

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ АРМЕНИИ  
СУКИАСЯН ГАЙК СТЕПАНОВИЧ  
РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ  
ДИССЕРТАЦИЯ

На соискание ученой степени доктора технических наук  
по специальности 05.13.02 “Системы автоматизации”

Научный консультант д.т.н. А.А.Терзян

Ереван – 2015

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	5
Структура и объем работы .....	14
<b>ГЛАВА 1. ОБЗОР МЕТОДОВ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ</b>	
1.1 Методы исследований электромагнитных полей (без МКЭ).....	17
1.2 Обзор исследований электромагнитных полей методом конечных элементов .....	22
1.3 Обзор методов автоматизированного построения сеток .....	25
1.4 Обзор исследований посвященных триангуляции Делоне .....	27
1.5 Обзор методов распараллеливания полевых задач .....	30
<b>ГЛАВА 2. ДВУМЕРНЫЕ ПОЛЕВЫЕ ЗАДАЧИ</b>	
2.1. Сопоставительный анализ методов конечных элементов и конечных разностей .....	32
2.2. Общий подход к решению нелинейных полевых задач методом конечных элементов .....	40
2.3. Базисные функции, зависящие от магнитной проницаемости .....	52
2.4. Применение алгоритмов принятия решения в задачах электромагнитного поля .....	58

## **ГЛАВА 3. ОПТИМИЗАЦИЯ ДВУМЕРНЫХ СЕТОК**

### **ДЛЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

3.1. Динамическая композиция конечных элементов .....	63
3.2. Оптимальные сетки для расчета магнитных полей методом конечных элементов .....	70
3.3. Об углах треугольной сетки для расчета магнитных полей методом конечных элементов .....	77

## **ГЛАВА 4. ТРЕХМЕРНЫЕ ПОЛЕВЫЕ ЗАДАЧИ**

4.1. Оценка погрешности разностной аппроксимации трехмерного оператора Лапласа с нерегулярной сеткой .....	88
4.2. О погрешности трехточечной аппроксимации оператора Лапласа .....	92
4.3. Численный расчет трехмерного магнитного поля методом конечных элементов .....	97
4.4. Геометрические характеристики уравнений МКЭ для расчета трехмерных полей .....	104
4.5. Свойства векторных характеристик трехмерного магнитного поля .....	110
4.6. Анализ магнитного поля при трехмерном конечно-элементном и конечно-разностном моделировании .....	117

## **ГЛАВА 5. ОПТИМИЗАЦИЯ ТРЕХМЕРНЫХ СЕТОК**

### **ДЛЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

5.1. Двумерные триангуляции Делоне и их применение при решении полевых задач .....	125
--	-----

5.2. Оптимальная сетка для решения трехмерных полевых задач методом конечных элементов .....	130
5.3. Построение тетраэдрической сетки при конечно-элементном моделировании трехмерных электромагнитных полей .....	137
5.4. Оценка качества тетраэдрической сетки .....	141
<b>ГЛАВА 6. РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ</b>	
6.1. Декомпозиции без перекрытий и с теньвыми гранями .....	147
6.2. Построение тетраэдрической сетки на многопроцессорных вычислительных системах .....	154
6.3. Сопоставительный анализ методов расчета трехмерного магнитного поля.....	159
6.4. Генетический алгоритм с использованием понятия близости особей ...	165
Заключение .....	188
Литература .....	193

## **ВВЕДЕНИЕ**

Методы автоматизированного решения краевых задач электромагнитного поля являются одним из важнейших составляющих моделирования электромагнитных полей, а последнее является одним из наиболее востребованных в электротехнике. В последнее время среди численных методов наиболее широкое распространение получил метод конечных элементов (МКЭ).

МКЭ – это численный метод решения дифференциальных уравнений с частными производными, а также интегральных уравнений, возникающих при решении задач прикладной физики. В настоящее время предложено большое количество реализаций метода конечных элементов при моделировании процессов диффузии, теплопроводности, гидродинамики, механики деформируемого твердого тела, электродинамики и др.

МКЭ возник в середине XX века в классической теории упругости и развивался применительно к решению задач механики сплошных сред. Сам термин “конечные элементы”, также исходил из механических задач теории о напряжений и принципа минимума потенциальной энергии.

Важный шаг в развитии МКЭ произошел в 1963 году применением метода Рэлея-Ритца, который путем минимизации потенциальной энергии сводит задачу к системе линейных уравнений равновесия (уравнения Лапласа или Пуассона).

Впервые для расчета электромагнитного поля МКЭ был применен в 1970г. П.Сильвестером и М.Чари. Это было существенным толчком в направлении расширения применения МКЭ. Однако они в основном пользовались подходами и терминами, идущими из механики. Для решения полевых задач практически любой геометрической сложности, требовалось развитие метода в сторону большей математизации и обобщений.

Сегодня метод конечных элементов стал главным инструментом автоматизированного решения задач математического моделирования.

В настоящей работе развиты методы автоматизированного решения краевых задач электромагнитного поля методом конечных элементов как в двумерной, так и трехмерной постановке.

Дано развернутое математическое описание метода конечных элементов на основе базисных функций на плоскости и в трехмерном пространстве.

Исследованы расчетные уравнения для решения нелинейного электромагнитного поля методами МКЭ и МКР в двумерной и трехмерной постановке. Показано, что для прямоугольной тетраэдрической сетки расчетные уравнения МКЭ и МКР совпадают.

Предложен алгоритм автоматизированного построения треугольных сеток для решения полевых задач методом конечных элементов, основанный на последовательной композиции узлов и элементов сетки в ходе решения задачи в зависимости от поведения получающихся невязок.

Показано, что для автоматизированного нахождения электромагнитного поля методом МКЭ при заданном наборе узлов из всех возможных сеток наилучшей (в смысле скорости сходимости процесса последовательных приближений) является триангуляция Делоне.

Показано, что для удачно расположенного множества узлов триангуляция Делоне не содержит тупоугольных треугольников и обеспечивает сходимость процесса последовательных приближений к решению нелинейных полевых задач.

Исследована зависимость сходимости итерационного процесса приближений к решению полевой задачи от геометрических параметров треугольной сетки.

Даны оценки критических значений тупых углов, при превышении которых процесс решения задачи расходится.

Исследовано поведение магнитной индукции на границах элементов. Показано, что хотя векторы магнитной индукции в разных элементах могут быть разными, но их нормальные составляющие совпадают на границах элементов.

Дан сопоставительный анализ последовательного и параллельного методов нахождения трехмерного вектора магнитного потенциала. Показана эффективность распараллеливания процесса решения полевых задач.

Развиты алгоритмы принятия решения (в частности генетические алгоритмы) в свете их использования для численного расчета электромагнитных полей.

Созданы методы оценивания качества тетраэдрической сетки.

#### Актуальность работы

Моделирование двумерных и трехмерных электромагнитных полей является одной из важнейших и актуальных задач электромеханики. Точность моделирования электромагнитного поля по существу определяет точность проектирования электрических машин и аппаратов.

Решение задачи нелинейного магнитного поля со сложной геометрией связано с огромным количеством вычислений. В связи с этим становится особенно актуальной разработка методов для получения быстрых и точных решений.

Обеспечение сходимости процесса последовательных приближений к решению краевых задач является одной из сложных и важных проблем современной науки. Поэтому актуальной является изучение факторов, отрицательно влияющих на сходимость итерационного процесса решения задачи трехмерного электромагнитного поля.

Сходимость процесса последовательных приближений к решению нелинейных полевых задач сильно зависит от геометрии сетки. В связи с этим

становится актуальной разработка методов оптимальной дискретизации расчетных областей, обеспечивающих возможно быструю скорость сходимости.

Развитие многопроцессорных вычислительных систем открыли новые возможности повышения эффективности вычислительного процесса. В связи с чем актуальной стала разработка таких методов моделирования электромагнитных полей, которые позволяют распараллелить процесс решения.

#### Научная новизна

В процессе исследований получены следующие новые научные результаты:

1. Среди расчетных уравнений МКЭ и МКР наибольшую точность имеет восьмиточечное разностное уравнение, наименьшую - квадратичная аппроксимация четырехугольных элементов.

2. Метод конечных элементов имеет наименьшую погрешность при линейной аппроксимации треугольных элементов, которая совпадает с погрешностью четырехточечного разностного уравнения.

3. Введены новые понятия оптимальной сетки, оптимального алгоритма композиции сеточных узлов, а также понятие индекса сетки.

4. Для векторного магнитного потенциала получена расчетная система линейных уравнений с коэффициентами, зависящими от конфигурации элементов и выбора базисных функций. Для наиболее часто встречающихся на практике элементов (треугольник, прямоугольник, сектор и криволинейная трапеция) вычислены значения расчетных коэффициентов в декартовых и полярных координатах.

5. Показано, что наличие в расчетной сетке тупоугольных треугольников отрицательно сказывается на сходимости процесса решения.



6. Доказано, что для нерегулярной сетки с симметричными шагами аппроксимация трехмерного оператора Лапласа разностным имеет погрешность порядка  $h^2$ .

7. Выведены расчетные уравнения для численного решения трехмерных нелинейных полевых задач методом конечных элементов.

8. Найдено соотношение связывающее число тетраэдров, содержащих данный узел  $O$ , с числом соседних узлов, верное для любой тетраэдрической сетки и любого ее внутреннего узла  $O$ .

9. Показано, что для любой тетраэдрической сетки число тетраэдров содержащих данный узел в среднем равно 24, а число узлов соседствующих с данным узлом в среднем равно 14.

10. Доказано, что в расчетных сетках у тетраэдров, имеющих общую грань, хотя векторы индукции разные, но нормальные (к общей грани) составляющие совпадают.

11. Показано, что для прямоугольной тетраэдреской сетки расчетные уравнения для решения электромагнитного поля методами конечных элементов и конечных разностей совпадают по всем трем составляющим векторного магнитного потенциала.

12. Показано, что триангуляция Делоне минимизирует сумму котангенсов углов всех своих треугольников.

13. Введены новые понятия удачно и неудачно расположенных множеств узлов на плоскости и в трехмерном пространстве. Показано, что для удачно расположенного множества узлов триангуляция Делоне не содержит тупоугольных треугольников и обеспечивает сходимость процесса последовательных приближений к решению нелинейных полевых задач.

14. Введены новые понятия косых и сплюснутых тупоугольных тетраэдров.

15. Получены новые неравенства для сечений треугольных пирамид.

### Практическая ценность работы

В настоящей работе разработана система автоматизированного решения задачи электромагнитного поля методом конечных элементов как в двумерной, так и трехмерной постановке. В работе предложены новые алгоритмы дискретизации исследуемой области, как для однопроцессорных, так и для параллельных вычислительных систем. В отличие от существующих алгоритмов дискретизации расчетной области, предложенный алгоритм не чувствителен к точности машинных вычислений, не требует первичной триангуляции границ расчетной области, удобен для динамической декомпозиции расчетной области.

Все теоретические утверждения и выкладки сопровождаются практическими примерами и численными экспериментами, подтверждающими их прикладную состоятельность и практическую ценность.

Разработанные математические модели и алгоритмы доведены до практического применения и могут быть широко использованы в инженерной практике.

### Положения выводимые на защиту

1. Математическое описание метода конечных элементов на основе базисных функций на плоскости и в трехмерном пространстве.

2. Разработка метода конечных элементов с переменными базисными функциями.

3. Схема автоматического построения переменной сетки дискретизации для решения краевых задач МКЭ, основанная на последовательной композиции сеточных узлов и элементов в ходе решения краевой задачи в зависимости от поведения получающихся невязок.

4. Математическое определение понятия оптимальной сетки и оптимального алгоритма композиции сеточных узлов при конечно-элементном моделировании магнитного поля.

5. Теорема о существовании оптимальной сетки и оптимального алгоритма.

6. Теорема, что оптимальная сетка (и только она) всегда имеет нулевой индекс.

7. Математическое обоснование явления отрицательного влияния на сходимость процесса решения полевой задачи наличия в расчетной сетке тупоугольных треугольников.

8. Оценки критического значения тупого угла в расчетной сетке, при превышении которого итерационный процесс решения задачи электромагнитного поля расходится (на плоскости и в трехмерном пространстве).

9. Анализ геометрических характеристик системы уравнений возникающей при численном решении трехмерных нелинейных полевых задач методом конечных элементов.

10. Теорема о том, что для произвольного тетраэдра нормальная составляющая вектора индукции к любой грани зависит только от значений магнитного потенциала в вершинах этой грани и не зависит от значения потенциала в четвертой вершине тетраэдра.

11. Исследование поведения вектора магнитной индукции, полученного при численном решении трехмерных полевых задач методом конечных элементов. Доказательство того, что совпадение нормальных составляющих вектора магнитной индукции на границах элементов имеет место в рамках МКЭ.

12. Сопоставительный анализ расчетных уравнений для решения нелинейного электромагнитного поля методами конечных элементов и конечных разностей в трехмерной постановке.

**13.** Теорема о том, что для любой конфигурации узлов триангуляция Делоне обладает минимальной суммой котангенсов углов всех своих треугольников среди всех возможных треугольных сеток с данным множеством узлов.

**14.** Основная Теорема: для любой конфигурации сеточных узлов при решении задачи нахождения электромагнитного поля методом конечных элементов триангуляция Делоне является наилучшей (в смысле скорости сходимости процесса последовательных приближений) среди всех возможных треугольных сеток с данным множеством узлов.

**15.** Для удачно расположенного множества узлов триангуляция Делоне не содержит тупоугольных треугольников и обеспечивает сходимость процесса последовательных приближений к решению нелинейных полевых задач.

**16.** Алгоритмы дискретизации расчетной области при решении нелинейных задач трехмерного электромагнитного поля с использованием однопроцессорной и многопроцессорной вычислительных сред.

**17.** Методы преодоления трудностей, возникающих при практической реализации алгоритмов автоматического построения сетки, связанных с возможным появлением пересекающихся тетраэдров и вырожденных тетраэдров нулевого объема.

**18.** Быстрый, нетрудоемкий алгоритм оценивания качества тетраэдрической сетки на основании экстремального свойства сечений треугольных пирамид.

**19.** Параллельные алгоритмы решения нелинейной задачи электромагнитного поля методом конечных элементов с разбиением на подобласти без перекрытия и с теньвыми гранями (перекрытием).

20. Формула для нахождения предпочтительного числа процессоров в зависимости от конфигурации сетки и параметров многопроцессорной вычислительной системы.

21. Сопоставительный анализ трех следующих методов: последовательное нахождение трехмерного вектора магнитного потенциала на одном процессоре; параллельное решение той же задачи на трех процессорах с распараллеливанием процесса решения по трем независимым уравнениям относительно составляющих вектора магнитного потенциала и параллельное решение той же задачи на трех процессорах с распараллеливанием путем разбиения исследуемой области на три подобласти.

Апробация результатов исследования.

Основные результаты докладывались на следующих международных конференциях: Проблемы нелинейной электротехники, Киев, 1981; I конгресс общества Бернулли, Ташкент, 1986; IV международная конференция по теории вероятностей, Вильнюс, Литва, 1989; Международная конференция Geobild-90, Георгенталь, Германия, 1990; Симпозиум по стохастической геометрии, Обервольфах, Германия, 1991; IV международная конференция Juzel-97, Врнячка-Баня, Югославия, 1997; Семинар проф. Й.Мекке, Университет им. Ф.Шиллера, Йена, Германия, 2007. III Российско-Армянское Совецание по математической физике, Ереван, 2010; Международная конференция SEMPSP8, Рашт, Иран, 2011; III международная конференция по микроэлектронике, Опатия, Хорватия, 2011; IV Российско-Армянское Совецание по мат.физике, Красноярск, Россия, 2012.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 32 научных работах, список которых приведен в разделе Литература под номерами [135 - 166].

## **Структура и объем работы**

Объем диссертационной работы составляет 207 страниц. Список литературы состоит из 166 наименований.

**Во введении** обосновывается актуальность темы, формулируется цель работы, научная новизна, практическая ценность, а также основные положения, подлежащие защите.

**В первой главе** производится исследование тематической литературы. Приводится обзор методов решения задач электромагнитного поля, алгоритмов автоматизированного построения сеток, а также обзор исследований посвященных триангуляции Делоне и обзор методов распараллеливания полевых задач.

**Во второй главе** для решения двумерной задачи электромагнитного поля дано математическое описание метода конечных элементов на основе базисных функций на плоскости. Дан сопоставительный анализ расчетных уравнений для решения нелинейного электромагнитного поля методами конечных элементов и конечных разностей. Разработан метод конечных элементов с переменными базисными функциями. Предложен метод численного расчета электромагнитных полей с использованием алгоритмов принятия решения.

**В третьей главе** описана схема автоматического построения переменной сетки дискретизации для решения краевых задач МКЭ, основанная на последовательной композиции сеточных узлов и элементов в ходе решения задачи в зависимости от поведения получающихся невязок. Дано строгое математическое определение понятия оптимальной сетки и оптимального алгоритма композиции сеточных узлов. Доказана теорема о существовании оптимальной сетки и оптимального алгоритма.

Обосновано явление отрицательного влияния на сходимость процесса решения полевой задачи наличия в расчетной сетке тупоугольных треугольников. Приведена оценка критического значения тупого угла в двумерной сетке, при

превышении которого итерационный процесс решения задачи электромагнитного поля расходится.

**В четвертой главе** исследована погрешность аппроксимации трехмерного оператора Лапласа разностным для нерегулярной сетки с симметричными шагами. Проведен анализ геометрических характеристик системы уравнений возникающей при численном решении трехмерных нелинейных полевых задач методом конечных элементов.

Исследовано поведение вектора магнитной индукции, полученного при численном решении трехмерных полевых задач методом конечных элементов. Доказано, что совпадение нормальных составляющих вектора магнитной индукции на границах элементов имеет место в рамках МКЭ. Приведена оценка критического значения тупого угла в трехмерной сетке. Дан сопоставительный анализ расчетных уравнений для решения нелинейного электромагнитного поля методами конечных элементов и конечных разностей в трехмерной постановке.

**Пятая глава** посвящена основной Теореме: для любой конфигурации сеточных узлов при решении задачи нахождения электромагнитного поля методом конечных элементов триангуляция Делоне является наилучшей (в смысле скорости сходимости процесса последовательных приближений) среди всех возможных треугольных сеток с данным множеством узлов.

Введены понятия удачно и неудачно расположенных множеств узлов на плоскости и в трехмерном пространстве. Показано, что для удачно расположенного множества узлов триангуляция Делоне не содержит тупоугольных треугольников и обеспечивает сходимость процесса последовательных приближений к решению нелинейных полевых задач.

Изучены методы преодоления трудностей, возникающих при практической реализации алгоритмов автоматического построения сетки, связанных с

возможным появлением пересекающихся тетраэдров и вырожденных тетраэдров нулевого объема.

**В шестой главе** исследованы параллельные алгоритмы решения задач электромагнитного поля методом конечных элементов с разбиением на подобласти без перекрытия и с теньвыми гранями (перекрытием). Выведена формула для нахождения предпочтительного числа процессоров в зависимости от конфигурации сетки и параметров многопроцессорной вычислительной системы. Дан сопоставительный анализ методов нахождения трехмерного вектора магнитного потенциала с различными схемами распараллеливания.



# ГЛАВА 1

## ОБЗОР МЕТОДОВ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО РЕШЕНИЯ

### ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

#### 1.1 Методы исследований электромагнитных полей (безМКЭ)

Началом работ по исследованию электромагнитных полей послужили сочинения Дж.К.Максвелла по теории электромагнитного поля [50]. Основополагающим инструментом в этой теории были ставшие классическими уравнения Максвелла в среде:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J}, \operatorname{div}\vec{B} = 0 \quad ,$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B},$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A},$$

где  $\vec{A}$ - векторный магнитный потенциал,  $\vec{J}$ - вектор плотности тока,  $\mu$ - магнитная проницаемость исследуемой области,  $\vec{H}$ - вектор напряженности магнитного поля,  $\vec{B}$ - вектор магнитной индукции.

Заметим, что векторный магнитный потенциал  $\vec{A}$  не определяется уравнениями Максвелла однозначно. Согласно теореме о разложении Гельмгольца, вектор поля можно представить в виде суммы безвихревого и соленоидального полей [10]. Тем самым вектор магнитного потенциала можно представить в виде  $\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \phi$ . Чтобы уравнения Максвелла решались однозначно применяется кулоновская калибровка [92]. При этом в уравнении Максвелла дополнительно ставится условие [49], [55]

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0.$$

В первой половине XX века уравнения Максвелла пытались решить аналитически используя теоретические методы математической физики [47], [3],

[54], [59], [73]. Однако оказалось, что для нелинейных полей, когда магнитная проницаемость  $\mu$  зависит от векторного магнитного потенциала  $\vec{A}$ , точное решение уравнения Максвелла не выражается аналитически через алгебраические функции.

Поэтому с середины XX века для исследования электромагнитных полей со сложной геометрией используются численные методы приближенных вычислений. Вначале были разработаны методы автоматизированного решения общих дифференциальных уравнений [11], [43], [51]. Затем появились численные методы приспособленные именно к уравнениям Максвелла [41].

Математически уравнения Максвелла в непрерывных областях можно представить в виде дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Для решения таких уравнений обязательно задание краевых условий. Обычно в краевых задачах магнитостатики используются граничные условия Дирихле [10], [13], но при решении двумерных задач электромагнитного поля, имеющего оси симметрии, используются и смешанные граничные условия [78].

В математической физике стационарные полевые процессы представляются эллиптическими уравнениями, а нестационарные - параболическими и гиперболическими уравнениями [12], [68]. Нами рассматривались лишь статические электромагнитные поля, поэтому будут рассмотрены в основном эллиптические уравнения математической физики.

Интересной (но труднодоступной для инженерного мышления) была попытка в [90] связать уравнения Максвелла с уравнениями теории относительности. Следует также отметить теоретическую статью А.А.Терзяна и Н.Е.Товмасына [130], где доказывается теорема существования и единственности решений для некоторых классов уравнений типа Максвелла.

**Метод конечных разностей.** До широкого развития компьютерных технологий для решения задач электромагнитного поля основным численным методом был метод конечных разностей и его модификация – метод Рунге-Кутты (см. [66]).

При решении задачи электромагнитного поля методом конечных разностей, исследуемая область разбивается на прямоугольные призмы и для узлов призмы применяется разложение Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n,$$

в результате чего дифференциальное уравнение заменяется разностным.

Особо отметим работу А. А. Терзяна и А. Г. Григорян [80], где методом конечных разностей исследовались магнитные поля электрических машин, причем особое внимание было обращено на учет нелинейных свойств ферромагнитной среды.

**Метод граничных элементов.** При решении трехмерной задачи электромагнитного поля методом граничных элементов аппроксимация искомой функции происходит не в трехмерной области  $V$  решаемой задачи, а на ее границе  $S$  [18]. При таком подходе решение трехмерной задачи заменяется двумерной задачей. При решении задачи методом граничных элементов, решение дифференциальных уравнений с частными производными заменяется ее интегральной формулировкой, а учет граничных условий производится методом Ритца [17], [94]. Основным недостатком метода граничных элементов является то, что он хорошо работает лишь для решения линейных задач, а вот учет неоднородности среды вызывает чрезвычайные затруднения.

**Метод конечных интегралов.** При решении задач электромагнитного поля методом конечных интегралов уравнение Максвелла рассматривается не в дифференциальной, а в интегральной форме [101], [31], [110]. Для дискретизации расчетной области используются две дискретизационные сетки - первичная и

вторичная. Вторичная сетка ортогональна первичной сетке (Рис.1.1). Причем узлы вторичной сетки являются центрами ячеек первичной сетки.

Первичная сетка отвечает за решение уравнений,

$$\oint_{\partial A} \vec{E} dl = - \iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ds,$$

$$\iiint_{\partial V} \vec{B} ds = 0$$

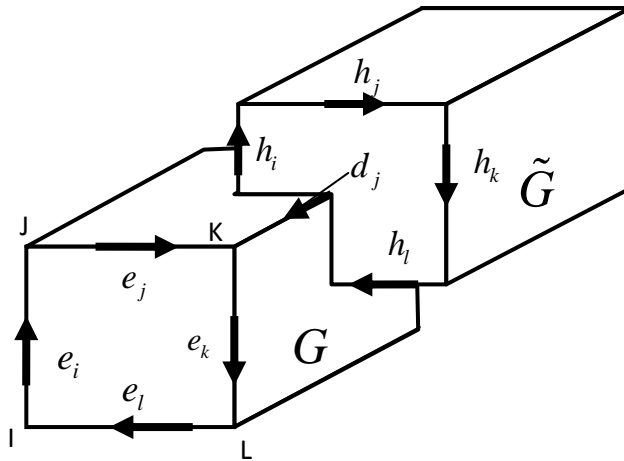


Рис.1.1. Дискретизационная сетка для метода конечных интегралов.

а вторичная сетка - за решение уравнений

$$\oint_{d\vec{A}} \vec{H} dl = \iint_A \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \right) ds$$

$$\iiint_{dV} \vec{D} ds = \int_V \rho dV$$

Для интегрирования этих уравнений, интеграл по поверхности ячейки заменяется на сумму магнитных потоков через ячейку, причем на ребрах сетки располагаются векторы напряженности магнитного поля  $\vec{h}$ , а на гранях - индукции электрического поля  $\vec{d}$  и электрического тока  $\vec{j}$  (Рис.).

В результате этих операций получают так называемые сеточные уравнения Максвелла, которые являются точными представлениями разностных уравнений Максвелла на двойной сетке. Когда узлы сетки находятся в средах с

разными физическими свойствами, то приходится использовать среднее значение этих физических величин (магнитная проницаемость, плотность тока) в узлах сетки. Основным недостатком метода конечных интегралов является его большая ресурсозатратность.

**Метод двух потенциалов.** Для решения трехмерной задачи магнитостатики часто используют метод двух скалярных потенциалов (полного и неполного). Уравнение Максвелла  $rot\vec{H} = \vec{j}$  является вихревым [55], [45]. Следовательно, для всей расчетной области нельзя определить такую скалярную функцию  $U_m(x, y, z)$ , чтобы  $\vec{H} = -grad U(x, y, z)$ . Так как всегда  $rot\vec{H} = rot(-grad(U_m)) = 0$ , то во всей области не может существовать участков содержащих источники тока. По этой причине в работах [126], [38] предложено из расчетной области выделить две подобласти:  $\Omega^p$  - содержащую токовые обмотки, с относительной магнитной проницаемостью  $\mu = 1$  и области  $\Omega^\Psi$  - обладающие ферро-магнитными свойствами. Следовательно, для двух областей имеем

$$rot\vec{H} = \begin{cases} \vec{j} & \text{для } \Omega^p, \\ 0 & \text{для } \Omega^\Psi, \end{cases}$$

где  $\vec{j}$  - плотность тока в обмотках, которые возбуждают магнитное поле. Переходя к градиентам, получаем

$$\vec{H} = \begin{cases} \vec{H}^c + \vec{H}^p = \vec{H}^c - grad(p) & \text{для } \Omega^p, \\ \vec{H}^\Psi = -grad(\Psi) & \text{для } \Omega^\Psi, \end{cases}$$

где  $\vec{H}^c$  - напряженность магнитного поля, создаваемого токовыми обмотками,  $p$  - скалярная функция, называемая неполным потенциалом,  $\Psi$  - скалярная функция, называемая полным потенциалом. Потенциалы  $p$  и  $\Psi$  определяются из дифференциального уравнения

$$div(\mu\vec{H}) = 0.$$

В работе [112] есть утверждение, что для решения трехмерной задачи магнитостатики, в случае равномерного распределения источников тока, проще использовать метод двух скалярных потенциалов. Для решения более сложных трехмерных задач магнитостатики целесообразно использовать векторный метод конечных элементов, который обладает более высокой универсальностью по сравнению с методом двух скалярных потенциалов.

Делались также попытки моделирования электромагнитных процессов на аналоговых вычислительных машинах [6], [8], но они требуют последующего контроля точности вычислений [32].

Основным недостатком метода конечных разностей и других вышеперечисленных методов автоматизированного решения задачи электромагнитного поля является привязанность к регулярным прямоугольным сеткам, что ограничивает возможности дискретизации областей со сложной геометрией. Как показано в работе [20], в которой исследованы электромагнитные поля особо сложной конфигурации в циклотронах, дискретизация областей со сложной геометрией является актуальной задачей. Привязанность к регулярным прямоугольным сеткам лишает также возможности сгущения сетки в той части исследуемой области, где имеется высокий градиент векторного магнитного потенциала. А последняя возможность способствует значительному повышению точности и снижению машинного времени, затраченного на решение задачи [2].

Все это способствовало бурному развитию в конце XX века метода конечных элементов, который имеет возможности произвольной дискретизации областей с помощью нерегулярных сеток. По этой причине в данной работе основное внимание обращено исследованиям электромагнитных полей методом конечных элементов.

## 1.2 Обзор исследований электромагнитных полей

### методом конечных элементов

В основе метода конечных элементов лежит разбиение расчетной области на подобласти (конечные элементы) и замена в каждой подобласти краевой задачи вариационной [53]. То есть поиск решения дифференциальных уравнений с частными производными заменяется поиском минимума некоторого функционала. Для трехмерной задачи электромагнитного поля этим функционалом является энергетический функционал, который имеет следующий вид [29]:

$$F(A) = \int_V \left( \int_0^{\vec{B}} \vec{H} d\vec{B} \right) dV - \int_V \vec{A} \vec{\delta} dV = \iiint_V \left[ \frac{1}{2} (\vec{B} \cdot \vec{H}) - \vec{J} \cdot \vec{A} \right] dV$$

Метод конечных элементов возник в классической теории упругости (Р.Курант, 1943г) и развивался применительно к решению задач механики сплошных сред [74], а также механики жидкости [44]. Термин “конечные элементы”, введенный в 1960г. Р.Клафом, также исходил из теории упругости при кусочно-линейном представлении задач о плоском напряженном состоянии, решая задачу с помощью принципа минимума потенциальной энергии.

Для расчета электромагнитного поля МКЭ впервые был применен в 1965г. О. Зенкевичем и Я. Ченгом [133] и в более математической постановке в 1970г. П.Сильвестером и М.Чари [123]. Свои первые результаты О.Зенкевич обобщил в монографиях [35], [36] и [134], а П. Сильвестер в своей книге [69].

К концу XX века сформировались основы общего метода конечных элементов в монографиях Галлагер [23], Деклу [25] и Кука [105]. Монографии [52], [67], [75] были посвящены применению метода конечных элементов для решения эллиптических уравнений с частными производными, а книги

Ж.Сабонадьера [46], [65] освещают связи метода конечных элементов и систем автоматизированного проектирования.

В Советском Союзе метод конечных элементов начал применяться в работах латышских специалистов В.Апсита [9] и Я.Новика [58], в которых основное внимание обращалось к расчету магнитного поля в электрических машинах с учетом насыщения стали. Отметим, что в расчетных уравнениях Я.Новика неявно фигурируют базисные функции, но они не выделены и никак не названы. К латышской школе примыкают и работы Л.А.Растригина и его учеников [63], [95] связанные с использованием адаптивных алгоритмов принятия решений с особым упором на адаптацию случайного поиска.

Затем появились работы армянских специалистов К.С.Демирчяна [27], [28], А.А.Терзяна, Г.С.Сукиасяна. В работах А.А.Терзяна [76], [77] метод конечных элементов применен для автоматизированного проектирования электрических машин, а в работах А.А.Терзяна и Г.Г.Саркисяна [79], [83], [128] изучены вопросы использования алгоритмов принятия решений в электромеханике. Отметим работы Г.С.Сукиасяна [85] – [88], относящиеся к автоматической адаптации в задачах принятия решения. Работы А.А.Терзяна в этой области обобщены в монографиях [1] и [129].

Сибирскими учеными опубликован цикл работ [4], [24], [56], [60], [61], [62], [98], где исследуются конечно-элементные моделирования магнитных полей в различных электротехнических устройствах. Однако в работах О.Нечаевой, Э.Шуриной и особенно М.Персовой чувствуется “женский” подход упрощения сложных задач и предложенные ими методы (они сами это признают) хорошо работают только для двумерных и плоско-параллельных полей.

В работе Ю.А.Шумилова [97] методом конечных элементов проведен анализ магнитного поля в воздушном зазоре асинхронной машины.



В целом хорошо изучен двумерный метод конечных элементов, задачи же определения трехмерного электромагнитного поля методом конечных элементов исследованы значительно меньше. Причины осложнений, возникающих при переходе от плоского случая к трехмерному, не только в том, что вместо одного уравнения Максвелла приходится решать сразу три зависимых между собой уравнения для каждой составляющей магнитного потенциала [30], [49], но и ввиду невозможности (в отличие от плоского случая) построения регулярной тетраэдрической сетки [34].

Здесь следует отметить пионерскую работу Я.Новика [57]. В работе А.А.Терзяна, А.Д.Джавадяна, В.В.Рымши и Е.И.Бородиной [81] метод конечных элементов применялся для расчета трехмерного магнитного поля линейного индукторного двигателя постоянного тока, причем особое внимание было уделено полю в лобовой части ротора. В работах Н.Демердаша [106], [107] рассмотрен случай анизотропного вектора магнитной проницаемости.

В работах [92], [102] исследовались вопросы влияния Кулоновской калибровки на стабильность численного решения уравнения Максвелла при трехмерном конечно-элементном моделировании.

Отметим работы В.В.Рымши [64], [82], где исследовано методом конечных элементов трехмерное магнитное поле линейного индукторного двигателя постоянного тока.

В ряде работ рассматриваются криволинейные конечные элементы [124], [14], а в статье [37] рассматриваются адаптивные криволинейные сетки. Но криволинейные аппроксимации по точности значительно уступают обычным.

Общим недостатком большинства упомянутых работ по методам конечных элементов является отсутствие солидного анализа процесса сходимости последовательных приближений и его зависимости от геометрии сетки.

### 1.3 Обзор методов автоматизированного построения сеток

Для решения задачи электромагнитного поля важным этапом моделирования является построение расчетной сетки. При использовании метода конечных элементов в качестве конечного элемента чаще всего используют симплексы, состоящие из  $n+1$  точек  $n$ -мерного пространства, то есть треугольники на плоскости и тетраэдры в трехмерном пространстве. По этой причине основное внимание уделяется методам автоматизированного построения треугольных (тетраэдральных) сеток [5].

Дискретизация трехмерных областей с использованием тетраэдрической сетки нашла широкое применение не только для решения задач математической физики, но и в компьютерной графике для моделирования трехмерных тел [22].

В обзоре М.П.Галанина [21] рассмотрены итерационные методы автоматизированного построения тетраэдрических сеток и особо выделены метод граничной коррекции, метод исчерпывания и метод на основе критерия Делоне.

Суть метода граничной коррекции [101], [117] заключается в том, что исследуемая область помещается в сетку состоящую из кубов. Затем происходит дробление каждого куба сетки до тех пор, пока грани куба не пересекают исследуемую область. После дробления расчетной области производится ее тетраэдризация при помощи шаблонов.

После построения первичной сетки, происходит ее коррекция. Коррекция сетки производится таким образом, чтобы вершины и ребра сетки были аппроксимированы по вершинам и ребрам исследуемой области. После построения первичной сетки тетраэдры, лежащие вне исследуемой области,

удаляются. При использовании метода граничной коррекции происходит естественное сгущение сетки вблизи границ исследуемой области.

Сетки построенные с использованием метода граничной коррекции имеют высокую скорость работы, но каждый раз после триангуляции необходимо проверять правильность построения.

Триангуляция трехмерной расчетной области с использованием метода исчерпывания (английское название Advancing Front) основывается на последовательном удалении тетраэдров из расчетной области до тех пор, пока все тетраэдры не исчерпаются [114], [115], [119]. Все алгоритмы, которые основываются на методе исчерпывания, требуют достаточно точную триангуляцию границ области, так как в последующем эта триангуляция не изменяется.

Основным недостатком этого метода является требование достаточно точной триангуляции границ. Этот недостаток особенно существенен при динамической декомпозиции расчетной области в процессе решения нелинейных полевых задач.

Метод исчерпывания уже многие годы используется в программном обеспечении ANSYS, которая предназначена для решения многих задач математической физики [100]. В [19] описан расчет электромагнитных полей с помощью программного комплекса ANSYS, а в книге О.Б.Буля [16] изучены методы расчета магнитных систем электрических аппаратов с помощью комплекса ANSYS. В препринте [91] описан аналогичный пакет программ MULTIC для расчета магнитных полей произвольной конфигурации, а в [109] описан пакет MERMAID для перехода от расчета двумерных магнитных полей к трехмерным.

Суть метода на основе критерия Делоне заключается в построении такой сетки, чтобы в сферу описанную вокруг каждого тетраэдра не попадали другие узлы,

участвующие в триангуляции [108], [116]. В работе Лисейкина [48] изучены методы построения адаптивных сеток. В статье Санкова [121] предлагается адаптировать сетку к условиям задачи при помощи добавления точек Штайнера.

#### 1.4 Обзор исследований посвященных триангуляции Делоне

Важнейшим классом плоских треугольных сеток являются триангуляции Делоне. Триангуляцией Делоне называется треугольная сетка, обладающая свойством, что внутри круга описанного вокруг любого треугольника не попадают вершины других треугольников.

Вначале триангуляции Делоне рассматривались не как расчетные сетки для численного решения дифференциальных уравнений, а как сугубо геометрический объект – мозаику состоящую из треугольников. Сам советский геометр Б.Н.Делоне изучал только вопрос существования таких мозаик. Он доказал [26], что для любой совокупности узлов существует триангуляция Делоне, но она не единственна.

В книге немецких специалистов Д.Штойяна и Й.Мекке [127] рассмотрены случайные бесконечные мозаики, приведена основная формула бесконечных мозаик, связывающая число вершин, ребер и граней мозаик. Обозначим через  $E_v$  среднее число вершин многоугольника мозаики, а через  $E_p$  среднее число ребер выходящих из одной вершины. Тогда для любых бесконечных мозаик имеем (см. также [7])

$$\frac{1}{E_v} + \frac{1}{E_p} = \frac{1}{2}.$$

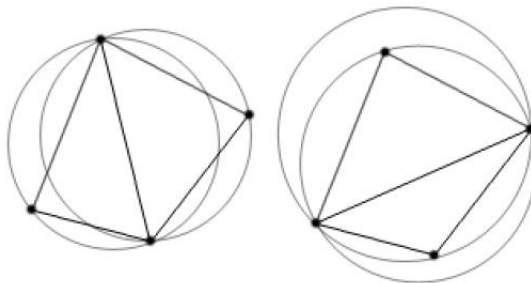
Из этой формулы следует, что для всех треугольных мозаик (а значит и для триангуляции Делоне) среднее число ребер выходящих из одной вершины равно шести, так как  $E_v=3$ . Таким образом в сетках Делоне каждый узел связан в среднем с 6 соседними узлами.

Важнейшим свойством триангуляции Делоне является ее двойственность к мозаикам Вороного [131], [132]. Множество  $V_i$  точек, расстояние которых до узла  $P_i$  меньше, чем до остальных узлов  $P_j$ ,  $i \neq j$ , называется многогранником Вороного относительно системы узлов  $\{P_i\}_{i=1}^n$ . Множество  $\{V_i\}_{i=1}^n$  многогранников называется мозаикой Вороного на базе системы узлов  $\{P_i\}_{i=1}^n$ , если каждый  $V_i$  является многогранником Вороного относительно той же системы узлов.

Отметим, что в отличие от сетки Делоне, состоящей из четырехгранников, в мозаике Вороного количество многогранников равно количеству базовых узлов, и количество граней отдельного многогранника может быть произвольным. Если центры кругов описанных вокруг соседних треугольников Делоне соединить, то получится мозаика Вороного, для которой  $E_V=6$ ,  $E_P=3$ .

По мере развития численных методов приближенных решений технических задач, мозаики стали рассматриваться не как узко геометрические объекты, а как расчетные сетки для численного решения дифференциальных уравнений. Математический термин “мозаика Делоне” (Delaunay tessellation) стал заменяться прикладным термином “сетка Делоне” (Delaunay mesh). Соответственно в исследованиях свойств триангуляции Делоне акцент стал делаться на методах автоматизированного построения триангуляций Делоне.

В двумерном случае наиболее эффективным является алгоритм Скворцова [70], [72] последовательного построения триангуляции Делоне путем перестановки диагональных ребер четырехугольника, образованного двумя соседними треугольниками (Рис. 1.2). Эта операция называется «Flip».



## Рис. 1.2. Последовательное улучшение двумерной триангуляции Делоне

При конечно-элементном моделировании электромагнитного поля в многосредных областях накладывается ограничение на сетку, чтобы каждый элемент находился целиком в одной среде. Алгоритмы автоматизированного построения триангуляций Делоне с ограничениями приведены в работах [71], [122].

В трехмерном пространстве триангуляцией Делоне называется тетраэдральная сетка, обладающая свойством, что внутри шара описанного вокруг любого тетраэдра не попадают вершины других тетраэдров. В трехмерном случае триангуляция Делоне не обладает многими полезными свойствами, присущими двумерной триангуляции Делоне. В частности невозможно покрытие трехмерной области правильными тетраэдрами, что серьезно осложняет программирование трехмерной графики [90], [99].

Алгоритмы автоматизированного построения трехмерных триангуляций Делоне в основном используют ее дуальность трехмерной мозаике Вороного [21]. В работе Джо [113] трехмерные триангуляции Делоне строятся путем добавления новых тетраэдров к уже существующей триангуляции Делоне.

И при трехмерном конечно-элементном моделировании электромагнитного поля в многосредных областях накладывается ограничение, чтобы каждый элемент сетки находился целиком в одной среде. Алгоритмы автоматизированного построения трехмерных сеток Делоне с ограничениями приведены в [125].

При решении нелинейных полевых задач со сложной геометрией сходимость задачи сильно зависит от конфигурации дискретизационной сетки. Впервые понятие “качества сетки” для конечно-элементного моделирования различных физических процессов введено в [118]. Рупперт предложил в [120] для

двумерного конечно-элементного моделирования электромагнитного поля использовать сетку Делоне, так как она имеет высокое качество.

Вклад в математическое обоснование этого предложения внесли работы Бобенко [103], где показано, что дискретный аналог оператора Лапласа в треугольнике зависит от котангенсов внутренних углов треугольника, и Гликенштейна [111], где исследована монотонность котангенсов внутренних углов треугольников в триангуляции Делоне.

### ***1.5 Обзор методов распараллеливания полевых задач***

В связи с развитием GRID и многопроцессорных вычислительных систем становится актуальной организация параллельного решения сеточных задач математической физики с использованием многопроцессорных вычислительных систем [39]. Распараллеливание решения сеточных задач возможно с использованием параллельных алгоритмов решения систем линейных алгебраических уравнений [40] или же разбиением исследуемой области на подобласти и параллельным решением задачи в подобластях [42]. При этом разбиение на подобласти проводится двумя способами: с теньевыми границами (перекрытием) и без перекрытия, что влияет на способы межпроцессорного обмена передачи данных.

В работах А.А.Терзяна и его учеников Л.Т.Оганнисяна, А.Э.Акопяна, А.А.Геворгяна, Г.Г.Саркисяна [84], [89] предложены параллельные алгоритмы решения нелинейных задач электромагнитного поля методом конечных элементов и показано, что существует предпочтительное количество процессоров, при превышении которого процесс ускорения решения задачи резко замедляется. Работа А.А.Терзяна, Л.Т.Оганнисяна, А.Э.Акопяна, А.А.Геворгяна [88] посвящена созданию САПР электромеханических систем для работы в распределенной вычислительной среде.

В книге В.В.Шайдурова [96] распараллеливание процесса вычислений происходит при помощи многосеточных методов конечных элементов. В работе Е.П.Жидкова, М.Б.Юлдашевой, О.И.Юлдашева [33] расчет трехмерного магнитного поля реализован на векторных процессорах. Для векторных процессоров операндами некоторых команд могут быть использованы вектора, что увеличивает скорость операции над векторами. Однако в повседневной жизни в основном используются скалярные процессоры.

## ГЛАВА 2

### ДВУМЕРНЫЕ ПОЛЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Во второй главе дано математическое описание метода конечных элементов для решения двумерной задачи электромагнитного поля на основе базисных функций на плоскости. Дан сопоставительный анализ расчетных уравнений для решения задач нелинейного электромагнитного поля методами конечных элементов (МКЭ) и конечных разностей (МКР). Предложен метод численного расчета электромагнитных полей с использованием алгоритмов принятия решения.

#### **2.1. Сопоставительный анализ методов конечных элементов и конечных разностей [135]**

Задачи электромагнитного поля являются краевыми задачами, состоящими из дифференциального уравнения в частных производных

$$L\varphi(x,y)=f(x,y) \text{ в области } D$$

и краевого условия. Мы в основном пользуемся краевым условием Дирихле

$$\varphi(x,y)=\psi(x,y) \text{ на границе области } D.$$

Здесь  $L$  - дифференциальный оператор Лапласа,  $\Phi$  - векторный или скалярный потенциал,  $f$  и  $\psi$  - заданные функции.



Метод конечных разностей основан на построении в области  $D$  прямоугольной сетки, в узлах которой дифференциальный оператор  $L$  заменяется разностным. Метод конечных элементов предполагает разбиение области  $D$  на произвольные подобласти (элементы) и замена решения дифференциального уравнения в частных производных решением вариационной задачи минимизации энергетического функционала.

Выполнение краевого условия обеспечивается аппроксимацией искомой функции  $\Phi$  системой линейно независимых функций  $\{U_i\}_{i=1}^n$ , одна из которых удовлетворяет граничному условию, а остальные на границе области  $D$  обращаются в ноль (метод Ритца). Функции  $U_i$  мы называем базисными для МКЭ. Таким образом, потенциал  $\Phi$  заменяется линейной комбинацией базисных функций:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n C_i U_i,$$

где  $C_i$  - неизвестные параметры. Приравнивание нулю частных производных по  $C_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$  приводит к минимизации энергетического функционала.

Так как базисные функции выступают со свободными множителями  $C_i$ , то их следует выбирать с точностью до постоянного множителя. Следовательно, в МКЭ в качестве базисных следует брать функции интерполяции  $\alpha_i(x, y)$ , принимающие значение, равное 1, в  $i$ -той точке элемента, и нулю - во всех остальных узлах. Тогда

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^n \Phi_i \alpha_i(x, y).$$

где  $\Phi_i$  - значение искомой функции  $\Phi(x, y)$  в узле  $i$ .

Если линейная функция в трех точках, не лежащих на одной прямой, равна нулю, то она тождественно равна нулю. Так как функция интерполяции  $\alpha_i(x, y)$

в  $n-1$  узловых точках обращается в ноль, то чтобы  $\alpha_i(x, y)$  отличалась от нуля, надо взять  $n$  равным трем. Следовательно, предположение о линейности потенциала внутри конечного элемента требует взять в качестве элементов только треугольники.

Исследуемую область  $D$  можно разбить на элементы так, чтобы граница раздела двух сред проходила бы по границам элементов, что является несомненным преимуществом МКЭ. Из-за произвола в выборе элементов это можно сделать для любой геометрии сред, а не только для прямоугольных, как это имеет место в МКР.

Применим МКЭ для двумерного уравнения векторного магнитного потенциала  $A$ , получающегося из классических уравнений Максвелла:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -\delta, \quad (2.1.1)$$

где  $\nu = 1/\mu$  - величина, обратная магнитной проницаемости.

Переход от краевой задачи к вариационной приводит к минимизации энергетического функционала

$$I(A) = \frac{1}{2} \iint \left[ \nu \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 - 2\delta A \right] dx dy. \quad (2.1.2)$$

Единственной линейной функцией, принимающей в вершинах  $m$  и  $j$  треугольника  $i, j, m$  нулевое значение, а в точке  $i$  значение единица, является

$$\alpha_i(x, y) = \frac{(x - x_m)(y_j - y_m) - (y - y_m)(x_j - x_m)}{(x_i - x_m)(y_j - y_m) - (y_i - y_m)(x_j - x_m)}.$$

Отметим, что знаменатель равен удвоенной площади треугольника и поэтому всегда отличен от нуля:

$$(x_i - x_m)(y_j - y_m) - (y_i - y_m)(x_j - x_m) = x_i y_j + x_m y_i + x_j y_m - x_i y_m - x_m y_j - x_j y_i =$$

$$= \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \end{vmatrix} = 2\Delta,$$

где  $\Delta$  - площадь треугольника.

