական դաշտի վեկտորական մագնիսական պոտենցիալի որոշման հաջորդական և զուգահեռ մեթոդների համեմատական վերլուծությունը: Ցույց է տրվել զուգահեռականացման արդյունավետությունը [30]:

15. Առաջարկված է էլեկտրամագնիսական դաշտի խնդիրների ավտոմատացված լուծման մեթոդ՝ հիմնված որոշումների ընդունման ալգորիթմների վրա [13, 16]:

16. Զարգացված են դաշտային խնդիրների քառանիստային ցանցերի հսկման և ստուգման մեթոդներ, որոնց նպատակն է ցանցի ավտոմատացված կառուցման ընթացքում հատվող քառանիստերի և գրոյական ծավալով վերասերված տարրերի հնարավոր առաջացման հայտնաբերումը և կանխարգելումը [7, 29]:

**DEVELOPMENT OF METHODS OF AUTOMATIC SOLUTION OF  
ELECTROMAGNETIC FIELD PROBLEMS**

**Summary**

1. For the solution of boundary value problems the detailed mathematical description of the finite elements method is given. The method is founded on the basic coordinate functions approach on the plane and three-dimensional space [1, 2, 4, 15].

2. The approximation error of the three-dimensional Laplace operator by finite differences operator for non-regular mesh is investigated [10, 32].

3. An approach to automatically construction of the discretization mesh for solving of the boundary value problems by the finite elements method is suggested and realized. This approach is based on the sequential composition or decomposition of the mesh nodes and cells depending on the growth of obtained misalignments in the mesh nodes [11].

4. The strong mathematical definitions of the notions “optimal mesh” and “optimal algorithm of the mesh nodes composition” are given. These notions are used in the numerical calculations of magnetic fields by intuition. To solve the non-linear magnetic field problems by finite elements method an approach to automatically construction of the optimal mesh approximation is suggested. The practical realizations of this approach for some models confirm the efficiency of the method [12].

5. At solving of nonlinear field problems by the finite-elements method the triangular digitized meshes are applied. The convergence of the automated process of successive iterations strongly depends on the mesh configuration. The dependence of the convergence of the successive approximations process on the geometrical parameters of the discretization mesh is investigated. The estimates of the critical values of these parameters are given [14].

6. The process of numerical solution of three-dimensional non-linear field problem by the finite elements method is reduced to the system of linear equations. The geometric characteristics of this equations system are obtained and investigated. The negative impact of existence of obtuse angles in tetrahedral mesh on convergence of iteration process is proved. The estimates of the critical value of obtuse angles are obtained, when the successive approximations diverge [19, 26].

7. An important class of triangular meshes is investigated - the Delaunay triangulation. It is proved that the Delaunay triangulation minimizes the sum of the cotangent angles of all its triangles. This extremal property is applied at analyzing the solving process for systems of linear equations depending on the mesh. It is shown that for the problem of numerical determination of the electromagnetic field by the finite-elements method at the given set of knots, the optimal mesh is the Delaunay triangulation (with respect to the speed of the convergence of successive iteration process) [17, 31].

8. On the plane and three-dimensional space a new notion of “well located” set of nodes is introduced. It is shown that for well located set of nodes the corresponding Delaunay triangulation does not contain obtuse triangles and guarantees the convergence of successive iteration process to the numerical solution of the field problem [18].

9. To solve the nonlinear field problems by the finite-elements method the paralleling algorithms of automated construction of the Delaunay tetrahedral mesh are proposed. These algorithms are based on the duality property between the Delaunay triangulations and Voronoi tessellations and are comfortable for paralleling [3, 5, 8, 9].

10. Paralleling algorithms for solving the nonlinear problems of the electromagnetic field by the finite-element method on multi-processor computing system are developed. The obtained comparative analysis is shown that the decomposition with an overlap requires less number of iterations and less designed time than decomposition without the overlap. Formulas for defining the preferable number of processors are proposed. These formulas depend on parameters of multi-processor computing system [6, 25].

11. Paralleling algorithms for construction of tetrahedral mesh by solving of three-dimensional field problems by the finite-elements method are developed [20-24].

12. The behavior of the magnetic induction produced in the numerical solution of three-dimensional field problems by finite element method is researched. It is shown that the normal components of the magnetic induction and the tangential component of tension on the boundaries of the elements must coincide. Also, the divergence of the magnetic induction must vanish. The coincidence of the normal components of the magnetic induction on the boundaries of the elements in the framework of the finite element method is proved [26, 27].

13. The linear equations systems that obtained by solution of non-linear magnetic field problems by finite elements and finite differences methods on the plane and three-dimensional space are investigated. The comparative analysis is shown that the calculation equations (and the corresponding error orders) for the finite elements method and finite differences method are coincide in the case of rectangle mesh [1, 28].

14. The comparative analysis between successive and parallel methods of determination of the three-dimensional vector of magnetic potential is given. The efficiency of the parallelization is shown [30].

15. The method of numerical solution of non-linear magnetic field problems using the making decision algorithms is suggested [13, 16].

16. The control methods for checking of the automatical construction of tetrahedral mesh for the solution of the field problems are developed. An algorithm for estimate of the quality of a tetrahedral mesh applied by solution of three-dimensional boundary problems by the finite-element method is proposed [7, 29].