

# ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

## Խաչատրյան Ներսես Արմենի

### Գրաֆների միջակայքային տոտալ ներկումներ

#### Ատենախոսություն

01.01.09 <<Մաթեմատիկական կիրեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն>> մասնագիտությամբ

Ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման համար

Գիտական ղեկավար՝

Ֆ.մ. գիտությունների թեկնածու

Ռ. Ռ. Քամայան

Երևան - 2016

# Բովանդակություն

Ներածություն.....	3
<b>Գլուխ 1 Ընդհանուր բնույթի արդյունքներ: Հիմնական խնդրի ամբողջական լուծումը գրաֆների որոշ դասերի համար.....</b>	<b>8</b>
1.1 Որոշ անհավասարություններ $T$ դասի գրաֆների համար.....	8
1.2 Լրիվ բազմակողմանի գրաֆների միջակայքային տոտալ ներկումներ .....	18
1.3 $n$ – չափանի խորանարդի միջակայքային տոտալ ներկումներ.....	31
1.4 Բլոկների գրաֆների միջակայքային տոտալ ներկումներ.....	35
1.5 Հովհարների և անիվների միջակայքային տոտալ ներկումներ.....	40
<b>Գլուխ 2 Գրաֆների դեկարտյան արտադրյալների միջակայքային տոտալ ներկումներ.....</b>	<b>54</b>
2.1 Համասեռ գրաֆների դեկարտյան արտադրյալների միջակայքային տոտալ ներկումներ.....	54
2.2 Հարթ դեկարտյան արտադրյալների միջակայքային տոտալ ներկումներ.....	67
<b>Գլուխ 3 Միջակայքային տոտալ ներկում չունեցող գրաֆներ .....</b>	<b>92</b>
3.1 Միջակայքային տոտալ ներկում չունեցող գրաֆներ՝ կառուցված կարճագույն շղթաների հիման վրա.....	92
3.2 Միջակայքային տոտալ ներկում չունեցող գրաֆներ՝ կառուցված ծառերի հիման վրա.....	95
3.3 Միջակայքային տոտալ ներկում չունեցող գրաֆներ՝ կառուցված ենթատրոհումների հիման վրա.....	97
<b>Եզրակացություն .....</b>	<b>99</b>
<b>Գրականություն .....</b>	<b>102</b>

## Ներածություն

**Թեմայի արդիականությունը:** Ներկումների խնդիրները հանդիսանում են դիսկրետ մաթեմատիկայի հայտնի և արդի հետազոտման թեմաներից մեկը: Այդ խնդիրների կարևորությունը պայմանավորված է առկա սերտ կապով մի շարք կարևոր կիրառական խնդիրների հետ: Մասնավորապես, նշանակալի փոխադարձ կապ կա կարգացուցակների տեսության խնդիրների և գրաֆների ներկումների խնդիրների միջև: Օրինակ, քննաշրջանի օպտիմալ կարգացուցակ կառուցելու խնդիրը բերվում է գրաֆի քրոմատիկ թվի որոշմանը: Գրաֆի քրոմատիկ դասը գտնելու խնդիրն բերվում է սպորտային մրցումների կարգացուցակ կազմելու խնդիրը [20, 40, 44 - 46], իսկ երկկողմանի գրաֆների հատուկ տիպի կողային ներկումների խնդիրները բազմաթիվ աշխատանքներում ծառայել են որպես ուսումնական դասացուցակների գոյության, կառուցման և թվային պարամետրերի գնահատման հարցերի հետազոտման մոդելներ [1, 2, 13, 14, 43, 47]:

Գրաֆների տոտալ ներկումները ներմուծվել են Վ. Վիզինգի [41] և Մ. Բեհզադի [5] կողմից 60 - ական թվականներին: Գրաֆի տոտալ ներկումն այդ գրաֆի գագաթների և կողերի ներկում է, որի դեպքում հարևան գագաթները, կողերը, ինչպես նաև կից գագաթները և կողերը ներկվում են տարբեր գույներով:  $G$  գրաֆի  $\chi''(G)$  տոտալ քրոմատիկ թիվը գույների այն նվազագույն քանակն է, որն անհրաժեշտ է  $G$  գրաֆի տոտալ ներկման համար: Նշենք նաև, որ [5, 41] - ում առաջարկվել է հիպոթեզ, համաձայն որի  $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$  բոլոր գրաֆների համար, որտեղ  $\Delta(G)$  - ն  $G$  գրաֆի գագաթների առավելագույն աստիճանն է: Այս հիպոթեզն այժմ հայտնի է որպես Տոտալ Ներկումների Հիպոթեզ [16]: Հայտնի է նաև, որ այն ճիշտ է լրիվ գրաֆների [6], երկկողմանի գրաֆների, լրիվ  $k$ -կողմանի գրաֆների [12, 36], տրոհվող գրաֆների [11], հարթ  $G$  գրաֆների, որոնց  $\Delta(G) \neq 6$  [8, 9, 19, 37, 42, 50],  $G$  գրաֆների, որոնց  $\delta(G) \geq \frac{3}{4}|V(G)|$  [15], որտեղ  $\delta(G)$  - ն  $G$  գրաֆի գագաթների նվազագույն աստիճանն է,

և գրաֆների, որոնց առավելագույն աստիճանը բավականին փոքր է: Մ. Ռոզենֆելդի [36] և Ն. Վիժայադիտյայի [39] կողմից ապացուցվել է, որ  $G$  գրաֆի տոտալ քրոմատիկ թիվը չի գերազանցում 5 - ի, երբ  $\Delta(G)=3$ : Ա. Կոստոչկան [17, 18] աշխատանքներում ապացուցել է, որ  $G$  գրաֆի տոտալ քրոմատիկ թիվը չի գերազանցում 6 - ի (7 - ի), երբ  $\Delta(G)=4$  ( $\Delta(G)=5$ ): Գրաֆների տոտալ քրոմատիկ թվի ընդհանուր գնահատականը տրվել է Մոլլոյի և Ռիդի [22] կողմից, որոնք ապացուցել են, որ  $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 10^{26}$  բոլոր գրաֆների համար: Նշենք նաև, որ տոտալ քրոմատիկ թվի ճշգրիտ արժեքը հայտնի է միայն պարզ շղթաների, պարզ ցիկլերի, լրիվ և լրիվ երկկողմանի,  $n$ -չափանի խորանարդի [6, 49], լրիվ  $k$ -կողմանի գրաֆների համար, որոնց գագաթների քանակը կենտ է [12] և հարթ  $G$  գրաֆների համար, որոնց  $\Delta(G) \geq 9$  [8, 9, 19, 37, 42, 50]:

Դասացուցակների տեսության մեջ կարևոր տեղ են զբաղեցնում պատուհան չունեցող դասացուցակների գոյության և կառուցման խնդիրները: Նշված խնդիրների հետազոտման նպատակով Ա. Ս. Հասրաթյանի և Ռ. Ռ. Քամայանի կողմից ներմուծվել է միջակայքային կողային ներկման սահմանումը [1]: Սակայն, պետք է նշել, որ նույնիսկ երկկողմանի գրաֆների դեպքում այդ ներկման գոյության խնդիրը հանդիսանում է  $NP$ -լրիվ խնդիր: Նշված փաստը, ինչպես նաև իրական խնդիրներում առաջացող սահմանափակումները կարևոր են դարձնում միջակայքային կողային ներկումներին «մոտ» ներկումների ուսումնասիրությունը: Վերոնշյալ կողային ներկումների հետազոտման նպատակով Պ. Ա. Պետրոսյանի և Հ. Զ. Առաքելյանի կողմից ներմուծվել է միջակայքային  $(t,1)$ -ներկման հասկացությունը [26, 27], որով, ըստ էության, ներկայացվում է ոչ ավել քան մեկ պատուհան ունեցող միջակայքային կողային ներկման գաղափարը: Միջակայքային կողային ներկումներին «մոտ» ներկումների մեկ այլ տարբերակ են հանդիսանում գրաֆների միջակայքային տոտալ ներկումները [23]: Այս ներկումները սինթեզում են միջակայքային կողային և գրաֆների տոտալ ներկումները: [23, 24, 35] - ում Պ. Ա. Պետրոսյանի կողմից հետազոտվել են որոշ գրաֆների միջակայքային տոտալ ներկումների գոյության և կառուցման հարցեր: [32, 33] - ում հետազոտվել են ծառերի միջակայքային տոտալ ներկումները, իսկ [33, 34] - ում ցույց է տրվել, որ համասեռ, ենթախորանարդ,  $(2,b)$ -երկհամասեռ, երկակի