Значения векторного магнитного потенциала  $A$  внутри треугольника  $i, j, m$  принимаем линейной:

$$A(x, y) = \frac{A_i}{2\Delta} [(x - x_m)(y_j - y_m) - (y - y_m)(x_j - x_m)] + \\ + \frac{A_j}{2\Delta} [(x - x_i)(y_m - y_i) - (y - y_i)(x_m - x_i)] + \frac{A_m}{2\Delta} [(x - x_j)(y_i - y_j) - (y - y_j)(x_i - x_j)]. \quad (2.1.3)$$

Значения магнитной проницаемости полагаем постоянной внутри треугольника  $i, j, m$ . Подставляя (2.1.3) в равенство (2.1.2) и дифференцируя по  $A_i$ , получаем

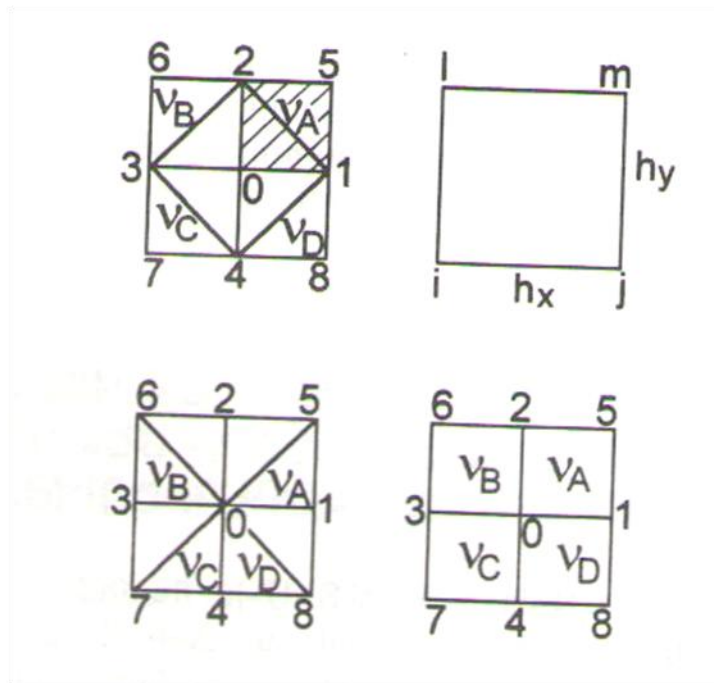
$$\frac{\partial I}{\partial A_i} = \iint_{(i,j,m)} \left[ v \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial}{\partial A_i} \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right) + v \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial}{\partial A_i} \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right) - \delta \frac{\partial A}{\partial A_i} \right] dx dy = \\ = \left\{ v \frac{1}{2\Delta} [A_i (y_i - y_m) + A_j (y_m - y_i) + A_m (y_i - y_j)] \frac{(y_j - y_m)}{2\Delta} + \right. \\ \left. + v \frac{1}{2\Delta} [A_i (x_j - x_m) + A_j (x_m - x_i) + A_m (x_i - x_j)] \frac{x_j - x_m}{2\Delta} \right\} - \iint_{(i,j,m)} \delta \frac{\partial A}{\partial A_i} dx dy = \\ = \frac{v}{4\Delta} \left\{ A_i [(y_j - y_m)^2 + (x_j - x_m)^2] + A_j [(y_i - y_m)(y_m - y_i) + (x_j - x_m)(x_m - x_i)] + \right. \\ \left. + A_m [(y_j - y_m)(y_i - y_j) - (x_j - x_m)(x_i - x_j)] \right\} - \frac{\Delta}{3} \delta. \quad (2.1.4)$$

Уравнение (2.1.4) является основным для приближенного решения (2.1.1) методом конечных элементов с линейными базисными функциями. Величины  $\partial I / \partial A_j$  и  $\partial I / \partial A_m$  можно получить из соображений симметрии, меняя в правой части (2.1.4) нумерацию вершин треугольника. Вычислив  $\partial I / \partial A_i$  по (2.1.4) для всех треугольников, примыкающих к фиксированному узлу  $i$ , сложив их и сумму приравняв нулю, получим систему линейных уравнений относительно неизвестных  $\{A_i\}$ . Количество уравнений при этом будет равно количеству узлов.

Решение системы будем считать приближенным значением потенциала  $A$  в узловых точках.

Для сравнения с методом конечных разностей применим метод конечных элементов к прямоугольным равнобедренным треугольникам с катетом, равным  $h$  (рис. 2.1). Площадь такого треугольника равна  $\Delta = h^2 / 2$ .

**Рис.2.1**



За точку  $i$  возьмем  $0$ . Предположим, что значение  $v$  внутри квадрата с вершинами  $0, 1, 5, 2$  равно  $v_A$ , внутри  $0, 2, 6, 3$  -  $v_B$  и т. д.

В дальнейшем при сопоставительном анализе погрешность, вносимая дискретизацией значений магнитной проницаемости, не будет учитываться.

Для треугольника  $0, 1, 2$  из соотношения (2.1.4) имеем:

$$\frac{\partial I}{\partial A_0} = v_A \left( A_0 - \frac{1}{2} A_1 - \frac{1}{2} A_2 \right) - \frac{1}{6} \delta h^2.$$

Записав аналогичные выражения для четырех треугольников, окружающих узел  $0$  и сложив их, получаем

$$A_0 (v_A + v_B + v_C + v_D) - A_1 \frac{v_A + v_D}{2} - A_2 \frac{v_A + v_B}{2} - A_3 \frac{v_B + v_C}{2} - A_4 \frac{v_C + v_D}{2} - \frac{2}{3} \delta h^2 = 0. \quad (2.1.5)$$

Так как внутри элементов значения  $v$  принимается постоянной, то  $v$  на линии раздела двух элементов полагаем равным среднему арифметическому

значению  $v$  в этих элементах. Тогда четырехточечная разностная аппроксимация уравнения (2.1.1) примет вид

$$A_0(v_A + v_B + v_C + v_D) - A_1 \frac{v_A + v_D}{2} - A_2 \frac{v_A + v_B}{2} - A_3 \frac{v_B + v_C}{2} - A_4 \frac{v_C + v_D}{2} - \delta h^2 = 0. \quad (2.1.6)$$

Уравнения (2.1.5) и (2.1.6) совпадают за исключением свободного члена. Эта разница не существенна, так как при расчете потенциала в соседней точке 1 коэффициент при  $\delta$  получается равным  $4\delta h_2/3$ , что компенсирует эту разницу.

Следовательно, при четырехточечной аппроксимации можно ожидать совпадения погрешностей и скоростей сходимости методов конечных элементов и конечных разностей.

Рассмотрим более точную аппроксимацию – восьмиточечную. В книге Милна [51] показано, что погрешность, вызываемая заменой потенциала в точке 0 потенциалами в точках 1,2,3,4 (рис. 2.1), имеет порядок  $4h^4$ , а в точках 5,6,7,8 - порядок  $(-16h^4)$ . Восьмиточечную разностную аппроксимацию получим, если выражение (2.1.6) умножим на 4 и сложим с таким же выражением (2.1.6) для узлов 5, 6, 7, 8:

$$4\left[A_0(v_A + v_B + v_C + v_D) - A_1 \frac{v_A + v_D}{2} - A_2 \frac{v_A + v_B}{2} - A_3 \frac{v_B + v_C}{2} - A_4 \frac{v_C + v_D}{2} - \delta h^2\right] + \\ + \left[A_0(v_A + v_B + v_C + v_D) - A_5 v_A - A_6 v_B - A_7 v_C - A_8 v_D - \delta(\sqrt{2}h)^2\right] = 0. \quad (2.1.7)$$

Погрешность полученной разностной аппроксимации уравнения (2.1.1) будет более высокого порядка, чем  $h^4$ .

Оценим погрешность метода конечных элементов для такой же восьмиточечной фигуры. Для треугольника 0,1,5 (рис. 2.1), учитывая, что  $x_j = x_m$ ;  $y_i = y_j$ ;  $x_j - x_i = h$ ;  $y_m - y_j = h$ , (2.1.4) примет вид:

$$\frac{\partial I}{\partial A_0} = \frac{v_A}{2h^2} [A_0 h^2 + A_1 (-h)^2 + A_5 0] - \frac{\delta h^2}{6}$$

Аналогично записав выражения  $\frac{\partial I}{\partial A_0}$  для остальных семи треугольников и просуммировав их, получим

$$A_0(v_A + v_B + v_C + v_D) - A_1 \frac{v_A + v_D}{2} - A_2 \frac{v_A + v_B}{2} - A_3 \frac{v_B + v_C}{2} - A_4 \frac{v_C + v_D}{2} - \frac{4}{3} \delta h^2 = 0. \quad (2.1.8)$$

Как видим (2.1.8) в основном совпадает с (2.1.6). Как уже было указано, коэффициент при  $\delta$  формулы (2.1.6) равен среднему значению аналогичных коэффициентов при  $\delta$  формул (2.1.5) и (2.1.8). Следовательно, метод конечных элементов, примененный для восьми точек, дает четырехточечное разностное уравнение, которое, исходя из результатов [51], имеет погрешность порядка  $4h^4$ .

Теперь рассмотрим в качестве элементов четырехугольники (рис. 2.1). Как уже отмечалось выше, функцию  $A(x,y)$  внутри четырехугольника придется взять нелинейной. Предположим, что нелинейная часть  $A(x,y)$  имеет вид  $sxy$ . Для сравнения с МКР рассмотрим в качестве элементов прямоугольники со сторонами, параллельными осям координат. Базисной функцией является:

$$\alpha_i(x, y) = \frac{(x - x_j)(y - y_l)}{(x_i - x_j)(y_i - y_l)} = \frac{1}{h_x h_y} (x - x_j)(y - y_l);$$

$$\alpha_j(x, y) = \frac{(x - x_i)(y - y_m)}{(x_j - x_i)(y_j - y_m)} = \frac{1}{h_x (-h_y)} (x - x_i)(y - y_m);$$

.....

Остальные базисные функции получим из соображений симметрии, меняя нумерацию вершин прямоугольника.

Потенциал в прямоугольнике будет нелинейной функцией:

$$A = \frac{1}{h_x h_y} \left[ A_i (x - x_j)(y - y_l) - A_j (x - x_i)(y - y_m) + A_m (x - x_l)(y - y_j) - A_l (x - x_m)(y - y_i) \right]. \quad (2.1.9)$$

Продифференцируем (2.1.2) по  $A_i$  полагая внутри прямоугольника  $i, j, m, l$  величину  $v$  постоянной:

$$\frac{\partial I}{\partial A_i} = \iint_{i,j,m,l} \left[ v \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial}{\partial A_i} \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right) + v \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial}{\partial A_i} \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right) - \delta \frac{\partial A}{\partial A_i} \right] dx dy. \quad (2.1.10)$$

В соответствии с (2.1.9), определим частные производные от  $A$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x} &= \frac{1}{h_x h_y} \left[ (A_i - A_j)(y - y_l) + (A_m - A_l)(y - y_j) \right]; \\ \frac{\partial A}{\partial y} &= \frac{1}{h_x h_y} \left[ (A_i - A_l)(x - x_j) + (A_m - A_j)(x - x_i) \right]; \\ \frac{\partial}{\partial A_i} \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right) &= \frac{y - y_l}{h_x h_y}; & \frac{\partial}{\partial A_i} \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right) &= \frac{x - x_j}{h_x h_y} \end{aligned} \right\} \quad (2.1.11)$$

Подставляя выражение (2.1.11) в (2.1.10), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial A_i} &= \iint \frac{v}{h_x^2 h_y^2} \left[ (A_i - A_j)(y - y_l)^2 + (y - y_l)(y - y_j)(A_m - A_l) \right] dx dy + \\ &+ \frac{v}{h_x^2 h_y^2} \int_{x_i}^{x_j} \left[ (A_i - A_l)(x - x_j)^2 + (x - x_j)(x - x_i)(A_m - A_j) \right] dx - \\ &- \frac{\delta}{h_x h_y} \iint (x - x_j)(y - y_l) dx dy. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.12)$$

Определим интегралы из правой части (2.1.12):

$$\int_{y_j}^{y_l} (y - y_l)(y - y_j) dy = \int_{y_j}^{y_l} (y - y_l)^2 dy + h_y \int_{y_j}^{y_l} (y - y_l) dy = \frac{1}{3} h_y^3 - \frac{1}{2} h_y^3 = -\frac{1}{6} h_y^3.$$



Аналогично имеем:

$$\int_{y_f}^{y_l} (y - y_l)^2 dy = \frac{1}{3} h_y^3, \quad \int_{x_l}^{x_j} (x - x_l)(x - x_j) dx = -\frac{1}{6} h_x^3$$

$$\int_{x_l}^{x_j} (x - x_j)^2 dx = \frac{1}{3} h_x^3, \quad \int_{y_f}^{y_l} \int_{x_l}^{x_j} (x - x_j)(y - y_l) dx dy = \frac{1}{4} h_x^2 h_y^2.$$

## 2.2. Общий подход к решению полевых задач методом конечных элементов [136]

Пусть рассматриваемая область разбита на элементы и на границах элементов выделены вершины (узлы). Внутри каждого элемента  $e$  потенциал  $\Phi$  аппроксимируем линейной комбинацией базисных функций. Рассмотрим узел  $j$ , лежащий на границе элементов  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , запишем общее уравнение метода конечных элементов:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial I \left( \sum_i \Phi_i a_i^{e_k} \right)}{\partial \Phi_j} = 0. \quad (2.2.1)$$

где  $\Phi_i$  - значение потенциала  $\Phi(x, y)$  в узле  $i$ . Заметим, что внутреннее суммирование ведется по всем узлам, принадлежащим элементу  $e_k$ .

В результате получается система уравнений относительно неизвестных  $\Phi_i$ , при этом число уравнений равно количеству узлов.

Рассмотрим уравнение (2.2.1) для векторного магнитного потенциала  $A$  и энергетического функционала (2.1.2). Для произвольного узла  $j$  лежащего на границе элемента  $e$ , принимая  $v$  постоянной внутри  $e$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1 \left( \sum_i A_i \alpha_i^e \right)}{\partial A_j} &= \iint_e \left[ v_e \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_i A_j \alpha_i^e \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial A_j} \left( \sum_i A_i \alpha_i^e \right) + \right. \\ &+ v_e \frac{\partial}{\partial y} \left( \sum_i A_i \alpha_i^e \right) \frac{\partial^2}{\partial y \partial A_j} \left( \sum_i A_i \alpha_i^e \right) - \delta \frac{\partial}{\partial A_j} \left( \sum_i A_i \alpha_i^e \right) \left. \right] dxdy = \\ &= \sum_i A_i v_e \iint_e \left( \frac{\partial \alpha_i^e}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j^e}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i^e}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j^e}{\partial y} \right) dxdy - \delta \iint_e \alpha_i^e dxdy = v_e \sum_i A_i \beta_{ij}^e - \delta C_j^e, \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} \beta_{ij}^e &= \beta_{ji}^e = \iint_e \left( \frac{\partial \alpha_i^e}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j^e}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i^e}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j^e}{\partial y} \right) dxdy; \\ C_i^e &= \iint_e \alpha_i^e dxdy \end{aligned} \right\} \quad (2.2.2)$$

Итак, получается система уравнений для каждого узла  $j$

$$\sum_e \left( \sum_{i=1}^L A_i \beta_{ij}^e - \delta C_j^e \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.2.3)$$

Внутреннее суммирование ведется по узлам, принадлежащим элементу  $e$ , внешнее - по всем элементам, содержащим узел  $j$ . В (2.2.3)  $N$  обозначает число узлов сетки,  $L$ - количество узлов элемента  $e$ .

Заметим, что равенства (2.2.3) инвариантны относительно декартовой системы координат и форм конечных элементов, а коэффициенты (2.2.2) зависят от конфигурации элементов  $e$  и выбора базисных функций  $\alpha_i^e$ .

Найдем значения коэффициентов (2.2.2) для треугольника  $i, j, m$  и линейной базисной функции

$$\alpha_i^e = \frac{1}{2\Delta} [(x - x_m)(y_j - y_m) - (y - y_m)(x_j - x_m)],$$

где  $\Delta$  - площадь треугольника  $e$ .

Так как базисные функции линейны, то их производные являются постоянными величинами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_i^e}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta} (y_j - y_m); \\ \frac{\partial \alpha_i^e}{\partial y} &= \frac{1}{2\Delta} (x_m - x_j); \end{aligned}$$

и их в (2.2.2) можно вынести из-под знака интеграла:

$$\left. \begin{aligned} \beta_{ii}^e &= \frac{1}{4\Delta} [(y_j - y_m)^2 + (x_j - x_m)^2]; \\ \beta_{ij}^e &= \frac{1}{4\Delta} [(y_j - y_m)(y_m - y_i) + (x_j - x_m)(x_m - x_i)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.4)$$

Во втором из уравнений (2.2.2) заменой  $x$  и  $y$  на их средние значения

$$x \approx x_{\text{ср}} = (x_i + x_j + x_m)/3 \text{ и } y \approx y_{\text{ср}} = (y_i + y_j + y_m)/3$$

получим:

$$\begin{aligned} C_i^e &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{x_i + x_j + x_m}{3} - x_m \right) (y_j - y_m) - \left( \frac{y_i + y_j + y_m}{3} - y_m \right) (x_j - x_m) \right] = \\ &= \frac{1}{6} [(x_i + x_j - 2x_m)(y_j - y_m) - (y_i + y_j - 2y_m)(x_j - x_m)] = \\ &= \frac{1}{6} [(x_i - x_m)(y_j - y_m) - (y_i - y_m)(x_j - x_m)] = \frac{1}{3} \Delta. \end{aligned}$$

Подставляя (2.2.4) в (2.2.3) получим расчетное уравнение для решения полевой задачи с сеткой из треугольных элементов.

Рассмотрим теперь в качестве элементов прямоугольники с четырьмя вершинами-узлами (рис. 2.2,а). Базисные функции для прямоугольника будут уже нелинейными:

$$\alpha_1(x, y) = \frac{1}{h_x h_y} (x - x'')(y - y''). \quad (2.2.5)$$

Зная базисные функции (2.2.5), можно по (2.2.4) вычислить коэффициенты  $\beta_{ij}$  и  $C_i$ . Частные производные базисных функций имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} &= -\frac{\partial \alpha_2}{\partial x} = \frac{1}{h_x h_y} (y - y''); \\ \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} &= -\frac{\partial \alpha_4}{\partial x} = \frac{1}{h_x h_y} (y - y'); \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} &= -\frac{\partial \alpha_4}{\partial y} = \frac{1}{h_x h_y} (x - x''); \\ \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} &= -\frac{\partial \alpha_2}{\partial y} = \frac{1}{h_x h_y} (x - x'). \end{aligned} \right\}$$

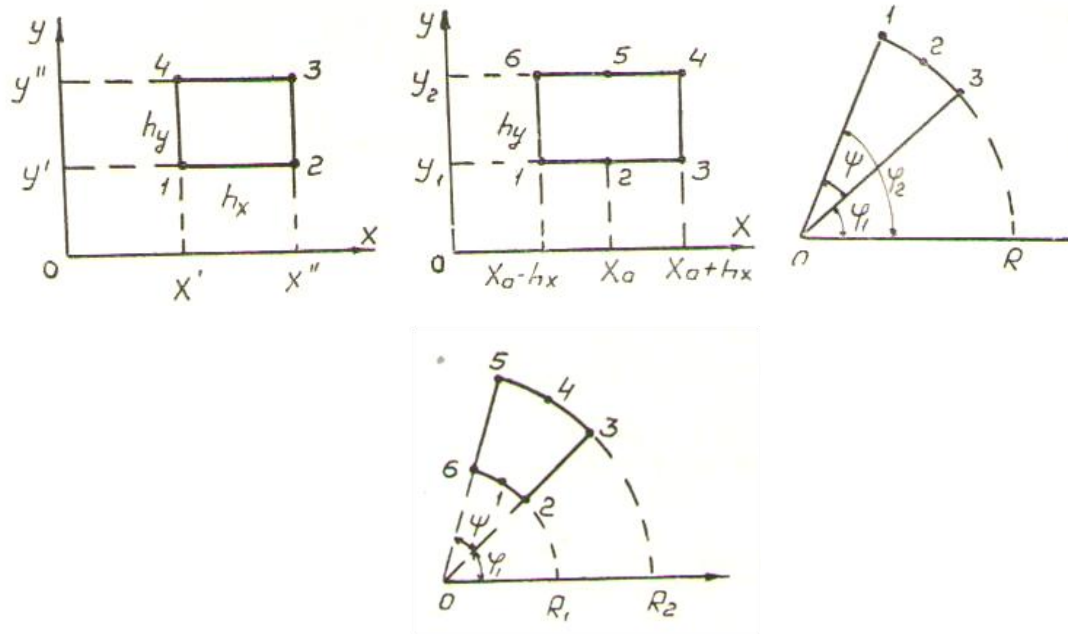


Рис.2.2.

Чтобы вычислить коэффициенты  $\beta_{ij}^e$  и  $C_i^e$  определим интегралы:

$$\left. \begin{aligned}
 \int_{x'}^{x''} (x-x'')^2 dx &= \frac{1}{3} h_x^3; \\
 \int_{y'}^{y''} (y-y'')^2 dy &= \frac{1}{3} h_y^3; \\
 \int_{x'}^{x''} (x-x')(x-x'') dx &= -\frac{1}{6} h_x^3; \\
 \int_{y'}^{y''} (y-y')(y-y'') dy &= -\frac{1}{6} h_y^3; \\
 \int_{x'}^{x''} \int_{y'}^{y''} (x-x'')(y-y'') dy dx &= \frac{1}{4} h_x^2 h_y^2.
 \end{aligned} \right\} (2.2.6)$$

С помощью интегралов (2.2.6) по (2.2.4) нетрудно получить значения  $\beta_{ij}^e$  и  $C_i^e$ .

Например,

$$\beta_{11} = \iint \left[ \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy =$$

$$= \frac{1}{h_x^2 h_y^2} \left[ h_x \int_{y'}^{y''} (y - y'')^2 dy + h_y \int_{x'}^{x''} (x - x'')^2 dx \right] = \frac{1}{3h_x h_y} (h_x^2 + h_y^2).$$

Аналогично:

$$\left. \begin{aligned} \beta_{12} &= \frac{1}{6h_x h_y} (h_x^2 - 2h_y^2); \\ \beta_{13} &= \frac{1}{6h_x h_y} (h_x^2 + h_y^2); \\ \beta_{14} &= \frac{1}{6h_x h_y} (h_y^2 - 2h_x^2); \\ C_1 &= \frac{1}{4} h_x h_y. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.7)$$

Другие коэффициенты ( $\beta_{22}, \beta_{23}, \beta_{24}, \beta_{33}, \beta_{34}, \beta_{44}$ ) могут быть получены из соображений симметрии, например,  $\beta_{22} = \beta_{11}, \beta_{34} = \beta_{12}$  и т.д.

Подставляя (2.2.7) в (2.2.3), получим расчетное уравнение.

Теперь рассмотрим прямоугольники с шестью узловыми точками (рис. 2.2,б). Базисные функции для них строятся с помощью полиномов Лагранжа от двух переменных:

$$\alpha_2(x, y) = \frac{1}{h_x^2 h_y} (y - y_2)(x - x_0 - h_x)(x - x_0 + h_x);$$

$$\alpha_3(x, y) = \frac{-1}{2h_x^2 h_y} (y - y_2)(x - x_0)(x - x_0 + h_x);$$

$$\alpha_4(x, y) = \frac{1}{2h_x^2 h_y} (y - y_1)(x - x_0)(x - x_0 + h_x);$$

$$\alpha_5(x, y) = \frac{-1}{h_x^2 h_y} (y - y_1)(x - x_0 - h_x)(x - x_0 + h_x);$$

$$\alpha_6(x, y) = \frac{1}{2h_x^2 h_y} (y - y_1)(x - x_0)(x - x_0 - h_x).$$

При вычислении коэффициентов  $\beta_{ij}^e$  и  $C_i^e$  для прямоугольников с шестью узлами

приходится вычислять интегралы:

$$\int_{x_0 - h_x}^{x_0 + h_x} (x - x_0)^2 dx = \frac{2}{3} h_x^3;$$

$$\int_{x_0 - h_x}^{x_0 + h_x} (2x - 2x_0)(2x - 2x_0 \pm h_x) dx = \frac{8}{3} h_x^3;$$

$$\int (2x - 2x_0 \pm h_x)^2 dx = \frac{14}{3} h_x^3;$$

$$\int (2x - 2x_0 - h_x)(2x - 2x_0 + h_x) dx = \frac{2}{3} h_x^3;$$

(2.2.8)

$$\int (x - x_0)^2 (x - x_0 \pm h_x)^2 dx = \frac{16}{15} h_x^5;$$

$$\int (x - x_0)^2 (x - x_0 + h_x)(x - x_0 - h_x) dx = -\frac{4}{15} h_x^5;$$

$$\int (x - x_0)(x - x_0 \pm h_x)^2 (x - x_0 \pm h_x) dx = -\frac{4}{15} h_x^5;$$

С помощью (2.2.6) и (2.2.8) и уравнения (2.2.4) получим значения  $\beta_{ij}^e$  и  $C_i^e$ .

Например,

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} = \frac{1}{2h_x^2 h_y} (y - y_2)(2x - 2x_0 - h_x);$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = \frac{1}{2h_x^2 h_y} (x - x_0)(x - x_0 - h_x);$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial x} = \frac{1}{2h_x^2 h_y} (y - y_2)(2x - 2x_0);$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial y} = \frac{1}{2h_x^2 h_y} (x - x_0 - h_x)(x - x_0 + h_x);$$

$$\begin{aligned} \beta_{12} &= \iint \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= -\frac{1}{2h_x^4 h_y^2} \left[ \iint (y - y_2)^2 (2x - 2x_0)(2x - 2x_0 - h_x) dx dy + \right. \\ &\quad \left. + h_y \int_{x_0 - h_x}^{x_0 + h_x} (x - x_0)(x - x_0 - h_x)^2 (x - x_0 + h_x) dx \right] = -\frac{1}{2h_x^4 h_y^2} \left( \frac{1}{3} h_y^3 \frac{8}{3} h_x^3 - \frac{4}{15} h_x^5 h_y \right) \end{aligned}$$

Обозначая  $k = h_y / h_x$ , окончательно получаем:

$$\beta_{12} = -\frac{4}{9}k + \frac{2}{15}k^{-1}.$$

Аналогичным образом можно получить выражения для остальных коэффициентов. Для угловых вершин имеем:

$$\beta_{11} = \frac{7}{18}k + \frac{4}{15}k^{-1}; \quad \beta_{13} = \frac{1}{18}k - \frac{1}{15}k^{-1};$$

$$\beta_{14} = \frac{1}{36}k + \frac{1}{15}k^{-1}; \quad \beta_{15} = -\frac{2}{9}k - \frac{2}{15}k^{-1};$$

$$\beta_{16} = \frac{7}{36}k - \frac{4}{15}k^{-1}; \quad C_1 = \frac{1}{6}h_x h_y.$$

Для узлов 2 и 5, лежащих в середине оснований прямоугольников, получим:



$$\beta_{22} = \frac{8}{9}k + \frac{16}{15}k^{-1}; \quad \beta_{25} = \frac{4}{9}k - \frac{16}{15}k^{-1};$$

$$\beta_{23} = \beta_{21} = -\frac{4}{9}k + \frac{2}{15}k^{-1}; \quad \beta_{24} = \beta_{26} = -\frac{2}{9}k - \frac{2}{15}k^{-1};$$

$$C_2 = \frac{2}{3}h_x h_y; \quad C_5 = C_2.$$

Перейдем к рассмотрению криволинейных элементов - сектора (рис. 2.2,в) и криволинейной трапеции (рис. 2.2,з). В качестве узлов примем вершины и середины дуг. Для криволинейных элементов расчеты удобнее производить в полярных координатах.

Уравнение Максвелла (2.1.1) в полярных координатах имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( rv \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( v \frac{\partial A}{\partial \varphi} \right) = -\delta r.$$

Аналогом энергетического функционала (2.1.2) в полярных координатах является функционал

$$I_2(I) = \frac{1}{2} \iint \left[ rv \left( \frac{\partial A}{\partial r} \right)^2 + \frac{v}{r} \left( \frac{\partial A}{\partial \varphi} \right)^2 - 2\delta r A \right] dr d\varphi.$$

Коэффициенты  $\beta_{ij}^e$  и  $C_i^e$  в полярных координатах имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \beta_{ij}^e &= \iint_e \left( r \frac{\partial \alpha_i^e}{\partial r} \frac{\partial \alpha_j^e}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha_i^e}{\partial \varphi} \frac{\partial \alpha_j^e}{\partial \varphi} \right) dr d\varphi, \\ C_i^e &= \iint_e r \alpha_i^e dr d\varphi. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Для треугольника  $i, j, m$ , коэффициенты  $\beta_{ij}^e$  и  $C_i^e$  в полярных координатах имеют вид:

$$\begin{aligned}
\beta_{ii}^e &= \frac{\Delta}{D^2} [(\varphi_j - \varphi_m)^2 + \left(\frac{r_j - r_m}{r_{cp}}\right)^2], \\
\beta_{ij}^e &= \frac{\Delta}{D^2} [(\varphi_j - \varphi_m)(\varphi_m - \varphi_i) + \frac{1}{r_{cp}^2}(r_j - r_m)(r_m - r_i)], \\
C_i^e &= \frac{1}{3}\Delta,
\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

где -  $r_{cp} = \frac{1}{3}(r_i + r_j + r_m)$ ;  $D = \begin{vmatrix} r_i & \varphi_i & 1 \\ r_j & \varphi_j & 1 \\ r_m & \varphi_m & 1 \end{vmatrix}$

$\Delta$  - площадь треугольника, вычисляемая по формуле

$$\Delta = \frac{1}{2} [r_i r_j \sin(\varphi_j - \varphi_i) + r_j r_m \sin(\varphi_m - \varphi_j) + r_i r_m \sin(\varphi_i - \varphi_m)].$$

Например, для сектора базисными функциями являются

$$\left. \begin{aligned}
\alpha_0(r, \varphi) &= \frac{R-r}{R}; \\
\alpha_1(r, \varphi) &= \frac{r}{R\psi^2}(\varphi - \varphi_1)(2\varphi - \varphi_1 - \varphi_2); \\
\alpha_2(r, \varphi) &= -\frac{4r}{R\psi^2}(\varphi - \varphi_1)(\varphi - \varphi_2); \\
\alpha_3(r, \varphi) &= \frac{r}{R\psi^2}(\varphi - \varphi_2)(2\varphi - \varphi_1 - \varphi_2).
\end{aligned} \right\}$$

Для криволинейной трапеции имеем базисные функции

$$\left. \begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{4}{h\psi^2}(\varphi - \varphi_1)(\varphi - \varphi_2)(r - R_2); \\
\alpha_2 &= \frac{4}{h\psi^2}(\varphi - \varphi_2)(2\varphi - \varphi_1 - \varphi_2)(R_2 - r); \\
\alpha_3 &= \frac{1}{h\psi^2}(\varphi - \varphi_2)(2\varphi - \varphi_1 - \varphi_2)(r - R_1); \\
\alpha_4 &= -\frac{4}{h\psi^2}(\varphi - \varphi_1)(\varphi - \varphi_2)(R_1 - r); \\
\alpha_5 &= \frac{1}{h\psi^2}(\varphi - \varphi_1)(2\varphi - \varphi_1 - \varphi_2)(r - R_1); \\
\alpha_6 &= \frac{1}{h\psi^2}(\varphi - \varphi_1)(2\varphi - \varphi_1 - \varphi_2)(R_2 - r).
\end{aligned} \right\}$$

Частные производные базисных функций для сектора имеют вид:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial \alpha_0}{\partial r} &= -\frac{1}{R}; & \frac{\partial \alpha_0}{\partial \varphi} &= 0; \\
\frac{\partial \alpha_1}{\partial r} &= \frac{1}{R\psi^2}(\varphi - \varphi_1)(2\varphi - \varphi_1 - \varphi_2); \\
\frac{\partial \alpha_1}{\partial \varphi} &= \frac{r}{R\psi^2}(4\varphi - 3\varphi_1 - \varphi_2); \\
\frac{\partial \alpha_2}{\partial r} &= -\frac{4}{R\psi^2}(\varphi - \varphi_1)(\varphi - \varphi_2); \\
\frac{\partial \alpha_2}{\partial \varphi} &= -\frac{4r}{R\psi^2}(2\varphi - \varphi_1 - \varphi_2); \\
\frac{\partial \alpha_3}{\partial r} &= \frac{\varphi - \varphi_2}{R\psi^2}(2\varphi - \varphi_1 - \varphi_2); \\
\frac{\partial \alpha_3}{\partial \varphi} &= \frac{r}{R\psi^2}(4\varphi - 3\varphi_2 - \varphi_1);
\end{aligned} \right\}$$

Подставив эти выражения в (2.2.4) и проинтегрировав, получим коэффициенты  $\beta_{ij}^s$  и  $C_i^s$  для сектора. Так,

$$\begin{aligned}\beta_{02} = \beta_{03} &= -\frac{1}{R} \int r dr \int \frac{1}{R\psi^2} (\varphi - \varphi_1) (2\varphi - \varphi_1 - \varphi_2) d\varphi = \\ &= -\frac{1}{R^2\psi^2} \frac{R^2}{2} \frac{\Psi^2}{6} = -\frac{1}{12} \Psi.\end{aligned}$$

Аналогично можно получить:

$$\begin{aligned}\beta_{00} &= \frac{1}{2} \psi; & \beta_{02} &= -\frac{1}{3} \psi; & \beta_{01} &= \beta_{03} = -\frac{1}{12} \psi; \\ \beta_{11} = \beta_{33} &= \frac{1}{15} \psi + \frac{7}{6} \psi^{-1}; & \beta_{22} &= \frac{4}{15} \psi - \frac{8}{3} \psi^{-1}; \\ \beta_{13} &= -\frac{1}{60} \psi + \frac{1}{6} \psi^{-1}; & \beta_{12} = \beta_{23} &= \frac{1}{30} \psi - \frac{4}{3} \psi^{-1}; \\ C_0 &= \frac{1}{3} \Delta; & C_1 = C_3 &= \frac{1}{9} \Delta; & C_2 &= \frac{4}{9} \Delta.\end{aligned}$$

Для криволинейной трапеции с шагами  $\psi$  и  $h_2 = R_2 - R_1$  отделяя радиальную составляющую  $\beta_{ij} = \beta_{ij}^r + \beta_{ij}^\varphi$ , получаем

$$\beta_{11}^r = \beta_{44}^r = -\beta_{14}^r = \frac{4}{15} \frac{\psi}{h} (R_1 + R_2);$$

$$\beta_{12}^r = \beta_{16}^r = \beta_{34}^r = \beta_{45}^r = \frac{\psi}{30h} (R_1 + R_2);$$

$$\beta_{13}^r = \beta_{15}^r = \beta_{24}^r = \beta_{46}^r = -\frac{\psi}{30h} (R_1 + R_2);$$

$$\beta_{22}^r = \beta_{33}^r = \beta_{55}^r = \beta_{66}^r = \frac{\psi}{15h} (R_1 + R_2);$$

$$\beta_{23}^r = \beta_{56}^r = -\frac{\psi}{15h} (R_1 + R_2);$$

$$\beta_{25}^r = \beta_{36}^r = -\frac{\psi}{60h} (R_1 + R_2);$$

$$\beta_{26}^r = \beta_{35}^r = -\frac{\psi}{60h}(R_1 + R_2) ;$$

$$\beta_{11}^\varphi = \frac{8}{3}h^{-1}\psi^{-1}\left(R_1 - 3R_2 + 2h^{-1}R_2^2 \ln \frac{R_2}{R_1}\right) ;$$

$$\beta_{12}^\varphi = \beta_{16}^\varphi = -\frac{4}{3}h^{-1}\psi^{-1}\left(R_1 - 3R_2 + 2h^{-1}R_2^2 \ln \frac{R_2}{R_1}\right) ;$$

$$\beta_{13}^\varphi = \beta_{15}^\varphi = \beta_{24}^\varphi = \beta_{46}^\varphi = -\frac{4}{3}h^{-1}\psi^{-1}\left(R_1 + R_2 - 2h^{-1}R_1R_2 \ln \frac{R_2}{R_1}\right) ;$$

$$\beta_{14}^\varphi = \frac{8}{3}h^{-1}\psi^{-1}\left(R_1 + R_2 - 2h^{-1}R_1R_2 \ln \frac{R_2}{R_1}\right)E ;$$

$$\beta_{22}^\varphi = \beta_{66}^\varphi = \frac{7}{6}h^{-1}\psi^{-1}\left(R_1 - 3R_2 + 2h^{-1}R_2^2 \ln \frac{R_2}{R_1}\right) ;$$

$$\beta_{23}^\varphi = \beta_{56}^\varphi = \frac{7}{6}h^{-1}\psi^{-1}\left(R_1 + R_2 - 2h^{-1}R_1R_2 \ln \frac{R_2}{R_1}\right) ;$$

$$\beta_{25}^\varphi = \beta_{36}^\varphi = \frac{1}{6}h^{-1}\psi^{-1}\left(R_1 + R_2 - 2h^{-1}R_1R_2 \ln \frac{R_2}{R_1}\right) ;$$

$$\beta_{26}^\varphi = \frac{1}{6}h^{-1}\psi^{-1}\left(R_1 - 3R_2 + 2h^{-1} \ln \frac{R_2}{R_1}\right) ;$$

$$\beta_{33}^\varphi = \beta_{55}^\varphi = \frac{7}{6}h^{-1}\psi^{-1}\left(R_2 - 3R_1 + 2h^{-1}R_1^2 \ln \frac{R_2}{R_1}\right) ;$$

### 2.3. Базисные функции, зависящие от магнитной проницаемости [138]

В нелинейных полевых задачах стремление отказаться от предположения о линейности векторного магнитного потенциала  $A$  приводит к переменной индукции  $B$  и переменной магнитной проницаемости  $\mu$  внутри конечного элемента, что значительно осложняет вид соответствующих базисных функций. В

частности, П.Сильвестером и П.Рафинежадом [124] рассматривались базисные функции, являющиеся полиномами второй или третьей степени, и приходилось численно определять двойные интегралы.

Базисные функции жестко связаны с конечными элементами и увеличение их степени возможно лишь за счет увеличения узлов внутри элемента. Но последнее равносильно разбиению области на более мелкую сетку. Ниже предложен подход, свободный от указанных недостатков.

Заметим, что традиционный подход к решению полевых задач методом конечных элементов предполагает аппроксимацию векторного магнитного потенциала  $A$  посредством фиксированных базисных функций и последующее определение индукции и магнитной проницаемости.

Рассмотрим этот метод в применении к задаче электромагнитного поля (2.1.1). Отметим, что система уравнений (2.2.3) допускает варьирование как геометрии элементов, так и выбора базисных функций. Допустим, что исследуемая область дискретизирована сеткой из треугольников.

Магнитная проницаемость  $\mu$  является функцией от индукции, а та - функцией от частных производных потенциала  $A$ . Следовательно, в качестве базисных имеет смысл взять от  $\mu(x,y)$ . Рассмотрим первообразные от  $\mu(x,y)$  по соответствующим координатам:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \int_0^x \mu(t, y) dt, \\ f_2(x, y) &= \int_0^y \mu(t, x) dt. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Для треугольника  $e(i, j, m)$  с помощью функций  $f_l(x,y)$  и

$f_2(x, y)$  можно построить базисную функцию

$$\alpha_i^e(x, y) = \frac{1}{\Delta_i} \left\{ [f_1(x, y_i) - f_1(x_m, y_i)][f_2(x_i, y_i) - f_2(x_i, y_m)] - [f_1(x_j, y_i) - f_1(x_m, y_i)][f_2(x_i, y) - f_2(x_i, y_m)] \right\},$$

где знаменатель  $\Delta_i$  равен значению числителя в фигурных скобках при  $x=x_i$ ,  $y=y_i$ . Нетрудно убедиться, что выполнены условия функции интерполяции

$$\begin{aligned} \alpha_i^e(x_j, y_j) &= \alpha_i^e(x_m, y_m) = 0, \\ \alpha_i^e(x_i, y_i) &= 1. \end{aligned}$$

В силу (2.3.1) частные производные от базисной функции  $\alpha_i^e$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_i^e}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta_i} [f_2(x_i, y_j) - f_2(x_i, y_m)] \mu_i, \\ \frac{\partial \alpha_i^e}{\partial y} &= \frac{-1}{\Delta_i} [f_1(x_j, y_i) - f_1(x_m, y_i)] \mu_i. \end{aligned}$$

Здесь  $\mu_i$  - значение  $\mu$  в точке  $i$ . Из соотношения (2.2.2) имеем

$$\begin{aligned} \beta_{ii}^e &= \frac{\Delta}{\Delta_i^2} \mu_i \left\{ [f_2(x_i, y_j) - f_2(x_i, y_m)]^2 + [f_1(x_j, y_i) - f_1(x_m, y_i)]^2 \right\}, \\ \beta_{ij}^e &= \frac{\Delta}{\Delta_i \Delta_j} \sqrt{\mu_i \mu_j} \left\{ [f_2(x_i, y_j) - f_2(x_i, y_m)][f_2(x_j, y_m) - f_2(x_j, y_i)] + [f_1(x_j, y_i) - f_1(x_m, y_i)][f_1(x_m, y_j) - f_1(x_i, y_j)] \right\}, \\ c_i^e &= \frac{1}{3} \Delta, \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

где  $\Delta$  - площадь треугольника  $e$ .

Подобным образом могут быть построены базисные функции  $\alpha_j^e, \alpha_m^e$  и коэффициенты  $\beta_{im}^e, \beta_{jj}^e, \beta_{jm}^e, \beta_{mm}^e, C_j^e, C_m^e$ .

В случае постоянной магнитную проницаемость  $\mu(x, y)$  внутри элемента  $e$  из (2.3.1) следует

$$f_1(x, y) = \mu_e x; f_2(x, y) = \mu_e y.$$

В этом случае базисная функция будет линейной, а величины  $\beta_{i,j}^e$  и  $C_i^e$  в силу (2.3.2) имеют вид:

$$\begin{aligned} S_i &= 2\mu_e \Delta, \\ \beta_{ii}^e &= \frac{1}{4\mu_e \Delta} [(y_j - y_m)^2 + (x_j - x_m)^2], \\ \beta_{ij}^e &= \frac{1}{4\mu_e \Delta} [(y_j - y_m)(y_m - y_i) + (x_j - x_m)(x_m - x_i)], \\ c_i^e &= \frac{1}{3} \Delta \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Полученные коэффициенты (2.3.3) совпадают с коэффициентами обычного метода конечных элементов с линейной аппроксимацией потенциала в треугольных элементах. Таким образом, обычную схему метода конечных элементов можно получить из описанного подхода, приняв  $\mu(x, y)$  кусочно-постоянной.

Базисные функции, зависящие от магнитной проницаемости позволяют задачу нахождения двойного интеграла от  $\mu(x, y)$  свести к задаче определения однократных интегралов:



$$\begin{aligned}
g_{i,x} &= f_1(x_j, y_i) - f_1(x_m, y_i) = \int_{x_m}^{x_j} \mu(x, y_i) dx, \\
g_{j,x} &= f_1(x_m, y_j) - f_1(x_i, y_j) = \int_{x_i}^{x_m} \mu(x, y_j) dx, \\
g_{m,x} &= f_1(x_i, y_m) - f_1(x_j, y_m) = \int_{x_j}^{x_i} \mu(x, y_m) dx, \\
g_{i,y} &= f_2(x_i, y_j) - f_2(x_i, y_m) = \int_{y_m}^{y_j} \mu(x_i, y) dy, \\
g_{j,y} &= f_2(x_i, y_j) - f_2(x_j, y_i) = \int_{y_i}^{y_m} \mu(x_j, y) dy, \\
g_{m,y} &= f_2(x_m, y_i) - f_2(x_m, y_j) = \int_{y_j}^{y_i} \mu(x_m, y) dy.
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Коэффициенты (2.3.4) можно вычислять по квадратурным формулам Симпсона и уточнять после каждой итерации. Расчетное уравнение для  $\beta_{ij}^e$  получается подстановкой (2.3.4) в (2.3.2):

$$\begin{aligned}
\beta_{ii}^e &= \frac{\Delta}{\Delta_i^2} \mu_i (g_{i,x}^2 + g_{i,y}^2), \\
\beta_{ij}^e &= \frac{1}{\Delta_i \Delta_j} \sqrt{\mu_i \mu_j} (g_{i,x} g_{j,x} + g_{i,y} g_{j,y}), \\
c_i^e &= \frac{1}{3} \Delta.
\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Метод опробован на задаче определения электромагнитного поля в области, представленной на рисунке 2.3. Ферромагнитные участки  $A$  и  $B$ , разделены воздушным зазором  $C$ , обмотка  $D$  обтекается током.

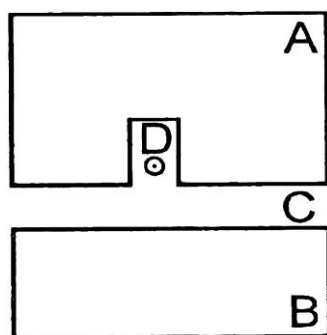


Рис.2.3.

Треугольная сетка (рисунок 2.4а) состояла из 288 треугольных элементов с 121 внутренним узлом. Задача была решена традиционным методом конечных элементов предложенным МКЭ с переменной базисной функцией, зависящей от магнитной проницаемости. Полученные этими методами решения отличаются в участках наибольшего изменения поля, где

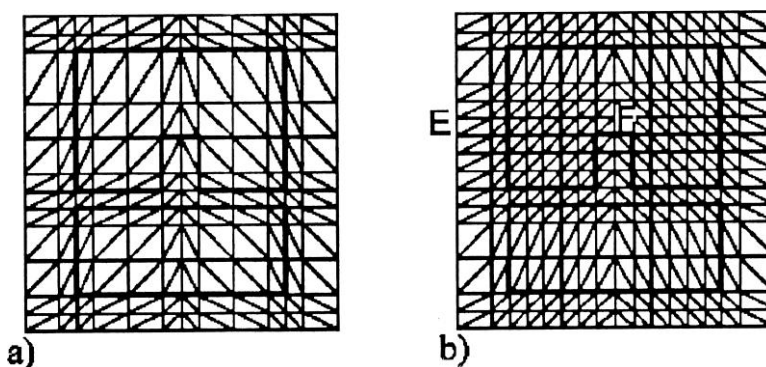


Рис.2.4.

индукция доходит до 1,5 Т. С целью оценки близости к истинным задача также была решена методом конечных элементов для более густой сетки с 480 элементами и 210 узлами (рисунок 2.4б).

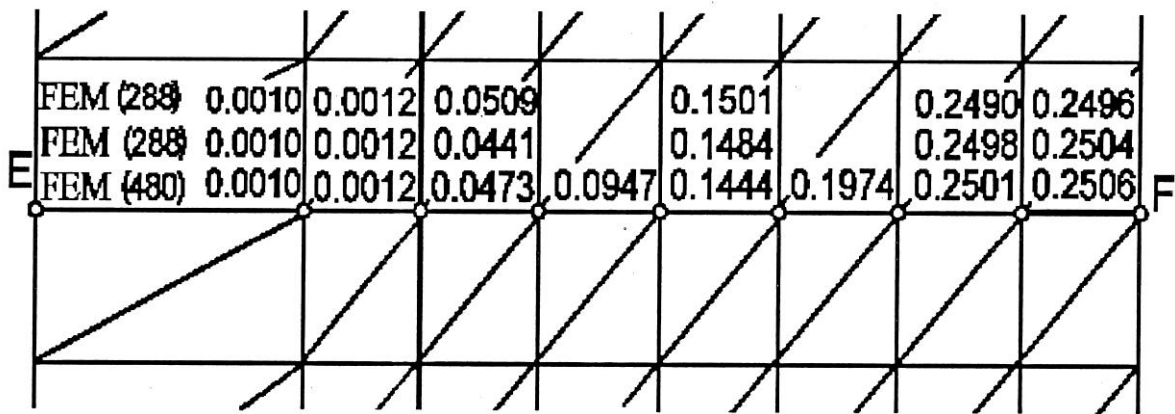


Рис.2.5.

На рисунке 2.5 приведены результаты распределения векторного магнитного потенциала по линии  $EF$  (рисунок 2.4б). Число в скобках рядом с кодом метода FEM показывает количество элементов в сетке.

#### **2.4. Применение алгоритмов принятия решения**

##### **в задачах электромагнитного поля [150]**

Здесь предложен метод автоматизированного расчета электромагнитных полей с использованием алгоритмов принятия решения. Сходимость решения при этом не зависит от геометрии сетки дискретизации, что является несомненным преимуществом подхода.

Напомним важнейшие формулы МКЭ, активно использованные ниже. Вариационный подход заменяет прямое решение дифференциального уравнения Максвелла (2.1.1) минимизацией следующего функционала

$$I(A) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[ \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 - 2\delta A \right] dx dy. \quad (2.4.1)$$

где  $A$  – обозначает векторный магнитный потенциал,  $\Omega$  - исследуемая область,  $\delta$  - плотность тока,  $\mu$  - величина магнитной проницаемости. Выделим в области  $\Omega$  треугольную сетку. Примем, что внутри треугольника с вершинами  $i, j, m$

магнитная проницаемость  $\mu$  постоянна, а векторный магнитный потенциал является линейной функцией:

$$A(x, y) = A_i b_i^e(x, y) + A_j b_j^e(x, y) + A_m b_m^e(x, y), \quad (2.4.2)$$

где  $A_i$  - значение потенциала  $A$  в узле  $i$ ,  $b_i^e(x, y)$  - базисная функция, то есть линейная функция, равная единице в вершине  $i$  треугольника  $e$ , и нулю в остальных двух вершинах. Записывая базисную функцию в виде детерминанта, имеем

$$b_i^e(x, y) = \frac{1}{2S_e} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \end{vmatrix}, \quad (2.4.3)$$

где  $(x_j, y_j)$  - декартовы координаты вершины  $j$ ,  $S_e$  - площадь треугольника  $e$ :

$$2S_e = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \end{vmatrix}.$$

Описанный в предыдущих параграфах, метод конечных элементов был основан на нахождении минимума функционала (2.4.1) приравниванием нулю его соответствующих производных. В результате получалась система линейных уравнений относительно неизвестными  $A_i$ , причем количество уравнений было равно количеству внутренних узлов сетки.

Теперь же для нахождения минимума функционала (2.4.1) применим алгоритмы принятия решения. Для использования алгоритмов поисковой оптимизации нужно построить целевую функцию, зависящую от параметров. В качестве варьируемых параметров целевой функции возьмем значения потенциала

А в узлах сетки. Целевую функцию получим, подставляя (2.4.2) в функционал (2.4.1) и разлагая интеграл по всей исследуемой области на сумму интегралов по элементам сетки:

$$I(A) = \frac{1}{2} \sum_{e \in \Omega} \iint_e \left[ v_e \left( \frac{\partial}{\partial x} (A_i b_i^e(x, y) + A_j b_j^e(x, y) + A_m b_m^e(x, y)) \right)^2 + \right. \quad (2.4.4)$$

$$\left. + v_e \left( \frac{\partial}{\partial y} (A_i b_i^e(x, y) + A_j b_j^e(x, y) + A_m b_m^e(x, y)) \right)^2 - 2 \delta_e A \right] dx dy,$$

где  $v = 1/\mu$  - значение обратное величине магнитной проницаемости, а суммирование ведется по всем треугольникам сетки. Так как базисные функции (2.4.3) являются линейными, то их производные будут постоянными величинами, равными:

$$\frac{\partial}{\partial x} b_i^e(x, y) = \frac{1}{2S_e} (y_j - y_m),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} b_i^e(x, y) = \frac{1}{2S_e} (x_m - x_j).$$

Таким образом, целевую функцию (2.4.4) можно представить в виде суммы полиномов второй степени

$$I(A) = \frac{1}{2} \sum_{e \in \Omega} F_e(A_i, A_j, A_m),$$

где

$$F_e = \frac{v_e}{4S_e} (A_i(y_j - y_m) + A_j(y_m - y_i) + A_m(y_i - y_j))^2 +$$

$$+ \frac{v_e}{4S_e} (A_i(x_j - x_m) + A_j(x_m - x_i) + A_m(x_i - x_j))^2 - \frac{2}{3} \delta_e S_e (A_i + A_j + A_m).$$

Имея начальное приближение к значениям потенциалов в узлах сетки, вначале вычисляются значения магнитной проницаемости в треугольниках, затем слагаемые целевой функции для каждого треугольника. Затем значения потенциалов сдвигаются и вычисляются новые значения магнитной проницаемости и слагаемых целевой функции. Затем вычисляются значения целевой функции суммированием ее слагаемых и принимается решение, как продолжать поиск, на основе соответствующего алгоритма поисковой оптимизации.

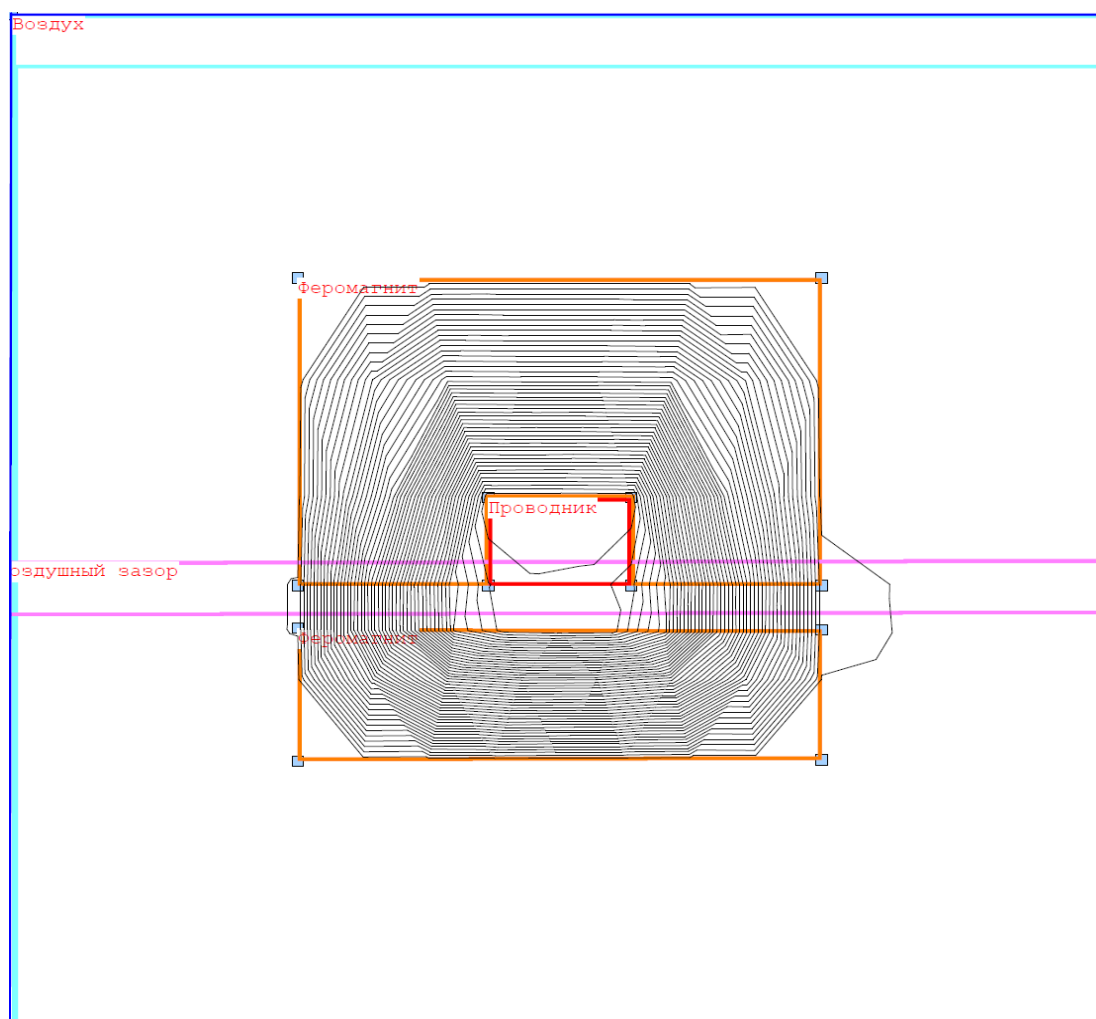


Рис. 2.8.

Развитый метод автоматизированного расчета электромагнитных полей с использованием алгоритмов принятия решения опробован на тестовой задаче численного расчета магнитного поля электромагнитного механизма представленного на рисунке 2.8. Оптимизация целевой функции проводилась методом наилучшей выборки, количество узлов 130, значение невязки  $10^{-5}$ , количество итераций 12000. Та же задача решалась классическим методом конечных элементов проводящим к решению нелинейной системы уравнений. Сравнение результатов показало их хорошее совпадение.

**Выводы.** Для автоматизированного расчета векторного магнитного потенциала методом конечных элементов получена расчетная система линейных уравнений с коэффициентами, зависящими от конфигурации элементов и выбора базисных функций. Для наиболее часто встречающихся на практике элементов (треугольник, прямоугольник, сектор и криволинейная трапеция) вычислены значения расчетных коэффициентов в декартовых и полярных координатах.

Развит новый метод – МКЭ с базисными функциями, зависящими от магнитной проницаемости.

Проведен сопоставительный анализ методов МКЭ и МКР применительно к задачам электромагнитного поля. По результатам сравнительного анализа можно сделать следующие выводы:

1. Среди рассмотренных расчетных уравнений МКЭ и МКР наибольшую точность имеет восьмиточечное разностное уравнение, наименьшую — квадратичная аппроксимация четырехугольных элементов.

2. Метод конечных элементов имеет наименьшую погрешность при линейной аппроксимации треугольных элементов, которая совпадает с погрешностью четырехточечного разностного уравнения.

## ГЛАВА 3

### ОПТИМИЗАЦИЯ ДВУМЕРНЫХ СЕТОК ДЛЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

#### 3.1. Динамическая композиция конечных элементов [137], [145]

Решение нелинейных задач электромагнитного поля со сложной геометрией ферромагнитных областей требует огромного объема вычислений. Увеличение числа элементов и узлов дискретизации, хотя и улучшает точность приближения к решению полевой задачи, но и повышает число решаемых уравнений и трудоемкость вычислений.

Как показывает инженерная практика, неудачно выбранная сетка может стать причиной расходимости процесса последовательных приближений к решению полевой задачи. Поэтому становится актуальной задача автоматизированного выбора узлов и элементов сетки с целью улучшения качества сетки.

В настоящем параграфе предложен алгоритм автоматизированного построения сетки для решения полевых задач методом конечных элементов, основанный на последовательном динамическом построении сеточных узлов и элементов в ходе решения задачи, учитывая поведение получающихся невязок.

Напомним основную формулу метода конечных элементов (см. главу 2).

$$\sum_e \left( v_e \sum_{i=1}^L A_i \beta_{ij}^e - \frac{\delta \Delta}{3} \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.1.1)$$

где  $A_i$  - значение векторного магнитного потенциала  $A$  в узле  $i$ ;  $v_e$  - значение  $v$  внутри элемента  $e$ ;  $\delta_e$  - значение плотности тока  $\delta$  внутри элемента  $e$ ;  $\beta_{ij}$  -



коэффициент взаимодействия вершин  $i$  и  $j$ ;  $L$  - число узлов элемента  $e$ ;  $N$  - число внутренних узлов сетки.

В (3.1.1) первое суммирование ведется по всем элементам, содержащим данный узел  $j$ , а второе суммирование - по всем вершинам  $i$  элемента  $e$ .

Для сетки, состоящей из треугольных элементов коэффициент  $\beta_{ij}$  для треугольника с вершинами  $i, j, m$  имеет вид:

$$\begin{cases} \beta_{ii}^e = \frac{1}{4\Delta} \left[ (y_j - y_m)^2 + (x_j - x_m)^2 \right], \\ \beta_{ij}^e = \frac{1}{4\Delta} \left[ (y_j - y_m)(y_m - y_i) + (x_j - x_m)(x_m - x_i) \right], \end{cases} \quad (3.1.2)$$

где  $(x_i, y_i)$  суть декартовы координаты вершины  $i$ , а  $\Delta$  - площадь треугольника с вершинами  $i, j, m$ :

$$\Delta = \frac{(x_i - x_m)(y_j - y_m) - (y_i - y_m)(x_j - x_m)}{2}.$$

Отметим, что для данного узла  $j$  в (3.1.1) принимают участие только непосредственные соседи вершины  $j$ . Таким образом, получается система линейных уравнений относительно неизвестных  $A_i$ , причем число уравнений равно числу  $N$  внутренних узлов сетки.

Как оптимально построить сетку, если по ходу решения задачи меняется совокупность узлов сетки? При автоматизированном построении сетки конечных элементов необходимо учитывать два обязательных условия:

а) внутри конечного элемента среда должна быть одинаковой, то есть границы раздела физических сред должны служить границами раздела и элементов;

б) вершины элементов должны быть по возможности ближе друг к другу, чтобы в (3.1.1) их участие в качестве “соседних узлов” было обоснованным.

Математически второе условие означает, что внутренние острые углы в треугольных элементах должны быть как можно больше.

Рассмотрим сетку из треугольных элементов. Предлагается проводить триангуляцию в два этапа: вначале построить произвольную, грубую сетку, затем произвести поправку сетки для достижения вышеприведенных условий "а" и "б".

Заметим, что в сетке каждое ребро  $d$  является стороной для двух треугольников, составляющих вместе четырехугольник. Обозначим через  $Q$  этот четырехугольник. Одна из диагоналей четырехугольника  $Q$  есть  $d$ , а вторую диагональ обозначим через  $d'$ . Выбор диагонали ( $d$  или  $d'$ ) разделяющей четырехугольник  $Q$  производится с учетом условия "а". Если условие "а" выполнено для обеих диагоналей, то проверяется второе условие. Оптимальную сетку перебором по всем ребрам.

На рисунке 3.1 показаны два четырехугольника  $Q$  с диагоналями  $d$  и  $d'$ . Для диагоналей обоих четырехугольников имеет место  $d < d'$ . Обозначим через  $\alpha$  минимальный внутренний угол треугольника  $ABD$ , а через  $\beta$  - минимальный внутренний угол треугольника  $ABC$ . Для картинке слева имеем  $\alpha < \beta$ , а справа -  $\alpha > \beta$ . Соответственно, на левом рисунке деление на треугольники производится при помощи диагонали  $d'=AC$ , а на правом - при помощи диагонали  $d=BD$ .

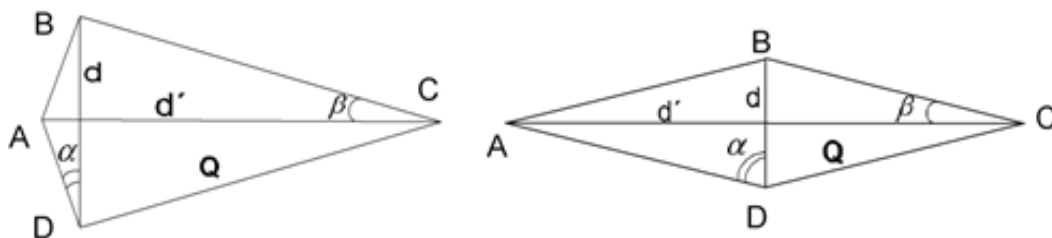


Рис.3.1

Если исследуемая область неоднородна и состоит из участков с различными физическими и геометрическими свойствами, имеет смысл, чтобы множество сеточных узлов имело различную интенсивность (густоту) в разных подобластях. Чтобы добиться оптимального распределения интенсивности узлов, целесообразно совокупность узлов изменять по ходу решения задачи (добавлять узлы или исключать).

В нелинейных задачах электромагнитного поля основным источником погрешности является предположение о постоянстве внутри каждого элемента магнитной проницаемости и индукции.

В качестве критерия для выбора элемента, в котором будет добавлен узел, взято произведение

$$K = \max(E S),$$

где  $S$  - площадь элемента,  $E$  - максимальная разница между значениями векторного магнитного потенциала в данном элементе до итерации и после итерации (невязка). Первый множитель способствует тому, чтобы узлы добавлялись в участках, где велика невязка. Другими словами, где сильно меняются вектор индукции и значения магнитной проницаемости. Второй множитель способствует уменьшению геометрических размеров элементов.

После выбора элемента для изменения, надо выбрать место, где будет добавлен узел. Если добавить узел внутри элемента, то сумма трех углов вокруг него будет равна  $180^0$ , что обязательно приведет к образованию по крайней мере двух тупоугольных треугольников. Ниже будет доказано отрицательное влияние на сходимость итерационного процесса наличие в сетке тупоугольных треугольников. Поэтому предлагается добавлять новый узел в середине максимальной стороны треугольника.

Если на рисунке 3.1 какая-нибудь из сторон (например AC) является границей раздела сред, то, в силу условия "а", деление на треугольники обязательно производится при помощи другой диагонали  $d'=AC$ , каким бы ни был угол  $\beta$ . Чтобы этот угол в процессе композиции сетки вдруг не стал слишком малым (а такое происходит в чересчур узких воздушных зазорах), надо препятствовать появлению узлов, слишком близко подходящих к границе раздела сред (на рисунке 3.1 это узел В). Этого можно достигнуть с помощью весовых коэффициентов при вычислении длин сторон, лежащих на границе раздела сред.

После каждого изменения совокупности узлов производится новое автоматизированное построение треугольной сетки при помощи описанного алгоритма. Таким образом, происходит адаптация, перестраивающая сетку к особенностям решаемой полевой задачи.

Описанный алгоритм композиции сеточных узлов и элементов опробован на задаче определения магнитного поля для электромагнитного устройства, изображенного на рисунке 3.2.

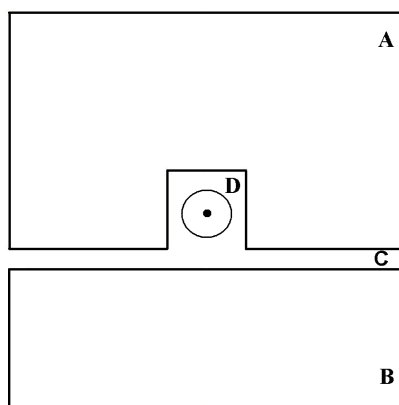


Рис. 3.2.

На рисунке 3.2 исследуемая область состоит из ферромагнитных участков А и В, разделенных воздушным зазором С. Устройство содержит обмотку D, обтекаемую

током. Заметим, что для однозначного определения поля краевую задачу надо решать с нулевыми граничными условиями на бесконечности.

Учитывая, что поле вне ферромагнитных участков быстро затухает, можно ограничиться рассмотрением конечной области воздушного пространства, на границе которой считаем значения векторного магнитного потенциала равными нулю (рисунок 3.3).

На рисунке 3.3 показана начальная грубая сетка треугольных элементов и задание нулевых граничных условий. Заметим, что на рисунке 3.3, исходя из ожидаемого представления о распределении магнитного поля, сетка имеет большую плотность узлов вблизи токонесущей области, и размеры конечных элементов заметно возрастают с приближением к границам области.

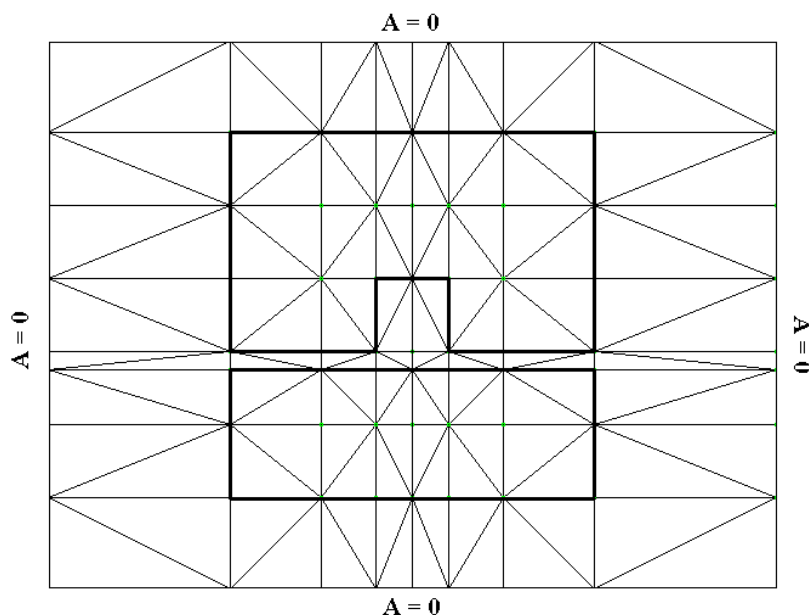


Рис 3.3.

Описанная программа осуществляет адаптацию сетки после каждой итерации с одновременным определением качества элементов. Процесс динамической композиции сетки завершается при достижении условия

$$Sl \leq \delta$$

где  $S$  – площадь элемента, а  $l$  - периметр конечного элемента;  $\delta$  - заданный уровень останова. Итерации продолжаются до достижения заданной точности

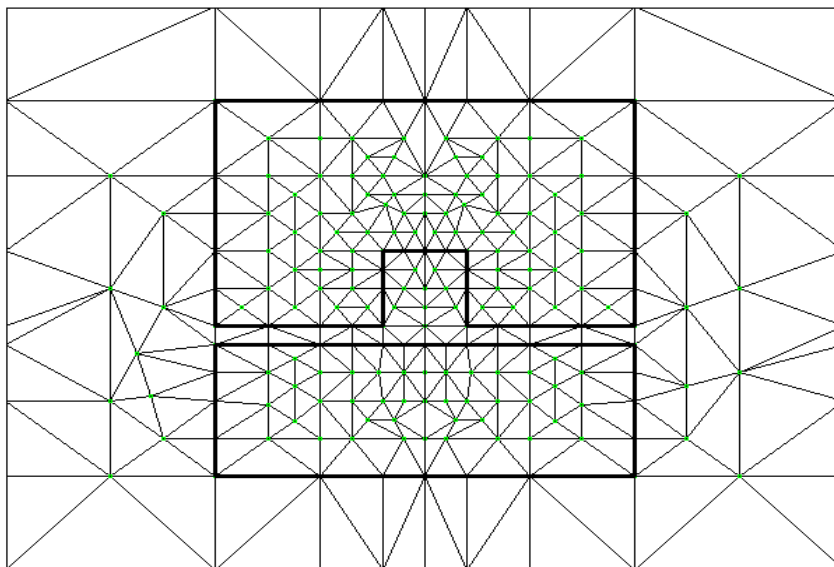


Рис. 3.4

расчета поля.

На рисунке 3.4 показана финальная сетка конечных элементов, полученная в результате динамической композиции. В результате осуществленной адаптации сетка из 49 начальных внутренних узлов преобразилась в сетку, состоящую из 204 внутренних узлов.

На рисунке 3.5 показано полученное распределение магнитного поля в исследуемом устройстве.

Для сравнительного анализа проведены также расчеты магнитного поля с использованием постоянной конечной сетки дискретизации, представленной на рисунке 3.3.

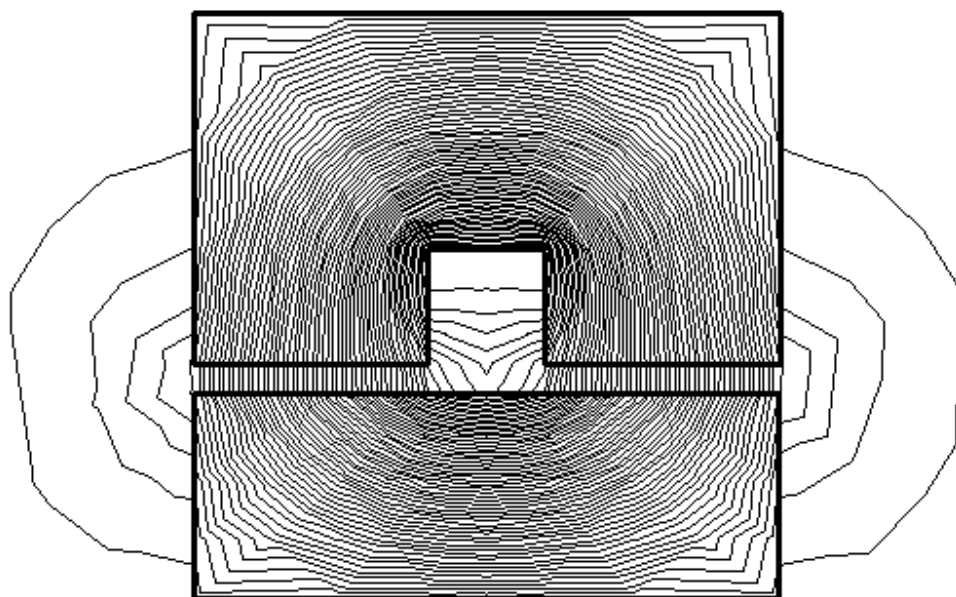


Рис. 3.5.

Так, если при динамической композиции сетки задача определения магнитного поля решена за 1377 итераций, то без использования адаптивных та же задача решена за 1667 итераций (при той же точности решения  $10^{-4}$ ).

### ***3.2. Оптимальные сетки для расчета магнитных полей методом конечных элементов [139], [146]***

В работе [37] исследованы адаптивные криволинейные сетки, которые строятся при помощи конформного отображения регулярной квадратной сетки. В ней ограничиваются изучением эллиптических уравнений второго порядка с малым параметром при старших производных и несложной геометрией, что дает возможность нахождения аналитического вида соответствующего конформного отображения.

В нелинейных полевых задачах со сложной геометрией найти аналитический вид оптимальной сетки практически невозможно, и приходится приближаться к оптимальной сетке путем последовательной композиции сеточных узлов.

В данном параграфе дано математическое определение понятиям оптимальная сетка и алгоритм построения сеточных узлов на основе непрерывного отображения регулярной сетки из равносторонних треугольников.

Рассмотрим на плоскости  $P$  магнитное поле, созданное электрическим током с односточечной токнесущей областью. Множество факторов, влияющих на магнитное поле (геометрия железных участков, кривые намагничивания, величины плотности токов и т.д.), обозначим через  $F$ . Задачу определения электромагнитного поля при условии наличия факторов  $F$  обозначаем через  $Z_F$ . Решением задачи  $Z_F$  является распределение векторного магнитного потенциала  $A$  на всей плоскости  $P$ .

Векторный магнитный потенциал  $A$  удовлетворяет уравнению Максвелла (2.1.1), значит потенциал  $A$  является дважды непрерывно дифференцируемой функцией во всех точках плоскости. Следовательно, эквипотенциальные линии  $L(F, A_k)$  уровня  $A_k$  являются непрерывными замкнутыми кривыми. Для этих гладких линий будут существовать криволинейные интегралы  $\int_{L(F, A_k)} dl$ , где  $dl$  - элемент длины дуги.

Теперь рассмотрим задачу  $Z_0$  определения магнитного поля на плоскости  $P_0$  с односточечной токнесущей областью  $Q$  без ферромагнетиков. Для  $Z_0$  эквипотенциальные линии  $L(0, A_k)$  будут концентрическими окружностями радиуса  $r_k$  с центром в  $Q$ . С топологической точки зрения, кривые  $L(F, A_k)$  и



$L(0, A_k)$  эквивалентны, так как совпадают с точностью до преобразования деформации, хотя геометрически они разные.

**Теорема 1.** Для любой задачи  $Z_F$  существует однозначное отображение  $f_F: P \rightarrow P_0$  из плоскости  $P$  в плоскость  $P_0$ , такое, что для всех уровней потенциалов  $A_k$  эквипотенциальные линии  $L(F, A_k)$  переходят в концентрические окружности, то есть

$$f_F ( L(F, A_k) ) = L(0, A_k).$$

Это отображение к тому же является взаимно-однозначным и непрерывным.

**Доказательство.** Пусть задача определения магнитного поля  $Z_F$  решена и в произвольной точке  $X$  плоскости  $P$  известно значение векторного магнитного потенциала  $A_k$ . Точке  $X$  плоскости  $P$  поставим в соответствие точку  $f_F(X)$  плоскости  $P_0$ , лежащую на окружности  $L(0, A_k)$  с центром в  $Q$  и радиусом  $r_k$ . На кривой  $L(F, A_k)$  выберем начало отсчета  $O_k$ . На плоскости  $P_0$  введем угловую координату

$$\varphi = 2\pi \int_{O_k}^X dl / \oint_{L(F, A_k)} dl.$$

Тогда искомый образ  $f_F(X)$  есть точка плоскости  $P_0$  с полярными координатами  $(r_k, \varphi)$ . Непрерывность отображения следует из возможности выбора начала отсчета на разных эквипотенциальных линиях непрерывным образом.

Заметим, что зная отображение  $f_F$ , можно найти и распределение векторного магнитного потенциала, и наоборот. Таким образом, решение полевой задачи  $Z_F$  эквивалентно нахождению отображения  $f_F$ .

Как же оптимально построить сетку, если по ходу решения задачи меняется совокупность узлов сетки? Выше было указано, что при автоматизированном

построении сетки конечных элементов необходимо учитывать два обязательных условия:

а) внутри конечного элемента среда должна быть одинаковой, то есть границы раздела физических сред должны служить границами раздела и элементов;

б) вершины элементов должны быть по возможности ближе друг к другу, чтобы в (3.1.1) их участие в качестве “соседних узлов” было обоснованным.

Математически обоснуем условие “б” с помощью введенного выше отображения  $f_F$ . Так как задача  $Z_0$  определения магнитного поля на плоскости  $P_0$  с односточечной токонесущей областью  $Q$  без ферромагнетиков является тривиальной, то для задачи  $Z_0$  многие понятия легко определяются. Затем эти понятия можно перенести с помощью отображения  $f_F$  на сложную задачу  $Z_F$ .

Из соображений симметрии следует, что для задачи  $Z_0$  оптимальной является регулярная сетка  $S_0$ , состоящая из конгруэнтных равносторонних треугольников. Однако при отображении  $f_F$  тройка точек на плоскости  $P$  переходит в три точки на  $P_0$ . Следовательно, любой треугольник переходит опять в треугольник, а сетка из треугольных элементов переходит опять в треугольную сетку.

**Определение 1.** Треугольная сетка  $S$  называется оптимальной для данной полевой задачи  $Z_F$ , если при отображении  $f_F$  она переходит в регулярную сетку  $S_0$  из конгруэнтных равносторонних треугольников:

$$f_F(S) = S_0 .$$

Введем в множестве возможных сеток отношение “лучше” (хуже). Для этого нам нужна метрика (неевклидово расстояние) на плоскости  $P$ , зависящая от комплекса

ферромагнетиков  $F$ . Обычное евклидовое расстояние между точками  $x$  и  $y$  будем обозначать через  $e(x,y)$ .

**Определение 2.** Деформированным расстоянием, индуцированным полевой задачей  $Z_F$ , называется функция  $R_F(x,y)$ , равная евклидовому расстоянию их образов при отображении  $f_F$ , то есть

$$R_F(x,y) = e(f_F(x), f_F(y)), \quad x,y \in P.$$

Напомним, что функция двух точек  $R(x,y)$  определяет расстояние, если выполнены следующие три условия:

- 1)  $R(x,y) > 0$ , если  $x \neq y$ ;
- 2)  $R(x,x) = 0$ ;
- 3)  $R(x,y) + R(y,z) > R(x,z)$  (неравенство треугольника).

**Теорема 2.** Для каждой полевой задачи  $Z_F$  вышеопределенная функция  $R_F$  индуцирует расстояние на деформированной плоскости.

Первые два условия очевидно выполнены. Достаточно проверить неравенство треугольника:

$$R(x,y) + R(y,z) = e(f_F(x), f_F(y)) + e(f_F(y), f_F(z)) \geq e(f_F(x), f_F(z)) = R(x,z).$$

Заметим, что в метрике  $R_F$  эквипотенциальные линии  $L(F, A_k)$  являются концентрическими окружностями.

**Следствие.** Решение полевой задачи  $Z_F$  эквивалентно нахождению расстояния  $R_F$ .

Для данной сетки  $S$  и полевой задачи  $Z_F$  обозначим

$$M = \max R_F(x,y), \quad m = \min R_F(x,y),$$

где максимум и минимум берутся по всем парам соседних узлов сетки  $S$ .

**Определение 3.** Индексом треугольной сетки  $S$  для данной полевой задачи  $Z_F$  назовем число  $(M - m)/M$ .

Заметим, что метрика  $R_F$ , а значит, и индекс сетки сильно зависят от физических факторов  $F$ , так что одна и та же сетка может иметь разный индекс для разных полевых задач. Индекс показывает удаленность сетки от оптимальной, чем меньше индекс, тем лучше сетка.

**Теорема.** Оптимальная сетка (и только она) имеет нулевой индекс.

С целью уменьшения индекса сетки предлагается менять количество узлов по ходу решения полевой задачи. При этом надо стремиться добавлять узлы так, чтобы два наиболее удаленных друг от друга соседних узла перестали бы быть соседними.

**Определение 4.** Алгоритм композиции сеточных узлов назовем оптимальным, если новый узел добавляется между двумя наиболее удаленными друг от друга (в смысле деформированного расстояния  $R_F$ ) соседними узлами. Такой алгоритм добавления сеточных узлов обязательно приводит к уменьшению индекса сетки.

Важно отметить, что для построения оптимального алгоритма композиции сеточных узлов не нужно знать все значения функции  $R_F$  (что эквивалентно полному решению полевой задачи). Достаточно знать поведение деформированного расстояния лишь для пар близких точек. А для последних можно сложную функцию  $R_F$  приблизить более простыми функциями, пренебрегая влиянием далеких узлов.

Предположим, что функция расстояния для пар  $x, y$  близких точек зависит лишь от трех переменных: евклидова расстояния между ними  $e(x, y)$ , суммарной невязки  $\varepsilon$  в точках  $x$  и  $y$ , а также коэффициента  $k$ , зависящего от физических свойств среды, оцениваемого эмпирическим путем:  $R(x, y) = R(e, \varepsilon, k)$ .

В ниже проведенном эксперименте в качестве функции расстояния  $R(x, y)$  было принято выражение  $R(x, y) = k\varepsilon e^2$ . Следует отметить, что сильное влияние на формирование оптимальной сетки оказывает выбор численного значения коэффициента среды  $k$ .

На рисунке 3.6 показан пример динамической композиции с неудачным выбором коэффициента  $k$ , а именно  $k=1$  в воздухе,  $k=2$  в ферромагнетике,  $k=1.5$  на границе раздела сред. В результате динамической композиции с таким коэффициентом в отмеченных кружками областях образовались тупоугольные треугольники, что привело к расходимости итерационного процесса решения полевой задачи.

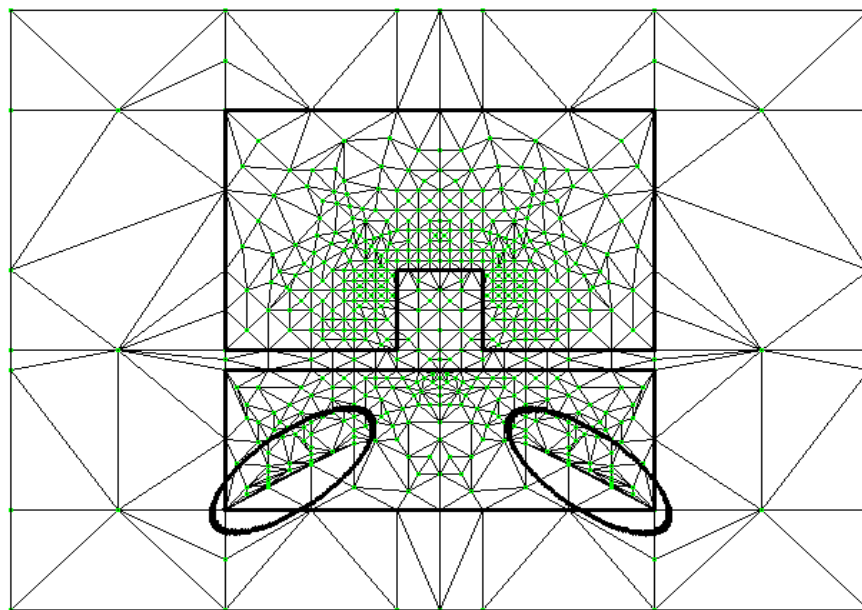


Рис. 3.6.

Рисунок 3.7 показывает расходимость итерационного процесса решения при неудачном выборе коэффициента  $k$ , представлено поведение максимальной невязки в зависимости от количества итераций.

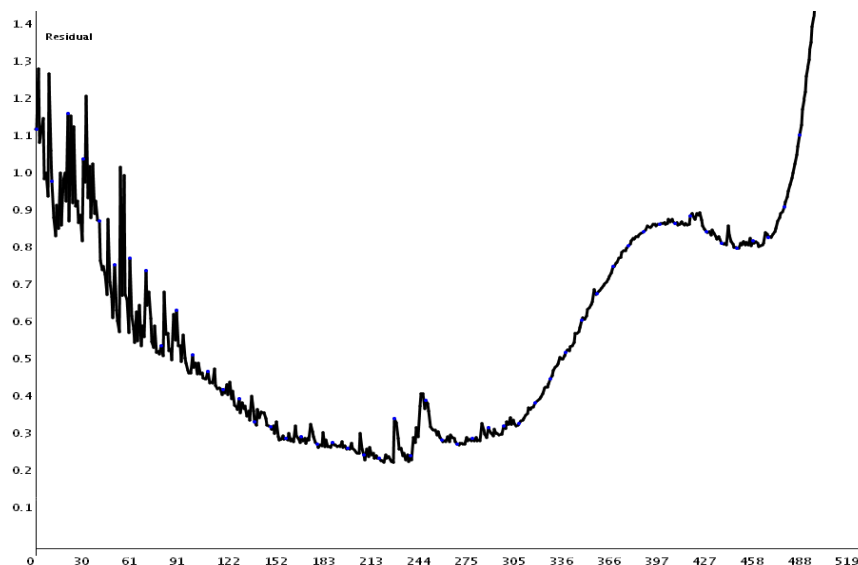


Рис.3.7.

На рисунке 3.8 показана наилучшая сетка для данной задачи, полученная для

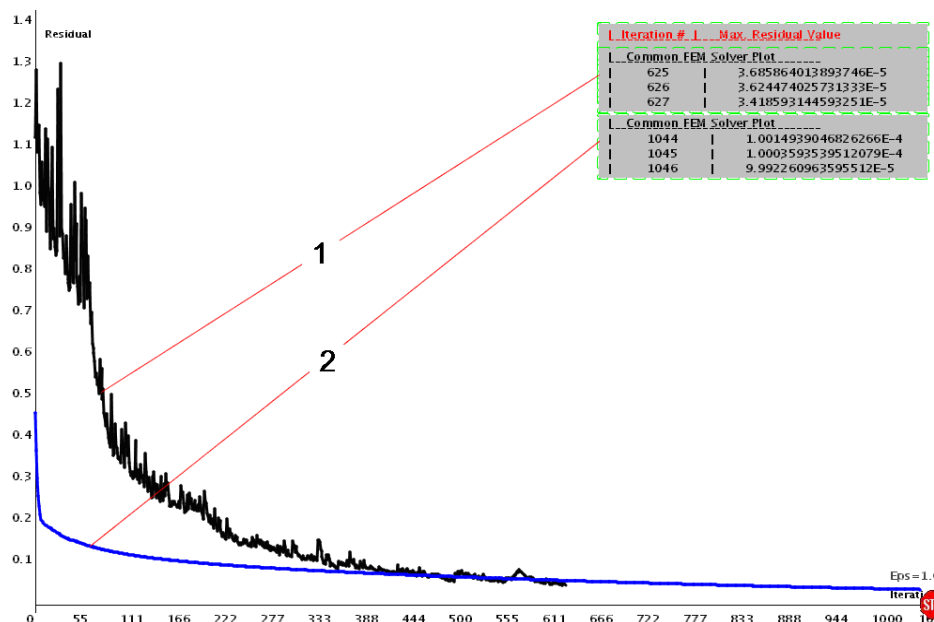
$k=1$  в воздухе,

$k=2$  в ферромагнетике,

$k=4$  на границе раздела сред,

Как видно из рисунка 3.9, динамическая композиция по предложенному алгоритму приводит к решению задачи за 627 итераций, а при фиксированной (даже хорошей) сетке задача решается за 1046 итераций при одинаковом уровне снижения невязки.

На рисунке 3.9 показан процесс сходимости решения задачи с динамической композицией сетки с удачно выбранным данным значением  $k$  (кривая 1). На том



же рисунке (3.9) показан процесс сходимости решения (кривая 2) той же задачи с конечной (рисунок 3.8) фиксированной сеткой.

### ***3.3. Об углах треугольной сетки для расчета магнитных полей методом конечных элементов [142], [148]***

Точность вычислительного алгоритма и сходимость процесса последовательных приближений при решении нелинейных полевых задач методом конечных элементов сильно зависит от конфигурации расчетной сетки, дискретизирующей исследуемую непрерывную область. За последние годы появился ряд работ, посвященных методам автоматизированного построения расчетных сеток (см. [37], [48]). Задача построения оптимальной сетки становится особенно актуальной при адаптивной сетке, когда в процессе решения полевой задачи осуществляется автоматическая динамическая композиция узлов и элементов сетки.

Практика автоматизированного решения реальных полевых задач показывает, что наличие в расчетной сетке тупоугольных треугольников отрицательно влияет на сходимости процесса решения. В настоящем параграфе дано математическое обоснование этого явления и даны оценки критического значения тупого угла, при превышении которого задача расходится.

Рассмотрим систему линейных уравнений относительно неизвестных  $A_1, \dots, A_N$  с матрицей коэффициентов  $(c_{ij})$ :

$$\sum_{i=1}^N c_{ij} A_i = d_j, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.3.1)$$

Хорошо известен (см. [15]) достаточный признак сходимости итерационного процесса решения системы уравнений (3.3.1), называемый принципом доминирования диагонали: если диагональные элементы  $c_{jj}$  значительно превосходят недиагональные, то итерационный процесс решения системы (3.3.1) сходится. Рассмотрим разности

$$g_j = |c_{jj}| - \sum_{i \neq j}^N |c_{ij}|, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

В соответствии с вышеуказанным принципом, если для всех  $j$  величины  $g_j$  больше нуля, то итерационный процесс решения системы (3.3.1) обязательно сходится при любом начальном приближении.

Сформулируем следующий признак расходимости. Если для всех  $j$  существует такой номер  $i$ , что

$$|c_{ji}| < |c_{ij}|, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

то итерационный процесс решения системы (3.3.1) расходится.

Для треугольника с вершинами  $i, j, m$  несложными преобразованиями коэффициентов (3.1.2) можно получить □□□□□□□□□□□□□□□□□□



где  $b$  - длина стороны с вершинами  $i, m$ ;  $\beta_m$  - угол при вершине  $m$ , см. рисунок 3.10. Но длины отрезков, величины углов и площадей не зависят от выбора декартовой системы координат. Отсюда следует, что система уравнений (3.1.1), получающаяся при численном расчете двумерного магнитного поля (2.1.1) методом конечных элементов, не зависит от выбора декартовой системы координат.

Заметим, что данное утверждение неочевидно, так как коэффициенты (3.1.2) формально зависят от координат  $(x, y)$  вершин треугольника, а те, в свою очередь, - от положения начала координат и направления осей.

Теперь вычислим коэффициенты получающейся матрицы  $(c_{ij})$ . Из (3.1.1), (3.3.1) и (3.3.2) получаем

$$c_{ij} = \sum_e v_e \beta_{ij}^e = \sum_e v_e \frac{b_e^2}{4\Delta_e},$$

где суммирование ведется по всем элементам  $e$ , содержащим узел  $j$ ;  $b_e$  - длина стороны треугольника  $e$ , лежащей против вершины  $j$ ;  $\Delta_e$  - площадь треугольника  $e$ .

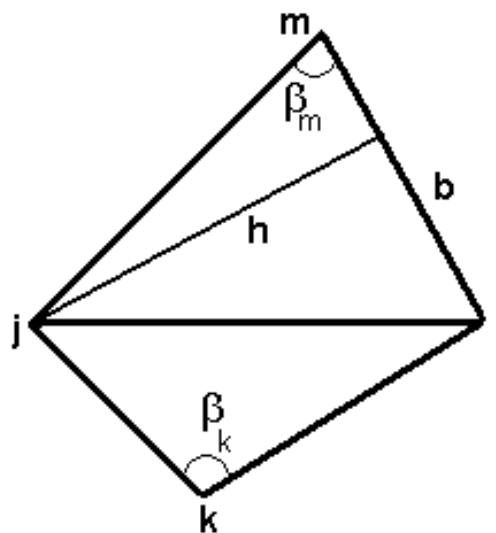


Рис.3.10.

Рассмотрим сетку, состоящую из треугольников, и два ее произвольных соседних узла  $j$  и  $i$  сетки. Пусть отрезок, соединяющий точки  $j$  и  $i$ , лежит на границе

элементов  $e'=(j,i,m)$  и  $e''=(j,i,k)$ . Из (3.1.1), (3.3.1) и (3.3.2) следует

$$c_{ij} = v_{e'} \beta_{ij}^{e'} + v_{e''} \beta_{ij}^{e''} = -\frac{1}{2}(v_{e'} \operatorname{ctg} \beta_m + v_{e''} \operatorname{ctg} \beta_k) . \quad (3.3.3)$$

С помощью элементарных тригонометрических преобразований можно получить

$$\operatorname{ctg} \beta_m + \operatorname{ctg} \beta_k = \frac{b_e^2}{2\Delta_e} .$$

Следовательно, для любой конфигурации треугольной сетки и любом распределении магнитной проницаемости имеет место

$$\sum_{i=1}^N c_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Таким образом, на каждой строке матрицы диагональный элемент равен сумме недиагональных элементов данной строки, взятых с противоположным знаком, то есть

$$c_{jj} = -\sum_{i \neq j}^N c_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.3.4)$$

Если в треугольной сетке нет ни одного тупоугольного треугольника, то в (3.3.3) все котангенсы будут больше нуля. Следовательно, все недиагональные элементы будут меньше или равны нулю. Для слагаемых, имеющих одинаковый знак, имеет место тождество

$$\left| \sum_{i \neq j}^N c_{ij} \right| = \sum_{i \neq j}^N |c_{ij}|, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Отсюда в силу (3.3.4) следует, что все  $g_j$  равны нулю. Следовательно, если в треугольной сетке, используемой при численном расчете двумерного магнитного поля методом конечных элементов, нет ни одного тупоугольного треугольника, то

все величины  $g_j$  равны нулю, то есть при подходящем выборе начального приближения итерационный процесс сходится.

Совсем иная картина получается в случае наличия в треугольниках тупых углов. Если узел  $j$  является вершиной острого угла тупоугольного треугольника, то есть в равенстве (3.3.3) угол  $\beta_m$  является тупым, то  $\text{ctg}\beta_m < 0$ , и соответствующий недиагональный элемент может стать положительным, тогда как основная масса недиагональных элементов являются отрицательным (или равны нулю). Однако для слагаемых, имеющих разные знаки, примененное выше тождество заменяется неравенством

$$\left| \sum_{i \neq j}^N c_{ij} \right| < \sum_{i \neq j}^N |c_{ij}|, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Следовательно, для таких узлов  $j$  имеем  $g_j < 0$ , и доминирования диагонали не происходит.

Оценим, при каких величинах тупых углов происходит доминирование недиагональных элементов и задача обязательно расходится, то есть когда имеет место  $|c_{jj}| < |c_{ij}|$ . Пренебрегая влиянием магнитной проницаемости и считая значение  $\nu$  в элементах вокруг узла  $j$  приблизительно одинаковым, получим условие

$$c_{jj} = \sum_e \frac{b_e^2}{4\Delta_e} < \frac{1}{2} \text{ctg} \beta .$$

Обозначим через  $h_e$  высоту, проведенную к стороне  $b_e$  треугольника  $e$  (рис. 3.10).

Тогда  $2\Delta_e = h_e b_e$ , и условие доминирования недиагональных элементов примет вид

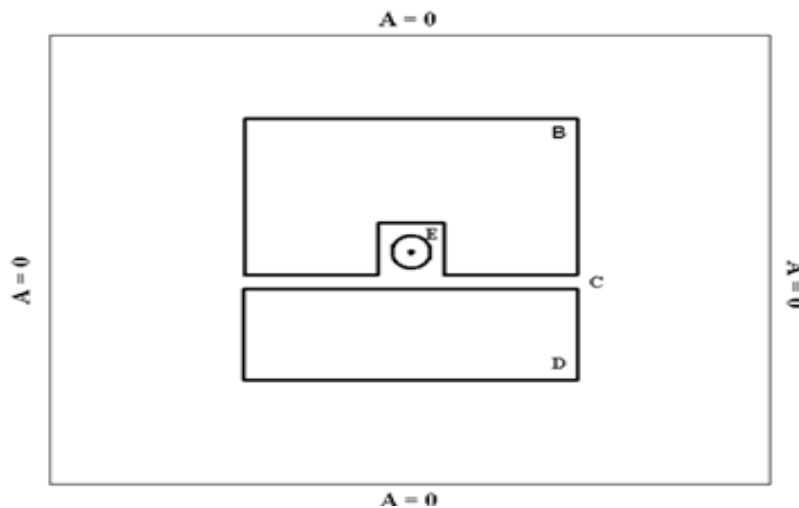
$$\text{ctg} \beta > \sum_e \frac{b_e}{2h_e} .$$

Последнюю сумму можно приблизительно оценить как периметр ломаной, описанной вокруг узла, разделенный на ее диаметр, то есть числом  $\pi$ . Следовательно, задача расходится, когда  $ctg \beta > \pi$ , откуда следует  $\beta < 12^\circ$ . Такие углы обязательно появятся, если в сетке присутствует треугольник с тупым углом большим, чем

$$180^\circ - (12^\circ + 12^\circ) = 156^\circ.$$

Следовательно, если в треугольной сетке, используемой при численном расчете двумерного магнитного поля методом конечных элементов, есть треугольники с тупым углом большим, чем  $156^\circ$ , то итерационный процесс расходится.

Заметим, что полученные результаты относятся к системе уравнений с постоянными коэффициентами. Вместе с тем, при численном решении полевой нелинейной задачи методом конечных элементов возникает система уравнений с переменными коэффициентами, зависящими от магнитной проницаемости. Данное обстоятельство также влияет на процесс сходимости решения. Вышеприведенные оценки получены без учета влияния пересчета значений магнитной проницаемости после каждой итерации.



Полученные результаты опробованы на задаче численного определения магнитного поля в области, представленной на рисунке 3.11 с указанием граничных условий. На этом рисунке показано электромагнитное устройство с ферромагнитными участками В и D, разделенными воздушным зазором С.

Устройство содержит обмотку E, обтекаемую током. Для решения задачи ограничились рассмотрением конечной области, на границах которой значения потенциалов принимаются нулевыми.

На рисунке 3.12а представлена расчетная сетка, где отсутствуют тупоугольные треугольники, и, как видно из рисунка 3.12б, процесс решения задачи успешно сходится.

Будем постепенно поднимать линию ab (рисунок 3.13а), тогда в расчетной сетке образуются два симметричных тупоугольных треугольника d с тупым углом, равным  $148^\circ$ . Это обстоятельство приводит к заметному замедлению процесса сходимости, что отражено на графике 3.13б. Если в случае расчетной сетки на рисунке 3.12а, процесс решения сходится за 1345 итераций, то во втором случае (рисунок 3.13 а) число итерации возрастает до 2998 (рисунок 3.13 б).

С появлением же в расчетной сетке двух симметричных тупоугольных треугольников d с критическим углом  $156^\circ$  (рисунок 3.14а) итерационный процесс решения задачи расходится (рисунок 3.14б).

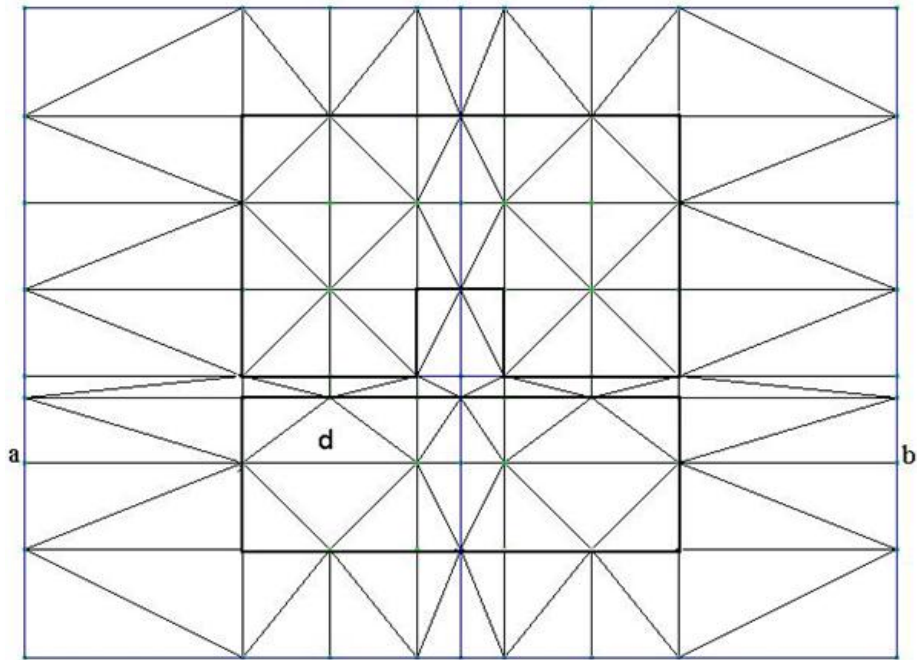


рис. 3.12 а.