ուռուցիկ և որոշ  $\Delta(G) \leq 4$  աստիճան ունեցող երկկողմանի գրաֆներն ունեն միջակայքային տոտալ ներկում: Նշենք նաև, որ ոչ բոլոր գրաֆներն ունեն միջակայքային տոտալ ներկում [33]: Այդպիսի նվազագույն հայտնի օրինակը կառուցվել է [39] - ում: Սակայն, վերոնշյալ արդյունքները հիմնականում վերաբերվում են գրաֆների միջակայքային տոտալ ներկումների գոյությանը: Ընդհանուր առմամբ, քիչ են հետազոտված գրաֆների միջակայքային տոտալ ներկումների կառուցման և պարամետրերի գնահատման խնդիրները:

**Աշխատանքի հիմնական նպատակը և նրանում դիտարկված խնդիրները:**

Աշխատանքում դիտարկվել են գրաֆների միջակայքային տոտալ ներկումների գոյության, կառուցման և թվային պարամետրերի գնահատման խնդիրներ: Աշխատանքի հիմնական նպատակն է հետազոտել վերոնշյալ խնդիրները գրաֆների տարբեր դասերի համար:

**Հետազոտության օբյեկտները:** Աշխատանքում հետազոտության օբյեկտներ են հանդիսանում գրաֆների տարբեր դասեր, միջակայքային տոտալ ներկման մեջ մասնակցող գույների քանակներ և այդպիսի ներկում չունեցող գրաֆներ:

**Հետազոտության մեթոդները:** Հետազոտությունն իրականացված է դիսկրետ մաթեմատիկայի, գրաֆների տեսության և կոմբինատոր օպտիմիզացիայի մեթոդների օգնությամբ:

**Գիտական նորույթը:** Առաջին անգամ գրաֆների ներկումներին վերաբերվող հետազոտությունների մեջ ուսումնասիրվել են ներկումներ, որոնք «մոտ» են միջակայքային կողային ներկումներին և միևնույն ժամանակ հանդիսանում են տոտալ ներկումներ: Աշխատանքում ստացվել են այդպիսի ներկումների գոյության, կառուցման

և թվային պարամետրերի գնահատման հետ առնչվող մի շարք արդյունքներ: Ներկայացվող հետազոտության օբյեկտների ուղղությամբ ստացված բոլոր արդյունքները նոր են:

**Ստացված արդյունքների գործնական կիրառությունը:** Աշխատանքում օգտագործված հետազոտության մեթոդները և նրանում ստացված արդյունքներն ունեն ոչ միայն տեսական կարևոր նշանակություն գրաֆների քրոմատիկ հատկությունների հետազոտման համար, այլև կարող են ունենալ պրակտիկ կիրառություն: Մասնավորապես, ստացված արդյունքները կարող են օգտակար լինել տարբեր բնույթի կոմպակտ կարգացուցակների կառուցման համար:

**Պաշտպանության ներկայացվող հիմնական դրույթները:** Պաշտպանության են ներկայացվում հետևյալ հիմնական դրույթները.

- 1) Միջակայքային տոտալ ներկումներ ունեցող գրաֆների պարամետրերի ընդհանուր գնահատականներ և որոշ դասերի գրաֆների համար այդ պարամետրերի ճշգրիտ արժեքներ,
- 2) Լրիվ բազմակողմանի գրաֆների,  $n$ -չափանի խորանարդների և բլոկների գրաֆների միջակայքային տոտալ ներկումների գոյության, կառուցման և պարամետրերի գնահատման հետ առնչվող մի շարք արդյունքներ,
- 3) Գրաֆների դեկարտյան արտադրյալների միջակայքային տոտալ ներկումների գոյության, կառուցման և պարամետրերի գնահատման հետ առնչվող մի շարք արդյունքներ,
- 4) Միջակայքային տոտալ ներկում չունեցող գրաֆների կառուցման մի շարք մեթոդներ:

**Ստացված արդյունքների գրաքննությունը և փորձարկումը:** Աշխատանքում ստացված արդյունքները պարբերաբար ներկայացվել և քննարկվել են ԵՊՀ - ում անցկացվող գրաֆների տեսության գիտական սեմինարների ժամանակ, ինչպես նաև մի շարք միջազգային գիտական կոնֆերանսների ժամանակ, ինչպիսիք են.

6th Cracow conference on graph theory, Zgorzelisko, Poland, September 12–17, 2010,

CSIT - 2013, Yerevan, Armenia, 23 - 27 September, 2013,

Colloquium on Combinatorics Conference, Ilmenau, Germany, 07- 08 Nov, 2014,

CSIT - 2015, Yerevan, Armenia, September 28 - October 2, 2015:

**Հրապարակումները:** Հետազոտության թեմայի վերաբերյալ տպագրվել է 9 գիտական աշխատանք:

**Աշխատանքի ծավալը և կառուցվածքը:** Աշխատանքը կազմված է ներածությունից, երեք գլխից, եզրակացությունից և օգտագործված գրականության ցանկից (50 անուն): Ծավալը 104 էջ է:

Հեղինակը երախտապարտ է իր գիտական ղեկավար Ռ. Ռ. Քամայանին և ղեկավարի օգնական Պ. Ա. Պետրոսյանին մշտական անվերապահ աջակցության, օգտակար խորհուրդների և կատարված աշխատանքում անգնահատելի ներդրում ունենալու համար:

## Գլուխ 1

### Ընդհանուր բնույթի արդյունքներ: Հիմնական խնդրի ամբողջական լուծումը գրաֆների որոշ դասերի համար

#### 1.1 Որոշ անհավասարություններ $T$ դասի գրաֆների համար

Աշխատանքում դիտարկվում են վերջավոր, ոչ կողմնորոշված գրաֆներ՝ առանց պատիկ կողերի և օղակների [3, 10, 48]:  $G=(V,E)$  գրաֆի գագաթների և կողերի բազմությունները կնշանակենք, համապատասխանաբար,  $V(G)$ -ով և  $E(G)$ -ով:  $VE(G)$ -ով կնշանակենք հետևյալ բազմությունը՝  $V(G)\cup E(G)$ : Ցանկացած  $v\in V(G)$  համար  $d_G(v)$ -ով կնշանակենք այդ գագաթի աստիճանը  $G$  գրաֆում, իսկ  $\Delta(G)$ -ով՝ գագաթների աստիճաններից առավելագույնը:  $G$  գրաֆի ցանկացած  $u,v\in V(G)$  գագաթների միջև հեռավորությունը կնշանակենք  $d_G(u,v)$ -ով, իսկ  $d(G)$ -ով՝  $G$  գրաֆի տրամագիծը:

Ոչ բացասական ամբողջ թվերի բազմությունը կնշանակենք  $\square_+$ -ով, իսկ բնական թվերի բազմությունը՝  $\square$ -ով: Ցանկացած  $a,b\in\square_+$  և  $a\leq b$  համար  $[a,b]$ -ով կնշանակենք  $\{a,a+1,\dots,b\}$  բազմությունը:

Դիցուք տրված են  $G=(V(G),E(G))$  և  $H=(V(H),E(H))$  գրաֆները: Սահմանենք  $G$  և  $H$  գրաֆների դեկարտյան արտադրյալը՝  $G\square H$ -ը հետևյալ կերպ.

$$V(G\square H)=V(G)\times V(H),$$

$$E(G\square H)=\{((u_1,v_1),(u_2,v_2))\mid (u_1=u_2,(v_1,v_2)\in E(H)) \text{ կամ } (v_1=v_2,(u_1,u_2)\in E(G))\}:$$

Եթե  $G$ -ն և  $H$ -ը կապակցված գրաֆներ են, ապա  $G\square H$ -ը ևս կապակցված է և  $\Delta(G\square H)=\Delta(G)+\Delta(H)$ :

$\alpha:E(G)\rightarrow\{1,2,\dots,t\}$  ֆունկցիան կանվանենք  $G$  գրաֆի ճիշտ կողային  $t$ -ներկում, եթե տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.



1.  $\forall i (1 \leq i \leq t)$  համար  $\exists e \in E(G)$  այնպիսին, որ  $\alpha(e) = i$ ,
2.  $\forall v \in V(G)$  գագաթին կից կողերը ներկված են զույգ առ զույգ տարբեր գույներով:

Ցանկացած  $v \in V(G)$  համար  $S(v, \alpha)$ -ով նշանակենք այն գույների բազմությունը, որոնցով ներկվում են  $v$  գագաթին կից կողերը  $\alpha$  կողային ներկման ժամանակ: Ակնհայտ է, որ եթե  $\alpha$ -ն ճիշտ կողային ներկում է, ապա  $\forall v \in V(G)$  գագաթի համար  $|S(v, \alpha)| = d_G(v)$ :

$\alpha: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, t\}$  ճիշտ կողային  $t$ -ներկուր կանվանենք  $G$  գրաֆի միջակայքային կողային  $t$ -ներկում, եթե  $\forall v \in V(G)$  համար  $S(v, \alpha)$ -ն միջակայք է:

$N_t$ -ով նշանակենք այն գրաֆների բազմությունը, որոնք ունեն միջակայքային կողային  $t$ -ներկում ( $t \in \square$ ), իսկ  $N$ -ով՝  $N \equiv \bigcup_{t \geq 1} N_t$ :  $N$ -ին պատկանող  $G$  գրաֆի միջակայքային կողային ներկման մեջ օգտագործվող գույների առավելագույն հնարավոր քանակը նշանակենք  $W(G)$ -ով:

$\alpha: VE(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, t\}$  ֆունկցիան կանվանենք  $G$  գրաֆի տոտալ  $t$ -ներկում, եթե տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.

1.  $\forall i (1 \leq i \leq t)$  համար  $\exists ve \in VE(G)$  այնպիսին, որ  $\alpha(ve) = i$ ,
2.  $\forall e = (u, v) \in E(G)$  համար  $\alpha(u) \neq \alpha(v)$ ,
3. ցանկացած հարևան  $e, e' \in E(G)$  կողերի համար  $\alpha(e) \neq \alpha(e')$ ,
4.  $\forall v \in V(G)$  գագաթի և նրան կից  $e$  կողի համար  $\alpha(v) \neq \alpha(e)$ :

Տոտալ ներկման մեջ օգտագործվող գույների նվազագույն հնարավոր քանակը կնշանակենք  $\chi''(G)$ : Դիցուք  $\alpha$ -ն  $G$  գրաֆի տոտալ  $t$ -ներկում է: Ցանկացած  $v \in V(G)$  համար  $S[v, \alpha]$ -ն ( $v$  գագաթի սպեկտր  $\alpha$  ներկման ժամանակ) սահմանենք հետևյալ ձևով.  $S[v, \alpha] = S(v, \alpha) \cup \{\alpha(v)\}$ :

$\alpha: VE(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, t\}$  տոտալ  $t$ -ներկումը կանվանենք  $G$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $t$ -ներկում, եթե  $\forall v \in V(G)$  համար  $S[v, \alpha]$ -ն միջակայք է:

$T_t$ -ով նշանակենք այն գրաֆների բազմությունը, որոնք ունեն միջակայքային տոտալ  $t$ -ներկում ( $t \in \square$ ), իսկ  $T$ -ով՝  $T \equiv \bigcup_{t \geq 1} T_t$ :  $T$ -ին պատկանող  $G$  գրաֆի միջակայքային տոտալ ներկման մեջ օգտագործվող գույների նվազագույն և առավելագույն հնարավոր քանակները նշանակենք համապատասխանաբար  $w_r(G)$ -ով և  $W_r(G)$ -ով:

Չսահմանված նշանակումները և հասկացությունները կարելի է գտնել [3, 10, 48] -ում:

Հայտնի է [5, 6, 24, 35], որ տեղի ունեն հետևյալ թեորեմները.

**Թեորեմ 1.1.1:** Կամայական  $n \in \mathbb{N}$  բնական թվի համար

$$\chi''(K_n) = \begin{cases} n, & \text{եթե } n\text{-ը կենտ է,} \\ n+1, & \text{եթե } n\text{-ը զույգ է:} \end{cases}$$

**Թեորեմ 1.1.2:** Կամայական  $n \in \mathbb{N}$  բնական թվի համար

1.  $K_n \in \mathcal{T}$ ,
2.  $w_\tau(K_n) = \begin{cases} n, & \text{եթե } n\text{-ը կենտ է,} \\ 3n/2, & \text{եթե } n\text{-ը զույգ է,} \end{cases}$
3.  $W_\tau(K_n) = 2n - 1$ :

**Նշում (\*):** Թեորեմ 1.1.2 – ի ապացույցից հետևում է, որ ներկումներում նվազագույն և առավելագույն գույները հանդիպում են գագաթների վրա:

**Թեորեմ 1.1.3:** Կամայական  $m, n \in \mathbb{N}$  բնական թվերի համար

$$\chi''(K_{m,n}) = \begin{cases} \max\{m, n\} + 1, & \text{եթե } m \neq n, \\ n + 2, & \text{եթե } m = n: \end{cases}$$

**Թեորեմ 1.1.4:** Կամայական  $m, n \in \mathbb{N}$  բնական թվերի համար

$$W_\tau(K_{m,n}) = \begin{cases} m + n + 1, & \text{եթե } m = n = 1, \\ m + n + 2, & \text{հակառակ դեպքում:} \end{cases}$$

Հիմնվելով նշված թեորեմների վրա՝ ձևակերպենք և ապացուցենք որոշ արդյունքներ, որոնք արտահայտում են  $w_\tau(G)$  և  $W_\tau(G)$  պարամետրերի կապերը գրաֆային տարբեր ինվարիանտների հետ, ինչպիսիք են գրաֆի տոտալ քրոմատիկ թիվը, գագաթների քանակը, գագաթների աստիճանները և տրամագիծը:

**Պնդում 1.1.1:** Եթե  $G$ -ն  $r$ -համասեռ գրաֆ է և  $\chi''(G) = r + 1$  ապա  $G \in \mathcal{T}$  և

$$w_\tau(G) = \chi''(G):$$

**Ապացույց:** Հեշտ է տեսնել, որ  $r$ -համասեռ գրաֆի ցանկացած տոտալ  $(r+1)$ -ներկում հանդիսանում է այդ գրաֆի միջակայքային տոտալ  $(r+1)$ -ներկում, ուստի  $G \in \mathcal{T}$  և  $w_\tau(G) = \chi''(G)$ :  $\square$

Հայտնի է, որ համասեռ երկկողմանի գրաֆների տոտալ քրոմատիկ թվի որոշման խնդիրը հանդիսանում է  $NP$ -լրիվ խնդիր [49]: Այստեղից և Պնդում 1.1.1 - ից հետևում է  $w_\tau(G)$  պարամետրի որոշման խնդրի  $NP$ -լրիվությունը համասեռ գրաֆների համար:

**Պնդում 1.1.2:** Կամայական  $n \in \mathbb{N}$  բնական թվի համար գոյություն ունի  $2n+1$  գագաթանի  $G$  գրաֆ այնպիսին, որ  $G \in \mathcal{T}$  և

$$W_\tau(G) - w_\tau(G) \geq |V(G)| - 1:$$

**Ապացույց:** Վերցնենք  $G = K_{2n+1}$ : Համաձայն Թեորեմ 1.1.2 – ի՝

$$W_\tau(G) - w_\tau(G) = W_\tau(K_{2n+1}) - w_\tau(K_{2n+1}) \geq 2n = |V(G)| - 1: \leftarrow$$

**Թեորեմ 1.1.5:** Կամայական  $l \in \mathbb{N}$  բնական թվի համար գոյություն ունի  $G$  գրաֆ այնպիսին, որ  $G \in \mathcal{T}$  և  $w_\tau(G) - \chi''(G) \geq l$ :