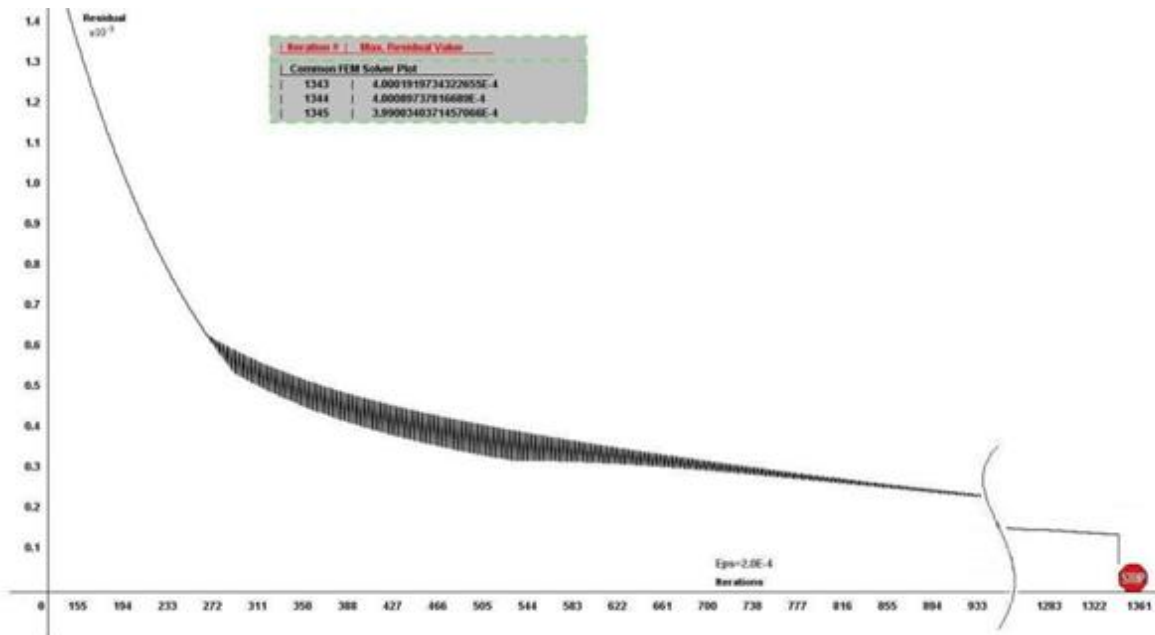


Рис. 3.12 б.

**Выводы.** Таким образом, полученные результаты численного эксперимента подтверждают вывод о том, что в треугольной сетке, используемой при численном расчете двумерного магнитного поля методом конечных элементов, наибольший угол в треугольных элементах не должен превышать критического значения  $156^\circ$ .

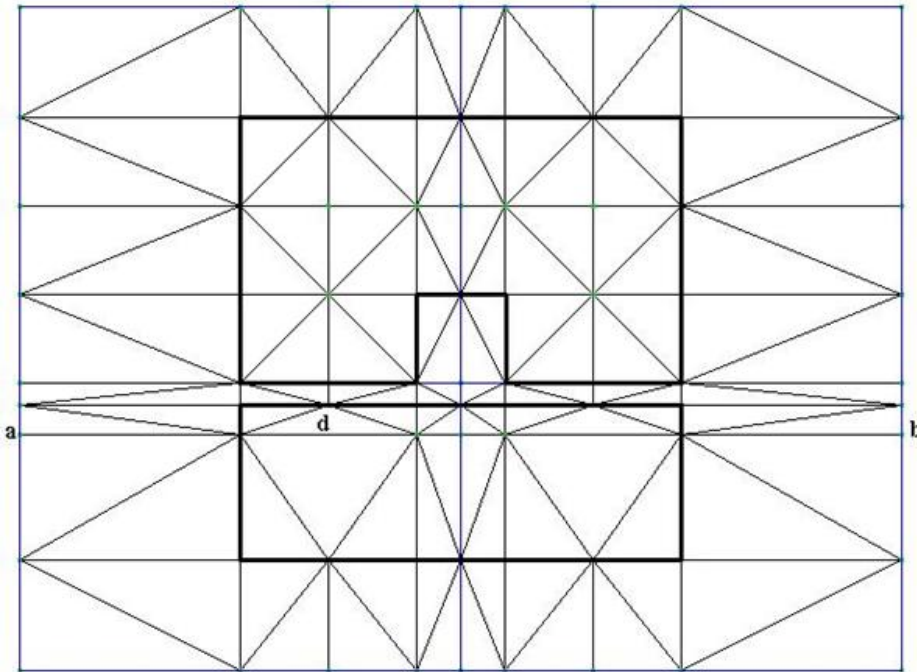
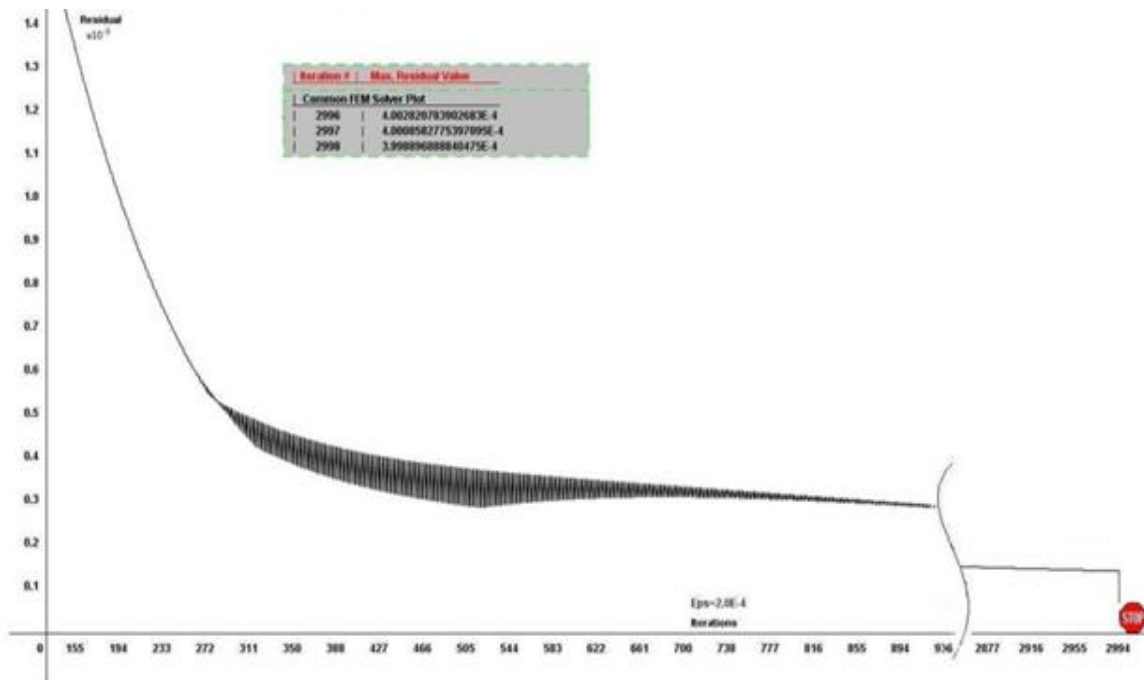


Рис. 3.13 а

Рис.3.13б.



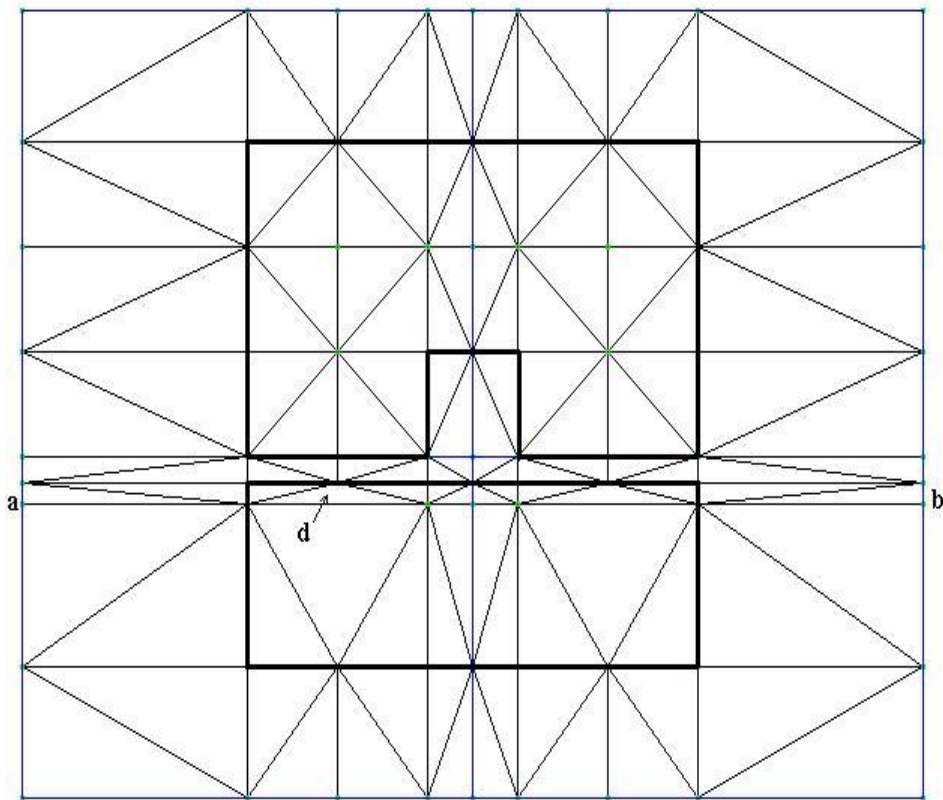
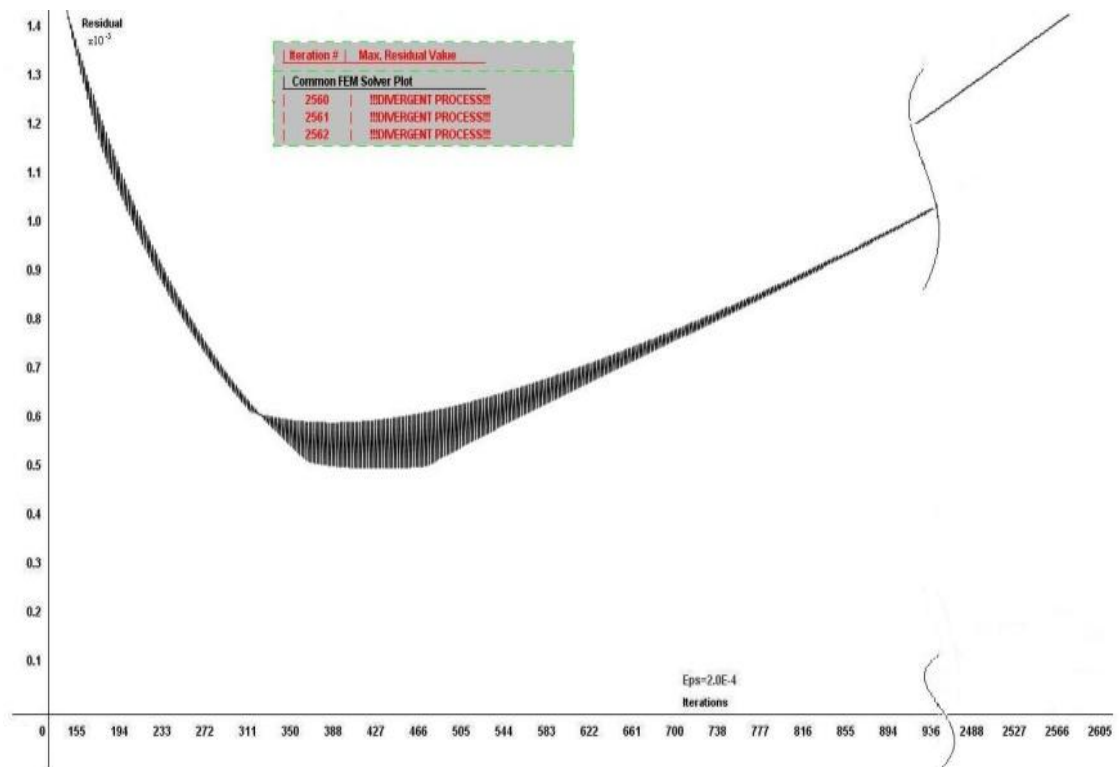


Рис. 3.14 а





## ГЛАВА 4

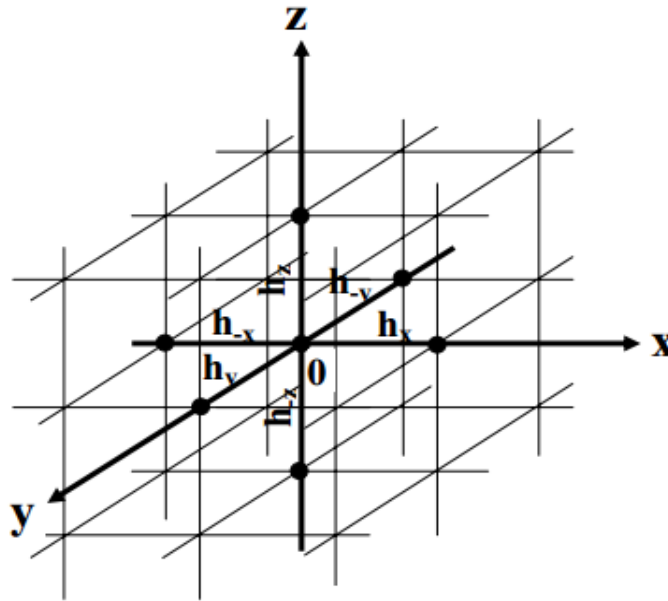
### ТРЕХМЕРНЫЕ ПОЛЕВЫЕ ЗАДАЧИ

4.1. Оценка погрешности разностной аппроксимации трехмерного оператора Лапласа с нерегулярной сеткой [144]

Оценим погрешность разностной аппроксимации трехмерного оператора Лапласа

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

На рисунке 4.1 представлена трехмерная прямоугольная сетка с образующими параллельными координатным осям  $x, y, z$ .



Расчетное уравнение метода конечных разностей для центрального узла 0 трехмерной прямоугольной сетки имеет вид

$$C_{000}U(0,0,0) = \sum_{i,j,k=-1,0,+1} C_{ijk}U(h_i^{(x)}, h_j^{(y)}, h_k^{(z)}), \quad (4.1.2)$$

где

$$h_i^{(x)} = \begin{cases} -h_{-x}, i = -1; \\ 0, i = 0; \\ h_x, i = +1. \end{cases}$$

Здесь  $U$  - искомая функция;  $h_x$  и  $h_{-x}$  - шаги сетки по оси  $x$  в положительном и отрицательном направлениях. Аналогично обозначаются шаги  $h_j^{(y)}$  и  $h_{-j}^{(y)}$ ;  $C_{ijk}$  - коэффициенты линейного уравнения при узле с координатами  $(h_i^{(x)}, h_j^{(y)}, h_k^{(z)})$ .

Составим вспомогательную функцию

$$F(t) = \sum_{i,j,k} C_{ijk} U(\text{th}_i^{(x)}, \text{th}_j^{(y)}, \text{th}_k^{(z)}). \quad (4.1.3)$$

Заметим, что в точке  $t=1$  значение  $F(1)$  равно правой части расчетного уравнения (4.1.2). Предположим, что функция  $U$  достаточно гладкая, то есть имеет непрерывные производные, по крайней мере, 4-го порядка по всем аргументам. Тогда функцию (4.1.3) можно разложить в ряд Тейлора

$$F(1) = F(0) + F^I(0) + \frac{F^{II}(0)}{2!} + \frac{F^{III}(0)}{3!} + \frac{F^{IV}(0)}{4!} + o(h^4). \quad (4.1.4)$$

Причем в точке  $t=0$  значение функции (4.1.3) равно

$$F(0) = \sum_{i,j,k} C_{ijk} U(0,0,0).$$

Чтобы это выражение совпало с левой частью расчетного уравнения (4.1.2), необходимо  $C_{000}$  взять равным

$$C_{000} = \sum_{i,j,k} C_{ijk}.$$

Дополнительно положим, что шаги сетки  $h_x, h_y, h_z$  уменьшаются пропорционально, сохраняя форму сетки, то есть  $h_x = k_x h, h_y = k_y h, h_z = k_z h$ . При малых значениях  $h$   $n$ -тая производная  $F^{(n)}$  будет иметь порядок малости  $h^n$ .

Учитывая то обстоятельство, что погрешность расчетного уравнения имеет порядок  $h^n$ , где  $n$  - номер остаточного члена в разложении Тэйлора (4.1.4), неужно так выбрать коэффициенты  $C_{ijk}$ , чтобы как можно больше первых членов разложения (4.1.4) обратить в ноль и получить остаточный член как можно более высокого порядка.

Первая производная  $F'(0)$  имеет вид

$$F'(0) = \sum_{i,j,k} C_{ijk} (h_i^{(x)} \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{0,0,0} + h_j^{(y)} \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{0,0,0} + h_k^{(z)} \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{0,0,0}). \quad (4.1.5)$$

Теперь предположим, что шаги сетки по координатным осям в положительном и отрицательном направлениях равны, то есть  $h_{-x} = h_x, h_{-y} = h_y, h_{-z} = h_z$ . Такую сетку назовем сеткой с симметричным шагом, она отличается от регулярной сетки, что шаги по разным координатным направлениям разные.

Это предположение сильно облегчает дальнейшие выкладки. Так, чтобы обратить в ноль первую производную  $F'(0)$ , достаточно взять

$$\begin{aligned} C_{-1,j,k} &= C_{1,j,k}, \\ C_{i,-1,k} &= C_{i,1,k}, \\ C_{i,j,-1} &= C_{i,j,1}. \end{aligned}$$

Вторая же производная  $F''(0)$  имеет вид

$$F''(0) = \sum_{i,j,k} C_{i,j,k} \left[ (h_i^{(x)})^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (h_j^{(y)})^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (h_k^{(z)})^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + 2h_i^{(x)} h_j^{(y)} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 2h_i^{(x)} h_k^{(z)} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} + 2h_j^{(y)} h_k^{(z)} \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \right].$$

Из нашего допущения следует, что коэффициенты при смешанных производных заведомо равны нулю. Тогда

$$F''(0) = 2h_x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \sum_{j,k} C_{i,j,k} + 2h_y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \sum_{i,k} C_{i,j,k} + 2h_z^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \sum_{i,j} C_{i,j,k}.$$

Если взять

$$\begin{cases} C_{1,0,0} = \frac{4}{h^4} (h_y^2 h_y^2 - h_y^2 h_y^2 - h_y^2 h_y^2) + \frac{h^2}{h_x^2}, \\ C_{1,1,0} = \frac{2}{h^4} (h_x^2 h_z^2 + h_y^2 h_z^2 + h_x^2 h_y^2), \\ C_{1,1,1} = \frac{1}{h^4} (h_x^2 h_y^2 + h_y^2 h_z^2 + h_x^2 h_z^2) \end{cases} \quad (4.1.6)$$

то получим

$$F''(0) = 2h^2 (1 + 4k_x k_y k_z) \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right). \quad (4.1.7)$$

Следовательно,  $F'''(0) = 0$ , и получаем

$$\begin{aligned} C_{000} U(0,0,0) - \sum_{i,j,k=-1,0,+1} C_{ijk} U(h_i^{(x)}, h_j^{(y)}, h_k^{(z)}) &= \\ = h^2 (1 + 4k_x k_y k_z) \nabla U + \frac{F^{IV}(0)}{4!} + o(h^4). \end{aligned}$$

Обозначая через  $M_4$  максимум частных производных четвертого порядка функции  $U$ , получим оценку оператора Лапласа  $F^{IV}(0) < M_4 h^4 R^3$ .

Следовательно, погрешность разностной аппроксимации трехмерного оператора Лапласа при условии (4.1.6) имеет порядок  $h^2$  и

$$\varepsilon \leq \frac{M_4 h^2 R^3}{4!(1 + 4k_x k_y k_z)}.$$

Следовательно, расчетное уравнение (4.1.2) с коэффициентами (4.1.6) совпадает при  $h_z = 0$  с четырехточечной разностной двумерной аппроксимацией.

## ***4.2. О погрешности трехточечной аппроксимации***

### ***оператора Лапласа [166]***

Наиболее популярным методом численного решения задач электромагнитного поля является метод конечных элементов. Метод опирается на вариационный подход к решению классических уравнений Максвелла и основан на минимизации энергетического функционала. При этом энергетический функционал зависит от неизвестной функции  $A$  – значений векторного магнитного потенциала во всех точках исследуемой области.

Обычно используется классический способ нахождения экстремума путем приравнивания нулю соответствующих производных. При этом требуется переход от поиска неизвестной функции, определенной в бесконечном множестве точек, к поиску конечного количества неизвестных численных параметров – значений потенциала  $A$  в узлах аппроксимационной сетки.

Известным примером такого перехода является четырехточечная аппроксимация оператора Лапласа внутри прямоугольника в виде весовой суммы значений функции в четырех вершинах прямоугольника:

$$\nabla A \approx \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} A_i, \quad (4.2.1)$$

где  $A_i$  - значение функции  $A$  в точке  $i$ . Отметим, что погрешность этой аппроксимации пропорциональна площади прямоугольника.

Приближение (4.2.1) хорошо работает при решении краевых задач методом конечных разностей с помощью прямоугольной сетки. Однако при решении задач электромагнитного поля приходится разделять ферромагнитные участки от воздушной среды. А такие участки могут иметь довольно сложную геометрию, и прямоугольная сетка для них не годится.

Поэтому при решении полевых задач со сложной геометрией применяется метод конечных элементов, требующий построения треугольной сетки. Становится важным получение аналога приближения (4.2.1) для треугольников.

Целью настоящей параграфа является получение трехточечной аппроксимации оператора Лапласа внутри треугольника в виде весовой суммы значений функции в трех вершинах треугольника:

$$\nabla A \approx \sum_{i=1}^3 c_i A_i . \quad (4.2.2)$$

В отличие от (4.2.1), весовые коэффициенты  $c_i$  в (4.2.2) зависят от формы треугольника, а точнее - от его внутренних углов. Так как котангенс прямого угла равен единице, то и приближение (4.2.1) можно записать в виде, формально зависящем от внутренних углов прямоугольника:

$$\nabla A \approx \sum_{i=1}^3 \frac{1}{4} \operatorname{ctg} \alpha_i A_i,$$

где  $\alpha_i$  - внутренний угол прямоугольника при вершине  $i$ . Интересно, что такой же вид имеет и трехточечная аппроксимация оператора Лапласа внутри треугольника:

$$\nabla A \approx \sum_{i=1}^3 \operatorname{ctg} \alpha_i A_i, \quad (4.2.3)$$

где  $\alpha_i$  - внутренний угол треугольника при вершине  $i$ ;  $A_i$  - значение функции  $A$  в точке  $i$ . Вначале докажем справедливость (4.2.3) для равнобедренных треугольников со стороной, параллельной координатной оси, и одной из вершин, лежащей в начале координат. Рассмотрим равнобедренный треугольник с основанием, параллельным оси  $OX$ , и вершинами  $V_i$ , имеющими декартовы координаты  $V_1=(0;0)$ ,  $V_2=(2h_x;0)$  и  $V_3=(h_x;h_y)$ .

Запишем расчетное уравнение метода конечных элементов для оператора Лапласа во внутренней точке  $V_0$  с координатами  $(x,y)$  (см. рисунок 4.2.). Оно имеет вид

$$\sum_e \left( \sum_{i=0}^3 A_i \beta_{i0}^e \right) = 0. \quad (4.2.4)$$

Внутреннее суммирование ведется по всем узлам, принадлежащим элементу  $e$ , внешнее - по всем элементам, содержащим узел  $V_0$ . Коэффициенты взаимодействия узлов  $V_i$  и  $V_j$  имеют вид

$$\beta_{ii}^e = \frac{1}{4\Delta} [(y_j - y_m)^2 + (x_j - x_m)^2];$$

$$\beta_{ij}^e = \frac{1}{4\Delta} [(y_j - y_m)(y_m - y_i) + (x_j - x_m)(x_m - x_i)],$$

где  $\square\square$  - площадь треугольника  $V_i V_j V_m$ ;  $(x_k, y_k)$  - декартовы координаты точки  $V_k$ ,  $k=i,j,m$ .

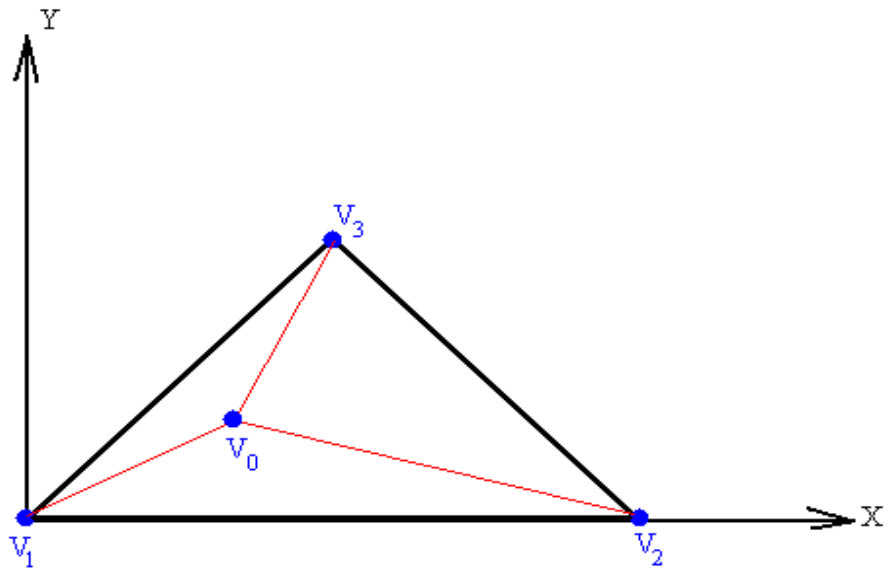


Рис.4.2.

Для треугольника  $V_0V_3V_1$ , подставляя значения координат, получим

$$A_{00} = (h_y^2 + h_x^2) / 4 A_{013}$$

Для треугольников  $V_0V_1V_2$  и  $V_0V_2V_3$  можно получить значения коэффициентов  $A_{012}$  и  $A_{023}$  аналогично.

Возьмем точку  $V_0$  в центре треугольника, приняв  $x = h_x$ . Тогда площади треугольников  $V_0V_3V_1$  и  $V_0V_2V_3$  окажутся равными.

Расчетное уравнение при  $x = h_x$  примет вид

$$\begin{aligned} & A_0 [(h_y^2 + h_x^2) / ((h_y - y)h_x + h_x/y)] = \\ & = A_1 [h_y / (2h_x) + h_x / (2y)] + A_2 [h_y / (2h_x) + h_x / (2y)] + A_3 (yh_y + h_x^2) / ((h_y - y)h_x). \end{aligned}$$

Устремим величину  $y$  к нулю. Приняв  $A_0 \approx \frac{1}{2}(A_1 + A_2)$ , можем избавиться от бесконечно больших членов порядка  $h_x/y$ . Получаем

$$A_0 (h_y^2 + h_x^2) / (h_y h_x) = A_1 h_y / (2h_x) + A_2 h_y / (2h_x) + A_3 (h_x^2) / (h_y h_x),$$



откуда следует

$$\nabla A \approx \frac{1}{2} (A_1 + A_2) h_x / h_y + A_3 \left( \frac{h_y}{2h_x} - \frac{h_x}{2h_y} \right).$$

Заметив, что выражение  $h_x / h_y$  равно котангенсу угла при вершинах  $V_1$  и  $V_2$ , а  $\frac{h_y}{2h_x} - \frac{h_x}{2h_y}$  - котангенсу угла при вершине  $V_3$ , получаем аппроксимацию (4.2.3) для равнобедренных треугольников с основанием на оси ОХ и вершиной  $V_1$  в начале координат. Справедливость (4.2.3) для общих треугольников следует из известной инвариантности оператора Лапласа относительно параллельных переносов, поворотов и линейных преобразований декартовой системы координат.

При численном решении задач электромагнитного поля методом конечных элементов получают расчетные уравнения, аналогичные (4.2.4), но с добавлением множителей, зависящих от магнитной проницаемости среды. Следовательно, в однородной среде погрешность аппроксимации уравнений Максвелла расчетными уравнениями метода конечных элементов пропорциональна котангенсам углов.

Пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  - внутренние углы произвольного треугольника, причем  $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$ . Сумма котангенсов внутренних углов треугольника обладает следующими свойствами:

1) она всегда положительна:  $ctg \alpha_1 + ctg \alpha_2 + ctg \alpha_3 > 0$ .

Заметим, что наибольший угол  $\alpha_1$  может быть тупым, тогда  $ctg \alpha_1 < 0$ , но при этом два других острых угла сильнее влияют на сумму котангенсов;

2) если  $\alpha_3$  стремится к нулю, то  $ctg \alpha_1 + ctg \alpha_2 + ctg \alpha_3$  стремится к бесконечности;

3) если угол  $\alpha_1$  тупой и стремится к  $\pi$ , то  $ctg \alpha_1 + ctg \alpha_2 + ctg \alpha_3$  стремится к бесконечности;

4) во множестве всевозможных треугольников сумма котангенсов  $ctg \alpha_1 + ctg \alpha_2 + ctg \alpha_3$  достигает своего минимума для равностороннего треугольника.

Эти свойства делают математически более обоснованным известный из вычислительной практики принцип, согласно которому при численном решении задач электромагнитного поля методом конечных элементов наличие в треугольной сетке тупоугольных элементов отрицательно влияет на сходимость процесса последовательных приближений.

Из свойства 3 следует, что когда один из углов треугольника стремится к  $\pi$ , то погрешность аппроксимации бесконечно возрастает, хотя площадь треугольника при этом стремится к нулю. Следовательно, степень малости элементов треугольной сетки надо определять по малости периметра треугольника, а не по площади.

Из свойства 4 также следует, что в однородной среде оптимальной является треугольная сетка, состоящая из равносторонних треугольников равного размера (пчелиные соты).

В [165] показано, что при заданном наборе узлов триангуляция Делоне минимизирует сумму котангенсов углов всех своих треугольников. Следовательно, триангуляция Делоне минимизирует и погрешность трехточечной аппроксимации оператора Лапласа. Отсюда вытекает, что для задачи автоматизированного нахождения электромагнитного поля методом конечных элементов при заданном наборе узлов из всех возможных сеток наилучшей (в смысле скорости сходимости процесса последовательных приближений) является триангуляция Делоне.

### ***4.3. Численный расчет трехмерного магнитного поля методом конечных элементов [149], [153]***

В настоящем параграфе результаты, полученные в предыдущей главе для двумерных полевых задач, обобщены на трехмерный случай. Доказано отрицательное влияние на сходимость итерационного процесса наличия в тетраэдрической сетке тупых углов (как плоских так и линейных). Здесь и далее под тетраэдром будем понимать произвольный четырехгранник (необязательно правильный).

Вывод уравнений для численного расчета трехмерных стационарных нелинейных магнитных полей методом конечных элементов с использованием вариационного исчисления был дан в [57]. В работе [81] расчетные уравнения для трехмерных магнитных полей методом конечных элементов получены и реализованы на основе вариационного подхода с использованием базисных функций. Этот подход имеет то преимущество, что базисные функции легко обобщаются на многомерный случай.

Отметим особенность трехмерных полевых задач: в отличие от двумерных задач, составляющие векторного магнитного потенциала зависят от выбора направления декартовых координатных осей. Следовательно, и сами расчетные уравнения для нахождения этих составляющих неявно зависят от направления координатных осей. Здесь коэффициенты расчетной системы линейных уравнений разложены на множители явно зависящие от направления координатных осей и на множители инвариантные относительно поворотов. Показано, что сходимость итерационного процесса решения полевых задач зависит только от множителей второго типа, следовательно не зависит от выбора направления координатных осей (хотя само решение задачи и зависит).

Магнитное поле, созданное электрическим током, подчиняется классическому уравнению Максвелла

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} (\operatorname{rot} \vec{A}) = \delta.$$

Выразив вихрь через декартовые координаты  $(x, y, z)$ , уравнение Максвелла приобретет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial x} A^y - \frac{\partial}{\partial y} A^x \right) + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial x} A^z - \frac{\partial}{\partial z} A^x \right) &= \delta^x, \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial y} A^x - \frac{\partial}{\partial x} A^y \right) + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial y} A^z - \frac{\partial}{\partial z} A^y \right) &= \delta^y, \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial z} A^x - \frac{\partial}{\partial x} A^z \right) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial z} A^y - \frac{\partial}{\partial y} A^z \right) &= \delta^z \end{aligned} \right\} \quad (4.3.1)$$

где  $\mathbf{A} = (A^x, A^y, A^z)$  - вектор магнитного потенциала,  $\delta = (\delta^x, \delta^y, \delta^z)$  - вектор плотности тока,  $\mu$  - величина магнитной проницаемости.

Прямое решение системы (4.3.1) затруднительно из-за того, что задача является нелинейной: величина магнитной проницаемости сама зависит от потенциала и также является неизвестной. Покажем, что минимум следующего функционала достигается на решении уравнения Максвелла (4.3.1):

$$F = \iiint_{\Omega} (f_x + f_y + f_z) dx dy dz, \quad ,$$

где  $\Omega$  - исследуемая область и

$$\left. \begin{aligned} f_x &= \frac{1}{2\mu} \left[ \left( \frac{\partial A^x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial A^x}{\partial z} \right)^2 - \frac{\partial A^y}{\partial x} \frac{\partial A^x}{\partial y} - \frac{\partial A^z}{\partial x} \frac{\partial A^x}{\partial z} \right] - \delta^x A^x, \\ f_y &= \frac{1}{2\mu} \left[ \left( \frac{\partial A^y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial A^y}{\partial z} \right)^2 - \frac{\partial A^y}{\partial x} \frac{\partial A^x}{\partial y} - \frac{\partial A^z}{\partial y} \frac{\partial A^y}{\partial z} \right] - \delta^y A^y, \\ f_z &= \frac{1}{2\mu} \left[ \left( \frac{\partial A^z}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial A^z}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial A^y}{\partial z} \frac{\partial A^z}{\partial y} - \frac{\partial A^z}{\partial x} \frac{\partial A^x}{\partial z} \right] - \delta^z A^z \end{aligned} \right\} \quad (4.3.2)$$

Из теории вариационного исчисления известно уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial(f_x + f_y + f_z)}{\partial \left( \frac{\partial A^x}{\partial x} \right)} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial(f_x + f_y + f_z)}{\partial \left( \frac{\partial A^x}{\partial y} \right)} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial(f_x + f_y + f_z)}{\partial \left( \frac{\partial A^x}{\partial z} \right)} - \frac{\partial(f_x + f_y + f_z)}{\partial A^x} = 0,$$

Для составляющих по осям  $y, z$  уравнение Эйлера-Лагранжа записывается аналогичным образом.

Остальные производные равны нулю. Подставляя эти производные в уравнение Эйлера-Лагранжа, получим первое из уравнений (4.3.1). Остальные уравнения для составляющих по осям  $y, z$  получаются аналогично перестановкой индексов  $x, y, z$ .

Дискретизируем непрерывную задачу, разделив исследуемую область  $\Omega$  на тетраэдры (элементы) и приняв, что внутри элемента  $e$  магнитная проницаемость  $\mu$  постоянна, а составляющие вектора магнитного потенциала являются линейными функциями вида

$$A^x = \sum_{t \in W_e} A_t^x b_t^e(x, y, z), \quad A^y = \sum_{t \in W_e} A_t^y b_t^e(x, y, z), \quad A^z = \sum_{t \in W_e} A_t^z b_t^e(x, y, z), \quad (4.3.3)$$

где  $W_e = (i, j, k, m)$  множество вершин элемента  $e$ ,  $A_t$  - значение потенциала  $A$  в узле  $t$ ,  $b_t^e(x, y, z)$  - базисная функция, то есть линейная функция, равная единице в узле  $t$

и нулю в остальных трех вершинах тетраэдра  $e$ . Трехмерные базисные функции обычно записывают в виде детерминанта:

$$b_k^e(x, y, z) = \frac{1}{3V_e} \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_j & y_j & z_j & 1 \\ x_i & y_i & z_i & 1 \\ x_m & y_m & z_m & 1 \end{vmatrix}, \quad (4.3.4)$$

где  $(x_t, y_t, z_t)$  - декартовы координаты вершин тетраэдра,  $t = (i, j, k, m)$ ,  $V_e$  - объем элемента  $e$ :

$$3V_e = \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i & 1 \\ x_j & y_j & z_j & 1 \\ x_k & y_k & z_k & 1 \\ x_m & y_m & z_m & 1 \end{vmatrix}.$$

Подставляя (4.3.3) в (4.3.2), получаем

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{2\mu} \left[ \left( \sum_{t \in W_e} A_t^x \frac{\partial b_t^e}{\partial y} \right)^2 + \left( \sum_{t \in W_e} A_t^x \frac{\partial b_t^e}{\partial z} \right)^2 \right] - \\ &- \frac{1}{2\mu} \left[ \left( \sum_{t \in W_e} A_t^x \frac{\partial b_t^e}{\partial y} \right) \left( \sum_{t \in W_e} A_t^y \frac{\partial b_t^e}{\partial x} \right) + \left( \sum_{t \in W_e} A_t^x \frac{\partial b_t^e}{\partial z} \right) \left( \sum_{t \in W_e} A_t^z \frac{\partial b_t^e}{\partial x} \right) \right] - \delta^x \sum_{t \in W_e} A_t^x b_t^e, \\ f_y &= \frac{1}{2\mu} \left[ \left( \sum_{t \in W_e} A_t^y \frac{\partial b_t^e}{\partial x} \right)^2 + \left( \sum_{t \in W_e} A_t^y \frac{\partial b_t^e}{\partial z} \right)^2 \right] - \\ &- \frac{1}{2\mu} \left[ \left( \sum_{t \in W_e} A_t^x \frac{\partial b_t^e}{\partial y} \right) \left( \sum_{t \in W_e} A_t^y \frac{\partial b_t^e}{\partial x} \right) + \left( \sum_{t \in W_e} A_t^z \frac{\partial b_t^e}{\partial y} \right) \left( \sum_{t \in W_e} A_t^y \frac{\partial b_t^e}{\partial z} \right) \right] - \delta^y \sum_{t \in W_e} A_t^y b_t^e, \\ f_z &= \frac{1}{2\mu} \left[ \left( \sum_{t \in W_e} A_t^z \frac{\partial b_t^e}{\partial x} \right)^2 + \left( \sum_{t \in W_e} A_t^z \frac{\partial b_t^e}{\partial y} \right)^2 \right] - \\ &- \frac{1}{2\mu} \left[ \left( \sum_{t \in W_e} A_t^x \frac{\partial b_t^e}{\partial z} \right) \left( \sum_{t \in W_e} A_t^z \frac{\partial b_t^e}{\partial x} \right) + \left( \sum_{t \in W_e} A_t^y \frac{\partial b_t^e}{\partial z} \right) \left( \sum_{t \in W_e} A_t^z \frac{\partial b_t^e}{\partial y} \right) \right] - \delta^z \sum_{t \in W_e} A_t^z b_t^e \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Система уравнений (4.3.5) является дискретным аналогом системы (4.3.2). Функционалы (4.3.2) зависят от неизвестных составляющих  $A^x, A^y, A^z$ , тогда как в (4.3.5) неизвестными являются числа  $A_t$  - значения потенциала  $A$  в узле  $t$ . Расчетную систему уравнений получим, приравняв нулю соответствующие производные. Для данного узла  $k$  имеем

$$\frac{\partial F}{\partial A_k^x} = \sum_{e \in E_k} \iiint_e \frac{\partial}{\partial A_k^x} (f_x + f_y + f_z) dx dy dz = 0,$$

где  $E_k$  - множество элементов  $e$ , содержащих узел  $k$ . Из (4.2.5) получается

$$\frac{\partial f_x}{\partial A_k^x} = \frac{1}{2\mu} \left[ 2 \left( \sum_{t \in W_e} A_t^x \frac{\partial b_t^e}{\partial y} \right) \frac{\partial b_k^e}{\partial y} + 2 \left( \sum_{t \in W_e} A_t^x \frac{\partial b_t^e}{\partial z} \right) \frac{\partial b_k^e}{\partial z} - \left( \sum_{t \in W_e} A_t^y \frac{\partial b_t^e}{\partial x} \right) \frac{\partial b_k^e}{\partial y} - \left( \sum_{t \in W_e} A_t^z \frac{\partial b_t^e}{\partial x} \right) \frac{\partial b_k^e}{\partial z} \right].$$

Аналогично вычисляя остальные производные получаем систему линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial A_k^x} &= \sum_{e \in E_k} \left[ v_e \sum_{t \in W_e} (a_{kt}^{xx} A_t^x - a_{kt}^{xy} A_t^y - a_{kt}^{xz} A_t^z) - \delta^x a_k^e \right] = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial A_k^y} &= \sum_{e \in E_k} \left[ v_e \sum_{t \in W_e} (a_{kt}^{yy} A_t^y - a_{kt}^{yx} A_t^x - a_{kt}^{yz} A_t^z) - \delta^y a_k^e \right] = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial A_k^z} &= \sum_{e \in E_k} \left[ v_e \sum_{t \in W_e} (a_{kt}^{zz} A_t^z - a_{kt}^{zx} A_t^x - a_{kt}^{zy} A_t^y) - \delta^z a_k^e \right] = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.3.6)$$

где  $v_e$  - значение  $v=1/\mu$  внутри элемента  $e$ ,  $a_{kt}^e$  - коэффициент взаимодействия вершины  $k$  с вершинами  $t$  в элементе  $e$ , причем

$$\left. \begin{aligned}
a_{kt}^{xx} &= \iiint_e \left( \frac{\partial b_k^e}{\partial y} \frac{\partial b_t^e}{\partial y} + \frac{\partial b_k^e}{\partial z} \frac{\partial b_t^e}{\partial z} \right) dx dy dz, \\
a_{kt}^{xy} &= \frac{1}{2} \iiint_e \frac{\partial b_k^e}{\partial y} \frac{\partial b_t^e}{\partial x} dx dy dz, \\
a_{kt}^{xz} &= \frac{1}{2} \iiint_e \frac{\partial b_k^e}{\partial z} \frac{\partial b_t^e}{\partial x} dx dy dz, \\
a_{kt}^{yy} &= \iiint_e \left( \frac{\partial b_k^e}{\partial x} \frac{\partial b_t^e}{\partial x} + \frac{\partial b_k^e}{\partial z} \frac{\partial b_t^e}{\partial z} \right) dx dy dz, \\
a_{kt}^{yx} &= \frac{1}{2} \iiint_e \frac{\partial b_k^e}{\partial x} \frac{\partial b_t^e}{\partial y} dx dy dz, \\
a_{kt}^{yz} &= \frac{1}{2} \iiint_e \frac{\partial b_k^e}{\partial z} \frac{\partial b_t^e}{\partial y} dx dy dz, \\
a_{kt}^{zz} &= \iiint_e \left( \frac{\partial b_k^e}{\partial x} \frac{\partial b_t^e}{\partial x} + \frac{\partial b_k^e}{\partial y} \frac{\partial b_t^e}{\partial y} \right) dx dy dz, \\
a_{kt}^{zx} &= \frac{1}{2} \iiint_e \frac{\partial b_k^e}{\partial x} \frac{\partial b_t^e}{\partial z} dx dy dz, \\
a_{kt}^{zy} &= \frac{1}{2} \iiint_e \frac{\partial b_k^e}{\partial y} \frac{\partial b_t^e}{\partial z} dx dy dz, \\
a_k^e &= \iiint_e b_k^e dx dy dz.
\end{aligned} \right\} \quad (4.3.7)$$

Заметим, что в (4.3.6) внешнее суммирование ведется по множеству  $E_\kappa$  элементов, содержащих узел  $k$ , а внутреннее суммирование - по всем узлам  $i, j, k, m$ , содержащимся в элементе  $e$ . Таким образом, численный расчет трехмерного магнитного поля методом конечных элементов сводится к решению системы уравнений (4.3.6). Причем для каждого узла  $k$  в (4.3.6) участвуют только непосредственные соседи данного узла. Таким образом, получается система уравнений с неизвестными  $A_k$ , причем количество уравнений равно числу неизвестных и равно утроенному количеству внутренних узлов.



#### 4.4. Геометрические характеристики уравнений МКЭ для расчета трехмерных полей [160]

Преобразуем коэффициенты (4.3.7) так, чтобы выделить их геометрические характеристики. Из (4.3.4) получаем

$$\frac{\partial}{\partial z} b_j^e(x, y, z) = \frac{1}{3V_e} \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_m & y_m & 1 \end{vmatrix} = \frac{2S_{ikm}^z}{3V_e},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} b_j^e(x, y, z) = \frac{1}{3V_e} \begin{vmatrix} x_i & z_i & 1 \\ x_k & z_k & 1 \\ x_m & z_m & 1 \end{vmatrix} = \frac{2S_{ikm}^y}{3V_e},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} b_j^e(x, y, z) = \frac{1}{3V_e} \begin{vmatrix} y_i & z_i & 1 \\ y_k & z_k & 1 \\ y_m & z_m & 1 \end{vmatrix} = \frac{2S_{ikm}^x}{3V_e},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} b_k^e(x, y, z) = \frac{1}{3V_e} \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \end{vmatrix} = \frac{2S_{ijm}^z}{3V_e},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} b_k^e(x, y, z) = \frac{1}{3V_e} \begin{vmatrix} x_i & z_i & 1 \\ x_j & z_j & 1 \\ x_m & z_m & 1 \end{vmatrix} = \frac{2S_{ijm}^y}{3V_e},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} b_k^e(x, y, z) = \frac{1}{3V_e} \begin{vmatrix} y_i & z_i & 1 \\ y_j & z_j & 1 \\ y_m & z_m & 1 \end{vmatrix} = \frac{2S_{ijm}^x}{3V_e},$$

где  $S_{ikm}^x$  - площадь проекции треугольника с вершинами  $i, k, m$  на плоскость перпендикулярную координатной оси  $x$ , см. рисунок 4.3. Аналогично определяются площади проекции треугольников с другими вершинами относительно остальных координатных осей. Согласно свойствам проекции имеем  $S_{ikm}^z = S_{ikm} \cos \beta_{xy}^i$ ,  $S_{ikm}^y = S_{ikm} \cos \beta_{xz}^i$ ,  $S_{ikm}^x = S_{ikm} \cos \beta_{yz}^i$ , где  $\beta_{xy}^i$  - угол между плоскостью

треугольника с вершинами  $i, k, m$  и плоскостью  $хоу$ . Аналогично определяются углы  $\beta_{xz}^i$  и  $\beta_{yz}^i$ .

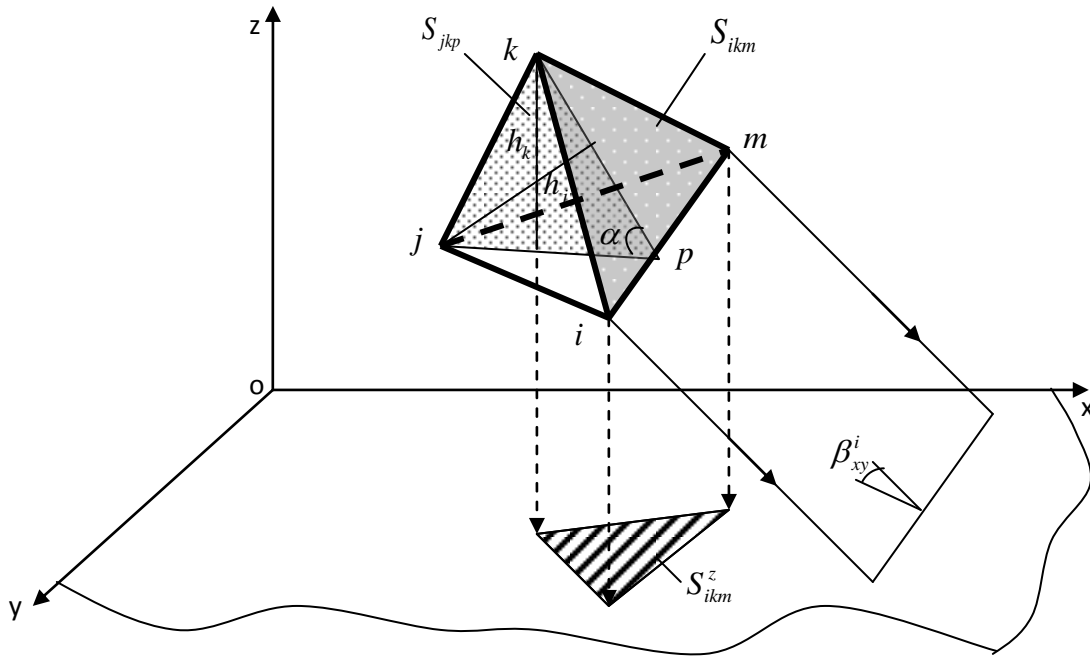


Рис. 4.3.

Объем и площадь связаны соотношением  $3V_e = S_{ikm}h_j$  или  $3V_e = S_{ijm}h_k$ , где  $h_j$  - высота опущенная из вершины  $j$  на противоположную плоскость тетраэдра  $e$ ,  $h_k$  - высота опущенная из вершины  $k$  на противоположную плоскость тетраэдра  $e$ . Следовательно

$$\frac{\partial}{\partial z} b_j^e(x, y, z) = \frac{2}{h_j} \cos \beta_{xy}^j,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} b_j^e(x, y, z) = \frac{2}{h_j} \cos \beta_{xz}^j,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} b_j^e(x, y, z) &= \frac{2}{h_j} \cos \beta_{yz}^j, \\ \frac{\partial}{\partial z} b_k^e(x, y, z) &= \frac{2}{h_k} \cos \beta_{xy}^k, \\ \frac{\partial}{\partial y} b_k^e(x, y, z) &= \frac{2}{h_k} \cos \beta_{xz}^k, \\ \frac{\partial}{\partial x} b_k^e(x, y, z) &= \frac{2}{h_k} \cos \beta_{yz}^k,\end{aligned}$$

Записав аналогичные уравнения для остальных вершин  $j, k, m$  и подставив их в (4.3.7) получим

$$\left. \begin{aligned}\iiint_e \frac{\partial b_k^e}{\partial z} \frac{\partial b_j^e}{\partial z} dx dy dz &= \frac{4V_e}{h_k h_j} \cos \beta_{xy}^k \cos \beta_{xy}^j, \\ \iiint_e \frac{\partial b_k^e}{\partial y} \frac{\partial b_j^e}{\partial y} dx dy dz &= \frac{4V_e}{h_k h_j} \cos \beta_{xz}^k \cos \beta_{xz}^j, \\ \iiint_e \frac{\partial b_k^e}{\partial y} \frac{\partial b_j^e}{\partial x} dx dy dz &= \frac{4V_e}{h_k h_j} \cos \beta_{xz}^k \cos \beta_{yz}^j, \\ \iiint_e \frac{\partial b_k^e}{\partial z} \frac{\partial b_j^e}{\partial x} dx dy dz &= \frac{4V_e}{h_k h_j} \cos \beta_{xy}^k \cos \beta_{yz}^j, \\ \iiint_e \frac{\partial b_k^e}{\partial x} \frac{\partial b_j^e}{\partial x} dx dy dz &= \frac{4V_e}{h_k h_j} \cos \beta_{yz}^k \cos \beta_{yz}^j, \\ \iiint_e \frac{\partial b_k^e}{\partial x} \frac{\partial b_j^e}{\partial y} dx dy dz &= \frac{4V_e}{h_k h_j} \cos \beta_{yz}^k \cos \beta_{xz}^j, \\ \iiint_e \frac{\partial b_k^e}{\partial z} \frac{\partial b_j^e}{\partial y} dx dy dz &= \frac{4V_e}{h_k h_j} \cos \beta_{xy}^k \cos \beta_{xz}^j, \\ \iiint_e \frac{\partial b_k^e}{\partial x} \frac{\partial b_j^e}{\partial z} dx dy dz &= \frac{4V_e}{h_k h_j} \cos \beta_{yz}^k \cos \beta_{xy}^j, \\ \iiint_e \frac{\partial b_k^e}{\partial y} \frac{\partial b_j^e}{\partial z} dx dy dz &= \frac{4V_e}{h_k h_j} \cos \beta_{xz}^k \cos \beta_{xy}^j.\end{aligned}\right\} \quad (4.4.1)$$

Из (4.3.6) и (4.4.1) получаем уравнение для расчета потенциала  $A_k^x$ .

Перенеся влево диагональные элементы, имеем

$$\sum_{e \in E_k} v_e \frac{4V_e}{(h_k^e)^2} (\cos^2 \beta_{xy}^k + \cos^2 \beta_{xz}^k) A_k^x = \quad (4.4.2)$$

$$= \sum_{e \in E_k} v_e \sum_{t=i,j,m} \frac{V_e}{h_t^e h_k^e} \left[ (\cos \beta_{xy}^k \cos \beta_{xy}^t + \cos \beta_{xz}^k \cos \beta_{xz}^t) A_t^x - \right. \\ \left. - \cos \beta_{xz}^k \cos \beta_{yz}^j A_t^y - \cos \beta_{xy}^k \cos \beta_{yz}^j A_t^z \right] - \delta^x a_k^e,$$

В силу (4.4.2), недиагональные элементы  $k$ -той строки матрицы системы линейных уравнений будут больше, чем диагональный элемент данной строки, если

$$\frac{V_e}{h_t^e h_k^e} \gg \frac{V_e}{(h_k^e)^2}, \quad (4.4.3)$$

то есть если в сетке существует тетраэдр  $e$  с существенно разными длинами высот  $h_t^e \ll h_k^e$ . В соответствии с принципом доминирования диагонали (см. параграф 3.3) в таком случае итерационный процесс расходится.

Отметим, что в (4.4.2) величины вида  $\cos \beta_{xy}^t$  не влияют на сходимость процесса, так как не могут все одновременно быть близкими к нулю. Действительно,  $\cos \beta_{xy}^i = 0$ , если плоскость треугольника с вершинами  $j, k, m$  перпендикулярна координатной плоскости  $хоу$ . Однако никакая плоскость не может быть одновременно перпендикулярной всем трем координатным плоскостям. Следовательно, при  $h_t^e \ll h_k^e$  хотя бы один недиагональный элемент  $k$ -той строки матрицы будет больше, чем диагональный элемент данной строки.

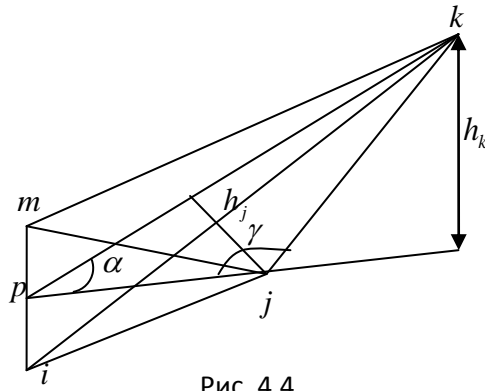


Рис. 4.4

Из условия (4.4.3) вытекают ограничения и на углы тетраэдра. Рассмотрим плоскость, перпендикулярную ребру тетраэдра  $im$ , см. рисунок 4.4. Имеем  $3V_e = S_{jkr}l_{im}$ , где  $S_{jkr}$  - площадь образуемого треугольника с вершинами  $j, k, p$ ,  $l_{im}$  - длина ребра с вершинами  $i$  и  $m$ . Ответим на вопрос: каким должен быть угол  $\alpha$  между плоскостями граней с вершинами  $i, j, m$  и  $i, k, m$ , чтобы выполнялось условие (4.4.3)?

Зафиксируем высоту  $h_k^e$  и площадь  $S_{jkr}$ . Для высот имеем пропорцию  $dh_j^e = ch_k^e$ , где  $d$  - длина стороны  $(k, p)$ ,  $c$  - длина стороны  $(j, p)$ . Заметим, что величина  $c = \frac{S_{jkr}}{2h_k^e}$  тоже фиксирована. По теореме Пифагора имеем

$$d^2 = h_k^2 + (c - h_k \operatorname{ctg} \gamma)^2.$$

Следовательно,

$$h_i^e = \frac{c}{d} h_k^e = \frac{c}{\sqrt{1 + \left( \frac{c}{h_k^e} - \operatorname{ctg} \gamma \right)^2}}.$$

Отсюда видно, что при данных высоте  $h_k^e$  и площади  $S_{ijp}$ , вторая высота тетраэдра может быть малой длины только тогда, когда  $\operatorname{ctg} \gamma < 0$ , то есть при тупом

угле. Итак, как и в плоском случае, наличие в сетке тупоугольных граней тетраэдров отрицательно сказывается на сходимости процесса решения. Оценим критическое значение тупого угла  $\gamma$ , при превышении которого соответствующий итерационный процесс расходится.

Рассмотрим в трехмерном пространстве выпуклый многогранник. Известна классическая формула Эйлера для выпуклых многогранников, которая связывает количество  $G$  граней,  $R$  ребер и  $W$  вершин всякого выпуклого многогранника:

$$G - R + W = 2.$$

Предположим, что все грани многогранника являются треугольными. Тогда каждая грань содержит три ребра, а каждое ребро лежит на границе двух граней. Следовательно,  $3G = 2R$ . Подставляя в формулу Эйлера, получим

$$W = 2 - G + \frac{3}{2}G = 2 + \frac{1}{2}G. \quad (4.4.4)$$

Добавим внутри многогранника вершину (узел)  $O$  и соединим ее со всеми  $W$  вершинами. Так как все грани многогранника являются треугольниками, то получим непересекающиеся тетраэдры с общей вершиной  $O$ . При этом количество тетраэдров равно числу  $G$  граней выпуклого многогранника. Тогда число  $W$  узлов, соединенных с узлом  $O$  вычисляется соотношением (4.4.4).

Таким образом, для любой тетраэдрической сетки и любого ее внутреннего узла  $O$  число  $G$  тетраэдров, содержащих узел  $O$ , обязательно четное и связано с числом  $W$  соседних узлов формулой (4.4.4).

Для правильного тетраэдра (у которого все ребра равны) телесный угол при каждой вершине равен  $\pi/6$ , а полный телесный угол равен площади единичной

сферы  $4\pi$ . Следовательно, узел можно окружить 24 правильными тетраэдрами. Согласно (4.4.4) такой узел будет иметь 14 соседних узлов.

Учитывая полученную среднюю оценку, предположим, что вершина тупого угла соседствует с 14 узлами. Если выполнено неравенство

$$\frac{V_e}{h_j^e h_k^e} > 14 \frac{V_e}{(h_k^e)^2}, \quad (4.4.5)$$

то в матрице расчетной системы уравнений элемент  $k$ -той строки и  $j$ -того столбца будет больше диагонального элемента этой строки. Из рисунка 4.4 видно, что

$$S_{jkp} = \frac{h_j h_k}{2 \sin \alpha},$$

Следовательно, условие (4.4.5) будет выполнено, если  $\sin \alpha < \frac{1}{7}$ , то есть угол  $\alpha < 8,2^\circ$ . Очевидно, последнее неравенство выполняется, если имеет место  $\gamma > 180^\circ - 8,2^\circ - 8,2^\circ = 163,6^\circ$ .

Таким образом, если в сетке существуют тетраэдры с тупыми углами большими, чем  $\gamma > 163,6^\circ$ , то итерационный процесс решения полевой задачи заведомо расходится.

#### ***4.5. Свойства векторных характеристик трехмерного магнитного поля***

[161]

Решение двумерной задачи электромагнитного поля является более простым по сравнению с трехмерной задачей, так как в двумерном случае мы предполагаем, что вектор магнитного потенциала имеет две нулевые составляющие. Таким образом задача сводится к нахождению скалярной

величины – третьей составляющей, что приводит к решению уравнения типа Пуассона:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -\delta,$$

где  $\nu = 1/\mu$  - величина, обратная магнитной проницаемости.

Из-за проблем с единственностью дифференциальные уравнения сами по себе не решаются, а только в рамках краевых задач. К дифференциальному уравнению в частных производных

$$L\Phi(x,y)=f(x,y) \text{ в области } D$$

добавляют краевое (граничное) условие

Здесь  $L$  - дифференциальный оператор Лапласа,  $\Phi$  - векторный или скалярный потенциал,  $f$  и  $\Phi$  - заданные функции.

На рисунке 4.5 изображена бесконечно малая поверхность  $abcd$  на границе раздела двух сред с магнитными проницаемостями  $\mu_1, \mu_2$ , причем  $bc \ll ab$ ,  $bc=ad$ ,  $ab=cd$ . Учитывая теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля, для контура  $l$  можно записать

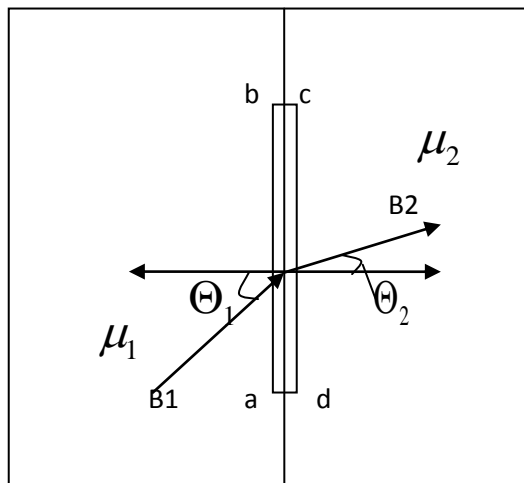


Рис. 4.5.



$$\int_l Hdl = -H_1 \sin(\Theta_1)ab - H_1 \cos(\Theta_1)bc + \\ + H_2 \sin(\Theta_2)cd + H_2 \cos(\Theta_2)da.$$

Так как  $bc \ll ab$ , то получается

$$\int_l Hdl = -H_1 \sin(\Theta_1)ab + H_2 \sin(\Theta_2)cd$$

или

$$\int_l \vec{H}dl = \vec{H}_2 \times \vec{n}_2 - \vec{H}_1 \times \vec{n}_1.$$

Следовательно, при отсутствии тока в контуре abcd тангенциальные составляющие вектора напряженности магнитного поля по разные стороны границы раздела двух сред должны быть равными.

В силу непрерывности магнитного потока  $\oint_s Bds = 0$  получаем

$$\oint_s Bds = B_1 \cdot \cos(\Theta_1) \cdot \Delta s - B_2 \cdot \cos(\Theta_2) \cdot \Delta s = 0.$$

Следовательно, нормальные составляющие вектора магнитной индукции на границе раздела двух сред равны [31], [107] (то есть  $\vec{B}_{1n} = \vec{B}_{2n}$ ), хотя сами индукции в разных элементах и разные.

Рассмотрим вначале двумерную задачу. Предположим, что в треугольнике с вершинами 1,2,3 векторный магнитный потенциал  $A$  меняется линейно. Тогда магнитная индукция  $B$  будет постоянной и полностью определяться значениями потенциала  $A$  в вершинах 1, 2 и 3. Обозначим через  $N$  ось, направленную ортогонально стороне с вершинами 1,2 в правую сторону. Направление отрезка полагаем от 1 к 2.

**Теорема 4.5.1.** Проекция  $B_N$  вектора индукции на ось  $N$  зависит только от значений  $A_1, A_2$  потенциала  $A$  в вершинах 1, 2 и не зависит от значения  $A_3$ , а именно:

$$B_N = \frac{1}{\rho_{12}}(A_2 - A_1),$$

где  $\rho_{12}$  - длина отрезка 12.

*Доказательство.* В треугольнике с вершинами 1,2,3 векторный магнитный потенциал  $A$  является линейной функцией и имеет вид

$$A = \sum_{i=1}^3 A_i b_i(x, y),$$

где  $b_i$  - линейная базисная функция, равная единице в узле  $i$  и нулю в остальных двух вершинах треугольника. Например,  $b_1$  имеет вид

$$b_1(x, y) = \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} x - x_3 & y - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix},$$

где  $\Delta$  - площадь треугольника. Проекция  $B_x$  вектора индукции на ось абсцисс равна

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y} = \sum_{i=1}^3 A_i \frac{\partial b_i(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta} [A_1(x_3 - x_2) + A_2(x_1 - x_3) + A_3(x_2 - x_1)]. \quad (4.5.1)$$

Аналогично,

$$B_y = -\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta} [A_1(y_3 - y_2) + A_2(y_1 - y_3) + A_3(y_2 - y_1)]. \quad (4.5.2)$$

Единичный вектор  $\vec{N}$  по направлению оси  $N$  имеет координаты  $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ , где  $\varphi$  - угол между осями абсцисс и  $N$ . Проекция  $B_N$  вектора индукции  $\vec{B}$  на ось  $N$  определяется скалярным произведением равным

$$B_N = (\vec{B} \circ \vec{N}) = B_x \cos \varphi + B_y \sin \varphi$$

Из равенств (4.5.1) и (4.5.2) получаем

$$B_N = \frac{1}{2\Delta} \{A_1[(x_3 - x_2)\cos\varphi + (y_3 - y_2)\sin\varphi] + A_2[(x_1 - x_3)\cos\varphi + (y_1 - y_3)\sin\varphi] + A_3[(x_2 - x_1)\cos\varphi + (y_2 - y_1)\sin\varphi]\}.$$

Обозначим вектор с началом в вершине  $i$  и концом в точке  $j$  через  $\vec{ij}$ . Тогда  $B_N$  можно выразить через стороны треугольника:

$$B_N = \frac{1}{2\Delta} [A_1(\vec{23} \cdot \vec{N}) + A_2(\vec{31} \cdot \vec{N}) + A_3(\vec{12} \cdot \vec{N})],$$

где  $(a \cdot b)$  обозначает скалярное произведение векторов  $a$  и  $b$ .

Из свойств скалярного произведения следует, что  $(\vec{ij} \cdot \vec{N})$  есть длина (со знаком) проекции стороны  $ij$  (по направлению от  $i$  к  $j$ ) на ось  $N$ . В результате получается

$$(\vec{23} \cdot \vec{N}) = -h, \quad (\vec{31} \cdot \vec{N}) = +h, \quad (\vec{12} \cdot \vec{N}) = 0,$$

где  $h$  – высота, опущенная из вершины 3 на сторону 12. Таким образом,

$$B_N = \frac{1}{2\Delta} (A_2 - A_1)h.$$

Остается заметить, что для площади треугольника имеет место  $2\Delta = h\rho_{12}$ . Теорема доказана.

**Теорема 4.5.2.** У вектора индукции нормальная составляющая  $B_z$  к грани с вершинами 1,2,3 зависит только от значений  $A_1, A_2, A_3$  потенциала  $A$  в узлах 1,2,3 и не зависит от значения  $A_4$ , а именно:

$$B_z = \frac{1}{2\Delta} [A_1^y(y_2 - y_3) + A_2^y(y_3 - y_1) + A_3^y(y_1 - y_2)] +$$

$$+ \frac{1}{2\Delta} [A_1^x(x_2 - x_3) + A_2^x(x_3 - x_1) + A_3^x(x_1 - x_2)].$$

*Доказательство.* Имеем

$$B_z = \frac{\partial A^y}{\partial x} - \frac{\partial A^x}{\partial y}.$$

Отсюда, в силу равенств (4.5.1) и (4.5.2), следует теорема 4.5.2.

Рассмотрим случай грани наклонной к координатным плоскостям. Пусть перпендикуляр к грани с вершинами 1,2,3 имеет направление  $\vec{N}$ . Посчитаем нормальную составляющую  $B_N$  к грани 123.

**Теорема 4.5.2а.** Для произвольного тетраэдра с вершинами 1,2,3,4 нормальная составляющая  $B_N$  вектора индукции к грани с вершинами 1,2,3 зависит только от значений  $A_1, A_2, A_3$  потенциала  $A$  в узлах 1,2,3 и не зависит от значения  $A_4$ , а именно:

$$\begin{aligned} B_N = & \frac{1}{2\Delta} [A_1^x(x_2 - x_3) + A_2^x(x_3 - x_1) + A_3^x(x_1 - x_2)] + \\ & + \frac{1}{2\Delta} [A_1^y(y_2 - y_3) + A_2^y(y_3 - y_1) + A_3^y(y_1 - y_2)] + \\ & + \frac{1}{2\Delta} [A_1^z(z_2 - z_3) + A_2^z(z_3 - z_1) + A_3^z(z_1 - z_2)], \end{aligned}$$

где  $\Delta$  – площадь треугольника с вершинами 1,2,3.

*Доказательство.* Разложим  $B_N$  на составляющие по координатным осям:

$$\begin{aligned} B_N = & B_x \cos(N, x) + B_y \cos(N, y) + B_z \cos(N, z) = \\ = & \left( \frac{\partial A^z}{\partial y} - \frac{\partial A^y}{\partial z} \right) \cos(N, x) + \left( \frac{\partial A^x}{\partial z} - \frac{\partial A^z}{\partial x} \right) \cos(N, y) + \left( \frac{\partial A^y}{\partial x} - \frac{\partial A^x}{\partial y} \right) \cos(N, z). \end{aligned}$$

В рамках МКЭ внутри тетраэдра с вершинами 1,2,3,4 векторный магнитный потенциал  $A$  является линейной функцией вида

$$A = \sum_{i=1}^4 A_i b_i(x, y, z),$$

где  $b_i$  - трехмерная линейная базисная функция, равная единице в вершине  $i$  и нулю в остальных трех вершинах тетраэдра. Например,  $b_1$  имеет вид

$$b_1(x, y, z) = \frac{1}{6V} \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{vmatrix} x-x_4 & y-y_4 & z-z_4 \\ x_2-x_4 & y_2-y_4 & z_2-z_4 \\ x_3-x_4 & y_3-y_4 & z_3-z_4 \end{vmatrix},$$

где  $V$  – объем тетраэдра с вершинами 1,2,3,4. Отсюда следует

$$\frac{\partial b_1}{\partial x} = \frac{1}{6V} [(y_2 - y_4)(z_3 - z_4) - (z_2 - z_4)(y_3 - y_4)],$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial y} = \frac{1}{6V} [(z_2 - z_4)(x_3 - x_4) - (x_2 - x_4)(z_3 - z_4)],$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial z} = \frac{1}{6V} [(x_2 - x_4)(y_3 - y_4) - (y_2 - y_4)(x_3 - x_4)].$$

Итак, имеем

$$B_N = \left( \sum_{i=1}^4 A_i^z \frac{\partial b_i}{\partial y} - A_i^y \frac{\partial b_i}{\partial z} \right) \cos(N, x) + \left( \sum_{i=1}^4 A_i^x \frac{\partial b_i}{\partial z} - A_i^z \frac{\partial b_i}{\partial x} \right) \cos(N, y) + \left( \sum_{i=1}^4 A_i^y \frac{\partial b_i}{\partial x} - A_i^x \frac{\partial b_i}{\partial y} \right) \cos(N, z).$$

Отметим, что для объема тетраэдра имеет место  $6V = 2\Delta h_N$ , где  $\Delta$  – площадь треугольника с вершинами 1,2,3;  $h_N$  – высота, опущенная из вершины 4 на грань с вершинами 1,2,3 и имеющая направление  $\vec{N}$ . Следовательно,

$$2\Delta B_N = \sum_{i=1}^4 (A_i^x c_{ix} + A_i^y c_{iy} + A_i^z c_{iz}),$$

где

$$c_{ix} = 2\Delta \left( \frac{\partial b_i}{\partial z} \cos(N, y) - \frac{\partial b_i}{\partial y} \cos(N, z) \right),$$

$$c_{iy} = 2\Delta \left( \frac{\partial b_i}{\partial x} \cos(N, z) - \frac{\partial b_i}{\partial z} \cos(N, x) \right),$$

$$c_{iz} = 2\Delta \left( \frac{\partial b_i}{\partial y} \cos(N, x) - \frac{\partial b_i}{\partial x} \cos(N, y) \right).$$

Например, для  $c_{1x}$  имеет место

$$c_{1x} = \frac{2\Delta}{6V} \{ [(x_2 - x_4)(y_3 - y_4) - (y_2 - y_4)(x_3 - x_4)] \cos(N, y) + \\ + [(x_2 - x_4)(z_3 - z_4) - (z_2 - z_4)(x_3 - x_4)] \cos(N, z) \} = x_3 - x_2.$$

Аналогичным образом посчитав остальные коэффициенты, получим

$$2\Delta \cdot B_N = A_1^x (x_2 - x_3) + A_2^x (x_3 - x_1) + A_3^x (x_1 - x_2) + \\ + A_1^y (y_2 - y_3) + A_2^y (y_3 - y_1) + A_3^y (y_1 - y_2) + \\ + A_1^z (z_2 - z_3) + A_2^z (z_3 - z_1) + A_3^z (z_1 - z_2).$$

Теорема 4.5.2а доказана.

#### **4.6. Анализ магнитного поля при трехмерном конечно-элементном и конечно-разностном моделировании [162]**

Напомним некоторые формулы автоматизированного решения задач трехмерного магнитного поля методом конечных элементов, используемые ниже.

В декартовой системе координат  $(x,y,z)$  классическое уравнение Максвелла имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} A^x + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} A^x + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} A^x = -\delta^x, \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} A^y + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} A^y + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} A^y = -\delta^y, \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} A^z + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} A^z + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} A^z = -\delta^z, \end{cases} \quad (4.6.1)$$

где  $A = (A^x, A^y, A^z)$  - векторный магнитный потенциал;  $\delta = (\delta^x, \delta^y, \delta^z)$  - вектор плотности тока;  $\mu$  - величина магнитной проницаемости.

Прямое решение системы уравнений (4.6.1) чрезвычайно сложно из-за нелинейности задачи: величина магнитной проницаемости зависит от потенциала и также является неизвестной.

Трехмерное моделирование решения задач нелинейного трехмерного магнитного поля методом конечных элементов сводится к решению системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial f_x}{\partial A_k^x} = \sum_{e \in E_k} \left[ \nu_e \sum_{t \in W_e} (a_{kt} A_t^x) - \delta^x a_k^e \right] = 0, \\ \frac{\partial f_y}{\partial A_k^y} = \sum_{e \in E_k} \left[ \nu_e \sum_{t \in W_e} (a_{kt} A_t^y) - \delta^y a_k^e \right] = 0, \\ \frac{\partial f_z}{\partial A_k^z} = \sum_{e \in E_k} \left[ \nu_e \sum_{t \in W_e} (a_{kt} A_t^z) - \delta^z a_k^e \right] = 0, \end{cases}$$

причем количество уравнений равно утроенному числу внутренних узлов. Здесь  $a_{kt}^e$  - коэффициенты взаимодействия вершин  $k$  и  $t$  в элементе  $e$ ,

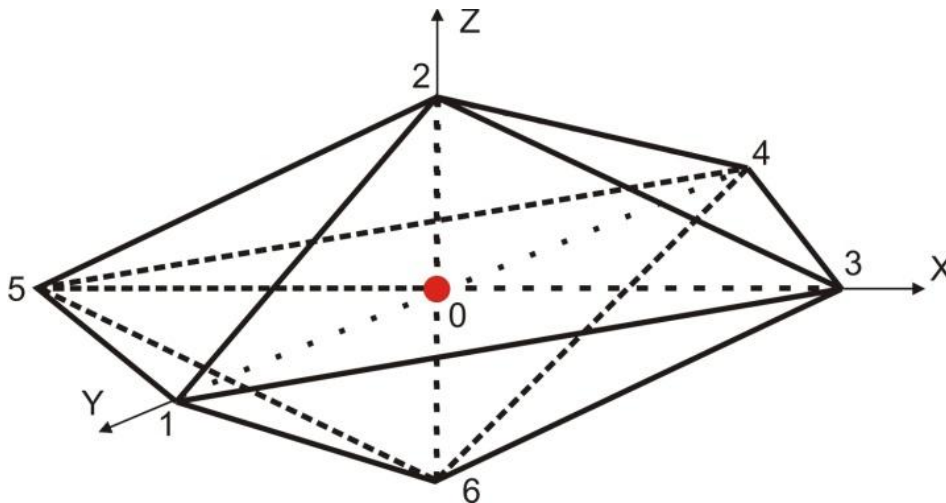
$$\begin{cases} a_{kt} = \iiint_e \left( \frac{\partial b_k^e}{\partial x} \frac{\partial b_t^e}{\partial x} + \frac{\partial b_k^e}{\partial y} \frac{\partial b_t^e}{\partial y} + \frac{\partial b_k^e}{\partial z} \frac{\partial b_t^e}{\partial z} \right) dx dy dz, \\ a_k^e = \iiint_e b_k^e dx dy dz. \end{cases} \quad (4.6.2)$$

Напомним, что в случае двумерного моделирования магнитного поля с прямоугольной расчетной сеткой было показано совпадение погрешностей и скоростей сходимости при решении методами конечных разностей и конечных элементов.

С целью обобщения этих результатов для трехмерного случая рассмотрим расчетную сетку с тетраэдрами, все грани которых являются прямоугольными треугольниками.

На рисунке 4.6 представлены 8 тетраэдров, окружающих точку 0, все четыре грани которых являются прямоугольными треугольниками. Рассмотрим тетраэдр  $P_0P_1P_2P_3$  с вершинами

$$P_0 = (0,0,0), P_1 = (0, h_y, 0), P_2 = (0,0, h_z), P_3 = (h_x, 0, 0).$$



Объем тетраэдра удобно определяется в виде детерминанта



$$6V = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & h_z & 1 \\ 0 & h_y & 0 & 1 \\ h_x & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +h_x h_y h_z.$$

Базисные функции, записанные тоже в виде детерминанта, имеют следующий вид:

$$b_0(x, y, z) = \frac{1}{6V} \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & h_z & 1 \\ 0 & h_y & 0 & 1 \\ h_x & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-xh_y h_z - yh_x h_z - zh_y h_x + h_x h_y h_z}{h_x h_y h_z} = 1 - \frac{x}{h_x} - \frac{y}{h_y} - \frac{z}{h_z},$$

$$b_2(x, y, z) = \frac{1}{6V} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & 1 \\ 0 & h_y & 0 & 1 \\ h_x & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-z}{h_x h_y h_z} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & h_y & 1 \\ h_x & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{z}{h_z}.$$

Аналогично,

$$b_1(x, y, z) = \frac{y}{h_y}, \quad b_3(x, y, z) = \frac{x}{h_x}.$$

Потенциал внутри тетраэдра  $P_0 P_1 P_2 P_3$  является линейной функцией от координат и имеет вид

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=0}^3 A_i b_i^e(x, y, z) = A_0 \left( 1 - \frac{x}{h_x} - \frac{y}{h_y} - \frac{z}{h_z} \right) + A_2 \frac{z}{h_z} + A_1 \frac{y}{h_y} + A_3 \frac{x}{h_x} = \\ &= A_0 + (A_2 - A_0) \frac{z}{h_z} + (A_1 - A_0) \frac{y}{h_y} + (A_3 - A_0) \frac{x}{h_x}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим вершины

$$P_4 = (0, -h_y, 0), \quad P_5 = (-h_x, 0, 0), \quad P_6 = (0, 0, -h_z).$$

Для объема соседнего тетраэдра  $P_0P_2P_3P_4$  имеем

$$6V = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & h_z & 1 \\ 0 & -h_y & 0 & 1 \\ h_x & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -h_x h_y h_z.$$

Базисные функции имеют следующий вид:

$$b_0(x, y, z) = \frac{1}{6V} \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & h_z & 1 \\ 0 & -h_y & 0 & 1 \\ h_x & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{xh_y h_z - yh_x h_z + zh_y h_x - h_x h_y h_z}{-h_x h_y h_z} = 1 - \frac{x}{h_x} + \frac{y}{h_y} - \frac{z}{h_z},$$

$$b_2(x, y, z) = \frac{-1}{6V} \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -h_y & 0 & 1 \\ h_x & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-z}{-h_x h_y h_z} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -h_y & 1 \\ h_x & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{z}{h_z},$$

$$b_4(x, y, z) = \frac{1}{6V} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & h_x & 1 \\ x & y & z & 1 \\ h_x & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-y}{-h_x h_y h_z} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & h_z & 1 \\ h_x & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{y}{-h_y}.$$

Аналогично,  $b_3(x, y, z) = \frac{x}{h_x}$ .

Для тетраэдра  $P_0P_1P_2P_3$  и расчетного узла  $k=0$  коэффициенты в (4.6.2) имеют вид

$$\frac{\partial b_0(x, y, z)}{\partial x} = -\frac{1}{h_x}, \quad \frac{\partial b_0(x, y, z)}{\partial y} = -\frac{1}{h_y}, \quad \frac{\partial b_0(x, y, z)}{\partial z} = -\frac{1}{h_z},$$

$$\frac{\partial b_3(x, y, z)}{\partial x} = \frac{1}{h_x}, \quad \frac{\partial b_1(x, y, z)}{\partial y} = \frac{1}{h_y}, \quad \frac{\partial b_2(x, y, z)}{\partial z} = \frac{1}{h_z}.$$

Остальные производные равны нулю. Следовательно, для тетраэдра  $e = P_0P_1P_2P_3$  и расчетного узла  $k=0$  получаем

$$a_{00}^e = \iiint_e \left( \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2} \right) dx dy dz = \left( \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2} \right) \frac{h_x h_y h_z}{6},$$

$$a_{02}^e = \left( -\frac{1}{h_z^2} \right) \frac{h_x h_y h_z}{6}, \quad a_{01}^e = \left( -\frac{1}{h_y^2} \right) \frac{h_x h_y h_z}{6}, \quad a_{03}^e = \left( -\frac{1}{h_x^2} \right) \frac{h_x h_y h_z}{6}.$$

Для соседнего тетраэдра  $P_0P_2P_3P_4$  получим

$$\frac{\partial b_0(x, y, z)}{\partial x} = -\frac{1}{h_x}, \quad \frac{\partial b_0(x, y, z)}{\partial y} = \frac{1}{h_y}, \quad \frac{\partial b_0(x, y, z)}{\partial z} = -\frac{1}{h_z},$$

$$\frac{\partial b_3(x, y, z)}{\partial x} = \frac{1}{h_x}, \quad \frac{\partial b_4(x, y, z)}{\partial y} = -\frac{1}{h_y}, \quad \frac{\partial b_2(x, y, z)}{\partial z} = \frac{1}{h_z}.$$

Следовательно, для тетраэдра  $e = P_0P_2P_3P_4$  и расчетного узла  $k=0$  имеем

$$a_{00}^e = \left( \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2} \right) \frac{h_x h_y h_z}{6}, \quad a_{02}^e = \left( -\frac{1}{h_z^2} \right) \frac{h_x h_y h_z}{6},$$

$$a_{04}^e = \left( -\frac{1}{h_y^2} \right) \frac{h_x h_y h_z}{6}, \quad a_{03}^e = \left( -\frac{1}{h_x^2} \right) \frac{h_x h_y h_z}{6}.$$

Отметим, что  $a_{01} = a_{04}$ . Аналогично, вычисляя для остальных 6 тетраэдров, получим расчетное уравнение

$$\begin{aligned}
& A_0^x \left( \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2} \right) (v_{0123} + v_{0234} + v_{0125} + v_{0245} + v_{0613} + v_{0634} + v_{0615} + v_{0645}) = \\
& = \frac{A_2^x}{h_z^2} (v_{0123} + v_{0234} + v_{0125} + v_{0245}) + \frac{A_1^x}{h_y^2} (v_{0123} + v_{0125} + v_{0136} + v_{0156}) + \\
& + \frac{A_3^x}{h_x^2} (v_{0123} + v_{0234} + v_{0136} + v_{0346}) + \frac{A_4^x}{h_y^2} (v_{0234} + v_{0245} + v_{0346} + v_{0456}) + \\
& + \frac{A_5^x}{h_x^2} (v_{0125} + v_{0245} + v_{0156} + v_{0456}) + \frac{A_6^x}{h_z^2} (v_{0136} + v_{0346} + v_{0156} + v_{0456}),
\end{aligned} \tag{4.6.3}$$

где через  $v_{ijkm}$  обозначено значение величины  $v = 1/\mu$ , обратной магнитной проницаемости внутри тетраэдра  $ijkm$ .

Теперь применим для численного решения уравнений (4.6.1) метод конечных разностей. Заменяя значения второй производной векторного магнитного потенциала  $A$  в точке  $0$  соответствующей разностью, получим

$$\frac{\partial}{\partial x} v \frac{\partial}{\partial x} A^x \approx \frac{1}{h_x} \left[ v_{03} \frac{\partial}{\partial x} A_{03}^x - v_{05} \frac{\partial}{\partial x} A_{05}^x \right],$$

где индекс  $03$  ( $05$ ) означает середину отрезка  $P_0P_3$  ( $P_0P_5$ ). Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} A_{03}^x \approx \frac{1}{h_x} (A_3^x - A_0^x), \quad \frac{\partial}{\partial x} A_{05}^x \approx \frac{1}{h_x} (A_5^x - A_0^x),$$

$$v_{03} = \frac{1}{4} (v_{0123} + v_{0234} + v_{0136} + v_{0346}), \quad v_{05} = \frac{1}{4} (v_{0125} + v_{0245} + v_{0156} + v_{0456}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
& 4h_x^2 \frac{\partial}{\partial x} v \frac{\partial}{\partial x} A^x \approx A_3^x (v_{0123} + v_{0234} + v_{0136} + v_{0346}) + \\
& + A_5^x (v_{0125} + v_{0245} + v_{0156} + v_{0456}) - \\
& - A_0^x (v_{0123} + v_{0234} + v_{0125} + v_{0245} + v_{0613} + v_{0634} + v_{0615} + v_{0645}).
\end{aligned}$$

**Выводы.** В случае произвольной сетки погрешность разностной аппроксимации трехмерного оператора Лапласа имеет порядок  $h$ . В случае же нерегулярной сетки с симметричными шагами (но эти шаги разные в разных координатных направлениях) погрешность уменьшается до порядка  $h^2$ .

Исследовано приближение оператора Лапласа в треугольнике в виде весовой суммы значений функции в трех вершинах треугольника. Найдены связи весовых коэффициентов с углами треугольника. Изучено влияние наличия в треугольнике тупого угла на погрешность трехточечной аппроксимации оператора Лапласа.

Показано, что степень малости погрешности трехточечной аппроксимации надо определять по малости периметра треугольника, а не по площади. Доказано, что из всех треугольников данного периметра наименьшую погрешность трехточечной аппроксимации имеет равносторонний треугольник. Исследована возможность применения предложенного подхода для решения задач вычисления электромагнитного поля. Полученные результаты обосновывают необходимость применения сеток Делоне при конечно-элементном моделировании полевых задач.

Исследованы расчетные уравнения для решения нелинейного электромагнитного поля методами конечных элементов и конечных разностей в трехмерной постановке. Результаты анализа, полученные ранее для двумерного моделирования поля, обобщены для трехмерного случая. Показано, что для прямоугольной тетраэдрической сетки расчетные уравнения совпадают по всем трем составляющим векторного магнитного потенциала.

## ГЛАВА 5

### ОПТИМИЗАЦИЯ ТРЕХМЕРНЫХ СЕТОК ДЛЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

#### *5.1. Двумерные триангуляции Делоне и их применение при решении полевых задач [165]*

Автоматизированное решение нелинейных полевых задач методом конечных элементов сводится к построению треугольной сетки и нахождению минимума энергетического функционала путем приравнивания нулю его производных. В результате получается система линейных уравнений с неизвестными значениями векторного магнитного потенциала в узлах сетки, причем количество уравнений равно числу внутренних узлов сетки.

При этом оказывается, что сходимость процесса последовательных приближений к решению нелинейных полевых задач существенно зависит от геометрических свойств сетки. Известно (см. главу 3), что на скорость сходимости итерационного процесса последовательных приближений к решению нелинейных полевых задач отрицательно влияет наличие в сетке тупоугольных треугольников.

В настоящем параграфе исследован особый вид плоских треугольных сеток – так называемая триангуляция Делоне. Показано, что триангуляция Делоне минимизирует сумму котангенсов углов всех своих треугольников. Из этого экстремального свойства получено утверждение, что при заданном наборе узлов из всех возможных сеток наилучшей (в смысле скорости сходимости процесса последовательных приближений) является триангуляция Делоне.

**Треугольные сетки.** Пусть  $\{P_i\}_{i=1}^n$  – заданное множество точек (узлов) на плоскости. Множество  $\{D_j\}_{j=1}^m$  выпуклых многоугольников на плоскости называется сеткой с системой узлов  $\{P_i\}_{i=1}^n$ , если выполнены следующие условия:

- внутренности многоугольников попарно не пересекаются;
- вершины всех многоугольников принадлежат системе узлов  $\{P_i\}_{i=1}^n$ ;
- объединение  $\bigcup_{j=1}^m D_j$  заполняет всю выпуклую оболочку точек  $\{P_i\}_{i=1}^n$ .

При решении задачи нахождения электромагнитного поля методом конечных элементов внутри каждого элемента индукция предполагается постоянной, а следовательно, величина векторного магнитного потенциала предполагается линейной. Так как количество неизвестных параметров у линейной функции двух переменных равно трем, то количество узлов в каждом элементе также должно быть равно трем. Следовательно, при решении полевых задач методом конечных элементов дискретизационная сетка  $\{D_j\}_{j=1}^m$  должна состоять исключительно из треугольников. Такие сетки называются треугольными.

**Триангуляция Делоне.** Важным классом треугольных сеток являются триангуляции Делоне. Треугольная сетка  $\{D_j\}_{j=1}^m$  называется триангуляцией Делоне на базе системы узлов  $\{P_i\}_{i=1}^n$ , если выполнено следующее условие: для каждого треугольника  $D_j$  внутри описанного вокруг него круга нет ни одной точки из  $\{P_i\}_{i=1}^n$ .

**Утверждение 5.1.1.** Для любой конфигурации узлов  $\{P_i\}_{i=1}^n$  триангуляция Делоне обладает минимальной суммой котангенсов внутренних углов всех своих треугольников среди всех возможных треугольных сеток с данным множеством узлов.

Вначале докажем это свойство для выпуклого четырехугольника ABCD (см. рисунок 5.1).

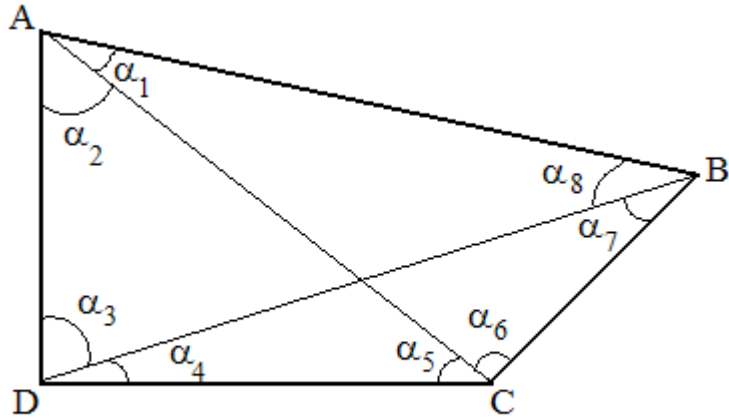


Рис.5.1.

Возможны два случая: 1) у четырехугольника ABCD проведена диагональ BD, тогда сетка состоит из треугольников ABD и BDC (такую триангуляцию обозначим через  $T_{BD}$ ), 2) у четырехугольника ABCD проведена диагональ AC, тогда сетка состоит из треугольников ABC и ADC (такую триангуляцию обозначим через  $T_{AC}$ ). Обозначим через  $S_{BD}$  сумму котангенсов всех углов обоих треугольников триангуляции  $T_{BD}$ . Имеем

$$S_{BD} = \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha_2) + \operatorname{ctg} \alpha_3 + \operatorname{ctg} \alpha_8 + \operatorname{ctg}(\alpha_5 + \alpha_6) + \operatorname{ctg} \alpha_4 + \operatorname{ctg} \alpha_7. \quad (5.1.1)$$

Соответственно, обозначим через  $S_{AC}$  сумму котангенсов всех углов обоих треугольников триангуляции  $T_{AC}$ .

$$S_{AC} = \operatorname{ctg}(\alpha_3 + \alpha_4) + \operatorname{ctg} \alpha_2 + \operatorname{ctg} \alpha_5 + \operatorname{ctg}(\alpha_7 + \alpha_8) + \operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_6. \quad (5.1.2)$$

Если выполнено условие

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_6 > \pi,$$

то точка D лежит вне окружности, описанной вокруг треугольника ABC, и тогда триангуляция  $T_{AC}$  является триангуляцией Делоне и  $S_{AC} < S_{BD}$ .



Если же выполнено условие

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_6 < \pi,$$

то уже точка  $C$  лежит вне окружности, описанной вокруг треугольника  $ABD$ , тогда триангуляцией Делоне является  $T_{BD}$  и  $S_{AC} > S_{BD}$ . Следовательно, в обоих случаях триангуляция Делоне обладает меньшей суммой котангенсов углов.

Заметим, что если указанная сумма углов равна  $\pi$ , то четырехугольник  $ABCD$  можно вписать в окружность, и обе триангуляции  $T_{BD}$  и  $T_{AC}$  являются триангуляциями Делоне (это стандартный пример, показывающий, что для данной совокупности узлов триангуляция Делоне не единственна.)

Теперь докажем это свойство для большого количества узлов. Так как для данной совокупности узлов число возможных сеток конечно, то существует сетка  $T$  с минимальной суммой котангенсов углов всех своих треугольников среди всех возможных триангуляций с данным множеством узлов. Предположим, что  $T$  не является триангуляцией Делоне. Тогда существует треугольник  $ABD$ , внутри описанной окружности которого лежит другой узел  $C$ . Заменяя в четырехугольнике  $ABCD$  диагональ  $BD$  на  $AC$ , получим  $S_{AC} < S_{BD}$ , что противоречит условию минимальности сетки  $T$ . Итак, утверждение 5.1.1 доказано.

**Приложение к решению систем уравнений.** Вышеприведенное утверждение можно применить при анализе процесса решения одного класса систем линейных уравнений, зависящих от сетки. Пусть на плоскости задана треугольная сетка  $T = \{D_j\}_{j=1}^m$  с системой узлов  $\{P_i\}_{i=1}^n$ . Если узел принадлежит выпуклой оболочке сетки, то он называется граничным, в противном случае – внутренним. Обозначим через  $I(T)$  множество внутренних узлов сетки  $T$ , а их количество – через  $N$ . Введем также обозначения:  $V(D_j)$  – множество вершин

треугольника  $D_j$  и  $E_i$  - совокупность треугольников сетки  $T$ , содержащих вершину  $P_i$ , т.е.

$$E_i = \{D_j \in T : P_i \in V(D_j)\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Рассмотрим следующую систему линейных уравнений относительно неизвестных  $x_1, \dots, x_N$ , их количество равно числу внутренних узлов  $N$ :

$$\sum_{D \in E_i} \sum_{v \in V(D) \cap I(T)} \text{ctg } \alpha(v, D) x_k = b_i, \quad P_i \in I(T), \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.1.3)$$

Здесь  $\alpha(v, D)$  - внутренний угол треугольника  $D$  при вершине  $v$ , имеющей номер  $k$ , т.е.  $v = P_k$ . Отметим, что система линейных уравнений (5.1.3) зависит от геометрии сетки  $T$ . Предположим, что мы собираемся численно решать систему уравнений (5.1.3) методом последовательных итераций. Тогда сходимость процесса последовательных приближений к решению системы (5.1.3) зависит от конфигурации сетки. Согласно известному принципу доминирования диагонали скорость сходимости процесса последовательных итераций увеличивается при уменьшении недиагональных элементов матрицы системы линейных уравнений. Отсюда, используя Утверждение 5.1.1, приходим к следующему результату.

**Утверждение 5.1.2.** Для любой конфигурации узлов  $\{P_i\}_{i=1}^n$  при решении системы линейных уравнений (5.1.3) методом последовательных итераций триангуляция Делоне является наилучшей среди всех возможных треугольных сеток с данным множеством узлов.

**Приложение к решению полевых задач.** При решении задачи нахождения электромагнитного поля методом конечных элементов возникает следующая система линейных уравнений относительно неизвестных значений векторного магнитного потенциала  $A_k$  в узле  $k$ :

$$\sum_{D \in E_i} \sum_{v \in V(D) \cap I(T)} \operatorname{ctg} \alpha(v, D) \frac{A_k}{\mu(D)} = b_i(\delta), \quad P_i \in I(T), \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.1.4)$$

Здесь  $\mu(D)$  - величина магнитной проницаемости, принимаемая постоянной внутри треугольника  $D$ , правая часть  $b_i(\delta)$  зависит от плотности тока  $\delta$ . Количество уравнений в системе (5.1.4) равно числу внутренних узлов  $N$ .

Сравнивая системы (5.1.3), (5.1.4) и используя Утверждение 5.1.2, приходим к следующему результату.

**Утверждение 5.1.3.** Для любой конфигурации узлов  $\{P_i\}_{i=1}^n$  при решении задачи нахождения электромагнитного поля методом конечных элементов и последующем решении возникающей системы линейных уравнений (5.1.4) методом последовательных итераций триангуляция Делоне является наилучшей среди всех возможных треугольных сеток с данным множеством узлов.

## **5.2. Оптимальная сетка для решения трехмерных полевых задач методом конечных элементов [152]**

Известно, что для треугольных сеток на скорость сходимости итерационного процесса последовательных приближений к решению нелинейных полевых задач методом конечных элементов отрицательно влияет наличие в сетке тупоугольных треугольников. Но возникает вопрос: всегда ли возможно построить сетку без тупоугольных треугольников? Ответ зависит от конфигурации сеточных узлов.

Рассмотрим четыре узла, расположенные в вершинах какого-нибудь выпуклого четырехугольника. Возможны два случая:

- 1) тупые углы четырехугольника находятся друг против друга (рисунок 5.2а).  
Тогда короткая диагональ четырехугольника уничтожит сразу оба тупых

угла, и мы получим сетку Делоне без тупых углов. Такое расположение узлов назовем удачным;

- 2) оба тупых угла четырехугольника находятся рядом (рисунок 5.2б). Тогда каждая диагональ четырехугольника уничтожает лишь один тупой угол, сохраняя второй. Такое расположение узлов назовем неудачным.

Любая сетка на неудачно расположенных узлах будет обязательно содержать тупоугольный треугольник. Избавиться от тупых углов можно только добавлением дополнительных узлов на большей стороне (рисунок 5.2в).

Дадим определение неудачно расположенных точек. Множество узлов  $\{P_i\}_{i=1}^n$  называется неудачно расположенным, если существуют два

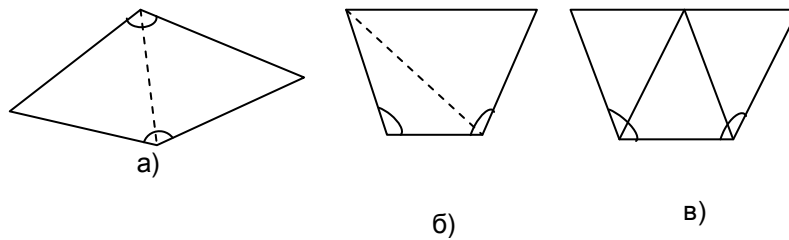


Рис. 5.2.

концентрических круга  $K_r$  и  $K_R$  (рисунок 5.3) с близкими радиусами  $0,9R < r < R$  так, что внутри меньшего круга нет ни одного узла из данного множества, а больший круг содержит, по меньшей мере, четыре узла из данного множества, то есть

$$\#(K_r \cap \{P_i\}) = 0, \quad \#(K_R \cap \{P_i\}) > 3,$$

где  $\#$  означает число точек.

Если таких кругов нет, то множество узлов называется удачно расположенным.

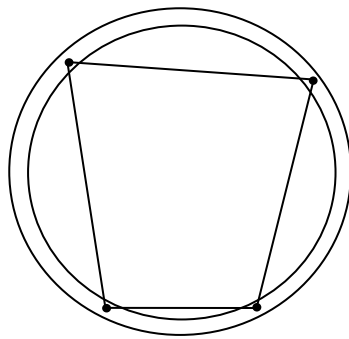
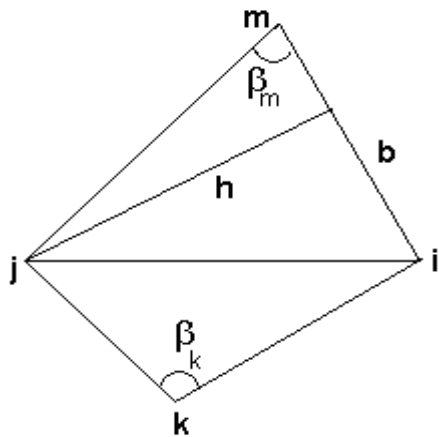


Рис. 5.3.

В 3.3 показано, что недиагональные элементы таской матрицы пропорциональны котангенсам внутренних углов треугольников сетки, а именно,

$$c_{ij} = -\frac{1}{2}(v_{ijm} \operatorname{ctg} \beta_m + v_{ijk} \operatorname{ctg} \beta_k), \quad (5.2.1)$$

где  $c_{ij}$  - коэффициент влияния узлов  $i$  и  $j$ ;  $v$  - величина, обратная магнитной проницаемости;  $v_{ijm}$  - значение  $v$  внутри треугольника с вершинами  $i, j, m$ ; соответственно  $v_{ijk}$  - значение  $v$  внутри треугольника с вершинами  $i, j, k$ . Углы  $\beta$  показаны на рисунке 5.4. Аналогичный результат для трехмерных полевых задач и соответствующих тетраэдрических сеток получен в 4.3.