**Ապացույց:** Դիցուք  $n = l + 3$ : Ակնհայտ է, որ  $n \geq 4$ : Դիտարկենք լրիվ երկկողմանի  $K_{n+l, 2n}$  գրաֆը  $(X, Y)$  կողմերով, որտեղ  $|X| = n+l$  և  $|Y| = 2n$ : Համաձայն Թեորեմ 1.1.3 – ի՝  $\chi''(K_{n+l, 2n}) = 2n+1$  և համաձայն Թեորեմ 1.1.4–ի՝  $K_{n+l, 2n} \in \mathcal{T}$ : Այժմ ապացուցենք, որ  $w_\tau(K_{n+l, 2n}) \geq 2n+1+l$ : Ենթադրենք հակառակը՝  $K_{n+l, 2n}$  – ն ունի  $\alpha$  միջակայքային տոտալ  $t$ –ներկում, որտեղ  $2n+1 \leq t \leq 2n+l$ : Դժվար չէ տեսնել, որ  $[t-n-l, n+l+1] \subseteq S[v, \alpha]$  կամայական  $v \in V(K_{n+l, 2n})$  գագաթի համար: Քանի որ  $t \leq 2n+l$ , ցանկացած  $v \in V(K_{n+l, 2n})$  գագաթի համար ունենք, որ  $[n, n+l+1] \subseteq S[v, \alpha]$ : Սա նշանակում է, որ կամայական  $c \in [n, n+l+1]$  թվի համար գոյություն ունեն  $n-l$  հատ գագաթներ  $Y$ –ից, որոնք ներկված են  $c$  գույնով: Մյուս կողմից, քանի որ  $|Y| = 2n$ , մենք ունենք, որ  $2n \geq (l+2)(n-l)$ , ինչը հակասում է  $n = l+3$  հավասարությանը: Ստացված հակասությունը ցույց է տալիս, որ  $w_\tau(K_{n+l, 2n}) \geq 2n+1+l$ : Վերցնենք  $G = K_{n+l, 2n}$  և կունենանք, որ  $w_\tau(G) - \chi''(G) \geq l$ :

**Դիտողություն 1.1:** Թեորեմ 1.1.5 – ի ապացույցը հետևում է նաև Թեորեմ 1.1.1 – ից և Թեորեմ 1.1.2 – ից, քանի որ

$$w_\tau(K_{2n+2}) - \chi''(K_{2n+2}) \geq n: \leftarrow$$

**Թեորեմ 1.1.6:** Եթե  $G$ –ն կապակցված գրաֆ է և  $G \in \mathcal{T}$ , ապա

$$W_\tau(G) \leq 2|V(G)| - 1:$$

**Ապացույց:** Դիցուք  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  և  $\alpha$ –ն հանդիսանում է  $G$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $W_\tau(G)$ –ներկում: Սահմանենք  $H$  գրաֆը հետևյալ կերպ.

$$V(H) = U \cup W,$$

որտեղ  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ,  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ ,

$$E(H) = \{(u_i, w_j), (u_j, w_i) \mid (v_i, v_j) \in E(G), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\} \cup \{(u_i, w_i) \mid 1 \leq i \leq n\}:$$

Ակնհայտ է, որ  $H$ -ը հանդիսանում է կապակցված երկկողմանի գրաֆ և  $|V(H)| = 2|V(G)|$ :

Սահմանենք  $H$  գրաֆի  $\beta$  կողային ներկումը հետևյալ կերպ.

$$\beta((u_i, w_j)) = \beta((u_j, w_i)) = \alpha((v_i, v_j)),$$

որտեղ  $(v_i, v_j) \in E(G)$ ,

$$\beta((u_i, w_i)) = \alpha(v_i),$$

որտեղ  $1 \leq i \leq n$ :

Դժվար չէ տեսնել, որ  $\beta$ -ն հանդիսանում է  $H$  գրաֆի միջակայքային կողային  $W_\tau(G)$ - ներկում: Քանի որ  $H$ -ը կապակցված երկկողմանի գրաֆ է և  $H \in \mathcal{N}$ , ապա

$$W_\tau(G) \leq |V(H)| - 1 = 2|V(G)| - 1 \quad [1, 2], \text{ որտեղից}$$

$$W_\tau(G) \leq 2|V(G)| - 1: \lrcorner$$

Թեորեմ 1.1.6 – ում տրված գնահատականը լավացնել հնարավոր չէ, որովհետև  $\forall n \in \mathbb{N}$  թվի համար  $P_n$  պարզ շղթայի և  $K_n$  լրիվ գրաֆի համար  $W_\tau(P_n) = W_\tau(K_n) = 2n - 1$  [17, 18, 21]:

**Թեորեմ 1.1.7:** Եթե  $G$ -ն կապակցված  $r$ -համասեռ գրաֆ է այնպիսին, որ  $|V(G)| \geq 2r + 2$  և  $G \in \mathcal{T}$ , ապա

$$W_\tau(G) \leq 2|V(G)| - 3:$$

**Ապացույց:** Դիցուք  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  և  $\alpha$ -ն հանդիսանում է  $G$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $W_\tau(G)$ - ներկում: Սահմանենք  $H$  գրաֆը հետևյալ կերպ.

$$V(H) = U \cup W,$$

որտեղ  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ,  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ ,

$$E(H) = \{(u_i, w_j), (u_j, w_i) \mid (v_i, v_j) \in E(G), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\} \cup \{(u_i, w_i) \mid 1 \leq i \leq n\}:$$

Ակնհայտ է, որ  $H$ -ը հանդիսանում է երկկողմանի կապակցված  $r+1$ -համասեռ գրաֆ և  $|V(H)| = 2|V(G)|$ :

Սահմանենք  $H$  գրաֆի  $\beta$  կողային ներկումը հետևյալ կերպ.

$$\beta((u_i, w_j)) = \beta((u_j, w_i)) = \alpha((v_i, v_j)),$$

որտեղ  $(v_i, v_j) \in E(G)$ ,

$$\beta((u_i, w_i)) = \alpha(v_i),$$

որտեղ  $1 \leq i \leq n$ :

Դժվար չէ տեսնել, որ  $\beta$ -ն հանդիսանում է  $H$  գրաֆի միջակայքային կողային  $W_r(G)$ -ներկում: Քանի որ  $H$ -ը կապակցված երկկողմանի  $r+1$ -համասեռ գրաֆ է և  $H \in \mathcal{N}$ , ապա մենք ունենք

$$W_r(G) \leq |V(H)| - 3 = 2|V(G)| - 3 \quad [4], \text{ որտեղից}$$

$$W_r(G) \leq 2|V(G)| - 3: \leftarrow$$

Ստորև մենք կտանք  $W_r(G)$ -ի համար որոշ վերին գնահատականներ, կախված  $G$  կապակցված գրաֆի տրամագծից և գագաթների աստիճաններից:

**Թեորեմ 1.1.8:** Եթե  $G$ -ն կապակցված գրաֆ է և  $G \in \mathcal{T}$ , ապա

$$W_r(G) \leq 1 + \max_{P \in \mathcal{P}} \sum_{v \in V(P)} d_G(v),$$

որտեղ  $P$ -ն  $G$  գրաֆի բոլոր կարճագույն շղթաների բազմությունն է:

**Ապացույց:** Դիտարկենք  $G$  գրաֆի  $\alpha$  միջակայքային տոտալ  $W_r(G)$ -ներկումը: Մենք կտարբերակենք հետևյալ չորս հնարավոր դեպքերը.

1. գոյություն ունեն  $v, v' \in V(G)$  գագաթներ այնպիսին, որ  $\alpha(v) = 1, \alpha(v') = W_r(G)$ ,
2. գոյություն ունի  $v$  գագաթ և  $e'$  կող այնպիսին, որ  $\alpha(v) = 1, \alpha(e') = W_r(G)$ ,
3. գոյություն ունի  $e$  կող և  $v'$  գագաթ այնպիսին, որ  $\alpha(e) = 1, \alpha(v') = W_r(G)$ ,
4. գոյություն ունեն  $e, e' \in E(G)$  կողեր այնպիսին, որ  $\alpha(e) = 1, \alpha(e') = W_r(G)$ :

**Դեպք 1:** Գոյություն ունեն  $v, v' \in V(G)$  գագաթներ այնպիսին, որ  $\alpha(v) = 1, \alpha(v') = W_r(G)$ :

Դիցուք  $P_1$ -ը  $v$  և  $v'$  գագաթները միացնող կարճագույն շղթայի մաս է.

$$P_1 = (v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_i, e_i, v_{i+1}, \dots, v_k, e_k, v_{k+1}), \quad v_1 = v, \quad v_{k+1} = v':$$

Ակնհայտ է, որ

$$\alpha(e_1) \leq 1 + d_G(v_1),$$

$$\alpha(e_2) \leq \alpha(e_1) + d_G(v_2),$$

.....

$$\alpha(e_i) \leq \alpha(e_{i-1}) + d_G(v_i),$$

.....

$$\alpha(e_k) \leq \alpha(e_{k-1}) + d_G(v_k),$$

$$W_\tau(G) = \alpha(v') = \alpha(v_{k+1}) \leq \alpha(e_k) + d_G(v_{k+1}):$$

Գումարելով այս անհավասարությունները՝ կունենանք

$$W_\tau(G) \leq 1 + \sum_{i=1}^{k+1} d_G(v_i) \leq 1 + \max_{P \in \mathcal{P}} \sum_{v \in V(P)} d_G(v):$$