Учитывая (5.2.1), получаем, что чтобы уменьшить сумму недиагональных элементов матрицы, надо минимизировать сумму котангенсов всех внутренних углов всех треугольников сетки.

Напомним, что согласно Утверждению 5.1.1, триангуляция Делоне обладает минимальной суммой котангенсов углов всех своих треугольников среди всех возможных треугольных сеток с данным множеством узлов, а согласно Утверждению 5.1.3, для любой конфигурации узлов при решении задачи нахождения электромагнитного поля методом конечных элементов и последующем решении возникающей системы линейных уравнений методом последовательных итераций триангуляция Делоне является наилучшей среди всех возможных треугольных сеток с данным множеством узлов.

Однако триангуляция Делоне не гарантирует отсутствия тупоугольных треугольников и сходимости соответствующего процесса последовательных приближений.

*Для удачно расположенного множества узлов триангуляция Делоне не содержит тупоугольных треугольников и обеспечивает сходимость итерационного процесса приближений к решению нелинейной полевой задачи.*

Вышеприведенное определение неудачно расположенных узлов можно обобщить на трехмерный случай. Множество узлов в трехмерном пространстве назовем неудачно расположенным, если существуют два концентрических шара  $K_r$  и  $K_R$  с близкими радиусами  $0,9R < r < R$  такие, что внутри меньшего шара нет ни одного узла из данной совокупности узлов, а больший шар содержит, по крайней мере, пять узлов из данного множества, то есть имеет место

$$\#(K_r \cap \{P_i\}) = 0, \quad \#(K_R \cap \{P_i\}) > 4.$$

Так как число возможных шаров бесконечно, то чрезвычайно трудно проверить, удачно расположены узлы или нет. Поэтому такое определение неудачно расположенных узлов неприменимо для большого числа узлов.

Ниже предложен метод поиска подобластей, где узлы могут быть неудачно расположены без трудоемкого процесса вычисления всех углов всех тетраэдров. Метод основан на свойстве двойственности трехмерных сеток Делоне и многогранных мозаик Вороного.

Пусть  $\{P_i\}_{i=1}^n$  - заданное множество точек в трехмерном евклидовом пространстве. Тетраэдрами будем называть произвольные четырехгранники, не обязательно правильные. Множество тетраэдров  $\{D_j\}_{j=1}^m$  называется триангуляцией Делоне на базе системы узлов  $\{P_i\}_{i=1}^n$ , если выполнены следующие условия:

- внутренности тетраэдров попарно не пересекаются;
- все вершины всех тетраэдров принадлежат  $\{P_i\}_{i=1}^n$ ;
- объединение  $\bigcup_{j=1}^m D_j$  заполняет всю выпуклую оболочку точек  $\{P_i\}_{i=1}^n$ ;
- для каждого тетраэдра  $D_j$  внутри описанного шара  $S_j$  нет ни одной точки из совокупности  $\{P_i\}_{i=1}^n$ .

Теперь определим мозаики (диаграммы) Вороного в трехмерном евклидовом пространстве.

Множество  $V_i$  точек, расстояние которых до точки  $P_i$  меньше, чем до остальных узлов  $P_j$ ,  $i \neq j$  образует многогранник, который называется многогранником Вороного относительно совокупности узлов  $\{P_i\}_{i=1}^n$ . Множество  $\{V_i\}_{i=1}^n$  многогранников называется мозаикой Вороного на основе узлов  $\{P_i\}_{i=1}^n$ , если

каждый  $V_i$  является многогранником Вороного относительно той же системы узлов.

Заметим, что в отличие от сетки Делоне, состоящей всегда из четырехгранников, в мозаике Вороного число многогранников равно количеству базовых узлов, и число граней отдельного многогранника может быть произвольным.

**Утверждение 5.2.1.** Для всякого расположения совокупности узлов  $\{P_i\}_{i=1}^n$  всегда существует (притом единственная) мозаика Вороного на основе узлов  $\{P_i\}_{i=1}^n$ . Все элементы мозаики Вороного являются выпуклыми многогранниками.

*Доказательство.* Рассмотрим множество  $H_{ij}$  точек, расстояние которых до  $P_i$  меньше, чем до  $P_j$ . Множество  $H_{ij}$  образует полупространство, которое ограничено плоскостью, перпендикулярной отрезку  $P_i P_j$  и проходящей через середину этого отрезка. Многогранники Вороного получаются в результате пересечения

$$V_i = \bigcap_{j \neq i} H_{ij} .$$

Это пересечение не пусто, так как содержит, по меньшей мере, точку  $P_i$ . Остается заметить, что любое пересечение полупространств всегда является выпуклым многогранником.

В отличие от плоского случая, когда треугольник может иметь только один тупой угол, трехмерный тетраэдр может иметь несколько тупых углов. На рисунке 5.5 изображен тетраэдр, у которого плоский угол при одном ребре (AB) является тупым. Такой тетраэдр назовем косым тупоугольным тетраэдром.



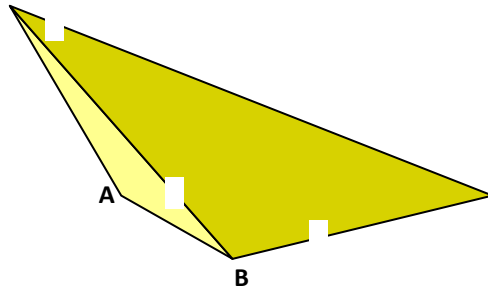


Рис. 5.5.

У тетраэдра, изображенного на рисунке 5.6, плоские углы при трех ребрах (AC, AB, AD) являются тупыми. Эти ребра имеют общую вершину. Такой тетраэдр назовем “сплюсненным” тупоугольным тетраэдром.

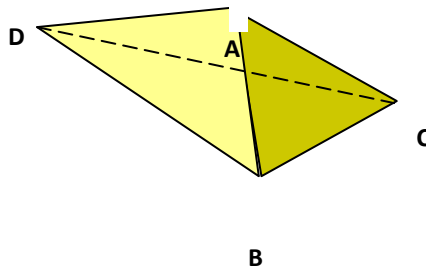


Рис. 5.6.

В плоском случае выпуклый четырехугольник проведением диагонали всегда можно разделить на два треугольника (и только на два). В трехмерном случае все сложнее. Пятивершинником назовем выпуклый многогранник, имеющий пять вершин.

Отсюда получаем следующий критерий удачного расположения узлов: если при триангуляции Делоне все пятивершинники делятся на два тетраэдра, то узлы расположены удачно, и оба тетраэдра остроугольные. Если же какой-нибудь пятивершинник при триангуляции Делоне делится на три тетраэдра, то узлы расположены неудачно, и встает вопрос, что хуже: три косых тупоугольных тетраэдра, или два сплюсненных. Ответ: оба случая плохие, советуем добавить на общем ребре дополнительный узел.

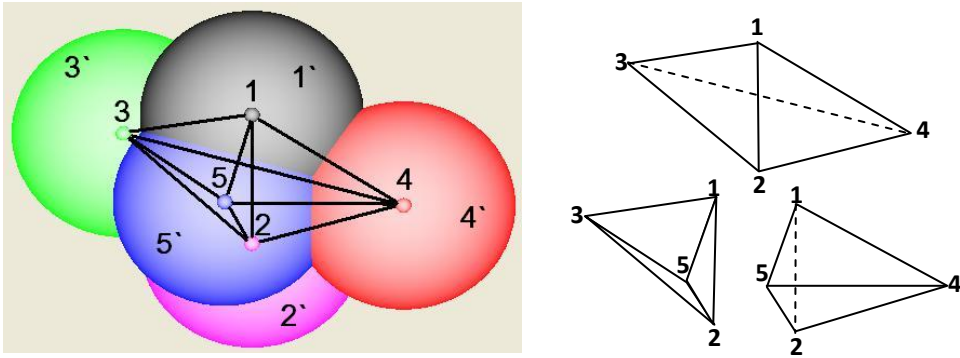


Рис. 5.7.

На рисунке же 5.8 шары с центрами в узлах 1 и 2 не соприкасаются, поэтому получаются два остроугольных тетраэдра.

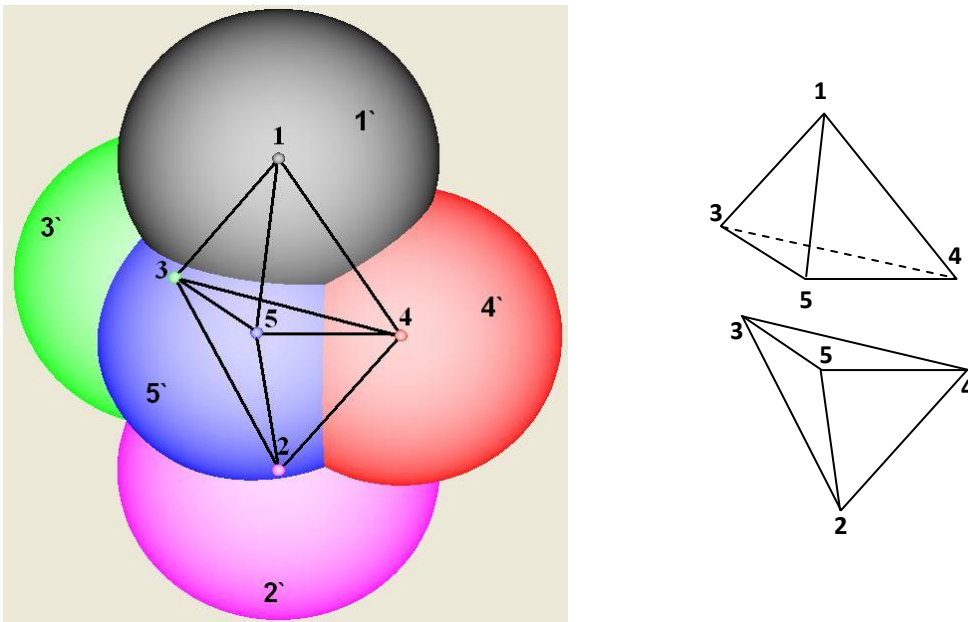


Рис. 5.8.

Предложенный алгоритм не зависит от точности машинных вычислений, и легко распараллеливается. Разноцветная окраска шаров на экране компьютера позволяет визуально наблюдать построение тетраэдров и вовремя обнаруживать дефекты сетки.

### ***5.3. Построение тетраэдрической сетки при конечно-элементном моделировании трехмерных электромагнитных полей [158]***

Распараллеливание процесса решения сеточной краевой задачи путем разбиения исследуемой области на параллельные блоки приводит к уменьшению размеров соответствующих матриц и значительному ускорению процесса решения системы уравнений.

Поэтому при разбиении исследуемой области на параллельные подобласти следует учитывать: а) густоту разных участков сетки; б) ширину лент возникающих матриц; в) длину дополнительных границ между блоками, а также решать вопрос оптимального числа процессоров для данной задачи.

В 5.2 показано, что для численного решения задач трехмерных магнитных полей методом конечных элементов при фиксированном расположении узлов оптимальной является тетраэдрическая сетка Делоне, которая имеет свойство, что внутри шаров, описанных вокруг всякого тетраэдра сетки, нет других узлов из данного множества.

Переход от многогранников Вороного к дуальным тетраэдрам Делоне производится следующим образом. Узлы  $P_i$  и  $P_j$  назовем соседними, если соответствующие многогранники Вороного  $V_i$  и  $V_j$  имеют общую границу. Соединяя все соседние узлы друг с другом, получим тетраэдрическую сетку Делоне.

Однако, в отличие от мозаики Вороного, для некоторых расположений вершин  $\{P_i\}_{i=1}^n$  сетка Делоне не является единственной. Единственность может нарушаться для вырожденных множеств узлов, у которых четыре узла оказываются лежащими в одной плоскости.

Для данной совокупности узлов  $\{P_i\}_{i=1}^n$  вначале строится мозаика многогранников Вороного. Затем соединяя соседние узлы от мозаик Вороного переходят к сеткам Делоне. При этом ошибочно в некоторых участках могут появиться:

а) четверки соседних узлов, лежащих в одной плоскости и образующих вырожденный тетраэдр нулевого объема;

б) две четверки соседних узлов, образующих два тетраэдра с пересекающимися внутренностями.

Объясним, как избежать эти нежелательные ситуации на примере куба, в котором много четверок вершин, лежащих в одной плоскости.

В мозаике Вороного все узлы куба (рисунок 5.9) являются соседними друг для друга. Следовательно, единственность нарушается и получаем несколько тетраэдризаций Делоне с теми же вершинами. Надо из них выбрать такую тетраэдризацию, у которой отсутствуют пересекающиеся тетраэдры и вырожденные элементы нулевого объема.

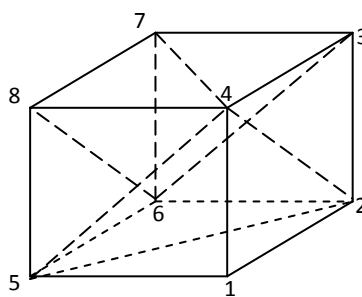


Рис. 5.9.

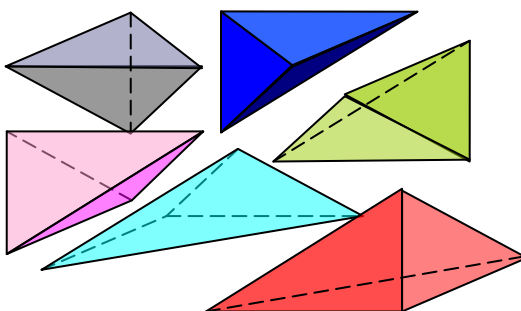
Построим тетраэдры для узла 1.

При обнаружении таких четверок необходимо удалить некоторые узлы из массива соседей. Например, из массива соседей узла 1 удаляются узлы 3,8,6.

Шаг 2. Строится первый тетраэдр -1,2,5,4.

Так как четверка вершин 1,5,2,7 пересекает уже построенный тетраэдр 1,2,4,5 из массива соседей для узла 1 удаляется узел 7.

Аналогичным образом последовательно строятся тетраэдры для остальных узлов куба. В результате получаются следующие тетраэдры, см. рисунок 5.10.



Отметим, что результат работы алгоритма зависит от нумерации узлов. Поэтому при распараллеливании сеточной задачи на параллельные подобласти, надо следить, чтобы на границе раздела подобластей узлы в каждом процессоре нумеровались одинаково, чтобы избежать лишнего межпроцессорного обмена

Разработанный подход реализован в виде компьютерной программы для параллельного построения тетраэдрической расчетной сетки с использованием многопроцессорных вычислительных систем. Эксперименты проводились на модели реле типа REN34, РЕК 25 на 48-ядерном кластере Государственного инженерного университета Армении.

На рисунке 5.11 представлены исследуемая область и тетраэдрическая сетка, полученная с использованием предложенного алгоритма.

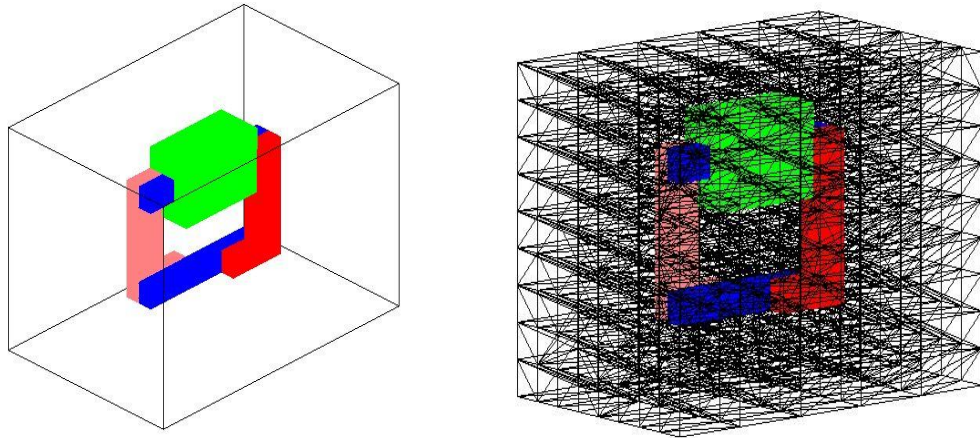


Рис. 5.11.

На рисунке 5.12 показаны зависимости времени  $T$  построения расчетной сетки (верхняя кривая), и времени, затраченного на межпроцессорный обмен (нижняя кривая) от количества процессоров  $N_p$ .

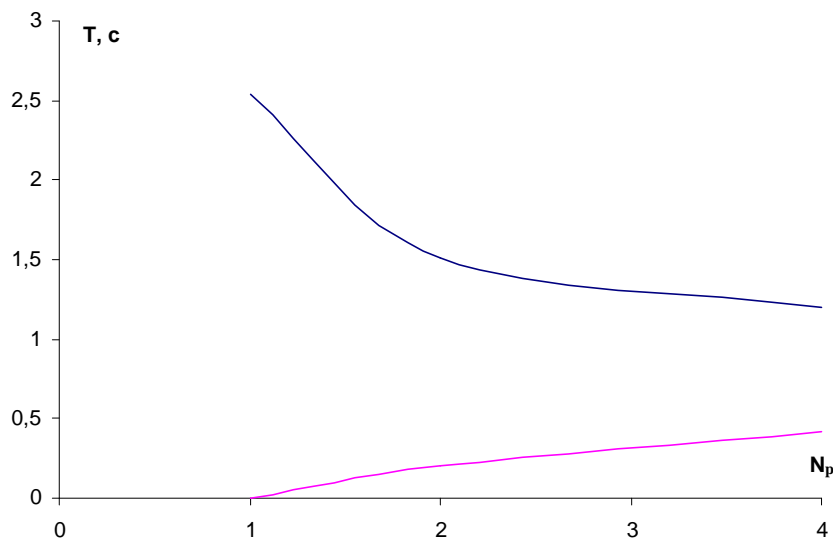


Рис. 5.12.

#### 5.4. Оценка качества тетраэдрической сетки [163]

Из-за нелинейности поля возникает обратная связь между искомым значением векторного магнитного потенциала  $\vec{A}$  и неизвестным значением

магнитной проницаемости  $\mu$ , что приводит к необходимости численного решения задачи методом последовательных приближений.

Скорость сходимости процесса последовательных приближений к решению сильно зависит от геометрической конфигурации аппроксимирующей сетки. В 3.3 приведены примеры решения задач электромагнитного поля методом конечных элементов при помощи разных сеток. Хотя задачи решались при прочих (кроме геометрии сетки) равных условиях: одинаковые начальные приближения, краевые условия, равное количество узлов дискретизации, результаты были разными. Для одной сетки процесс последовательных приближений сходился, для другой – расходился.

Таким образом, при численном решении нелинейных задач электромагнитного поля методом конечных элементов на сходимость процесса последовательных приближений сильное влияние оказывает качество тетраэдрической сетки.

В работе [117] было оценено высокое качество треугольной сетки Делоне и предложено применять в качестве двумерной треугольной сетки триангуляцию Делоне при решении задач электромагнитного поля методом конечных элементов. В 5.1 доказано, что для фиксированного набора узлов оптимальной сеткой (в смысле сходимости процесса последовательных приближений) является триангуляция Делоне. В 3.3 показано, что на процесс последовательных приближений к численному решению двумерной задачи нахождения векторного магнитного потенциала отрицательно влияет наличие тупых углов у треугольников сетки. В 5.2 показано, что и в трехмерной полевой задаче на сходимость процесса последовательных приближений отрицательно влияет наличие тупых углов у тетраэдрической сетки. В 3.3 и 5.2 даны оценки критического угла в сетке, при превышении которого процесс последовательных

приближений к решению полевой задачи заведомо расходится. Для двумерной треугольной сетки критический угол равен  $156^\circ$ , а для трехмерной тетраэдрической сетки -  $163^\circ$ .

Главным критерием качества сетки до сих пор было наличие тупых углов. Однако вычисление всех углов тетраэдров трехмерной сетки - весьма трудоемкая и громоздкая задача. Целью настоящего параграфа является создание быстрого нетрудоемкого метода оценивания качества тетраэдрической сетки.

**Необходимые сведения из стохастической геометрии [141].** Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве треугольную пирамиду (тетраэдр)  $T$ , которую пересекает плоскость  $e$ . Плоскость будем задавать нормальными координатами  $(r, \varphi, \psi)$ , где  $r$  – расстояние от начала координат до плоскости,  $(\varphi, \psi)$  - сферические координаты (долгота и широта) направления нормали к плоскости  $e$ . Если координаты  $(r, \varphi, \psi)$  являются случайными величинами с плотностью распределения

$$de = \sin \varphi dr d\varphi d\psi ,$$

то вероятностное распределение сечения  $e \cap T$  инвариантно относительно группы движений пространства, т.е. не зависит от местоположения пирамиды  $T$  и ее пространственной ориентации. Вероятность того, что случайная плоскость проходит через какую-либо вершину пирамиды, равна нулю. Следовательно, сечение  $e \cap T$  является либо треугольником, либо четырехугольником. Обозначим через  $P_3$  (соотв.  $P_4$ ) вероятность события, что сечение  $e \cap T$  является треугольником (соотв. четырехугольником). Нами (см. Сукиасян Г.С. О случайных сечениях многогранников // ДАН СССР. – 1982. - Т. 263, № 4. - С. 809-812.) доказана следующая теорема: для любой треугольной пирамиды имеют место неравенства



$$P_3 > P_4, \quad P_3 > 0,71, \quad P_4 < 0,29.$$

Величина  $P_3$  достигает своего минимума, а  $P_4$  - своего максимума для правильного тетраэдра, у которого все ребра равны.

**Алгоритм оценивания качества тетраэдрической сетки.** На основании вышеприведенной теоремы можно построить следующий алгоритм оценивания качества тетраэдрической сетки. Пересечем сетку несколькими независимыми плоскостями и рассчитаем количество  $N_3$  треугольников и  $N_4$  четырехугольников, образованных в сечении плоскости с тетраэдрами сетки. Затем вычислим соответствующие частоты:

$$m_3 = \frac{N_3}{N_3 + N_4}, \quad m_4 = \frac{N_4}{N_3 + N_4}.$$

Здесь  $m_3$  – частота появления треугольников в сечении плоскости с тетраэдрами сетки;  $m_4$  – частота появления четырехугольников.

Критерий качества тетраэдрической расчетной сетки при конечно-элементном моделировании трехмерных краевых задач: чем меньше доля четырехугольников  $m_4$ , тем хуже сетка.

Критическим углом в сетке, при превышении которого процесс последовательных приближений к решению полевой задачи заведомо расходится, равен  $163^\circ$ . Ему соответствует (см. там же) частота 9%. Если частота появления четырехугольников меньше 9%, то среди элементов сетки заведомо имеются тетраэдры с тупым углом, превышающим  $163^\circ$ .

Отметим, что при конечно-элементном моделировании имеется строгое требование к сетке: внутренности элементов не должны пересекаться, а объединение всех элементов должно совпадать с выпуклой оболочкой сетки, т.е.

внутри сетки не должно быть пустот, не покрытых элементами. Если в двумерном случае визуально видно, выполнено ли это требование, то для трехмерной сетки проверка выполнения полноты сетки и непересекаемости элементов представляет определенную трудность.

Вышеприведенная теорема позволяет провести следующий тест: если для какой-либо плоскости, пересекающей тетраэдрическую сетку, возникли пятиугольники или получено неравенство  $N_3 < N_4$ , то сетка имеет дефекты – нарушено требование полноты сетки и непересекаемости элементов.

**Численные результаты.** Предложенный алгоритм оценивания качества тетраэдрической сетки реализован для сетки, полученной при моделировании реле (рис. 5.11). Сетка на рис. 5.11 получена часто употребляемым в приложениях методом: вначале область разбита на параллелепипеды, каждый из которых разделен на 6 тетраэдров. В среднем получены следующие частоты:  $m_3 = 75,8\%$ ,  $m_4 = 24,2\%$ .

На рисунке 5.13 представлено сечение указанной тетраэдрической сетки случайной плоскостью. Количество треугольников  $N_3 = 171$ , количество четырехугольников  $N_4 = 56$ .

**Заключение.** Сходимость автоматизированного процесса последовательных приближений к решению нелинейных задач сильно зависит от конфигурации сетки. Триангуляция Делоне минимизирует сумму котангенсов углов всех своих треугольников. Это экстремальное свойство применено при анализе процесса решения систем линейных уравнений, зависящих от сетки.

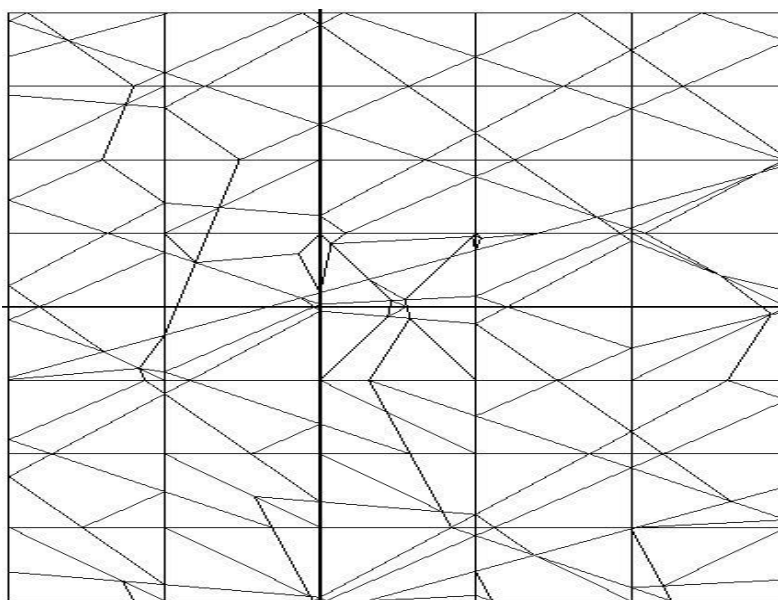


Рис. 5.13. Сечение тетраэдрической сетки случайной плоскостью.

Исследованы методы преодоления возникающих при практической реализации алгоритма трудностей, связанных с возможным появлением пересекающихся тетраэдров и вырожденных тетраэдров нулевого объема.

Развит и реализован алгоритм оценивания тетраэдрической расчетной сетки при конечно-элементном моделировании трехмерных краевых задач. Алгоритм эффективен для сравнения разных сеток, а также для обнаружения дефективных сеток, имеющих тупые углы, превышающие критическое значение, и нарушения геометрических требований.

Предложен быстрый нетрудоемкий алгоритм оценивания качества тетраэдрической сетки, применяемой при решении трехмерных краевых задач методом конечных элементов. Алгоритм основан на оценке частоты появления треугольников и четырехугольников при сечении сетки случайными плоскостями. Разработанный подход реализован на модельной задаче вычисления электромагнитного поля. Показана эффективность предложенного алгоритма.

## ГЛАВА 6.

### РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

#### *6.1. Декомпозиции без перекрытий и с теньвыми гранями [140],[159]*

Распараллеливание сеточных задач обычно осуществляется путем декомпозиции исходной исследуемой области на параллельные блоки (подобласти). В вычислительной практике используются два вида декомпозиций – декомпозиция без перекрытий и декомпозиция с теньвыми гранями (перекрытием). Декомпозициям с перекрытием посвящен ряд работ (см. Терзян А.А., Сукиасян Г.С. Параллельный алгоритм решения нелинейных полевых задач // Тезисы докл. Конф. Проблемы нелинейной электротехники. – 1981. С. 57-80.), декомпозиции без перекрытия изучены слабее.

Здесь рассматриваются параллельные алгоритмы решения нелинейной задачи электромагнитного поля методом конечных элементов с разбиением на параллельные подобласти без перекрытия. Проведен сопоставительный анализ декомпозиций с перекрытием и без перекрытия.

Исследована также задача выбора числа процессоров. Предложена формула для нахождения предпочтительного числа процессоров в зависимости от конфигурации сетки и параметров многопроцессорной вычислительной системы.

**Описание задачи.** На рисунке 6.1 показана исследуемая область модельной задачи. Для определения электромагнитного поля в области необходимо краевое условие. Так как поле вне устройства довольно быстро затухает, рассматриваем конечную область воздушного пространства и принимаем на границе нулевые значения потенциалов, см. рисунок 6.2.

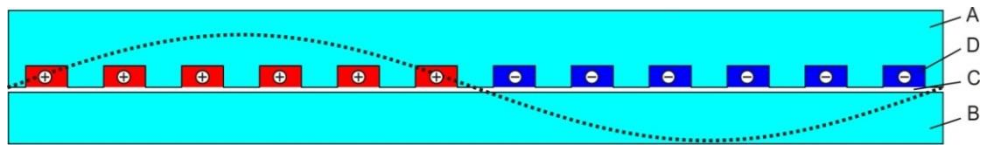


Рис. 6.1.

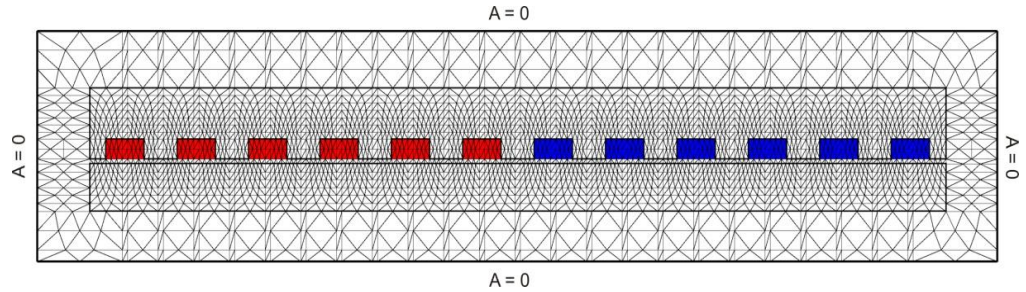


Рис. 6.2.

Напомним (см. (2.2.4)), что численный расчет двумерного магнитного поля методом конечных элементов для треугольной сетки сводится к решению системы уравнений

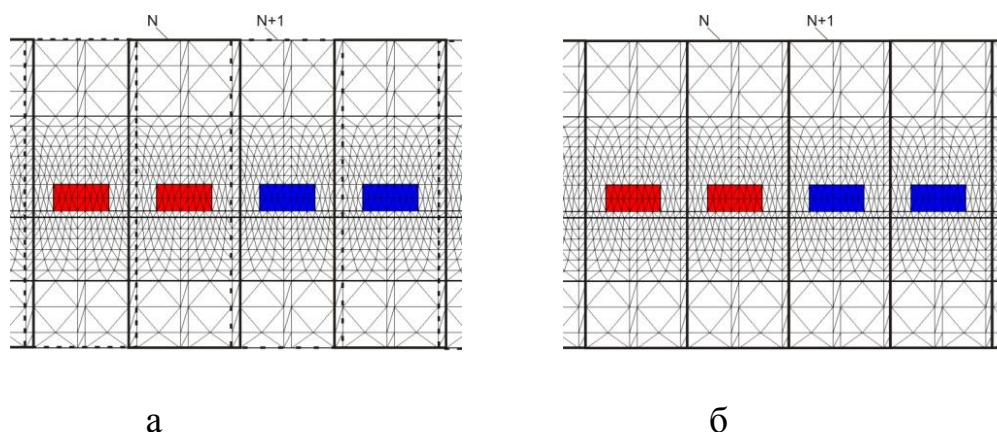
$$\sum_e \left( v_e \sum_{i=1}^3 A_i \beta_{ij}^e - \frac{\delta_e \Delta_e}{3} \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (6.1.1)$$

где  $v_e$  - значение величины  $v$  внутри элемента  $e$ ;  $A_i$  - значение потенциала  $A$  в узле  $i$ ;  $\beta_{ij}^e$  - коэффициент взаимодействия узлов  $i$  и  $j$  в элементе  $e$ ;  $\delta_e$  - значение  $\delta$  внутри  $e$ ;  $\Delta_e$  - площадь треугольника  $e$ .

Отметим, что в краевых задачах численный расчет по формуле (6.1.1) ведется только для внутренних узлов сетки, в краевых узлах значение потенциала  $A$  предполагается известным.

Учитывая, что для каждого узла  $j$  в уравнении (6.1.1) принимают участие только непосредственные соседи узла  $j$ , получаем систему уравнений с неизвестными  $A_j$ , причем количество уравнений равно количеству неизвестных.

**Декомпозиция с перекрытием.** Зона перекрытия двух соседних подобластей состоит из двух слоев узлов: теневой границы и явной границы. При этом теневая граница одной подобласти является явной границей (краем) соседней подобласти и наоборот. Так, например, на рис. 6.3а в процессоре N пунктир является теневой границей, а в процессоре N+1 сплошные линии являются теневыми границами, а пунктирные линии – наоборот, краевыми границами. Для каждой подобласти на отдельном процессоре решается краевая задача. При этом узлы из теневой границы считаются внутренними, и для них ведется численный расчет по формуле (6.1.1), а в краевых узлах значение потенциала  $A$  не меняется.



*Рис. 6.3. Декомпозиция: а - с перекрытием, б - без перекрытия.*

После нескольких итераций работа процессоров приостанавливается и происходит межпроцессорный обмен граничными значениями.

**Декомпозиция без перекрытия.** Зона пересечения двух соседних подобластей состоит из одного слоя граничных узлов (см. рисунок 6.3б). Эти узлы являются краевыми для обеих подобластей. Для каждой подобласти на отдельном процессоре решается краевая задача. При этом в граничных узлах

численный расчет по формуле (6.1.1) не ведется, и значения потенциала  $A$  не меняются.

После нескольких итераций работа процессоров приостанавливается и происходит перерасчет значений потенциала  $A$  в граничных узлах соседних подобластей. Затем происходит межпроцессорный обмен этих граничных значений.

**Выбор числа процессоров.** Имеется класс алгоритмов (например, метод наилучшей выборки в задачах принятия решения), для которых распараллеливание тем эффективнее, чем больше число используемых процессоров, т.е. оптимальное число процессоров бесконечно. В сеточных задачах количество процессоров заведомо ограничено, оно не может быть больше числа сеточных узлов. Следовательно, становится актуальным выбор оптимального числа используемых процессоров.

Предположим, что исследуемая область есть прямоугольник, имеющий  $m$  узлов в длину и  $n$  узлов в ширину. Разделим область на подобласти  $h$  горизонтальными и  $v$  вертикальными линиями. Получим  $(h+1)(v+1)$  подобластей, имеющих

$$\frac{mn}{(h+1)(v+1)}$$

узлов. Число тневых граничных узлов, используемых для межпроцессорного обмена, равно  $(m-2)v+(n-2)h$ . Обозначим через  $t_p$  удельное время решения сеточной задачи, приходящееся на один внутренний узел, через  $t_o$  - удельное время межпроцессорного обмена, приходящееся на один граничный узел. Наша цель – выбрать числа  $h$  и  $v$  (при заданных  $m$ ,  $n$ ,  $t_p$  и  $t_o$ ) таким образом, чтобы было минимальным общее время работы:

$$T = t_p \frac{mn}{(h+1)(v+1)} + t_0[(m-2)v + (n-2)h].$$

Для этого приравняем нулю производные по  $h$  и  $v$ :

$$\frac{\partial T}{\partial h} = -t_p \frac{mn}{(h+1)^2(v+1)} + t_0(n-2) = 0, \quad (6.1.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial v} = -t_p \frac{mn}{(h+1)(v+1)^2} + t_0(m-2) = 0.$$

Отсюда получаем

$$t_p \frac{mn}{(h+1)(v+1)} = t_0(n-2)(h+1) = t_0(m-2)(v+1). \quad (6.1.3)$$

Решая систему уравнений (6.1.2), можно найти числа  $h$  и  $v$ , которые дают предпочтительное число процессоров  $(h+1)(v+1)$ . Заметим, что из (6.1.3) вытекает важное правило: следует так разделить исследуемую область на подобласти, чтобы в подобластях количества узлов в длину и ширину по возможности были близки. Это получается и из известного геометрического принципа: среди прямоугольников фиксированной площади наименьший периметр имеет квадрат.

**Численные результаты.** На рисунках 6.4–6.6 представлены различные декомпозиции (без перекрытия) исходной задачи, требующие соответственно 6, 36 и 48 параллельных процессоров. Для вышеуказанной модельной задачи найдено распределение магнитного поля методом конечных элементов с разбиением на параллельные подобласти с перекрытием и без перекрытия.



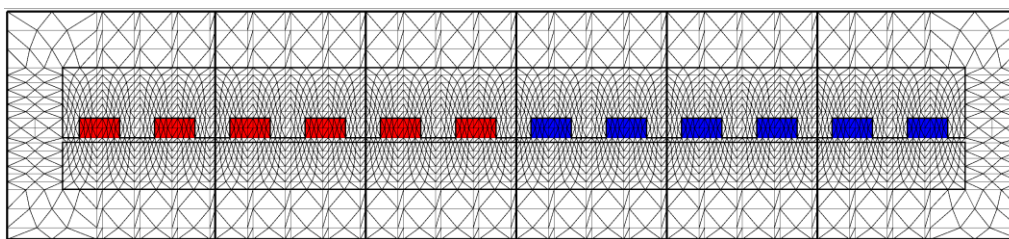


Рис.6.4.

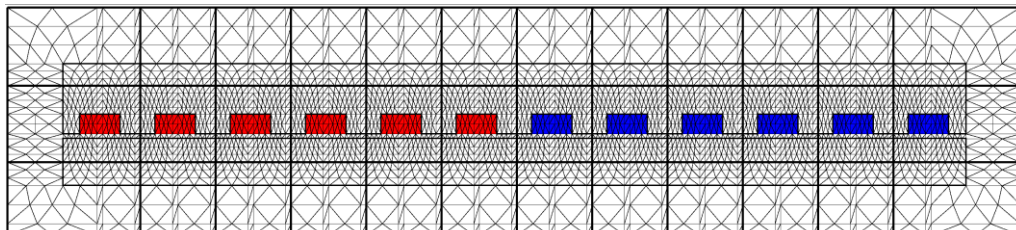


Рис. 6.5.

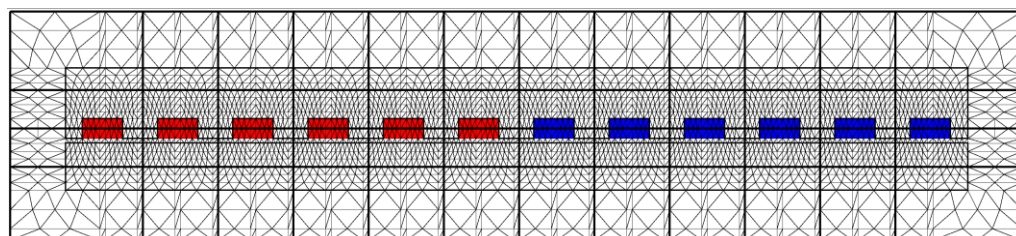


Рис. 6.6.

На рисунках 6.7 и 6.8 показаны зависимости соответственно времени расчета и числа итераций, необходимых для достижения заданного уровня невязки, в зависимости от числа процессоров.

На рисунке 6.9 представлено полученное распределение магнитного поля в исследуемой среде.

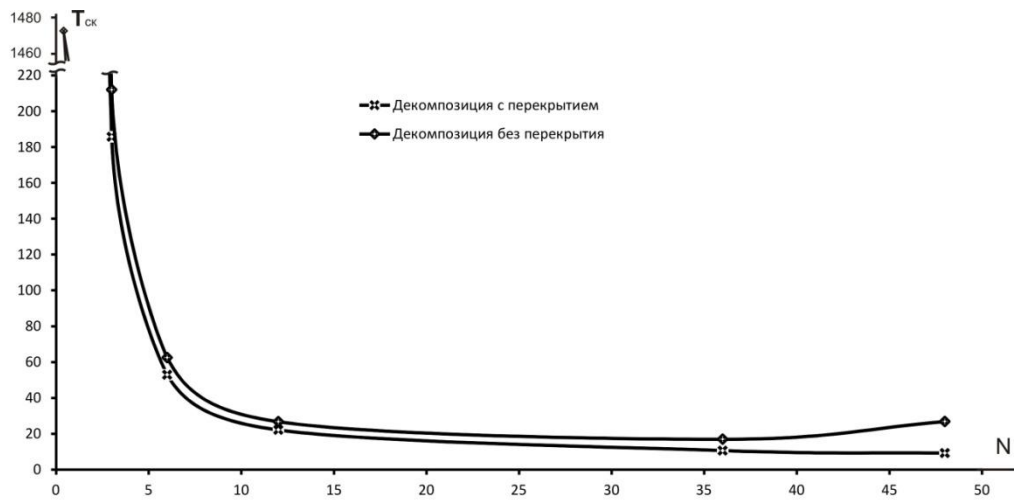


Рис. 6.7.

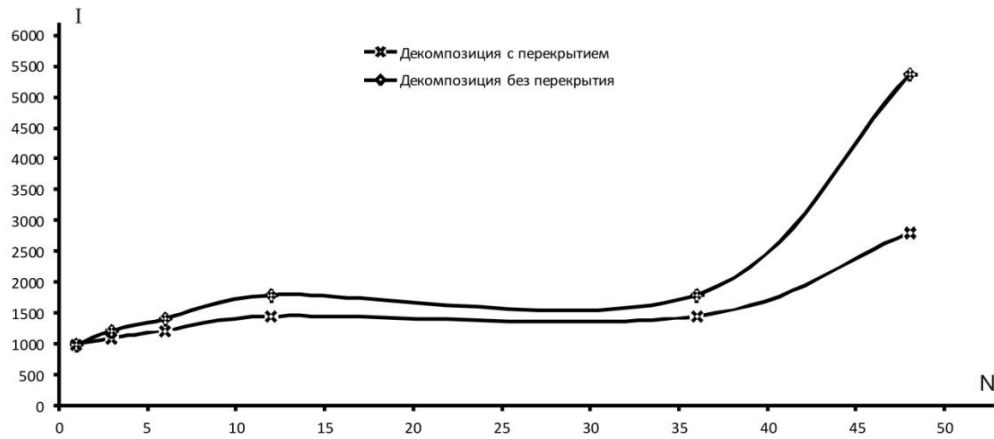


Рис. 6.8.

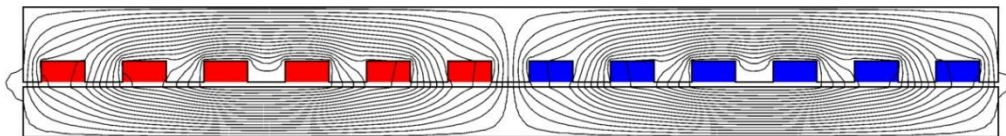


Рис. 6.9.

Сопоставительный анализ полученных результатов показывает, что декомпозиция с перекрытием требует меньшего числа итераций, чем

декомпозиция без перекрытия. Это объясняется тем, что в узлах, лежащих на теневой границе, потенциалы считаются точнее.

Из-за меньшего числа итераций при декомпозиции с перекрытием уменьшается общее время затрат на решение задачи.

По сравнению с последовательным счетом распараллеливание обоих типов приводит к резкому ускорению решения модельной задачи.

Анализ полученных результатов показывает, что существует предпочтительное количество процессоров, при превышении которого процесс ускорения решения сеточной задачи резко замедляется. Для рассмотренной нами задачи предпочтительным числом параллельных процессоров является 36.

## ***6.2. Построение тетраэдрической сетки на многопроцессорных вычислительных системах [154-157]***

**Пример модели трехмерного магнитного поля.** На рисунке 6.10 показано электромагнитное устройство и соответствующая область модельной задачи, причем на границе области значения потенциалов принимаются равными нулю ( $A=0$ ).

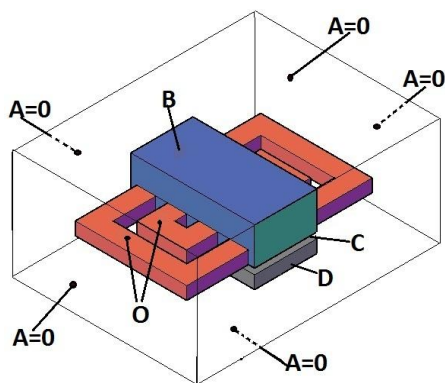


Рис. 6.10.

Для распараллеливания задачи необходимо исследуемую область на рисунке 6.10 разделить на процессорные пространства. Под процессорным пространством понимаем ту часть области решаемой задачи, которые обрабатывает данный процессор. Процессорное пространство задается ограничивающими плоскостями.

С целью уменьшения межпроцессорного обмена в процессе построения сетки мы используем декомпозицию без перекрытия. Для наглядности предположим, что в процессе построения сетки будут участвовать два процессора.

На рисунке 6.11 процессорные пространства имеют общую граничную плоскость ( $\Pi$ ) и находятся по разные стороны от нее.

Граничная плоскость задается декартовыми координатами трех произвольных пространственных точек  $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $P_3(x_3, y_3, z_3)$ , лежащих на этой плоскости. Тогда уравнение плоскости имеет вид

$$D(x, y, z) = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Будем считать, что узел с координатами  $(x_0, y_0, z_0)$  принадлежит процессорному пространству  $\text{Pr1}$ , если  $D(x_0, y_0, z_0) \geq 0$ , и соответственно, процессорному пространству  $\text{Pr2}$ , если  $D(x_0, y_0, z_0) \leq 0$ .

Отметим, что узлы, лежащие на граничной плоскости, принадлежат обоим процессорным пространствам одновременно.

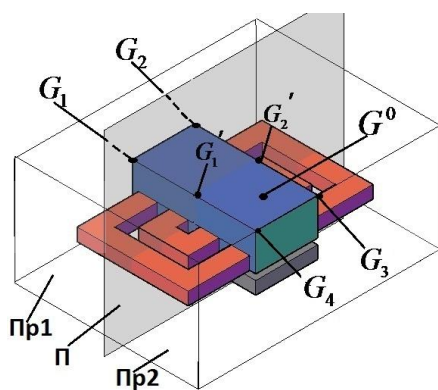


Рис. 6.11.

Если граница раздела двух сред находится в разных процессорных пространствах, то точки пересечения соответствующих ребер с граничной плоскостью будут дополнительными узлами граничной плоскости, а их соединяющие отрезки окажутся границами раздела сред на граничной плоскости. Например, на рисунке 6.11 четырехугольник  $G_1, G_2, G_3, G_4$  порождает дополнительные узлы  $G_1'$  и  $G_2'$ , а отрезок  $G_1'G_2'$  будет границей раздела сред на граничной плоскости (рисунки 6.12).

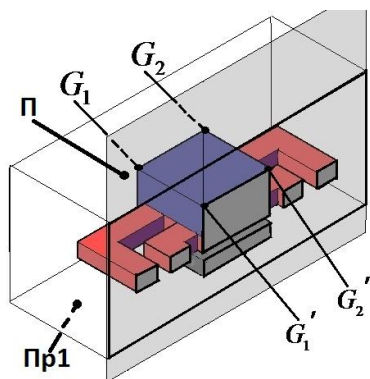


Рис. 6.12.

После нахождения узлов, принадлежащих граничной плоскости ( $\Pi$ ), надо произвести двумерную триангуляцию Делоне. При этом надо учитывать ограничения и не допускать появления элементов, находящихся в разных средах (рисунки 6.13).

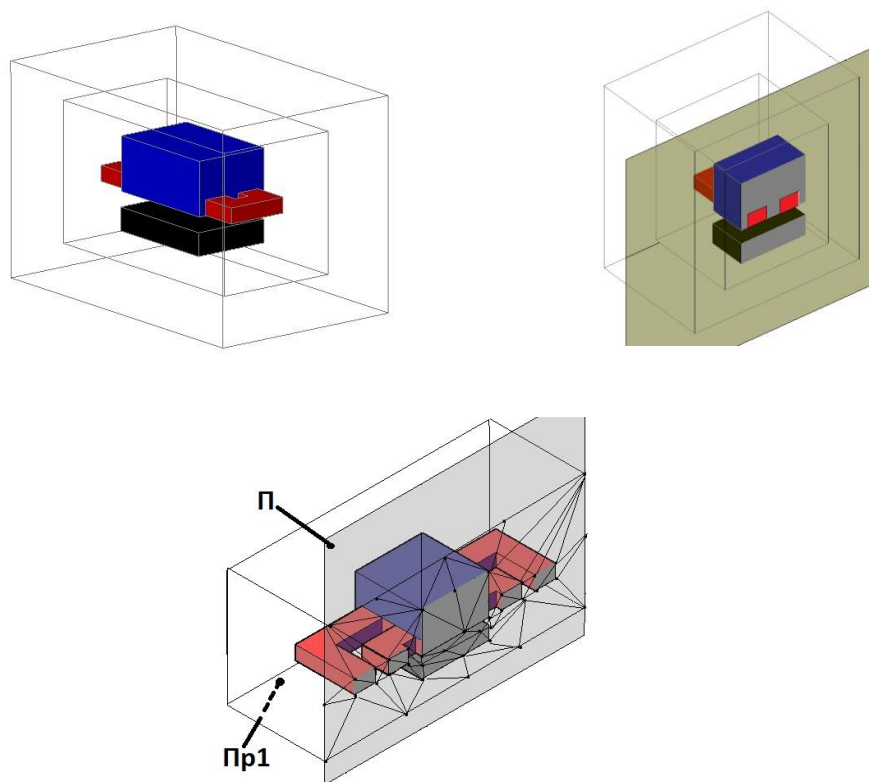


Рис. 6.13.

В 5.1 показано, что для расчета магнитных полей методом конечных элементов при заданном наборе узлов из всех возможных сеток наилучшей является сетка Делоне. Отметим, что для большого количества узлов алгоритмы построения сеток Делоне и двойственных к ним многогранных

мозаик Вороного являются чрезвычайно трудоемкими. Поэтому такие алгоритмы целесообразно использовать на многопроцессорных вычислительных машинах.

На рисунке 6.14 представлена такая же трехмерная модель, что и на рисунке 6.10, с воздушным пространством  $E$ , ограниченным конечным пространством  $H$ , а на рисунке 6.15 показано ее двумерное сечение плоскостью, разделяющей два процессорных пространства.