**Դեպք 2:** Գոյություն ունի  $v$  գագաթ և  $e'$  կող այնպիսին, որ  $\alpha(v) = 1$ ,  $\alpha(e') = W_\tau(G)$ :

Դիցուք  $e' = (v', w)$  և  $P_2$ -ը  $v$  և  $v'$  գագաթները միացնող կարճագույն շղթայի մաս է.

$$P_2 = (v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_i, e_i, v_{i+1}, \dots, v_k, e_k, v_{k+1}), v_1 = v, v_{k+1} = v':$$

Ակնհայտ է, որ

$$\alpha(e_1) \leq 1 + d_G(v_1),$$

$$\alpha(e_2) \leq \alpha(e_1) + d_G(v_2),$$

.....

$$\alpha(e_i) \leq \alpha(e_{i-1}) + d_G(v_i),$$

.....

$$\alpha(e_k) \leq \alpha(e_{k-1}) + d_G(v_k),$$

$$W_\tau(G) = \alpha(e') = \alpha(v_{k+1} w) \leq \alpha(e_k) + d_G(v_{k+1}):$$

Գումարելով այս անհավասարությունները՝ կունենանք

$$W_\tau(G) \leq 1 + \sum_{i=1}^{k+1} d_G(v_i) \leq 1 + \max_{P \in \mathcal{P}} \sum_{v \in V(P)} d_G(v):$$

**Դեպք 3:** Գոյություն ունի  $e$  կող և  $v'$  գագաթ այնպիսին, որ  $\alpha(e) = 1$ ,  $\alpha(v') = W_\tau(G)$ :

Դիցուք  $e = (u, v)$  և  $P_3$ -ը  $v$  և  $v'$  գագաթները միացնող կարճագույն շղթայի մաս է.

$$P_3 = (v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_i, e_i, v_{i+1}, \dots, v_k, e_k, v_{k+1}), v_1 = v, v_{k+1} = v':$$

Ակնհայտ է, որ

$$\alpha(e_1) \leq 1 + d_G(v_1),$$

$$\alpha(e_2) \leq \alpha(e_1) + d_G(v_2),$$

.....

$$\alpha(e_i) \leq \alpha(e_{i-1}) + d_G(v_i),$$

.....

$$\alpha(e_k) \leq \alpha(e_{k-1}) + d_G(v_k),$$

$$W_\tau(G) = \alpha(v') = \alpha(v_{k+1}) \leq \alpha(e_k) + d_G(v_{k+1}):$$

Գումարելով այս անհավասարությունները՝ կունենանք

$$W_\tau(G) \leq 1 + \sum_{i=1}^{k+1} d_G(v_i) \leq 1 + \max_{P \in \mathcal{P}} \sum_{v \in V(P)} d_G(v):$$

**Դեպք 4:** Գոյություն ունեն  $e, e' \in E(G)$  կողեր այնպիսին, որ  $\alpha(e) = 1, \alpha(e') = W_\tau(G)$ :

Դիցուք  $e = (u, v)$  և  $e' = (v', w)$ : Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ  $e$  և  $e'$  կողերը միացնող կարճագույն  $P_4$  շղթան միացնում է նաև  $v$  և  $v'$  գագաթները.

$$P_4 = (v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_i, e_i, v_{i+1}, \dots, v_k, e_k, v_{k+1}), v_1 = v, v_{k+1} = v':$$

Ակնհայտ է, որ

$$\alpha(e_1) \leq 1 + d_G(v_1),$$

$$\alpha(e_2) \leq \alpha(e_1) + d_G(v_2),$$

.....

$$\alpha(e_i) \leq \alpha(e_{i-1}) + d_G(v_i),$$

.....

$$\alpha(e_k) \leq \alpha(e_{k-1}) + d_G(v_k),$$

$$W_\tau(G) = \alpha(e') = \alpha(v'w) \leq \alpha(e_k) + d_G(v_{k+1}):$$

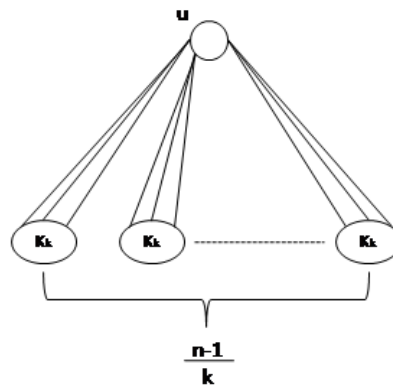
Գումարելով այս անհավասարությունները՝ կունենանք

$$W_\tau(G) \leq 1 + \sum_{i=1}^{k+1} d_G(v_i) \leq 1 + \max_{P \in \mathcal{P}} \sum_{v \in V(P)} d_G(v): \quad \dashv$$

**Հետևանք 1.1.1:** Եթե  $G$ -ն կապակցված գրաֆ է և  $G \in \mathcal{T}$ , ապա

$$W_\tau(G) \leq 1 + (d(G) + 1)\Delta(G):$$

Թեորեմ 1.1.8 – ում տրված վերին գնահատականը հասանելի է ծառերի [32], իսկ հետևանք 1.1.1 – ում տրված վերին գնահատականը՝ լրիվ գրաֆների համար [24, 35]:



Նկ. 1.1.1

**Թեորեմ 1.1.9:** Դիցուք  $G$ -ն գրաֆ է, որը պարունակում է  $u$  գագաթը, ընդ որում  $d_G(u) = |V(G)| - 1$ ,  $k(G) = \max_{v \in V(G)(v \neq u)} d_G(v) < |V(G)| - 1$  և  $G \in \mathcal{T}$ : Այդ դեպքում  $W_\tau(G) \leq |V(G)| + 2k(G)$ :

**Ապացույց:** Դիցուք  $\alpha$ -ն հանդիսանում է  $G$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $W_\tau(G)$ - ներկում:

Դիտարկենք  $u$  գագաթը: Մենք ցույց կտանք, որ  $1 \leq \min S[u, \alpha] \leq k(G) + 1$ :

Ենթադրենք հակառակը՝  $\min S[u, \alpha] \geq k(G) + 2$ : Քանի որ  $\forall v \in V(G)(v \neq u)$  համար  $d_G(v) \leq k(G)$ , ապա  $\forall v \in V(G)(v \neq u)$  համար  $\min S[v, \alpha] \geq 2$ , ինչը հակասություն է:

Այժմ մենք ունենք  $1 \leq \min S[u, \alpha] \leq k(G) + 1$ , հետևաբար,

$$|V(G)| \leq \max S[u, \alpha] \leq |V(G)| + k(G):$$

Դա նշանակում է, որ  $\forall v \in V(G)(v \neq u)$  համար  $\max S[v, \alpha] \leq |V(G)| + 2k(G)$ :  $\leftarrow$

Դիցուք  $k$ -ն զույգ ամբողջ թիվ է, իսկ  $n$ -ն այնպիսի դրական ամբողջ թիվ է, որ  $k \leq \frac{n-1}{2}$  և  $n-1 \equiv 0 \pmod{k}$ :

Սահմանենք  $G_{k,n}$  գրաֆը հետևյալ կերպ (տես Նկ. 1.1.1).

$$V(G_{k,n}) = \{u\} \cup \left\{ v_j^i \mid 1 \leq i \leq \frac{n-1}{k}, 1 \leq j \leq k \right\},$$

$$E(G_{k,n}) = \left\{ (u, v_j^i) \mid 1 \leq i \leq \frac{n-1}{k}, 1 \leq j \leq k \right\} \cup \left\{ (v_r^i, v_s^i) \mid 1 \leq i \leq \frac{n-1}{k}, 1 \leq r < s \leq k \right\}:$$

Պարզ է, որ  $|V(G_{k,n})| = n$ ,  $d_{G_{k,n}}(u) = n-1$  և  $d_{G_{k,n}}(v_j^i) = k$ , որտեղ  $1 \leq i \leq \frac{n-1}{k}$ ,  $1 \leq j \leq k$ :

**Թեորեմ 1.1.10:** Դիցուք  $k$ -ն զույգ ամբողջ թիվ է, իսկ  $n$ -ն այնպիսի դրական ամբողջ թիվ է, որ  $k \leq \frac{n-1}{2}$  և  $n-1 \equiv 0 \pmod{k}$ : Այդ դեպքում  $G_{k,n} \in \mathcal{T}$  և  $W_\tau(G_{k,n}) = n + 2k$ :

**Ապացույց:** Թեորեմն ապացուցելու համար կառուցենք  $G_{k,n}$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $(n + 2k)$ - ներկում:

Սահմանենք  $G_{k,n}$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $\alpha$  ներկում հետևյալ կերպ.

$$\alpha(u) = n, \alpha(v_j^1) = 2j - 1,$$

որտեղ  $1 \leq j \leq k$ ,

$$\alpha(v_j^i) = ki + 2j,$$



որտեղ  $2 \leq i \leq \frac{n-1}{k} - 1, 1 \leq j \leq k,$

$$\alpha\left(v_j^k\right) = n + 2j,$$

որտեղ  $1 \leq j \leq k,$

$$\alpha\left((u, v_j^i)\right) = ki + j,$$

որտեղ  $1 \leq i \leq \frac{n-1}{k} - 1, 1 \leq j \leq k,$

$$\alpha\left(\left(u, v_j^k\right)\right) = n + j,$$

որտեղ  $1 \leq j \leq k,$

$$\alpha\left((v_r^1, v_s^1)\right) = r + s - 1,$$

որտեղ  $1 \leq r \leq k, 1 \leq s \leq k, r \neq s,$

$$\alpha\left((v_r^i, v_s^i)\right) = ki + s + r,$$

որտեղ  $2 \leq i \leq \frac{n-1}{k} - 1, 1 \leq r \leq k, 1 \leq s \leq k,$

$$\alpha\left(\left(v_r^k, v_s^k\right)\right) = n + r + s,$$

որտեղ  $1 \leq r \leq k, 1 \leq s \leq k, r \neq s:$

Դժվար չէ տեսնել, որ  $\alpha$ -ն հանդիսանում է  $G_{k,n}$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $(n+2k)$ -ներկում: ↵

## 1.2 Լրիվ բազմակողմանի գրաֆների միջակայքային տոտալ ներկումներ

Այս բաժնում կհետազոտենք լրիվ բազմակողմանի գրաֆների միջակայքային տոտալ ներկելիությունը և կստանանք որոշակի գնահատականներ գույների նվազագույն և առավելագույն քանակների համար: Սկզբում կդիտարկենք լրիվ երկկողմանի գրաֆների միջակայքային տոտալ ներկումները: Հայտնի է, որ  $K_{m,n} \in \mathcal{T}$  և  $w_\tau(K_{m,n}) \leq m+n+2 - \gcd(m,n)$  ցանկացած  $m, n \in \mathbb{N}$ , սակայն պետք է նշել, որ ընդհանուր դեպքում  $w_\tau(K_{m,n})$ -ի ճշգրիտ արժեքն անհայտ է: Հայտնի է նաև, որ տեղի ունեն հետևյալ թեորեմները [35, 49].

**Թեորեմ 1.2.1:** Կամայական լրիվ բալանսավորված  $r$ -կողմանի  $K_{n,\dots,n}$  գրաֆի համար ( $r \geq 2, n \in \mathbb{N}$ )

$$\chi''(K_{n,\dots,n}) = \begin{cases} (r-1)n+2, & \text{եթե } r=2 \text{ կամ } r-\text{ը զույգ է և } n-\text{ը կենտ,} \\ (r-1)n+1, & \text{հակառակ դեպքում:} \end{cases}$$

**Թեորեմ 1.2.2:** Կամայական  $n \in \mathbb{N}$  բնական թվի համար

1.  $K_{n,n} \in \mathcal{T}$ ,
2.  $w_\tau(K_{n,n}) = \chi''(K_{n,n}) = n+2$ ,
3.  $W_\tau(K_{n,n}) = \begin{cases} 2n+1, & \text{եթե } n=1, \\ 2n+2, & \text{եթե } n \geq 2, \end{cases}$
4. Եթե  $w_\tau(K_{n,n}) \leq t \leq W_\tau(K_{n,n})$ , ապա  $K_{n,n}$ -ը ունի միջակայքային տոտալ  $t$ -ներկում:

Հիմնվելով նշված փաստերի վրա՝ ապացուցենք հետևյալ թեորեմները.

**Թեորեմ 1.2.3:** Եթե  $n, l \in \mathbb{N}$  ապա  $w_\tau(K_{n,n,l}) = \chi''(K_{n,n,l})$ :

**Ապացույց:** Նախ դիտարկենք  $l=1$  դեպքը: Համաձայն Թեորեմ 1.2.2 - ի՝  $w_\tau(K_{n,n}) = \chi''(K_{n,n}) = n+2, \forall n \in \mathbb{N}$ : Այժմ ենթադրենք  $l \geq 2$ : Դիցուք  $V(K_{n,n,l}) = \{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_{n \cdot l}\}$  և  $E(K_{n,n,l}) = \{(u_i, v_j) \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n \cdot l\}$ , ինչպես նաև  $G = K_{n,n,l}[\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}]$ : Ակնհայտ է, որ  $G$ -ն հանդիսանում է  $K_{n,n}$ -ի իզոմորֆ գրաֆ: Սահմանենք  $G$  գրաֆի միջակայքային կողային  $\alpha$  ներկումը հետևյալ կերպ.

$$\alpha((u_i, v_j)) = \begin{cases} i+j-1 \pmod{n}, & \text{եթե } i+j \neq n+1, \\ n, & \text{եթե } i+j = n+1 \end{cases}$$

որտեղ  $1 \leq i, j \leq n$ :

Դժվար չէ տեսնել, որ  $\alpha$ -ն հանդիսանում է  $G$  գրաֆի ճիշտ միջակայքային կողային ներկում և  $S(u_i, \alpha) = S(v_i, \alpha) = [1, n]$ ,  $1 \leq i \leq n$ :

Այժմ կառուցենք  $K_{n,n-l}$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $(n \cdot l + 1)$ -ներկում: Սահմանենք  $f_1(i)$  և  $f_2(i)$  ֆունկցիաները ( $i \in \square$ ) հետևյալ կերպ.

$f_1(i) = 1 + (i-1) \pmod{n}$ ,  $f_2(i) = \left\lfloor \frac{j-1}{n} \right\rfloor$ : Սահմանենք  $K_{n,n-l}$  գրաֆի տոտալ  $\beta$  ներկումը հետևյալ կերպ.

$$\beta(u_i) = n \cdot l + 1,$$

որտեղ  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\beta(v_j) = \begin{cases} n+1, & \text{եթե } 1 \leq j \leq n, \\ n \cdot f_2(j), & \text{եթե } n+1 \leq j \leq n \cdot l \end{cases},$$

որտեղ  $1 \leq j \leq n \cdot l$ ,

$$\beta((u_i, v_j)) = \alpha((u_{f_1(i)}, v_{f_2(j)})) + n \cdot f_2(j),$$

որտեղ  $1 \leq i \leq n$  և  $1 \leq j \leq n \cdot l$ :

Այժմ ցույց տանք, որ  $\beta$ -ն հանդիսանում է  $K_{n,n-l}$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $(n \cdot l + 1)$ -ներկում: Հաշվի առնելով  $\beta$ -ի սահմանումը և այն հանգամանքը, որ  $S(u_i, \alpha) = S(v_i, \alpha) = [1, n]$ ,  $1 \leq i \leq n$  կունենանք.

$$S[u_i, \beta] = S(u_i, \beta) \cup \{\beta(u_i)\} = \left( \bigcup_{k=1}^l S(u_{f_1(i)}, \alpha) \oplus n(k-1) \right) \cup \{\beta(u_i)\} = [1, n \cdot l] \cup \{n \cdot l + 1\} = [1, n \cdot l + 1]$$

որտեղ  $1 \leq i \leq n$ ,

$$S[v_j, \beta] = S(v_j, \alpha) \cup \{\beta(v_j)\} = [1, n] \cup \{n+1\} = [1, n+1],$$

որտեղ  $1 \leq j \leq n$ ,

$$S[v_j, \beta] = S(v_j, \beta) \cup \{\beta(v_j)\} = (S(v_{f_2(j)}, \alpha) \oplus n \cdot f_2(j)) \cup \{\beta(v_j)\} = [1 + n \cdot f_2(j), n + n \cdot f_2(j)] \cup \{n \cdot f_2(j)\} = [n \cdot f_2(j), n + n \cdot f_2(j)],$$

որտեղ  $n+1 \leq j \leq n \cdot l$ :

Վերոնշյալը ցույց է տալիս, որ  $\beta$ -ն հանդիսանում է  $K_{n,n-l}$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $(n \cdot l + 1)$ -ներկում, հետևաբար,  $w_\tau(K_{n,n-l}) \leq n \cdot l + 1$ : Մյուս կողմից, համաձայն Թեորեմ 1.1.3 - ի,  $w_\tau(K_{n,n-l}) \geq \chi''(K_{n,n-l}) = n \cdot l + 1 (\forall l \geq 2)$ , հետևաբար,  $w_\tau(K_{n,n-l}) = \chi''(K_{n,n-l})$ :  $\downarrow$