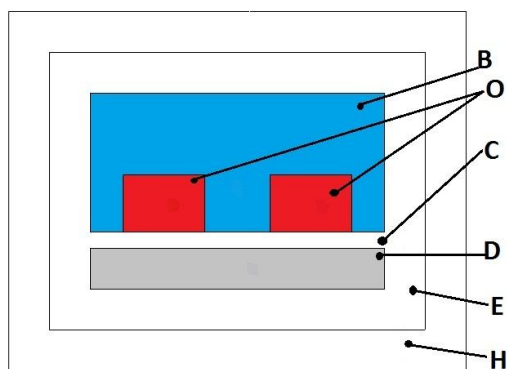
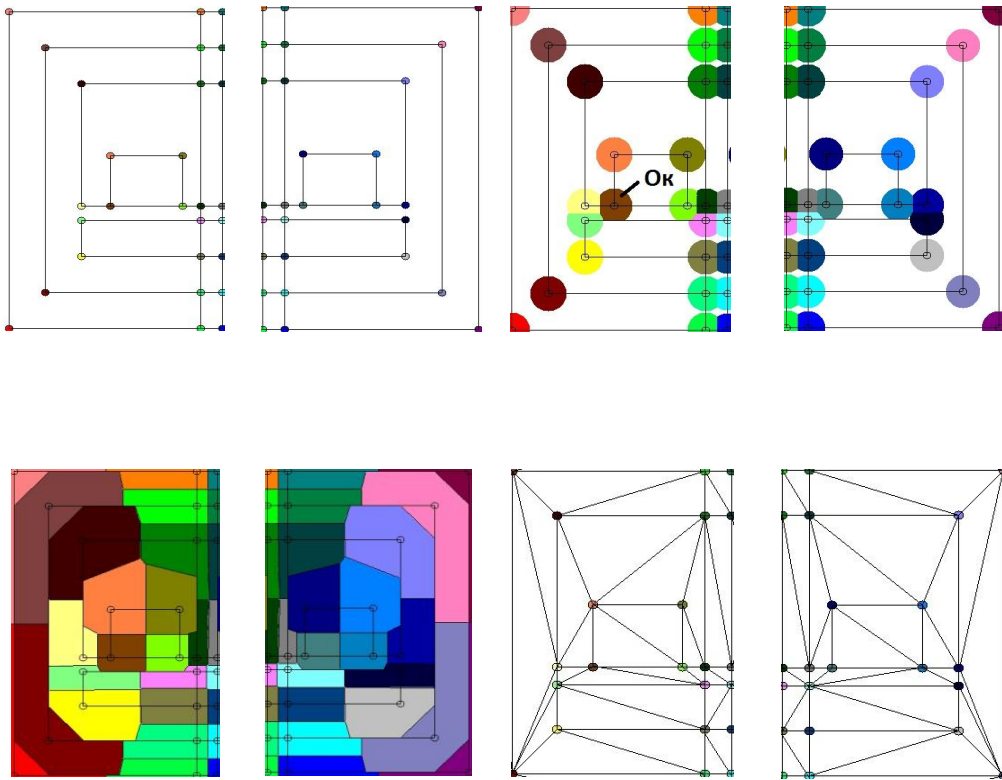


Рис. 6.15.

Определение положения узла относительно граничной плоскости, а также принадлежности граней и ребер данному процессорному пространству происходит аналогично.

На рисунке 6.16 изображен процесс параллельного построения мозаики Вороного на двух процессорах путем разбухания шаров с центрами в узлах сетки. В процессе построения, если шар  $O_k$  наталкивается на границы раздела сред или с граничными плоскостями какого-нибудь процессорного пространства, то рост шара в данном направлении приостанавливается.

После построения мозаики Вороного те пары узлов, шары которых соприкасаются, считаются соседними. Соединяя пары соседних узлов, получим искомую сетку Делоне. При этом удаляются треугольники, которые выходят за пределы области  $H$ .



### 6.3. Сопоставительный анализ методов расчета трехмерного магнитного поля [164]

Вектор индукции магнитного поля можно представить в виде вихря вектора магнитного потенциала:

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}.$$

Согласно теореме о разложении Гельмгольца, если дивергенция и ротор поля определены в каждой точке области  $V$ , то во всей области  $V$  вектор поля представим в виде суммы безвихревого и соленоидального полей [10]. Таким образом вектор магнитного потенциала можно представить в виде суммы  $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad}\phi$ . Следовательно, для произвольной скалярной функции  $\phi$  имеет место



$\vec{B}' = \vec{B}$ , так как  $rot(grad \phi) = 0$ . Это означает, что для решений уравнения Максвелла нарушается единственность. Для того, чтобы решение уравнения Максвелла было однозначным, к уравнениям Максвелла добавляется дополнительное условие [55], [49]:

$$div \vec{A} = 0.$$

Кулоновская калибровка позволяет привести (см. 4.4) уравнения Максвелла (6.3.1) в декартовой системе координат к системе из трех независимых уравнений относительно каждой составляющей:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} A^x + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} A^x + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} A^x = -\delta^x, \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} A^y + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} A^y + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} A^y = -\delta^y, \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} A^z + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} A^z + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} A^z = -\delta^z. \end{cases} \quad (6.3.2)$$

Заметим, что уравнение Максвелла (6.3.1) в декартовой системе координат состоит из трех уравнений, которые явно зависят от всех трех составляющих  $A^x, A^y, A^z$ , в то время как три уравнения системы (6.3.2) связаны неявно посредством функции магнитной проницаемости. Это дает возможность распараллеливания процесса решения системы (6.3.2) по трем независимым уравнениям относительно составляющих вектора магнитного потенциала.

Для сопоставительного анализа решим одну и ту же трехмерную полевую задачу тремя следующими методами и сравним затраченное время, а также поведение невязки. Предположим, что исследуемая сетка состоит из параллелепипедов, имеющих  $n_1, n_2, n_3$  внутренних узлов дискретизации в длину, ширину и глубину, причем  $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ .

Заметим, что в методе конечных элементов возникающая система линейных уравнений имеет матрицу ленточного типа. Поэтому надо оценивать не только число узлов (то есть количество уравнений), но и ширину ленты получающейся матрицы.

Всякому узлу соответствуют три неизвестных значения каждой из трех составляющих вектора магнитного потенциала в данном узле. Таким образом, количество неизвестных (и число уравнений) в расчетной системе будет равно  $3n_1n_2n_3$ . Получающаяся матрица имеет размер  $3n_1n_2n_3 \times 3n_1n_2n_3$ . Для уменьшения ширины ленты матрицы узлы сетки целесообразнее нумеровать вдоль более коротких сторон. Тогда ширина ленты не будет зависеть от длины наибольшей стороны (то есть от  $n_3$ ) и имеет порядок  $9n_1n_2 + 3n_1$ .

В качестве второго метода рассмотрим параллельное решение трехмерной полевой задачи методом конечных элементов на трех процессорах с распараллеливанием процесса решения системы (6.3.2) по трем независимым уравнениям относительно составляющих вектора магнитного потенциала.

Из-за независимости уравнений в (6.3.2) появляется возможность их параллельного решения на трех разных процессорах, что приводит к уменьшению втрое количества неизвестных в одном процессоре. Оценим, как уменьшаются при этом размеры соответствующих матриц и ширина их лент ненулевых элементов.

Число неизвестных на каждом процессоре равно числу  $n_1n_2n_3$  внутренних узлов. Соответствующая матрица имеет размер  $n_1n_2n_3 \times n_1n_2n_3$ , а ширина ее ленты имеет порядок  $n_1n_2 + n_1$ .

Так как магнитная проницаемость  $\mu$  зависит от вектора индукции магнитного поля, а последний зависит от всех трех составляющих вектора

магнитного потенциала, то при параллельном решении приходится обеспечивать межпроцессорный обмен значениями магнитной проницаемости  $\mu$ . Время затрачиваемое на межпроцессорный обмен пропорционально количеству  $n_{Fe}$  элементов (тетраэдров) находящихся в железных подобластях сетки.

И наконец третьим методом является параллельное решение трехмерной полевой задачи методом конечных элементов на трех процессорах с распараллеливанием процесса решения путем разбиения исследуемой области на три подобласти.

Каждая подобласть будет тогда параллелепипедом, имеющим  $n_1, n_2, \frac{n_3}{3}$  внутренних узлов в длину, ширину и толщину, Число неизвестных на каждом процессоре будет равным  $n_1 n_2 n_3$ . Соответствующая матрица имеет размер

$$n_1 n_2 n_3 \times n_1 n_2 n_3.$$

Однако теперь уже ширина ленты матрицы зависит от соотношений между числами  $n_1, n_2, n_3$ . Если  $n_1 < n_2 < \frac{n_3}{3}$ , то как и в случае последовательного счета на одном процессоре, ширина ленты не будет зависеть от длины наибольшей стороны (то есть от  $n_3$ ) и имеет порядок  $9n_1 n_2 + 3n_1$ . Если  $n_1 < \frac{n_3}{3} < n_2$ , то после разбиения исследуемой области на три подобласти наибольшая сторона будет иметь  $n_2$  узлов. Ширина ленты получается заменой  $n_2$  на  $n_3/3$  и имеет порядок  $3n_1 n_3 + 3n_1$ .

Если же  $\frac{n_3}{3} < n_1 < n_2$ , то после разбиения исследуемой области на три подобласти длиной наименьшей стороны будет  $n_3/3$ . Ширина ленты получается заменой  $n_1$  на  $n_3/3$  и имеет порядок  $3n_1n_3+n_3$ .

Время затрачиваемое на межпроцессорный обмен пропорционально количеству узлов  $n_{gr}$  на границе подобластей. Для регулярной сетки оно равно  $2n_1n_2$  для средней подобласти и  $n_1n_2$  для крайних подобластей.

Отметим, что уменьшение размеров матриц и ширины их лент не только ускоряет время расчета, но и значительно улучшает точность приближенного решения. А увеличение точности расчета, в свою очередь, приводит к уменьшению числа необходимых итераций. Уменьшение размеров матриц также уменьшает погрешность, возникающую при пересчете значений магнитной проницаемости  $\mu$ .

Сопоставим два метода распараллеливания. При прочих равных условиях, общее затраченное время и поведение невязки зависят лишь от времени затрачиваемого на межпроцессорный обмен. При распараллеливании процесса решения по трем независимым уравнениям относительно составляющих вектора магнитного потенциала время межпроцессорного обмена пропорционально количеству  $n_{Fe}$  элементов находящихся в стальных подобластях сетки.

При распараллеливании же процесса решения путем деления исследуемой области на три подобласти время межпроцессорного обмена пропорционально количеству узлов  $n_{gr}$  на границе подобластей. Итак эффективность распараллеливания зависит от соотношения параметров сетки  $n_{Fe}$  и  $n_{gr}$ .

Все это, а также зависимость распараллеливания от параметров компьютера сильно затрудняет теоретическое сопоставление последовательного и параллельных методов счета. Поэтому такое сопоставление проведено ниже на практической задаче.

На рисунке 6.17 изображена модельная линейная электрическая машина, имеющая несколько обмоток, что позволяет параллелизовать часть процесса решения полевой задачи.

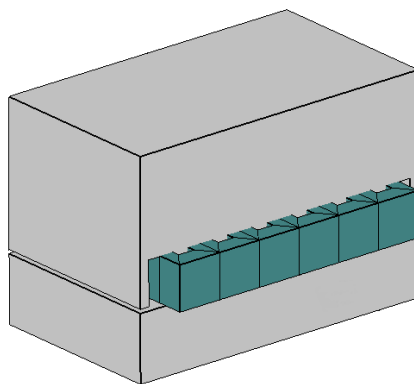


Рис.6.17.

На рисунке 6.18 показана расчетная сетка, состоящая из 212 узлов и 1096 тетраэдров. Граничным условием Дирихле является, как обычно, приравнивание нулю всех составляющих вектора магнитного потенциала на краях сетки.

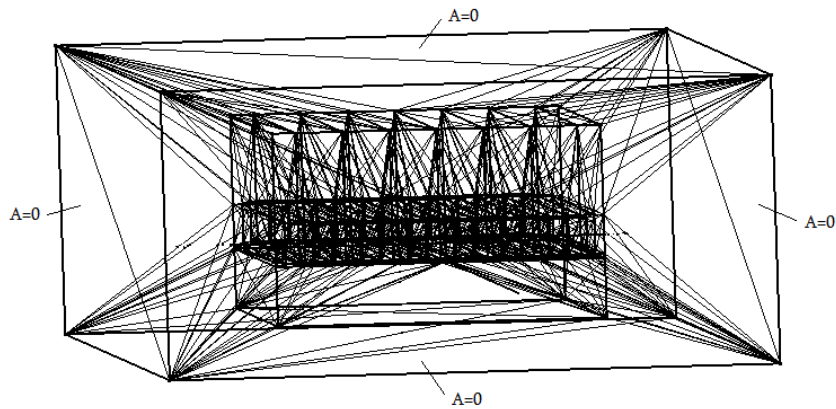


Рис. 6.18.

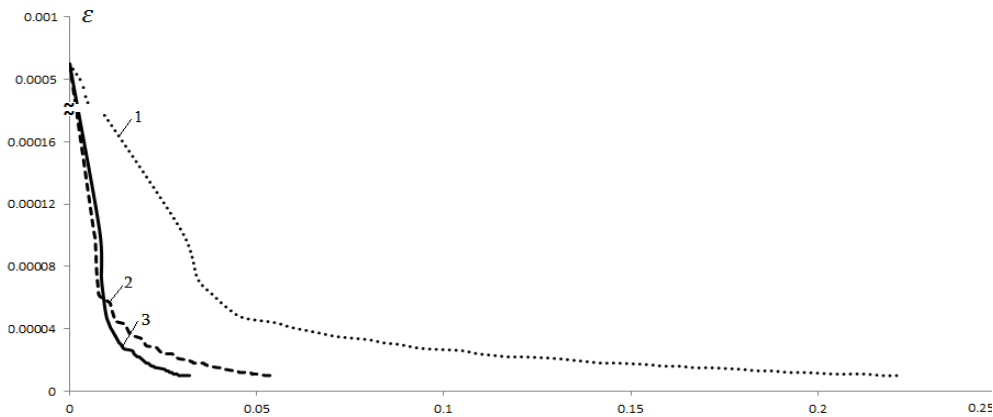


Рис. 6.19

#### ***6.4. Генетический алгоритм с использованием понятия близости особей*** [143], [147]

Как показано в 2.4, при решении нелинейных полевых задач методом конечных элементов возникает необходимость нахождения минимума энергетического функционала, а для нахождения экстремума целевой функции можно использовать алгоритмы принятия решения. В последние годы одним из бурно развивающихся направлений нелинейного математического программирования является развитие генетических алгоритмов для решения

оптимизационных задач. Особую привлекательность генетическим алгоритмам придает возможность их естественного распараллеливания.

В настоящей работе предложен генетический алгоритм с использованием понятия близости особей внутри популяции. Рассмотрена близость трех видов: по целевой функции, по ограничениям и геометрическая близость. Исследованы случаи, когда скрещивание близких особей желательно и когда нежелательно, при этом на разных стадиях решения задачи целесообразно использование разных видов близости.

Предложенный подход апробирован путем реализации машинной программы для решения задачи оптимального проектирования синхронного явнополюсного генератора. Проведен сопоставительный анализ с генетическими алгоритмами классического типа. Полученные результаты показывают эффективность развитого подхода.

Рассмотрим задачу нахождения минимума целевой функции  $F(x_1, \dots, x_n)$ , зависящей от  $n$  переменных, при условии выполнения ограничений

$$\varphi_i(\bar{x}) = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где  $m$  - число ограничений.

Для описания генетических алгоритмов решения таких задач нам потребуется ряд биологических терминов, которым дадим формальное определение.

Особь - это точка  $n$ -мерного евклидова пространства.

Популяция - это конечное множество точек (особей). В генетических алгоритмах строится процесс последовательных популяций  $p_k$ , при этом переход

от одного поколения к другому (то есть от популяции  $p_k$  к  $p_{k+1}$ ) осуществляется при помощи операций мутации, скрещивания и селекции.

Мутация - это сдвиг точки по случайному вектору. Обычно длина вектора предполагается фиксированной (шаг мутации), а ориентация – случайной с равномерным распределением на  $n$ -мерной единичной сфере.

Скрещивание особей  $A$  и  $B$  - это процесс порождения новых точек на отрезке, соединяющем  $A$  и  $B$ . В генетических алгоритмах используют разные способы порождения отпрысков нового потомства (чаще всего берут 2-3 случайные точки, равномерно распределенные на отрезке). Неизменным остается условие: новые точки непременно должны лежать на отрезке  $AB$ .

Селекция - это процесс сравнения особей старого и нового поколений и отбора лучших из них. Критерием для отбора особей является значение целевой функции  $F(x_1, \dots, x_n)$  в данной точке.

Целью первого этапа работы генетического алгоритма является попадание особей в допустимую область. Для ускорения этого процесса предлагается производить скрещивание особей в зависимости от расположения родительских точек по отношению к ограничениям, определяющим допустимую область  $D$ . Ниже введем особое расстояние между особями, учитывающее взаимное расположение ограничений.

Каждой особи  $A = (x_1, \dots, x_n)$  поставим в соответствие вектор (фрейм)  $V_A = (v_1, \dots, v_m)$ , где  $m$  - число ограничений. Величины  $v_k$  принимают два значения:  $v_k = +1$ , если в точке  $A = (x_1, \dots, x_n)$  выполнено ограничение  $\phi_k$ , и  $v_k = -1$  - в противном случае. Пусть особи  $A$  соответствует фрейм  $V_A = (v_1, \dots, v_m)$ , а особи  $B$  - фрейм  $V_B = (v'_1, \dots, v'_m)$ . Расстоянием по ограничениям между особями  $A$  и  $B$  назовем расстояние между фреймами



$$R_1(A, B) = \sqrt{(v_1 - v_1')^2 + \dots + (v_m - v_m')^2}.$$

Пару особей назовем братом и сестрой, если их фреймы совпадают, то есть расстояние между ними равно нулю. На рисунке 6.20 особи В и С являются братом и сестрой. На том же рисунке для особи А наиболее удаленной (в смысле расстояния по ограничениям) является особь Е. Отметим, что близость по ограничениям может отличаться от обычной геометрической близости. Так на рисунке 6.20 для особи В точка А геометрически ближе чем С, а в смысле расстояния по ограничениям, наоборот, С ближе чем А.

Пусть особи В и С являются братом и сестрой и не лежат в допустимой области, и пусть  $\varphi$  - ближайшее к ним невыполненное ограничение (на рисунке 6.20 это  $\varphi_4$ ). Обозначим через  $k$  максимальную кривизну этого ограничения.

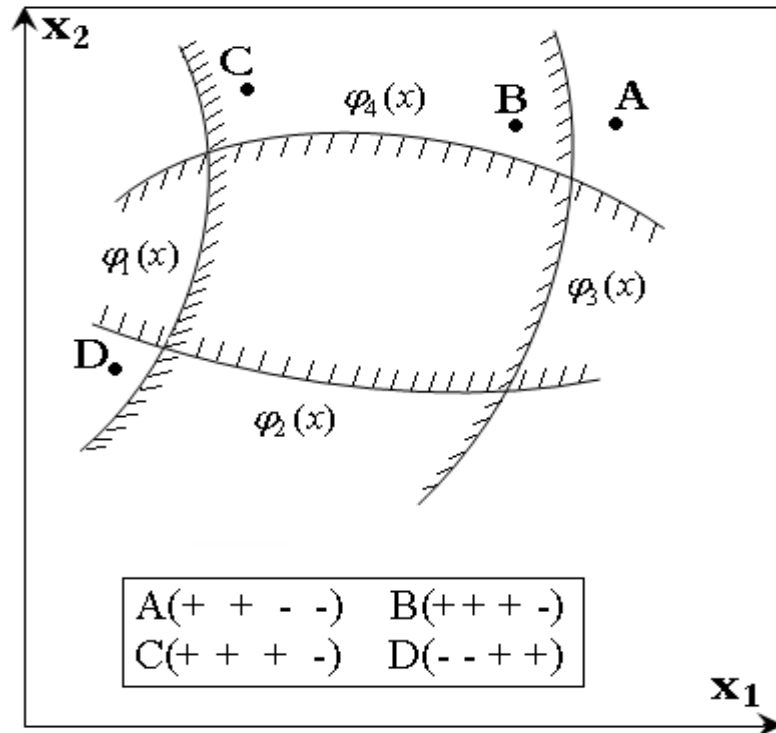


Рис.6.20.

**Утверждение 6.4.1.** Если особи В и С являются братом и сестрой и не лежат в допустимой области, то вероятность события, что при их скрещивании потомство попадет в допустимую область, меньше чем

$$1 - \frac{k \min[F(B), F(C)]}{2 - \sqrt{4 - k^2 d^2}},$$

где  $d$  - геометрическое расстояние между особями. Эта вероятность равна нулю, если кривизна  $k$  отрицательна.

Согласно приведенному Утверждению 6.4.1, очень высока вероятность того, что потомство от скрещивания близких родственников окажется неудачным (то есть не попадет в допустимую область  $D$ ). Предлагается на первом этапе работы генетического алгоритма запретить скрещивание близких родственников и скрещивать наиболее удаленные (в смысле расстояния по ограничениям) особи.

Второй этап работы генетического алгоритма начинается, когда вся популяция находится в допустимой области, но особи еще далеки до оптимума. На этом этапе важным является геометрия расположения особей.

Пусть особь А как точка  $n$ -мерного евклидова пространства имеет декартовы координаты  $(x_1, \dots, x_n)$ , а особь В имеет координаты  $(x'_1, \dots, x'_n)$ . Расстоянием по геометрии между особями А и В назовем евклидово расстояние между точками:

$$R_2(A, B) = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2}.$$

Обозначим через  $d_{\max}$  максимальное геометрическое расстояние между особями в  $j$ -той популяции  $p_j$ . По мере возрастания  $j$  величина  $d_{\max}$  убывает (но не обязательно монотонно, см. ниже рис. 7.4). Это происходит, так как вследствие селекции отбираются лучшие особи, которые концентрируются вокруг точки

оптимума. Для ускорения этого процесса предлагается на втором этапе работы генетического алгоритма скрещивать наиболее удаленные (в смысле расстояния по геометрии) особи.

В конце второго этапа работы генетического алгоритма наступает момент, когда популяции стабилизируются и не меняются (а значит и не меняется величина  $d_{\max}$ ). Это означает, что при скрещивании геометрически дальних особей все потомство оказывается хуже родителей. Такое происходит, когда популяция достаточно консолидирована и особи близки к оптимуму. В такой ситуации предлагается скрещивать близкие (по целевой функции) особи.

Пусть особь А как точка n-мерного евклидова пространства имеет декартовы координаты  $(x_1, \dots, x_n)$ , а особь В имеет координаты  $(x'_1, \dots, x'_n)$ . Расстоянием по целевой функции между особями А и В называется величина

$$R_3(A, B) = |F(x_1, \dots, x_n) - F(x'_1, \dots, x'_n)|$$

Переход к скрещиванию близких по целевой функции особей аналогичен уменьшению шага в градиентных методах. Поэтому целесообразно вместе с изменением стратегии скрещивания уменьшать шаг мутации.

Предложенный подход опробован путем реализации машинной программы для решения задачи оптимального проектирования синхронного явнополюсного генератора. Проведен сопоставительный анализ с генетическими алгоритмами классического типа приведенными в [83].

Для проведения численных исследований в качестве тестовой модели принята математическая модель синхронного явнополюсного генератора мощностью 20 кВт. Рассмотрим следующую задачу оптимизации.

Найти минимальный активный объем генератора  $D_a^2 l$  вариацией внешнего диаметра статора  $D_a$ , относительного диаметра расточки статора  $D_i/D_a$ , относительной ширины паза  $d/t$ , длины статора  $l$ , числа эффективных проводников в пазу  $S_{\text{п}}$ , коэффициента полюсного перекрытия  $\alpha_i$ , относительной ширины полюса  $b_m/b_p$ , относительного воздушного зазора  $\delta/\delta_m$ , плотности тока возбуждения  $J_b$  при следующих ограничениях в виде неравенств: КПД  $\eta$ , отношение короткого замыкания ОКЗ, максимальные значения индукций в зубцах  $B_z$ , спинке  $B_{\text{сп}}$ , полюсах  $B_p$ , продольные переходная и сверхпереходная реактивности  $x'_d$  и  $x''_d$ , фактор нагрева статора  $AS \cdot J_a$ , потери в обмотке возбуждения  $P_b$ , суммарная масса меди  $G_{\text{мед}}$ , сечение, занимаемое катушкой возбуждения  $S_{\text{вт}}$ .

На рисунках 6.21 представлены графики зависимости числа особей  $N_D$ , попавших в допустимую область  $D$ , от номера поколения  $N_{\text{пок}}$  при различных геометриях области  $D$ . Жирная линия соответствует предложенному алгоритму, который запрещает скрещивание близких родственников и скрещивает наиболее удаленные (в смысле расстояния по ограничениям) особи. Вторая линия соответствует решению той же оптимизационной задачи классическим алгоритмом, приведенным в [83]. В случае а) область  $D$  довольно широка (в нее легко попасть обычным методом), в случаях б) – г) область  $D$  постепенно суживалась, оставляя остальные параметры модели неизменными. Графики показывают, что предложенный алгоритм особенно эффективен в случаях узких областей, куда трудно попасть обычным методом.

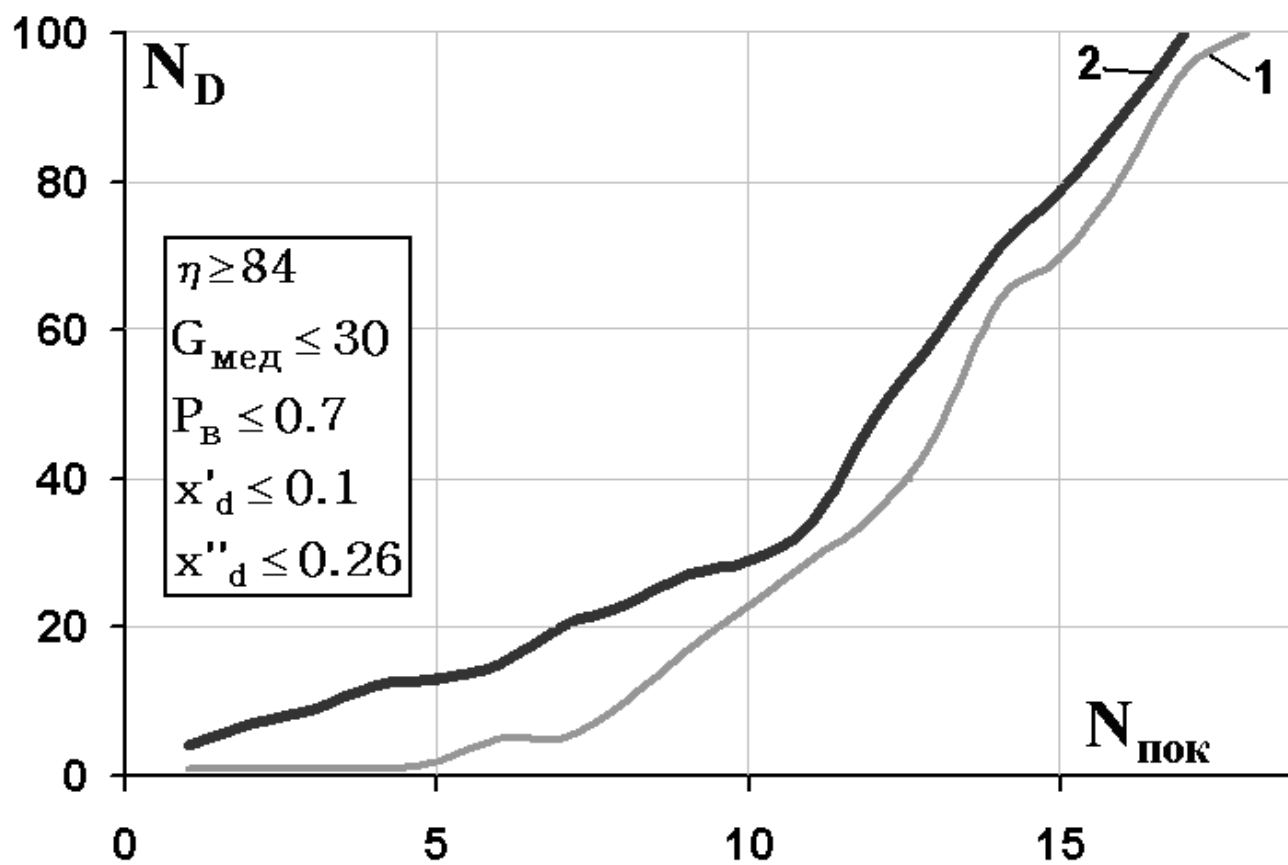


Рис. 6.21а.

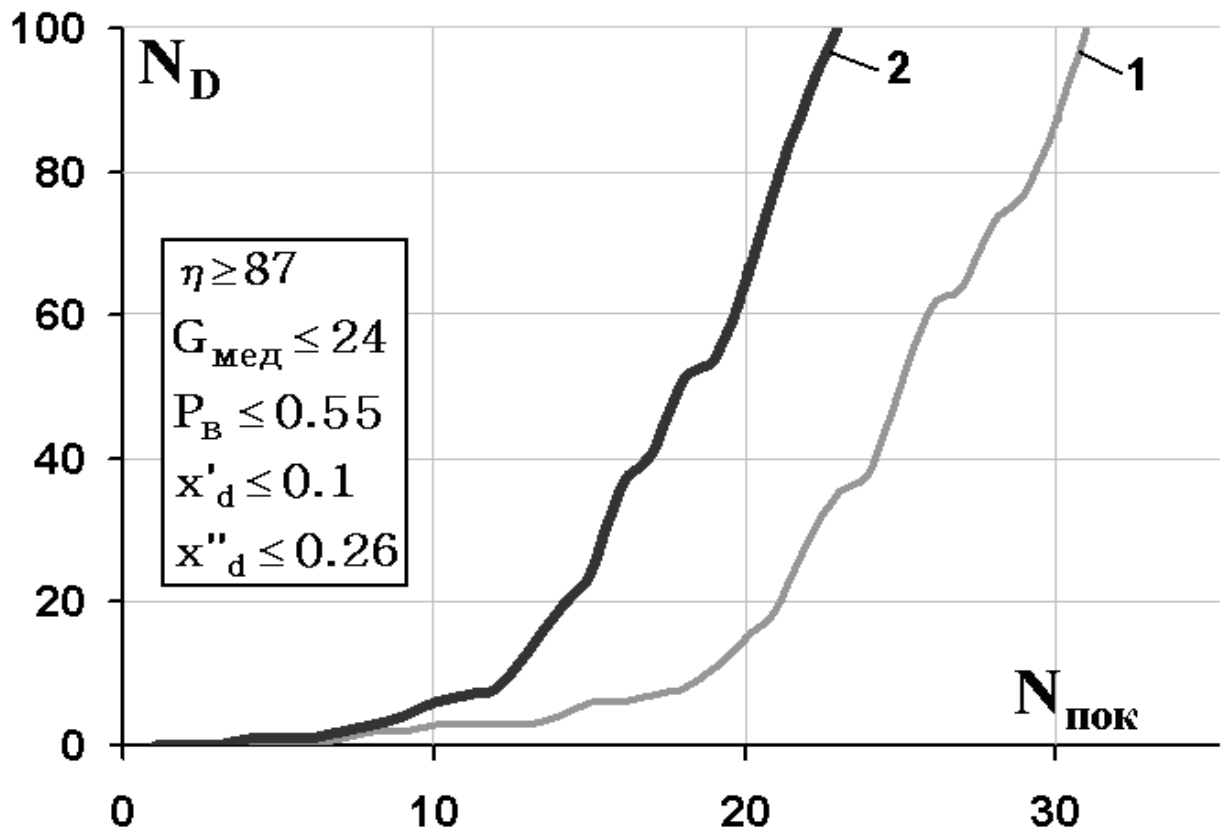


Рис. 6.216.

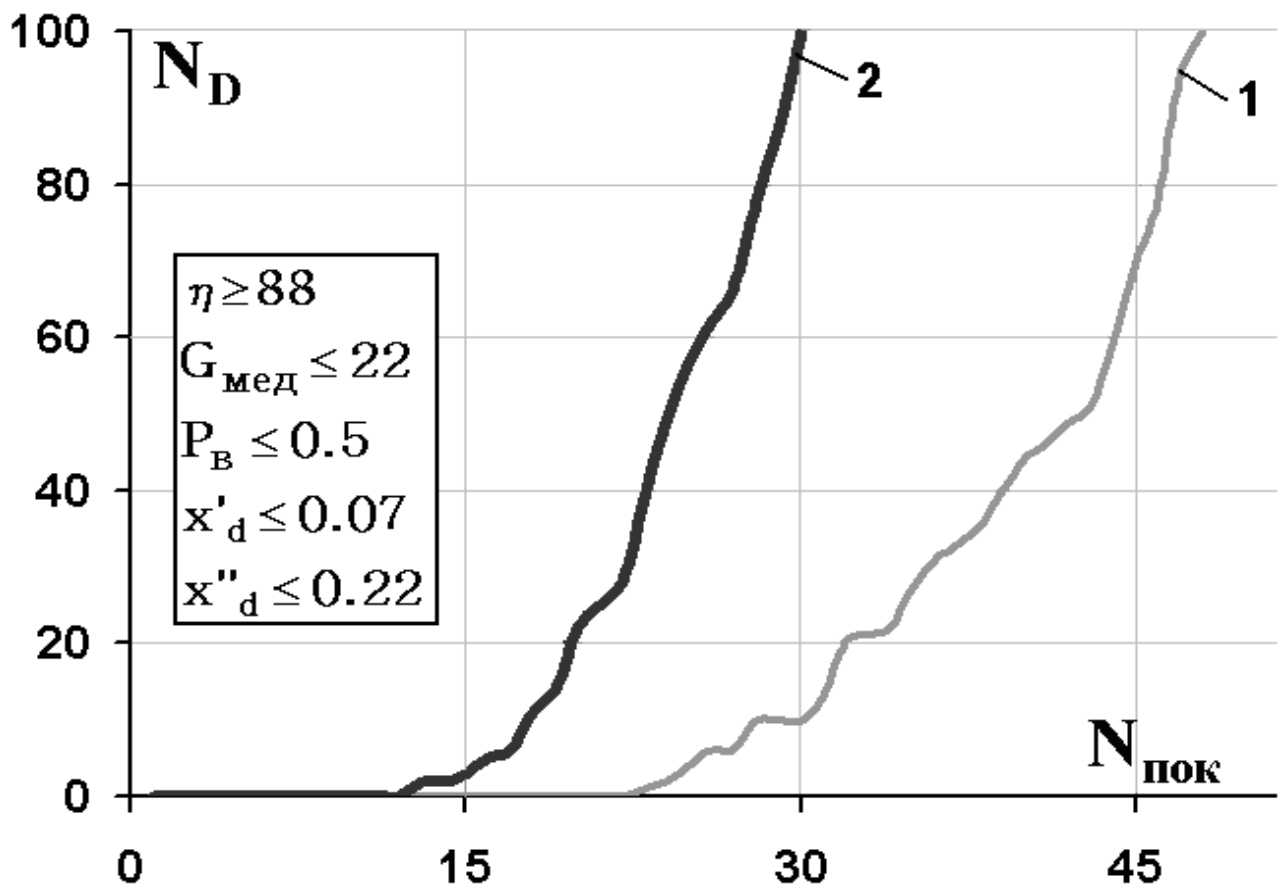


Рис. 6.21в.

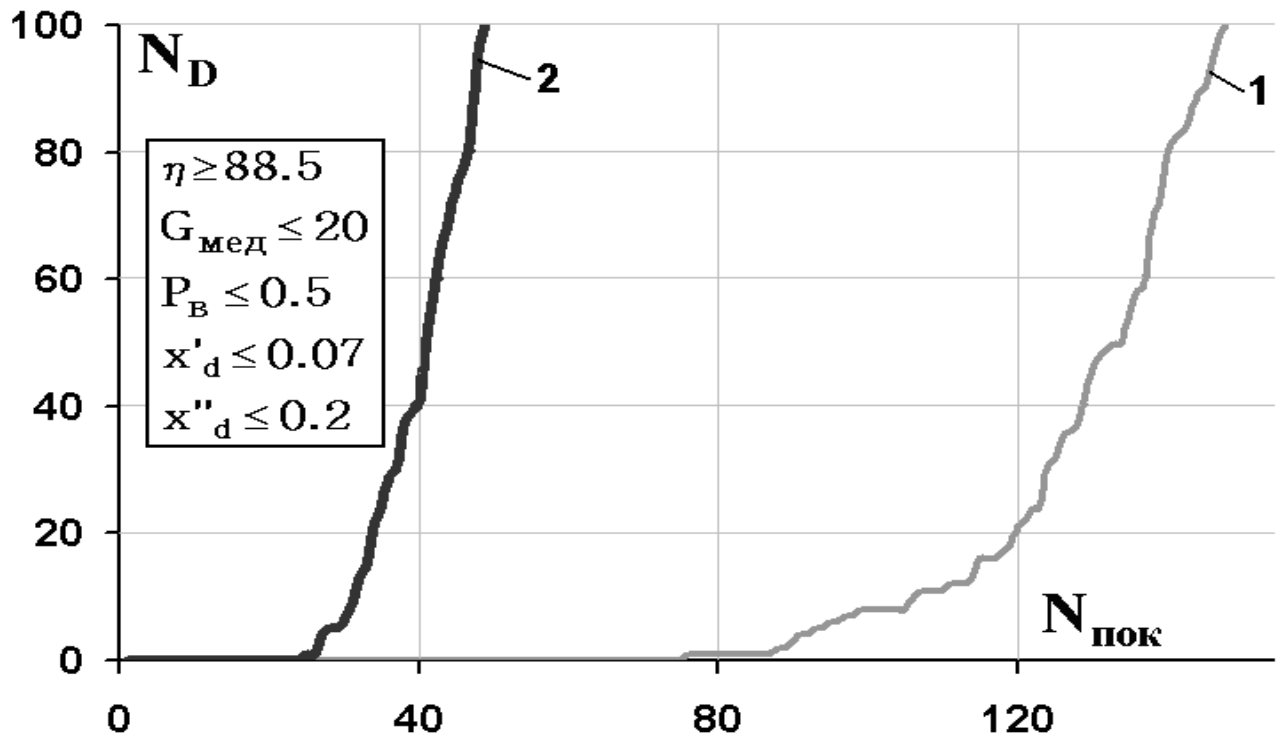


Рис. 6.21г.

На рисунке 6.22 представлен график зависимости максимального геометрического расстояния между особями в популяции от номера поколения. График соответствует второму этапу работы генетического алгоритма.



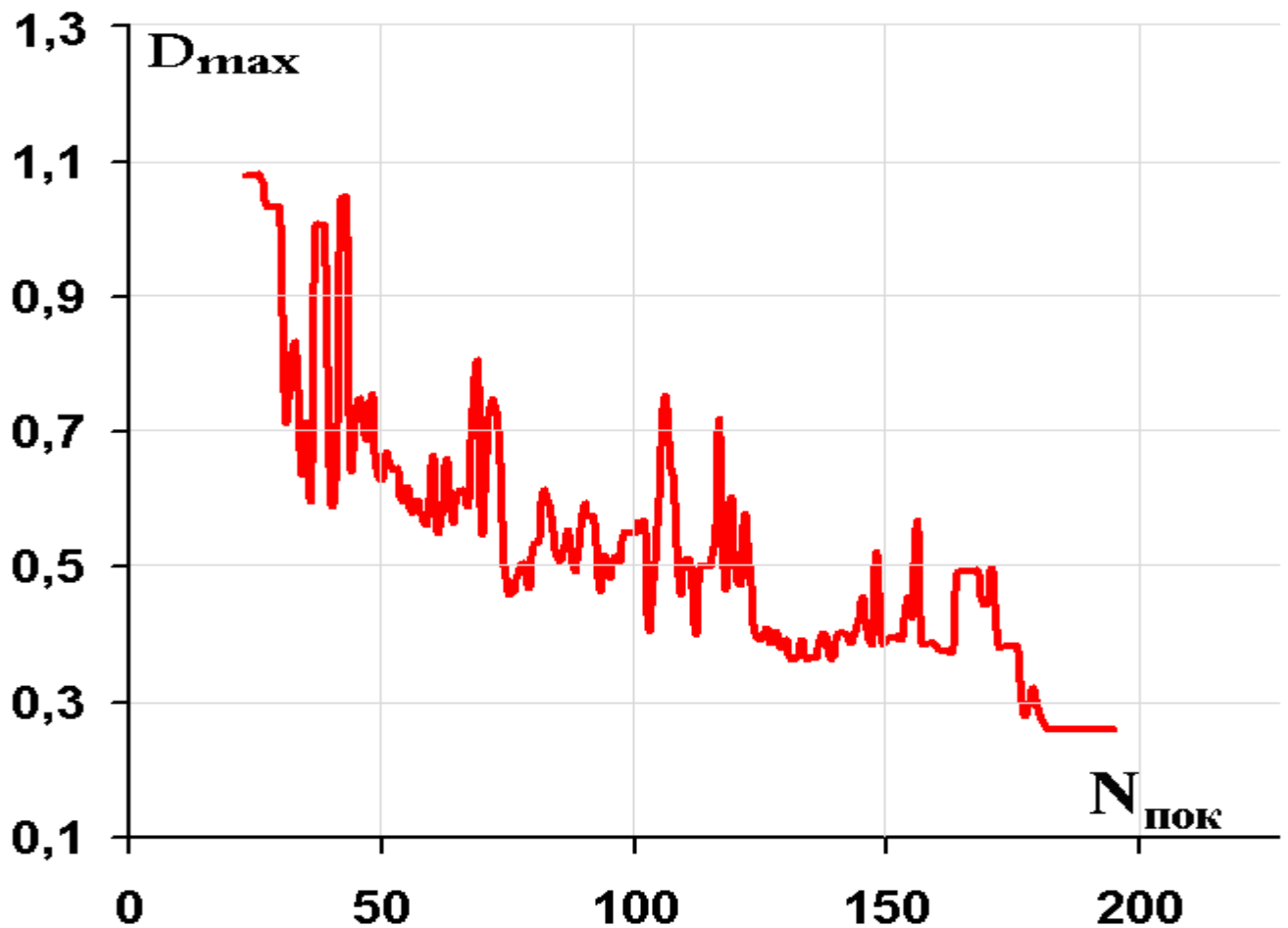


Рис. 6.22.

На рисунке 6.23 представлен график зависимости целевой функции  $F(x_1, \dots, x_n)$  от номера поколения  $N_{\text{пок}}$ . Жирная линия соответствует предложенному алгоритму, который запрещает скрещивание близких родственников и скрещивает наиболее удаленные (в смысле геометрического расстояния) особи. Вторая линия соответствует решению той же оптимизационной задачи классическим алгоритмом приведенным в [83].

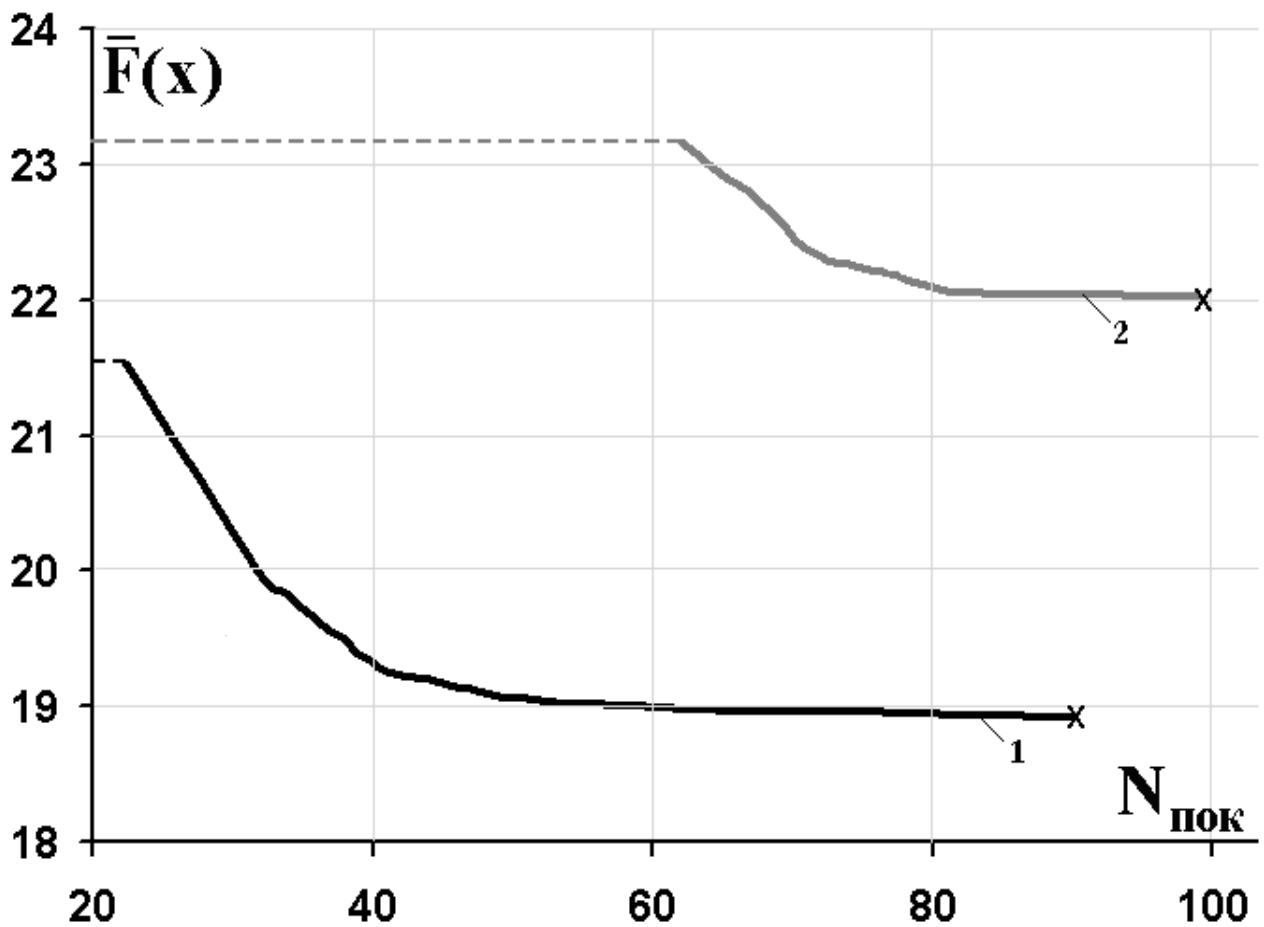


Рис. 6.23.

На рисунке 6.24 представлен график зависимости целевой функции  $F(x_1, \dots, x_n)$  от номера поколения  $N_{\text{пок}}$  при работе генетического алгоритма с изменением стратегии скрещивания и уменьшения шага мутации. Переход к скрещиванию близких по целевой функции особей производится когда максимальная невязка по целевой функции достигает заданного значения  $\xi$ . График показывает, что изменять стратегию скрещивания надо не слишком рано (тогда получается плохое решение) и не слишком поздно (получается хорошее решение, но за большее число итераций). Выбор оптимального значения  $\xi$  сильно зависит от особенностей решаемой задачи, т.е.  $\xi$  является управляющим параметром, который наряду с

другими управляющими параметрами требует адаптации. В рассмотренной задаче оптимальным было значение  $\xi=0.001$ .

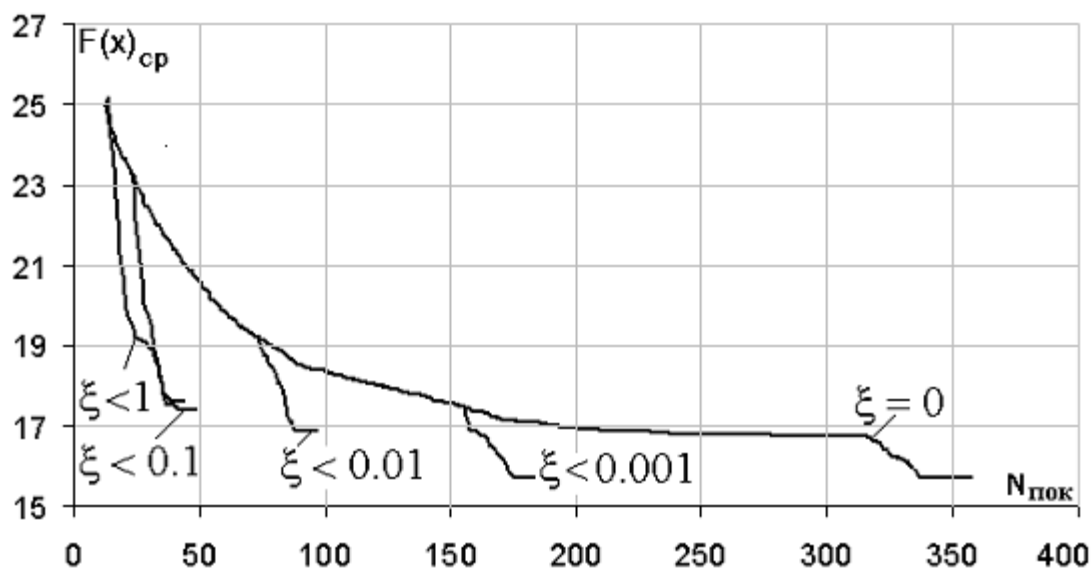


Рис. 6.24.

В связи с возрастанием сложности решаемых экстремальных задач возникает настоятельная потребность в создании системы формальной адаптации алгоритмов поисковой оптимизации к математическим моделям решаемых задач. По существу подобная задача сводится к двойной оптимизации, одна из которых является целевой оптимизацией (решение поставленной экстремальной задачи), другая – оптимизацией самого процесса решения задачи.

**Схема работы системы адаптации.** Каждой оптимизационной задаче ставится в соответствие два набора характеристик.

$$\bar{g} = (g_1, g_2, \dots, g_p) \text{ и } W = (w_1, w_2, \dots, w_l) \quad (6.4.1)$$

Первый набор  $\bar{g}$  (назовем его “первичный фрейм”) содержит общие характеристики оптимизационной задачи. Вторичный фрейм  $W$  содержит

информацию, полученную в результате решения оптимизационной задачи (например, затраченное время, примененные методы, управляющие параметры и т. д.). В (6.4.1)  $p$  и  $l$  обозначают размерности, соответственно, первичного и вторичного фреймов.

При поступлении очередной задачи оптимального проектирования вначале происходит компьютерная обработка соответствующей математической модели с целью заполнения первичного фрейма. Затем полученный фрейм сравнивается с первичными фреймами уже решенных задач из базы данных. Выделяется задача, первичный фрейм которой наиболее близок к фрейму решаемой задачи.