Այժմ դիտարկենք  $r$ -կողմանի և յուրաքանչյուր կողմում  $n$  գագաթ ունեցող գրաֆների միջակայքային տոտալ ներկումները:

**Թեորեմ 1.2.4:** Եթե  $r=2$  կամ  $r$ -ը զույգ է իսկ  $n$ -ը կենտ, ապա  $K_{n,\dots,n} \in T$  և

$$w_\tau(K_{n,\dots,n}) \leq \left(\frac{3}{2}r-2\right)n+2:$$

**Ապացույց:** Նախ պետք է նշել, որ  $r=2$  դեպքում թեորեմը ճիշտ է, քանի որ, համաձայն Թեորեմ 1.1.3 - ի՝  $w_\tau(K_{n,n}) = \chi''(K_{n,n}) = n+2$  կամայական բնական  $n$ -ի համար: Այժմ ենթադրենք, որ  $r$ -ը զույգ է իսկ  $n$ -ը կենտ: Ակնհայտ է, որ թեորեմի ապացուցման համար բավական է ցույց տալ, որ  $K_{n,\dots,n}$ -ն ունի միջակայքային տոտալ

$\left(\left(\frac{3}{2}r-2\right)n+2\right)$ -ներկում: Դիցուք  $V(K_{n,\dots,n}) = \{v_j^{(i)} \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n\}$  և

$$E(K_{n,\dots,n}) = \{(v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \mid 1 \leq i < j \leq r, 1 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq n\}:$$

Սահմանենք  $K_{n,\dots,n}$  գրաֆի  $\alpha$  տոտալ ներկումը: Նախ ներկենք գրաֆի գագաթները հետևյալ կերպ.

$$\alpha(v_j^{(1)}) = 1,$$

որտեղ  $1 \leq j \leq n$ ,

$$\alpha(v_j^{(2)}) = (r-1)n+2,$$

որտեղ  $1 \leq j \leq n$ ,

$$\alpha(v_j^{(i+1)}) = (i-1)n+1,$$

որտեղ  $2 \leq i \leq \frac{r}{2}-1, 1 \leq j \leq n$ ,

$$\alpha\left(v_j^{\left(\frac{r}{2}+i-1\right)}\right) = (r+i-2)n+2,$$

որտեղ  $2 \leq i \leq \frac{r}{2}-1, 1 \leq j \leq n$ ,

$$\alpha(v_j^{(r-1)}) = \left(\frac{r}{2}-1\right)n+1,$$

որտեղ  $1 \leq j \leq n$ ,

$$\alpha(v_j^{(r)}) = \left(\frac{3}{2}r-2\right)n+2,$$

որտեղ  $1 \leq j \leq n$ :

Այնուհետև ներկենք գրաֆի կողերը: Յուրաքանչյուր  $(v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \in E(K_{n, \dots, n}), 1 \leq i < j \leq r,$

$1 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq n$  կողի համար սահմանենք  $\alpha((v_p^{(i)}, v_q^{(j)}))$ -ն հետևյալ կերպ.

$$\alpha((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})) = (i+j-3)n + \begin{cases} 1+(p+q-1)(\bmod n), & \text{Եթե } p+q \neq n+1, \\ n+1, & \text{Եթե } p+q = n+1 \end{cases},$$

որտեղ  $1 \leq i \leq \lfloor \frac{r}{4} \rfloor, 2 \leq j \leq \frac{r}{2}, i+j \leq \frac{r}{2}+1,$

$$\alpha((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})) = \left(i+j+\frac{r}{2}-4\right)n + \begin{cases} 1+(p+q-1)(\bmod n), & \text{Եթե } p+q \neq n+1, \\ n+1, & \text{Եթե } p+q = n+1 \end{cases},$$

որտեղ  $2 \leq i \leq \frac{r}{2}-1, \lfloor \frac{r}{4} \rfloor + 2 \leq j \leq \frac{r}{2}, i+j \geq \frac{r}{2}+2,$

$$\alpha((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})) = \left(\frac{r}{2}+j-i-1\right)n + \begin{cases} 1+(p+q-1)(\bmod n), & \text{Եթե } p+q \neq n+1, \\ n+1, & \text{Եթե } p+q = n+1 \end{cases},$$

որտեղ  $3 \leq i \leq \frac{r}{2}, \frac{r}{2}+1 \leq j \leq r-2, j-i \leq \frac{r}{2}-2,$

$$\alpha((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})) = (j-i-1)n + \begin{cases} 1+(p+q-1)(\bmod n), & \text{Եթե } p+q \neq n+1, \\ n+1, & \text{Եթե } p+q = n+1 \end{cases},$$

որտեղ  $1 \leq i \leq \frac{r}{2}, \frac{r}{2}+1 \leq j \leq r, j-i \geq \frac{r}{2},$

$$\alpha((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})) = (2i-3)n + \begin{cases} 1+(p+q-1)(\bmod n), & \text{Եթե } p+q \neq n+1, \\ n+1, & \text{Եթե } p+q = n+1 \end{cases},$$

որտեղ  $2 \leq i \leq 1 + \lfloor \frac{r-2}{4} \rfloor, \frac{r}{2}+1 \leq j \leq \frac{r}{2} + \lfloor \frac{r-2}{4} \rfloor, j-i = \frac{r}{2}-1,$

$$\alpha((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})) = (i+j-3)n + \begin{cases} 1+(p+q-1)(\bmod n), & \text{Եթե } p+q \neq n+1, \\ n+1, & \text{Եթե } p+q = n+1 \end{cases},$$

որտեղ  $\lfloor \frac{r-2}{4} \rfloor + 2 \leq i \leq \frac{r}{2}, \frac{r}{2}+1 + \lfloor \frac{r-2}{4} \rfloor \leq j \leq r-1, j-i = \frac{r}{2}-1,$

$$\alpha((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})) = (i+j-r-1)n + \begin{cases} 1+(p+q-1)(\bmod n), & \text{Եթե } p+q \neq n+1, \\ n+1, & \text{Եթե } p+q = n+1 \end{cases},$$

որտեղ  $\frac{r}{2}+1 \leq i \leq \frac{r}{2} + \lfloor \frac{r}{4} \rfloor - 1, \frac{r}{2}+2 \leq j \leq r-2, i+j \leq \frac{3}{2}r-1,$

$$\alpha((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})) = \left(i+j-\frac{r}{2}-2\right)n + \begin{cases} 1+(p+q-1)(\bmod n), & \text{Եթե } p+q \neq n+1, \\ n+1, & \text{Եթե } p+q = n+1 \end{cases},$$

որտեղ  $\frac{r}{2}+1 \leq i \leq r-1, \frac{r}{2} + \left\lfloor \frac{r}{4} \right\rfloor + 1 \leq j \leq r, i+j \geq \frac{3}{2}r$ :

Այժմ ապացուցենք, որ  $\alpha$ -ն հանդիսանում է  $K_{n,\dots,n}$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $\left(\left(\frac{3}{2}r-2\right)n+2\right)$ -ներկում: Նախ ցույց տանք, որ ցանկացած  $c \in \left[1, \left(\frac{3}{2}r-2\right)n+2\right]$  թվի

համար գոյություն ունի  $ve \in VE(K_{n,\dots,n})$  այնպիսին, որ  $\alpha(ve) = c$ : Դիտարկենք  $v_1^{(1)}$  և  $v_1^{(r)}$  գագաթները: Համաձայն  $\alpha$  ներկման սահմանման՝

$$S[v_1^{(1)}, \alpha] = S(v_1^{(1)}, \alpha) \cup \{\alpha(v_1^{(1)})\} = \left(\bigcup_{l=1}^{r-1} ([2, n+1] \oplus (l-1)n)\right) \cup \{1\} = [2, (r-1)n+1] \cup \{1\} = [1, (r-1)n+1]$$

$$\text{և} \quad S[v_1^{(r)}, \alpha] = S(v_1^{(r)}, \alpha) \cup \{\alpha(v_1^{(r)})\} = \left(\bigcup_{l=\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}r-2} ([2, n+1] \oplus (l-1)n)\right) \cup \left\{\left(\frac{3}{2}r-2\right)n+2\right\}$$

$$= \left[\left(\frac{r}{2}-1\right)n+2, \left(\frac{3}{2}r-2\right)n+1\right] \cup \left\{\left(\frac{3}{2}r-2\right)n+2\right\} = \left[\left(\frac{r}{2}-1\right)n+2, \left(\frac{3}{2}r-2\right)n+2\right]:$$