Работу системы адаптации можно представить в виде отображения

$$\bar{g} \rightarrow \bar{W} = \{W_1, W_2, \dots, W_k\},$$

где  $\bar{W}$  - множество вторичных фреймов, имеющихся в базе данных (накопленный опыт),  $k$  - число фреймов имеющихся в базе данных.

Близость решаемой задачи к одной из задач из массива предыстории определяется минимумом среднеквадратичного отклонения

$$R(\bar{g}) = \min_{g' \in G} \left\{ \sum_{i=1}^p a_i (g_i - g'_i)^2 \right\}, \quad g' = (g'_1, g'_2, \dots, g'_p),$$

где  $G$  - множество первичных фреймов из базы данных,  $a_i$  - весовые коэффициенты, определяющие относительную значимость одних параметров над другими. Эти коэффициенты задаются в виде экспертных оценок, хотя можно обойтись и без самих коэффициентов ( $a_i = 1$ ).

Исходя из информации, записанной во вторичном фрейме решенной задачи, даются рекомендации каким методом решать новую задачу (структурная

адаптация) и какие при этом использовать управляющие параметры (параметрическая адаптация).

После решения задачи заполняется её вторичный фрейм и оба фрейма заносятся в базу данных т.е. число  $k$  увеличивается на единицу. Следовательно, каждая новая задача обогащает базу данных, что способствует увеличению возможностей нахождения более близких аналогов для новых задач. Таким образом, данная адаптационная система является самообучающейся.

**Характеристики математической модели.** Математическая модель представляет собой целевую функцию, с ограничениями в виде неравенств, которые определяют допустимую область. Пусть требуется найти минимум (либо максимум) некоторой нелинейной многопараметрической целевой функции.

$$F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min_{x \in D} \Rightarrow x^* \quad (6.4.2)$$

при выполнении условий нелинейных ограничений типа неравенств

$$D: \varphi_i(x) = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (6.4.3)$$

В разработанной адаптационной системе первичные фреймы пятимерны ( $p=5$ ). В качестве характеристик, формирующих первичный фрейм  $\bar{g} = (g_1, g_2, \dots, g_5)$ , нами приняты следующие:

$g_1 = n$  – число варьируемых переменных,

$g_2 = m$  – число существенных ограничений,

$g_3 = \bar{e}$  – относительная вытянутость допустимой области (эксцентриситет),

$g_4 = \bar{h}$  – геометрическая характеристика линий уровня целевой функции, определяющая степень овражности первого типа,

$g_5 = \alpha$  – взаиморасположение линий уровня целевой функции и границы допустимой области, определяющее степень овражности второго типа.

Рассмотрим их подробнее.

1. Число варьируемых переменных ( $n$ ) определяет размерность задачи и бывает явно заданным в математической модели.

2. Число существенных ограничений ( $m$ ) вычисляется по следующему алгоритму. Существенными являются те ограничения, которые формируют допустимую область. Ограничение  $\varphi_i$  можно представить, как некую подобласть  $D_i$   $n$ -мерного евклидова пространства  $E^n$ ,

$$D_i = \{x \in E^n : \varphi_i(x) = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0\}.$$

Допустимая область  $D$  есть множество точек, где выполнены все ограничения (6.4.3), т.е.

$$D = \bigcap_i D_i,$$

Ограничение  $\varphi_i$  является несущественным, если оно содержит допустимую область  $D$  внутри себя, т.е.

$$D \subset D_i \text{ и } \partial D \cap \partial D_i = \emptyset,$$

где  $\partial D_i$  - границы соответствующих областей. Ограничение  $\varphi_i$  является существенным, если

$$\partial D \cap \partial D_i \neq \emptyset,$$

то есть существует точка  $x_0$ , которая лежит на границе допустимой области  $\partial D$  (а значит для неё выполняются все остальные ограничения), и на границе  $\partial D_i$

$$\varphi_i(x_0) = 0, \quad \varphi_j(x_0) \geq 0, \quad j \neq i. \quad (6.4.4)$$

Если все ограничения задаются непрерывными функциями (а в большинстве реальных инженерных задач это так), то в достаточно близкой окрестности точки  $x_0$  имеются точки  $x'$  сохраняющие свойство (6.4.4). В точке  $x'$  выполняются все ограничения кроме одного.

На основе приведенных формальных представлений вычисляется число существенных ограничений. Генерируется некоторое число ( $N$ ) равномерно распределённых случайных точек и в каждой точке проверяется выполнение ограничений. Ограничение  $\varphi_i$  считается существенным, если хотя бы одна случайная точка попадает в область  $V_i$ , состоящую из точек, для которых справедливы все ограничения кроме  $\varphi_i$ ,

$$V_i = \{x \in E^n : \varphi_j(x) \geq 0, \quad j \neq i, \quad \varphi_i(x) < 0\}.$$

Заметим, что применение метода Монте-Карло здесь может привести к ошибке только одного рода. Если точка попала в  $V_i$ , то действительно  $\varphi_i$  является существенным ограничением. Если же ни одна случайная точка не попала в  $V_i$  (и программа признала  $\varphi_i$  несущественным ограничением), то в действительности могут быть обе возможности:  $n$ -мерный объем  $|V_i|$  области  $V_i$  равен нулю и  $\varphi_i$  на самом деле несущественное ограничение, и  $|V_i| > 0$  т.е. ограничение на самом деле существенное. Однако вероятность ошибки  $P$  равна

$$P = \left(1 - \frac{|V_i|}{|V|}\right)^N,$$

где  $|V|$  -  $n$ -мерный объем выборочного окна,  $|V_i| < |V|$ . При возрастании числа случайных точек  $N$  вероятность ошибки стремится к нулю с экспоненциальной скоростью.

На рисунке 6.25 ограничение  $\varphi_5$  является несущественным, а вот ограничения  $\varphi_1 \dots \varphi_4$  - существенные. Значками (o) обозначены случайные точки, которые привели к данному выводу.

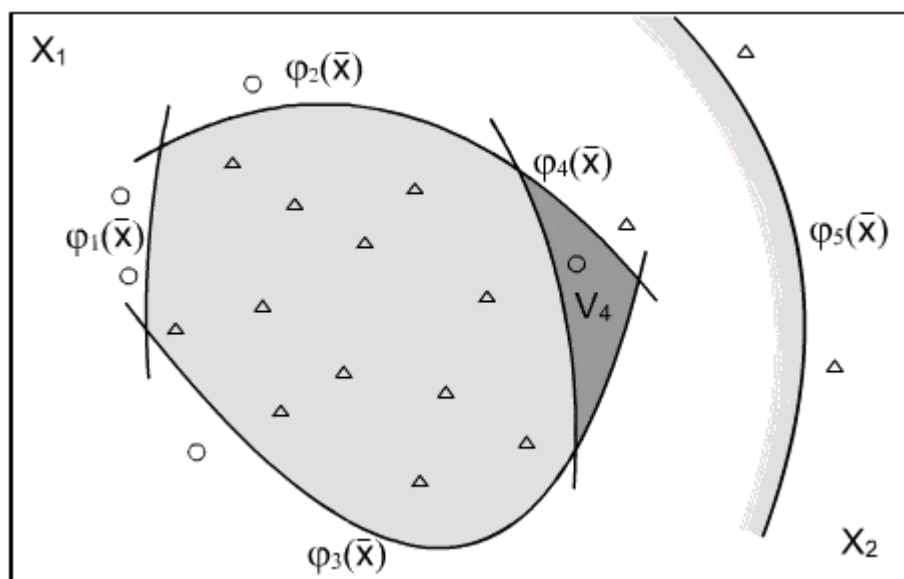


Рис. 6.25.

3. Эксцентриситет ( $\bar{e}$ ) допустимой области является матрицей ( $e_{ij}$ ) размера  $(n \times n)$ . Из генерированных случайных точек выделяются точки, попавшие в допустимую область. Пусть их число -  $N_D$ , а координаты -  $(X_1^{(s)}, \dots, X_n^{(s)})$ ,  $s=1, \dots, N_D$ . Проекции допустимой области на координатные оси аппроксимируются разностью координат



$$\beta_i = \max_s X_i^{(s)} - \min_s X_i^{(s)}, \quad i=1, \dots, n.$$

Затем числа  $\beta_i$  расставляются в возрастающем порядке и вычисляются их отношения

$$e_{ij} = \frac{\beta_i}{\beta_j}, \quad i < j$$

Отметим, что упорядочивание чисел  $\beta_i$  необходимо для того, чтобы математические модели, отличающиеся лишь нумерацией переменных, имели одинаковые фреймы.

4. В качестве геометрической характеристики линий уровня целевой функции принят вектор  $\bar{h} = (h_1, h_2, h_3)$ . Пусть  $\frac{\partial F(x)}{\partial x_i}$  производная целевой функции  $F$  по направлению координатной оси  $O_{x_i}$ , посчитанная в точке  $x$ . Тогда  $h_1$  - максимум производных целевой функции  $F$  по координатным направлениям,

$$h_1 = \max_x \left( \max_i \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} \right);$$

$h_2$  - соответствующий минимум

$$h_2 = \max_x \left( \min_i \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} \right);$$

$h_3$  - относительная величина вытянутости линий уровня целевой функции

$$h_3 = \max_x \left( \frac{\max_i \frac{\partial F(x)}{\partial x_i}}{\min_j \frac{\partial F(x)}{\partial x_j}} \right).$$

Отметим, что  $h_3 \leq \frac{h_1}{h_2}$ .

5. Угол  $\alpha$  между линиями уровня целевой функции  $F(x)$  и границей  $\partial D$  допустимой области можно оценить следующим образом. Пусть  $X_1$  и  $X_2$  две точки из допустимой области, лежащие вблизи границы  $\partial D_i$  ограничения  $\varphi_i$ ,

$$\text{т.е. } \varphi_i(X_k) \geq 0, \quad \varphi_i(X_k) < \varepsilon, \quad k=1,2. \quad (6.4.5)$$

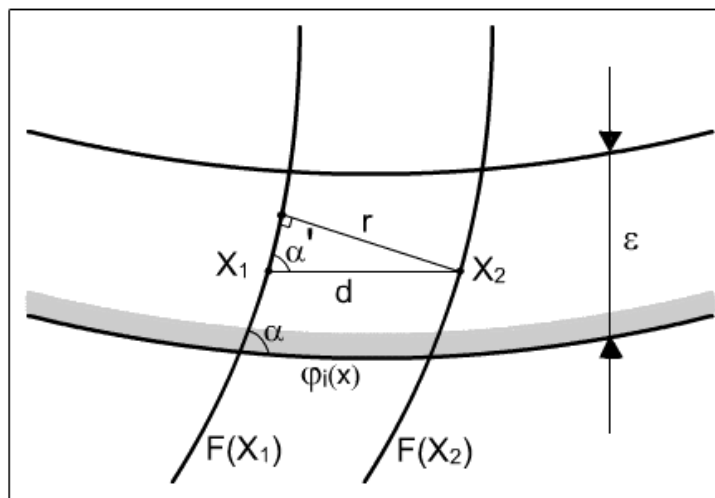


Рис. 6.26.

Обозначим через  $d$  (рисунок 6.26) расстояние между точками  $X_1$  и  $X_2$ , через  $r$  - расстояние между линиями уровня  $F(X_1)$  и  $F(X_2)$ . Тогда для угла  $\alpha$  имеем

$$\sin \alpha \approx \sin \alpha' = \frac{r}{d}. \quad (6.4.6)$$

Заменяя производную по  $r$  конечной разностью, получим

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{F(X_2 - X_1)}{r}.$$

Следовательно,

$$\sin \alpha \geq \min \frac{F(X_2) - F(X_1)}{d} \frac{1}{\max_i \frac{\partial F}{\partial X_i}}, \quad (6.4.7)$$

где минимум берется по всем парам точек, удовлетворяющим условию (6.4.5).

Тем не менее, полученные результаты сужают неопределенность в выборе значений управляющих параметров и повышают качество принятия решений в задачах электромеханики.

**Пример** [151]. В заключение представим результат примера автоматизированного решения методом конечных элементов нелинейной задачи электромагнитного поля развитыми методами с соответствующим построением развитыми методами треугольной оптимальной сетки.

На рисунке 6.27 представлена расчетная треугольная сетка. Нетрудно убедиться что сетка имеет свойство Делоне: внутри круга описанного вокруг любого элемента сетки не попадает ни одна вершина других треугольников.

Хорошо видно, что по краям области, где поле затухает, площадь треугольников относительно велика. А в местах, где ожидается сильное изменение индукции, треугольники становятся мелкими.

На рисунке 6.28 изображены эквипотенциальные линии решения методом конечных элементов нелинейной задачи электромагнитного поля.

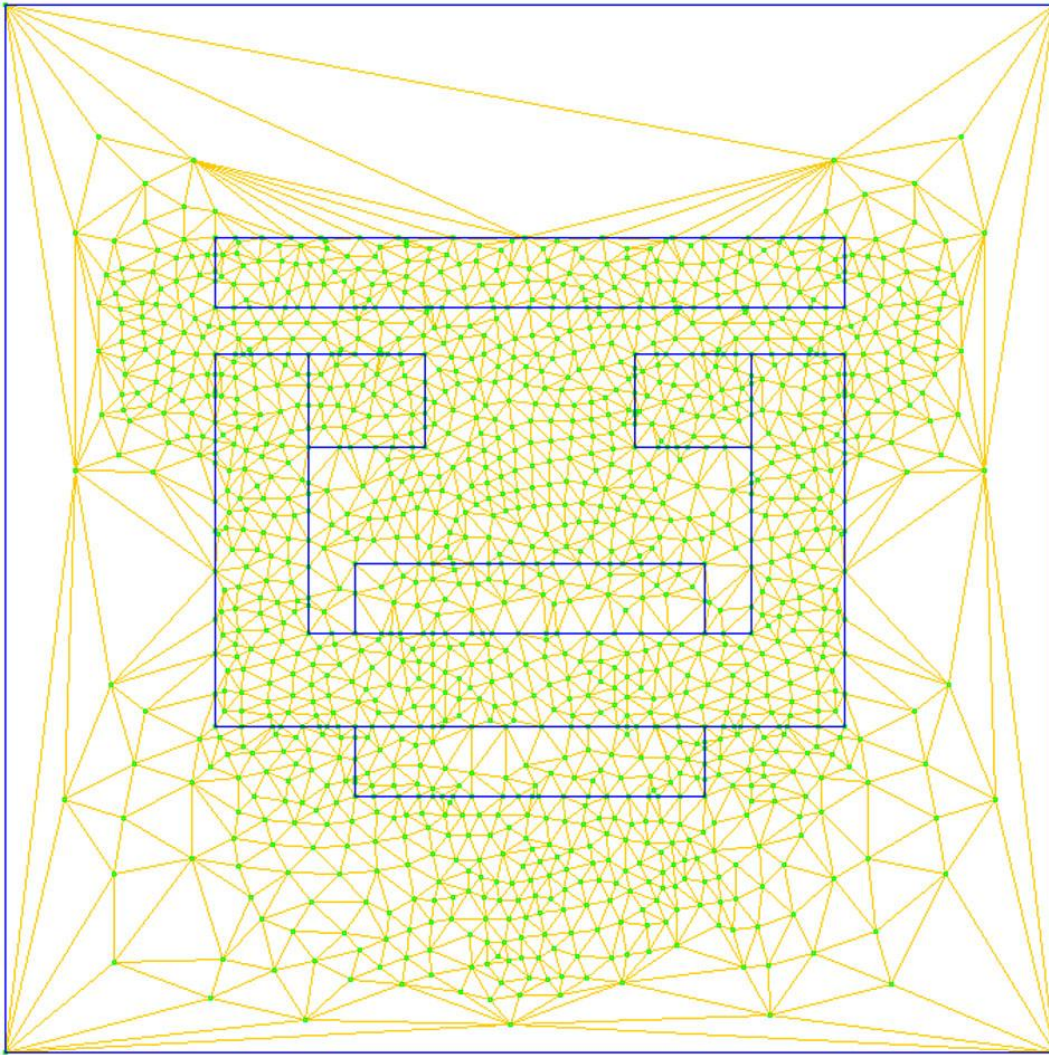


Рис. 6.27.

Наглядно видно, что интенсивность сеточных узлов в разных участках сетки существенно разная, и соответствует густоте эквипотенциальных линий на тех же участках исследуемой области.

Четко соблюдается условие: густота сеточных узлов тем больше, чем сильнее меняется поле.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Дано развернутое математическое описание метода конечных элементов на основе базисных функций на плоскости и в трехмерном пространстве [135, 136, 138, 149].

2. Исследована погрешность аппроксимации трехмерного оператора Лапласа разностным оператором для нерегулярной сетки [144, 166].

3. Предложен и реализован подход к автоматическому построению сетки дискретизации для решения краевых задач методом конечных элементов. Данный подход основан на последовательной композиции или декомпозиции сеточных узлов и элементов в ходе решения краевой задачи в зависимости от поведения получающихся невязок в узлах сетки [145].

4. Дано строгое математическое определение таким применяемым в численных расчетах магнитного поля понятиям, как оптимальная сетка и оптимальный алгоритм композиции сеточных узлов. Для решения полевых задач методом конечных элементов предложен и реализован подход к автоматическому построению сетки дискретизации, аппроксимирующей оптимальную сетку [146].

5. Исследована зависимость сходимости процесса последовательных приближений от геометрических параметров дискретизационной сетки при решении двумерных нелинейных полевых задач методом конечных элементов. Даны оценки критических значений параметров, при превышении которых задача расходится [148].

6. Получены и исследованы геометрические характеристики системы уравнений, возникающей при численном решении трехмерных нелинейных полевых задач методом конечных элементов. Доказано отрицательное влияние на сходимость итерационного процесса наличия в тетраэдрической сетке тупых углов. Дана оценка критического угла, при превышении которого задача расходится [153, 160].

7. Показано, что для автоматизированного нахождения электромагнитного поля методом МКЭ при заданном наборе узлов из всех возможных сеток наилучшей (в смысле скорости сходимости процесса последовательных приближений) является триангуляция Делоне [151, 165].

8. Показано, что для удачно расположенного множества узлов триангуляция Делоне не содержит тупоугольных треугольников и обеспечивает сходимость процесса последовательных приближений к решению нелинейных полевых задач [152].

9. Развита метод построения тетраэдрических сеток Делоне для расчета трехмерных магнитных полей методом конечных элементов. Метод основан на двойственности трехмерных сеток Делоне и многогранных мозаик Вороного. Метод удобен для распараллеливания [137, 139, 142, 143].

10. Рассмотрены параллельные алгоритмы решения нелинейной задачи электромагнитного поля методом конечных элементов. Сравнены декомпозиции с перекрытием и без перекрытия. Показано, что декомпозиция с перекрытием требует меньшего числа итераций и меньшего расчетного времени, чем декомпозиция без перекрытия. Предложена формула для нахождения предпочтительного числа процессоров [140, 159].

11. Развита параллельные алгоритмы построения тетраэдрической сетки для решения нелинейных задач трехмерного электромагнитного поля методом конечных элементов. [154-158].

12. Исследовано поведение вектора магнитной индукции, полученного при численном решении трехмерных полевых задач. Показано, что совпадение нормальных составляющих вектора магнитной индукции на границах элементов имеет место в рамках МКЭ [160, 161].

13. Исследованы расчетные уравнения для решения электромагнитного поля методами МКЭ и МКР в двумерной и трехмерной постановке. Показано, что для прямоугольной сетки расчетные уравнения МКЭ и МКР совпадают [135, 162].

14. Дан сопоставительный анализ последовательного и параллельного методов нахождения трехмерного вектора магнитного потенциала. Показана эффективность распараллеливания процесса решения полевых задач [164].

15. Предложен метод численного расчета электромагнитных полей с использованием алгоритмов принятия решения. Рассматриваемый подход обеспечивает сходимость решения краевых задач и в случае неудачной дискретизации исследуемой среды, когда дискретизационная сетка содержит тупоугольные треугольные элементы с критическими значениями узлов [147, 150].

16. Развита и реализована алгоритм оценивания тетраэдрической расчетной сетки при конечно-элементном моделировании трехмерных краевых задач. Алгоритм эффективен для сравнения разных сеток, а также для обнаружения дефективных сеток, имеющих тупые углы, превышающие критическое значение, и нарушения геометрических требований. Алгоритм основан на оценке частоты появления треугольников и четырехугольников при сечении сетки случайными плоскостями. Развита подход реализован на модельной задаче вычисления

электромагнитного поля. Показана эффективность предложенного алгоритма [141, 163].

17. Исследована задача расчета вектора магнитного потенциала при трехмерном конечно-элементном моделировании нелинейного электромагнитного поля. Сравнены три следующих метода: последовательное нахождение трехмерного вектора магнитного потенциала на одном процессоре; параллельное решение трехмерной полевой задачи на трех процессорах с распараллеливанием процесса решения по трем независимым уравнениям относительно составляющих вектора магнитного потенциала и параллельное решение трехмерной полевой задачи методом конечных элементов на трех процессорах с распараллеливанием процесса решения путем разбиения исследуемой области на три подобласти [164].

18. Рассмотрены параллельные алгоритмы решения нелинейной задачи электромагнитного поля методом конечных элементов. Показано, что декомпозиция с перекрытием требует меньшего числа итераций и меньшего расчетного времени, чем декомпозиция без перекрытия. В модельной задаче при распараллеливании решения на многопроцессорной вычислительной системе кластерной архитектуры получено значительное ускорение решения по сравнению с последовательным счетом.

19. Существует предпочтительное количество процессоров, при превышении которого процесс ускорения решения задачи замедляется. Предложена формула для нахождения предпочтительного числа процессоров в зависимости от конфигурации сетки и параметров многопроцессорной вычислительной системы. Сравнены три следующих метода: последовательное нахождение трехмерного вектора магнитного потенциала на одном процессоре; параллельное решение трехмерной полевой задачи на трех процессорах с распараллеливанием процесса решения по трем независимым уравнениям относительно составляющих вектора магнитного потенциала и параллельное решение трехмерной полевой задачи



методом конечных элементов на трех процессорах с распараллеливанием процесса решения путем разбиения исследуемой области на три подобласти. Показана эффективность распараллеливания процесса решения полевых задач методом конечных элементов по трем составляющим векторного магнитного потенциала.

20. Развiт генетический алгоритм принятия решения на основе предложенного понятия близости особей. Исследованы случаи когда скрещивание близких родственников желателно и когда нежелателно. На примере решения задачи оптимального проектирования синхронного явно-полюсного генератора показана эффективность развитого подхода [147].

В заключении следует отметить, что при развитии указанных методов автор успешно сотрудничал со своими коллегами из Базовой лаборатории моделирования и автоматизированных систем Государственного инженерного университета Армении. Особенно плодотворным было сотрудничество с академиком НАН Армении А.А.Терзяном.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Թերզյան Հ. Ա. Ավտոմատացված նախագծման համակարգերի տեսություն: //Երևան, Լու-Անջելու, Աթենք: 1995: 433 էջ:
- 2 Պարոնիկյան Ա.Ե. Դաշտաին խնդիրների լուծման ավտոմատացված համակարգ: Երևան: 2005: 145 էջ
- 3 Տամմ Ի. Ե., Էլեկտրականության տեսության հիմունքները: Երևան, Հայպետհրատ 1953թ.
- 4 Абрамов М.В., Гамадин М.В., Персова М.Г. О выделении поля при конечно-элементном моделировании нелинейных осесимметричных магнитных полей, Сборник научных трудов НГТУ, 2007 N 1(47) с 93-98
- 5 Акопян А.Э. Об автоматическом построении тетраэдрической сетки при решении полевых задач методом конечных элементов // Вестник-76: Сборник научных и методических статей. – Ереван, 2009. – Т.1, №1.-С. 225-229.
- 6 Алексеевский В.В., Терзян А.А., Фрнджибашян Э.С. К методам моделирования электромагнитных процессов электрических машин // Известия АН Арм.ССР. Сер. ТН. -1978 . - Т. 31, № 4 -С. 14-22.
- 7 Амбарцумян Р.В., Штойян Д., Мекке Й. Введение в стохастическую геометрию (перевод с немецкого Г.С.Сукиасяна) Наука, Москва, 1989.
- 8 Андреева Е.Г., Ковалев В.З. Математическое моделирование электро-технических комплексов: Монография / Под общ. Ред. Ковалева Ю.З, -Омск: Изд-во ОмГТУ, 1999.-172с.
- 9 Аписит В.В., Новик Я.А. Физический смысл расчетных уравнений метода конечных элементов при расчете стационарного двухмерного магнитного поля и их связь с уравнениями Максвелла // Известия АН Латв.ССР. Сер. Физ-тех наук, -1976 . - № 1 -С. 60-66.

- 10 Арфкен Г. Математические методы в физике, АТОМИЗДАТ, Москва 1970г, 712 с.
- 11 Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. –М.:ФИЗМАТЛИТ, 1962,
- 12 Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Электромагнитное поле.-М.: Высш. Шк., 1978. -231с.
- 13 Бинс К., Лауренсон П. Анализ и расчет электрических и магнитных полей: М., «Энергия», 1970, 374 с.
- 14 Боровиков С.Н. Метод построения нерегулярных тетраэдральных расчетных сеток в произвольных трехмерных областях с криволинейными границами  
Диссертация Москва 2005, с 192
- 15 Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ: М.: Наука 1981г. 720 с.
- 16 Буль О.Б. Методы расчета магнитных систем электрических аппаратов. Программа ANSYS. М.: Издательство “Академия” 2006. 288 с.
- 17 Вержбицкий В. М. Основы численных методов –М.: «Высшая школа» 2002 - 713с
- 18 Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Приближенные методы математической физики Москва МГТУ им. Н.Э. Баумана 2001: с. 689
- 19 Вишняков С.В., Гордюхина Н.М., Федорова Е.М. Расчет электромагнитных полей с помощью программного комплекса ANSYS, Учебное пособие издательство МЭИ 2003г, с98
- 20 Ворожцов А.С. Формирование электромагнитных полей особо сложной конфигурации в циклотронах и детекторах частиц. Объединенный институт ядерных исследований, Автореферат, Дубна 2007, с25
- 21 Галанин М.П., Щеглов И.А. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: Итерационные методы. М., 2006. 32 с. (Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, №9).

- 22 Галанин М.П., Щеглов И.А. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: прямые методы. М., 2006. 32 с. (Препринт ИПМ1 им. М.В. Келдыша РАН, № 10).
- 23 Галлагер Р., Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. -428 с.
- 24 Гамадин М.В., Персова М.Г. О расчете трехмерных нелинейных магнитных полей в электрических машинах, Научный вестник НГТУ, 2009, N2(35) , С149-156
- 25 Деклу Ж. Метод конечных элементов. – М., «Мир», 1976, 96с.
- 26 Делоне Б.Н. О пустоте сферы // Изв. АН СССР. ОМЭН. - 1934- №4. - С.793–800.
- 27 Демирчян К.С., Ефимов Ю.Н., Сапожников Л.Б., Солнышкин Н.И. Реализация метода конечных элементов на ЭВМ для расчета двумерных электрических и магнитных полей // Изв. АН СССР, Энергетика и Транспорт, 1974, №1.
- 28 Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л.: Теоретические основы электротехники, -4-е изд.. СПб.: Питер, 2003.-377 с.
- 29 Денисенко В.В. Применение энергетических методов при построении векторных полей. Вычислительные технологии Т-9, N4, 2004, с 42-56
- 30 Дубровин А.Н. Расчет трехмерных магнитных полей, Магнитное общество – МООСМ, 2004г Т5-N1с3-4
- 31 Дудов Р.А. Методы моделирования процессов распространения радиоволн урбанизированной среде: Автореферат Москва 2010
- 32 Жидков Е.П., Юлдашев О.И., Юлдашев М.Б. О контроле точности вычислений при моделировании пространственных магнитных полей. Вестник РУДН, Серия Прикладная и компьютерная математика. Т.4. N1, 2005г. стр. 93-101.

- 33 Жидков Е.П., Юлдашева М.Б., Юлдашев О.И. Векторные алгоритмы для решения трехмерных задач магнитостатики, Математическое моделирование, Т6, N9, 1994 с99-116
- 34 Звагельский М.Ю., Проскурников А.В., Романовский Ю.Р. Регулярные триангуляции и точки Штейнера, Алгебра и анализ Т-16, вып.-4, 2004 с 88-113
- 35 Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. –М.: Мир, 1975.
- 36 Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. –М.: Мир, 1986. -318с.
- 37 Иваненко С.А. Адаптивные криволинейные сетки в методе конечных элементов, Ж. вычисл. матем. и мат. физики, т.35, н.11, 1995, с.1334-1355.
- 38 Игнатъев А.Н. Решение задач магнитостатики с помощью скалярных потенциалов в конструкциях, содержащих шихтованные материалы: //Сборник научных трудов НГТУ. -2007г. N4(50). с. 13-20
- 39 Ильин В.П. Структуры сеточных алгоритмов и их отображение на архитектуру МВС. Труды Всероссийской суперкомпьютерной конференции – М.: Изд-во МГУ,2009,с.150-157
- 40 Ильин В.П. Проблемы высокопроизводительных технологий решения больших разреженных СЛАУ. Вычислительные методы и программирование. Т.10, № 1, 2009, с.130-136.
- 41 Ильин В. П. Численные методы решения задач электрофизики. – М.: Наука, 1985.- 336 с.
- 42 Каропова Е.Д., Шайдуров В.В., Вдовенко М.С. Параллельные реализации метода конечных элементов для краевой задачи для уравнений мелкой воды // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». — 2009. — Вып. 3. — № 17 (150). — С. 73-85.

- 43 Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений.- М:ИЛ, 1953
- 44 Коннор Дж., Бреббиа К. Метод конечных элементов в механике жидкости. – Л.: «Судостроение», 1979
- 45 Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров: Наука Москва 1973: 831 с.
- 46 Кулон Ж.-Л., Сабоннадьер Ж.-К. САПР в электротехнике. – М.: Мир, 1988. – 208 с.
- 47 Курант Р., Гильберт Д. Методы Математической физики. Т1. ГТТИ.-М.: 1933.
- 48 Лисейкин В. Д. Обзор методов построения адаптивных сеток // Ж. Вычисл. матем. и мат. физики – 1996, Т. 36, № 1, с. 3-41.
- 49 Макаров А.М., Лунева Л.А. Основы электромагнетизма, // электронный учебник МГТУ им Н.Э. Баумана, 2002г, Т-3.
- 50 Максвелл Дж. К. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. Гос. Изд. Техн.-Теор. Лит.-М.:1952
- 51 Милн В.Э. Численное решение дифференциальных уравнений. М. Изд-во иностр. лит., 1955, 291с.
- 52 Митчелл Э., Уейт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. –М.: Мир, 1981.
- 53 Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. –М.,1970, 512.
- 54 Михлин С.Г. Курс математической физики. 2-е изд, -СПБ.: Издательство «Лань», 2002.-576с.
- 55 Нейман Л.Р., Калантаров П.Л. Теоретические основы электротехники госэнергоиздат Т. 3, 1959г. 231 с.
- 56 Нечаева О.В. Особенности использования смешанного векторного метода конечных элементов для моделирования электромагнитных полей во временной области, Сборник научных трудов НГТУ, -2006 N4(46), с31-36

- 57 Новик Я.А. Вариационная формулировка решения задачи расчета трехмерного стационарного магнитного поля с учетом нелинейных свойств среды // Изв. АН Латв.ССР. Сер. Физ. и техн. наук.- 1974. №4. С.79-89.
- 58 Новик Я.А. Численный расчет магнитного поля методом конечных элементов в электрических машинах с учетом насыщения стали // Известия АН Латв.ССР. Сер. Физ-тех наук, -1974 . № 5 -С. 96-104.
- 59 Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. –М., Физматгиз, 1963г., 432с.
- 60 Персова М.Г., Петров Р.В. Оценка влияния трехмерной геометрии асинхронного двигателя на значение магнитного потока. Сборник научных трудов НГТУ. – 2004. –N1 с79-84
- 61 Персова М.Г., Соловейчик Ю. Г., Темлякова З.С., Абрамов М.В., Вагин Д.В., Гамадин М.В. Применение метода конечных элементов для моделирования трехмерных нелинейных магнитных полей в электротехнических устройствах, Электротехника. - 2011. - № 06. - С. 14-20
- 62 Персова М.Г. Численное моделирование электромагнитных процессов в электродвигателях с учетом движения ротора. Электричество. - 2007. - № 8, с.34-58.
- 63 Растрингин Л. А., Рипа К. К., Тарасенко Г. С. Адаптация случайного поиска. „Зинатне“, Рига, 1978, 243с.
- 64 Рымша В.В., Радимов И.Н., Меркулов И.В. Математическое моделирование индукторных линейных двигателей постоянного тока, ААЭКС, №1(15), 2005, Моделирование объектов и систем управления с 80-84
- 65 Сабоннадьер Ж.-К., Кулон Ж.-Л. Метод конечных элементов и САПР. – М.: Мир, 1989. – 190 с.
- 66 Самарский А.А. Теория разностных схем. –М.: Наука: гл. ред. Физ.-мат. Лит., 1983. -616с.

- 67 Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. –М.: Мир, 1979.
- 68 Сивухин Д.В. Общий курс физики. Учеб. пособие: Для вузов. В 5 т. Т. III. Электричество. — 4-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2004. - 656 с.
- 69 Сильвестер П., Феррари Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. – М.: Мир, 1986.
- 70 Скворцов А.В. Обзор алгоритмов построения триангуляции Делоне // Вычислительные методы и программирование, 2002, №3, с. 14-39.
- 71 Скворцов А.В. Алгоритмы построения триангуляции с ограничениями // Вычислительные методы и программирование, 2002, №3, с. 82-92
- 72 Скворцов А.В. Триангуляция Делоне и её применение. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. – 128 с.
- 73 Соболев С.Л. Уравнения математической физики. Гос. Изд. Техн. –Теор. Лит.- М.:1954.
- 74 Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. –М.: Мир, 1977.
- 75 Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. –М.: Мир 1980.
- 76 Терзян А.А. Методы и средства автоматизированного проектирования электрических машин автономной энергетики // Электричество. -1982. – №4 - С. 26-32.
- 77 Терзян А.А. Автоматизированное проектирование электрических машин, Электроатомиздат, 1983г, С. 255.
- 78 Терзян А.А. Автоматизированная система решения полевых задач в электрических машинах // Электричество. -1984. – №10 - С. 11-17.
- 79 Терзян А.А. Алгоритмы принятия решений в электромеханике. Известия вузов. Электромеханика, 2009, №2, с.18-27.



- 80 Терзян А.А., Григорян А.Г. К определению магнитных полей электрических машин с учетом нелинейных свойств ферромагнитной среды. Труды ВНИИ Комплексного электрооборудования, 1976, т. 8, с. 79-94.
- 81 Терзян А.А., Джавадян А.Д., Рымша В.В., Бородин Е.И. Трехмерное магнитное поле линейного индукторного двигателя постоянного тока. Электричество. -1991- №11, с.42-47.
- 82 Терзян А.А., Рымша В.В. Оптимальное проектирование линейных индукторных двигателей постоянного тока // Известия вузов. Электромеханика. -1988- №3, с.42-50.
- 83 Терзян А.А., Саркисян Г.Г. Генетические алгоритмы принятия решения. Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2005 - Т. 58, № 1-С. 147-153.
- 84 Терзян А.А., Саркисян Г.Г. Параллельные алгоритмы принятия решения. Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2006 - Т. 59, № 1-С. 202-209.
- 85 Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Балян А.Е. Автоматическая адаптация в системе принятия решений // 4-th Intern. Conf. Juzel-97, - 1997. Vrnjacka Banja, Yugoslavia.
- 86 Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Дашян Х.А. К адаптации алгоритмов случайного поиска // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2010. - Т. 63, № 2. – С. 192-199.
- 87 Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Казарян Д.Г., Григорян А.Е. К автоматической адаптации в задачах принятия решения // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2003. - Т. 56, №3. – С. 468-475.
- 88 Терзян А.А., Оганнисян Л.Т., Акопян А.Э., Геворгян А.А. К созданию САПР электромеханических систем для работы в распределенной вычислительной среде // Вестник ГИУА. Сер. ИТЭР. 2012 . - Т. 15, № 1-с. 42-50.

- 89 Терзян А.А., Геворгян А.А., Акопян А.Э., Оганнисян Л.Т. К решению краевых задач на многопроцессорных вычислительных системах // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2011 . - Т. 64, № 3-С. 305-311.
- 90 Тихомиров Ю. Программирование трехмерной графики// ВНУ, Санкт-Петербург, 1998. с.256
- 91 Ткаченко Л.М. Пакет программ MULTIC для расчета магнитных полей произвольной конфигурации, Препринт 98-28 ИФВЭ 1998 с.50
- 92 Томилин А.К. Основы обобщенной электродинамики. – 2009. - 129 с.: ил
- 93 Тоннела М.А. Основы электромагнетизма и теории относительности. –М.: ИЛ, 1962.
- 94 Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. –М.:ФИЗМАТЛИТ, 2004-400с.
- 95 Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах. М.Наука, 1968, 400с.
- 96 Шайдуров В.В. Многосеточные методы конечных элементов. –М.: Наука 1989.
- 97 Шумилов Ю.А. Анализ магнитного поля в воздушном зазоре асинхронной машины методом конечных элементов, Институт электродинамики АН УССР, 1976.
- 98 Шурина Э.П., Гельбер М.А. О векторном методе конечных элементов для решения задач электромагнетизма, Сибирский журнал вычислительной математики Т-7, N1, 2004, с79-95
- 99 Эйджел Э. Интерактивная компьютерная графика. Вводный курс на базе чOpenGL, 2 изд.: Пер. с англ.-М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. с592.:
- 100 ANSYS Parametric Design Language Guide, Release 12.0 April 2009 p90
- 101 Bern M., Eppstein D. Mesh Generation and Optimal Triangulation // Computing in Euclidean Geometry, World Scientific Publishing Co., p.p. 23-90, 1995

- 102 Biro O., Preis K., Richter K.R. On the use of the magnetic vector potential in the nodal and edge finite element analysis of 3D magnetostatic problems //IEEE. Trans. Magn. 1996. - vol. 32. - P. 651 -654.
- 103 Bobenko A. I., Springborn B. A. A discrete Laplace-Beltrami operator for simplicial surfaces, Discrete Comput. Geom., vol. 38(4), 740-756, 2007.
- 104 Clemens M., Weiland T. Discrete electromagnetism with the finite integration technique: Progress In Electromagnetics Research: PIER 32: 2001: p 65-87
- 105 Cook R. D., Malkus D. S., Plesha M. E. Concepts and Applications of Finite Element Analysis. Third Edition. JOHN WILEY & SONS, New York, 1989.
- 106 Demerdash N.A., Nehl T.W., Mohammed O.A., Fouad F.A. Experimental verification and application of the three dimensional finite element magnetic vector potential method in electrical apparatus: IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-100 N.-8 August 1981, p. 4112-4122
- 107 Demerdash N.A., Nehl T.W., Fouad F.A., Mohammed O.A. Three dimensional finite element vector potential formulation of magnetic fields in electrical apparatus: IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-100 N.-8 August 1981, p. 4104-4111
- 108 Du Q., Wang D. Constrained boundary recovery for three dimensional Delaunay triangulations. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2004, 61:1471–1500.
- 109 Dubrovin A.N. User's guide MERMAID: Magnet design in two and three dimensions, SIM Limited, Novosibirsk department. Russia, 1994, p. 3-60
- 110 Funieru M. Simulation of Electromechanical actuators using the finite integration technique: Dissertation Darmstadt 2007: p 115.
- 111 Glickenstein D. A monotonicity property for weighted Delaunay triangulations, Discrete Comput. Geom., vol. 38(4), 651-664, 2007.

- 112 Jiang X., Chen Q. Three dimensional finite element vector potential formulation of magnetostatic field with non-uniform permanent magnet source distribution // *Electrical Engineering*: vol. 79 issue 1 January 1996. p. 23 – 30
- 113 Joe B. Construction Of Three-Dimensional Delaunay Triangulations Using Local Transformations // *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 8, p.p. 123-142, 1991.
- 114 Lo S. H. Volume discretization into tetrahedra - II. 3D triangulation by advancing front approach // *Computers and Structures*. 1991. Vol. 39, N. 5.-Pp. 501-511.
- 115 Lohner R. Progress in grid generation via the advancing front technique // *Engineering with Computers*. 1996. Vol. 12, Pp. 186-210.
- 116 Mücke E. P., Isaac Saias, Binhai Zhu, Fast randomized point location without preprocessing in two- and three-dimensional Delaunay triangulations, *Computational Geometry Theory & Applications* 1999 N12 p 6 3–83
- 117 Owen S.J. A Survey of Unstructured Mesh Generation Technology // *Proceedings of 7th International Meshing Roundtable*, p.p. 239-269, Dearborn, MI, 1998.
- 118 Parthasarathy V.N., Graichen C.M., Hathaway A.F. A Comparison of Tetrahedron Quality Measures // *Finite Elements in Analysis and Design*, Elsevier, №. 15, p.p. 255-261, 1993
- 119 Radovitzky R., Ortiz M. Tetrahedral mesh generation based on node insertion in crystallattice arrangements and advancing-front-Delaunay triangulation/ *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 187 (2000) 543-569
- 120 Ruppert J. A. Delaunay Refinement Algorithm for Quality 2-Dimensional Mesh Generation. NASA Ames Research Center // *Submission to Journal of Algorithms*, 1994 p.46
- 121 Sankoff D., Sundaram G., Kececioglu J. (1996) Steiner points in the space of genome rearrangements. *International Journal of the Foundations of Computer Science* 7:1, 1996 pp1–9.

- 122 Shewchuk J.R., General-Dimensional Constrained Delaunay and Constrained Regular Triangulations, I: Combinatorial Properties, *Discrete & Computational Geometry*, v.39 n.1, p.580-637, March 2008
- 123 Silvester P., Chari M. Finite element solution of saturable magnetic field problems. *IEEE Trans.*, PAS-89, 1970, v. 7, p. 1642=1648.
- 124 Silvester P., Rafinejad P. Curvilinear finite elements for two-dimensional saturable magnetic fields. *IEEE Trans.*, PAS-93, 1974, v. 6, p. 1861=1870.
- 125 Shi H., Gärtner K. Meshing piecewise linear complexes by constrained Delaunay tetrahedralizations, in: *Proceedings of the 14th International Meshing Roundtable*, B.W. Hanks, ed., Springer, Berlin/Heidelberg, 2005, pp. 147-163.
- 126 Simkin J., Trowbridge C.W. Three-dimensional Nonlinear Electromagnetic Field Computations, Using Scalar Potentials // *IEEE PROC.* – 1980. – V 127. – Pt. B. – No. 6. – 1980. – P. 368–374.
- 127 Stoyan D., Mecke J. *Stochastische Geometrie, Einfuehrung*, Akademie-Verlag, Berlin, 1978.
- 128 Terzian H., *Optimal Dicision-Making Adaptive System*. 42 Internationales Wissenschaftliches Kolloquium, Ilmenau, 1997, pp.162-164.
- 129 Terzyan H., *Simulation of Electromechanical Systems. Numerical Methods and Solutions*, VDM Verlag, 2009, 280p.
- 130 Terzyan H.A., Tovmasyan N.E. Numerical methods of determining minima of a class of nonlinear functionals // *Theory of Functions and Applications. Collections of works dedicated to the memory of M.M.Djrbashian. -1995- Yerevan: Luoy.*
- 131 Voronoi G. Nouvelles applications des parameters continues à la therie des formes quadratiques. Deuxième Mémoire: Recherches sur les parralléloèddres primitifs // *J. reine angew. Math.* 1908. N. 134. p. 198–287.
- 132 Watson D.F. Computing the Delaunay Tessellation with Application to Voronoi Polytopes // *The Computer Journal*, Vol. 24(2), p. 167-172, 1981.

- 133 Zienkiewicz O. C., Cheyng Y. Finite elements in the solution of field problems. Engineer, 1965, v. 220, no. 24, p. 507-510.
- 134 Zienkiewicz O. C., Taylor R.L. The Finite Element Method. Vol. 1: The Basis. Fifth Edition, Butterworth-Heinemann, 2000.

Результаты исследований опубликованы и докладывались

- 135 Терзян А.А., Сукиасян Г.С. К определению магнитных полей численными методами // Известия АН СССР, Энергетика и Транспорт. - 1977. - №5. – С. 115-121.
- 136 Терзян А.А., Сукиасян Г.С. К решению нелинейных полевых задач методом конечных элементов // Известия АН Латв.ССР. Сер. Физ.тех наук. - 1977. - №6. – С. 104-114.
- 137 Сукиасян Г.С. О случайных треугольниках на плоскости // Доклады АН Арм.ССР. - 1978. - Т. 66, №3. – С. 150-155.
- 138 Терзян А.А., Сукиасян Г.С. Метод конечных элементов с переменными базисными функциями // Известия АН Латв.ССР. Сер. Физ.тех наук. - 1979. - №5. – С. 93-98.
- 139 Сукиасян Г.С. Комбинаторные свойства случайных треугольников // В кн. Комбинаторные принципы в стохастической геометрии. – 1980.- изд.АН Арм.ССР, Ереван. - С. 57-80.
- 140 Терзян А.А., Сукиасян Г.С. Параллельный алгоритм решения нелинейных полевых задач // Тезисы докл. Конф. Проблемы нелинейной электро-техники. – 1981. С. 57-80.
- 141 Сукиасян Г.С. О случайных сечениях многогранников // Доклады АН СССР. - 1982. - Т. 263, №4. – С. 809-812.
- 142 Sukiasian H.S. Two results on triangle shapes // В кн. Stochastic Geometry, Statistics, Stereology. -1984 – Teubner-Texte z.Math. b. 65, pp. 210-221.

- 143 Сукиасян Г.С. О характеристике случайных решеток // Известия АН Арм.ССР. Сер. Математика. - 1985. - Т. 20, №4. – С. 299-306.
- 144 Терзян А.А., Сукиасян Г.С. К оценке погрешности численного решения трехмерного уравнения Лапласа с нерегулярной сеткой // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2000. - Т. 53, №3. – С. 359-363.
- 145 Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Пароникян А.Е. О расчете магнитных полей методом конечных элементов с динамической композицией элементов дискретизации // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2005. - Т. 58, №2. – С. 332-339.
- 146 Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Пароникян А.Е. Об оптимизации сетки для расчета магнитных полей методом конечных элементов // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2005. - Т. 58, №3. – С. 570-578.
- 147 Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Саркисян Г.А. Генетический алгоритм принятия решения с использованием понятия близости особей // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2006. - Т. 59, № 2. – С. 399-405.
- 148 Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Пароникян А.Е. Об углах треугольной сетки для расчета магнитных полей методом конечных элементов // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2007. - Т. 60, № 3. – С. 523-532.
- 149 Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Акопян А.Э. К расчету трехмерных магнитных полей методом конечных элементов // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2008. - Т. 61, № 2. – С. 305-317.
- 150 Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Хачатурян В.А. Применение алгоритмов принятия решения в задачах электромагнитного поля // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2009. - Т. 62, № 3. – С. 337-342.
- 151 Сукиасян Г.С. Триангуляция Делоне в уравнениях математической физики в среде // Кр.Сообщения 3-го Рос-Арм.Совещания по мат.физике, 2010, С. 142-145.

- 152 Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Акопян А.Э., Геворгян А. А. К построению оптимальной расчетной сетки для решения полевых задач методом конечных элементов // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2010. - Т. 63, № 3-С. 319-327.
- 153 Терзян А.А., Сукиасян Г.С. О численных методах решения задач электромагнитного поля // Известия Вузов, Электромеханика, 2010, № 2, С. 222-234.
- 154 Gevorkyan A., Abajyan H., Sukiasyan H. A new parallel algorithm for simulation of spin-glasses in external fields // Conf. of Microelectronics, Croatiya, 2011, pp. 191-196.
- 155 Gevorkyan A.S., Abajyan H., Sukiasyan H. Statistical Properties of Ideal Ensemble of Disordered 1D Spatial Spin-Chains // Mathematical problems of computer sciences, 2011, vol. 35, pp.86-98.
- 156 Gevorkyan A., Abajyan H., Sukiasyan H. A new parallel algorithm for simulation of spin-glass systems on scales of space-time periods of an external fields // Journal of Modern Physics, 2011, vol. 2, № 6, pp. 488-497.
- 157 Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Акопян А.Э. К построению тетраэдрической сетки на многопроцессорных системах для решения задач трехмерного электромагнитного поля методом конечных элементов // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2012. - Т. 65, № 1. - С.83-93.
- 158 Терзян А.А., Акопян А.Э., Сукиасян Г.С., Оганнисян Л.Т. Параллельное построение тетраэдрической сетки при конечно-элементном моделировании трехмерных электромагнитных полей // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2012. - Т. 65, № 2. - С.213-218.
- 159 Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Геворгян А. А. Распараллеливание краевых задач на многопроцессорных вычислительных системах // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2012. - Т. 65, № 3. - с.313-320.



- 160 Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Акопян А.Э. О свойствах векторных характеристик при конечно-элементном моделировании трехмерного магнитного поля // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2012. - Т. 65, № 4. - с.406-414.
- 161 Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Акопян А.Э., Геворгян А.А. О свойствах дивергенции вектора магнитного потенциала при трехмерном конечно-элементном моделировании нелинейного магнитного поля // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2013. - Т. 66, № 2. - С.177-181.
- 162 Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Акопян А.Э. К решению нелинейного магнитного поля при трехмерном конечно-элементном и конечно-разностном моделировании // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2013. - Т. 66, № 3. - С.258-265.
- 163 Сукиасян Г.С. Об оценке качества тетраэдрической сетки при решении трехмерных краевых задач // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2013. - Т. 66, № 4. - С.384-388.
- 164 Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Акопян А.Э., Геворгян А.А., Егиазарян Н.А. Сопоставительный анализ методов расчета вектора магнитного потенциала при трехмерном конечно-элементном моделировании магнитного поля // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2014. - Т. 67, № 2. - С.213-219.
- 165 Сукиасян Г.С. Экстремальное свойство триангуляции Делоне и его применение при решении полевых задач // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2014. - Т. 67, № 4. - С.452-457.
- 166 Сукиасян Г., Терзян А. О погрешности трехточечной аппроксимации оператора Лапласа // Известия НАН РА. Сер. ТН. - 2015. - Т. 68, № 3. - С.203-208.