Հետևաբար  $S[v_1^{(1)}, \alpha] \cup S[v_1^{(r)}, \alpha] = \left[1, \left(\frac{3}{2}r-2\right)n+2\right]$ , հետևաբար ցանկացած

$c \in \left[1, \left(\frac{3}{2}r-2\right)n+2\right]$  թվի համար գոյություն ունի  $ve \in VE(K_{n,\dots,n})$  այնպիսին, որ  $\alpha(ve) = c$ :

Այժմ ցույց տանք, որ  $K_{n,\dots,n}$  - ի ցանկացած գագաթի կից կողերը այդ գագաթի հետ միասին ներկված են  $(r-1)n+1$  հաջորդական գույներով: Դիցուք  $v_j^{(i)} \in V(K_{n,\dots,n})$ , որտեղ  $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n$ :

**Դեպք 1:**  $1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq n$ :

Համաձայն  $\alpha$  ներկման սահմանման՝

$$S[v_j^{(1)}, \alpha] = S(v_j^{(1)}, \alpha) \cup \{\alpha(v_j^{(1)})\} = \left(\bigcup_{l=1}^{r-1} ([2, n+1] \oplus (l-1)n)\right) \cup \{1\} =$$

$$[2, (r-1)n+1] \cup \{1\} = [1, (r-1)n+1] \quad \text{և} \quad S[v_j^{(2)}, \alpha] = S(v_j^{(2)}, \alpha) \cup \{\alpha(v_j^{(2)})\} =$$

$$\left(\bigcup_{l=1}^{r-1} ([2, n+1] \oplus (l-1)n)\right) \cup \{(r-1)n+2\} = [2, (r-1)n+1] \cup \{(r-1)n+2\} = [2, (r-1)n+2]:$$

**Դեպք 2:**  $3 \leq i \leq \frac{r}{2}, 1 \leq j \leq n$ :

Համաձայն  $\alpha$  ներկման սահմանման՝

$$S[v_j^{(i)}, \alpha] = S(v_j^{(i)}, \alpha) \cup \{\alpha(v_j^{(i)})\} = \left(\bigcup_{l=i-1}^{r-3+i} ([2, n+1] \oplus (l-1)n)\right) \cup$$

$$\{(i-2)n+1\} = [(i-2)n+2, (r-3+i)n+1] \cup \{(i-2)n+1\} = [(i-2)n+1, (r-3+i)n+1]:$$

**Դեպք 3:**  $\frac{r}{2}+1 \leq i \leq r-2, 1 \leq j \leq n$ :

Համաձայն  $\alpha$  ներկման սահմանման՝

$$S[v_j^{(i)}, \alpha] = S(v_j^{(i)}, \alpha) \cup \{\alpha(v_j^{(i)})\} = \left( \bigcup_{l=i-\frac{r}{2}+1}^{\frac{r}{2}-1+i} ([2, n+1] \oplus (l-1)n) \right) \cup \left\{ \left( \frac{r}{2} + i - 1 \right) n + 2 \right\} = \left[ \left( i - \frac{r}{2} \right) n + 2, \left( \frac{r}{2} + i - 1 \right) n + 1 \right] \cup \left\{ \left( \frac{r}{2} + i - 1 \right) n + 2 \right\} = \left[ \left( i - \frac{r}{2} \right) n + 2, \left( \frac{r}{2} + i - 1 \right) n + 2 \right]:$$

**Դեպք 4:**  $r-1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n$ :

Համաձայն  $\alpha$  ներկման սահմանման՝

$$S[v_j^{(r-1)}, \alpha] = S(v_j^{(r-1)}, \alpha) \cup \{\alpha(v_j^{(r-1)})\} = \left( \bigcup_{l=\frac{r}{2}}^{\frac{3}{2}r-2} ([2, n+1] \oplus (l-1)n) \right) \cup \left\{ \left( \frac{r}{2} - 1 \right) n + 1 \right\} = \left[ \left( \frac{r}{2} - 1 \right) n + 2, \left( \frac{3}{2}r - 2 \right) n + 1 \right] \cup \left\{ \left( \frac{r}{2} - 1 \right) n + 1 \right\} = \left[ \left( \frac{r}{2} - 1 \right) n + 1, \left( \frac{3}{2}r - 2 \right) n + 1 \right] \quad \text{և}$$

$$S[v_j^{(r)}, \alpha] = S(v_j^{(r)}, \alpha) \cup \{\alpha(v_j^{(r)})\} = \left( \bigcup_{l=\frac{r}{2}}^{\frac{3}{2}r-2} ([2, n+1] \oplus (l-1)n) \right) \cup \left\{ \left( \frac{3}{2}r - 2 \right) n + 2 \right\} = \left[ \left( \frac{r}{2} - 1 \right) n + 2, \left( \frac{3}{2}r - 2 \right) n + 1 \right] \cup \left\{ \left( \frac{3}{2}r - 2 \right) n + 2 \right\} = \left[ \left( \frac{r}{2} - 1 \right) n + 2, \left( \frac{3}{2}r - 2 \right) n + 2 \right]:$$

Սա ցույց է տալիս, որ  $\alpha$  - ն հանդիսանում է  $K_{n, \dots, n}$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $\left( \left( \frac{3}{2}r - 2 \right) n + 2 \right)$ -

ներկում: Հետևաբար,  $K_{n, \dots, n} \in \mathcal{T}$  և  $w_\tau(K_{n, \dots, n}) \leq \left( \frac{3}{2}r - 2 \right) n + 2$ :  $\blacktriangleleft$

Նշենք, որ Թեորեմ 1.2.4 - ում նշված վերին գնահատականը հասանելի է երբ  $r=2$  կամ  $n=1$ : Նշենք նաև, որ համաձայն Թեորեմ 1.2.4 - ի, եթե  $r=2$  կամ  $r$ -ը զույգ է իսկ  $n$ -ը՝ կենտ, ապա  $K_{n, \dots, n} \in \mathcal{T}$ : Հակառակ դեպքում, համաձայն Թեորեմ 1.2.1 - ի և այն հանգամանքի, որ  $K_{n, \dots, n}$ -ը հանդիսանում է  $(r-1)n$  - համասեռ գրաֆ, կարող ենք պնդել որ  $K_{n, \dots, n} \in \mathcal{T}$  և  $w_\tau(K_{n, \dots, n}) = \chi''(K_{n, \dots, n}) = (r-1)n + 1$ :

Մեր հաջորդ արդյունքը տալիս է ստորին գնահատական  $W_\tau(K_{n, \dots, n})$ -ի համար երբ  $n \cdot r$ -ը զույգ է:

**Թեորեմ 1.2.5:** Եթե  $r \geq 2, n \in \square$  և  $n \cdot r$ -ը զույգ է, ապա  $W_\tau(K_{n, \dots, n}) \geq \left( \frac{3}{2}r - 1 \right) n + 1$ :

**Ապացույց:** Դիտարկենք հետևյալ հնարավոր դեպքերը.

**Դեպք 1:**  $r$  - ը զույգ է:

Դիցուք  $V(K_{n,\dots,n}) = \{v_j^{(i)} \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n\}$  և

$E(K_{n,\dots,n}) = \{(v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \mid 1 \leq i < j \leq r, 1 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq n\}$ : Սահմանենք  $K_{n,\dots,n}$ –ի տոտալ  $\alpha$  ներկումը: Նախ կներկենք գրաֆի գագաթների բազմությունը հետևյալ կերպ.

$$\alpha(v_j^{(1)}) = j,$$

որտեղ  $1 \leq j \leq n$ ,

$$\alpha(v_j^{(2)}) = (r-1)n+1+j,$$

որտեղ  $1 \leq j \leq n$ ,

$$\alpha(v_j^{(i+1)}) = (i-1)n+j,$$

որտեղ  $2 \leq i \leq \frac{r}{2}-1, 1 \leq j \leq n$ ,

$$\alpha\left(v_j^{\left(\frac{r+i-1}{2}\right)}\right) = (r+i-2)n+1+j,$$

որտեղ  $2 \leq i \leq \frac{r}{2}-1, 1 \leq j \leq n$ ,

$$\alpha(v_j^{(r-1)}) = \left(\frac{r}{2}-1\right)n+j,$$

որտեղ  $1 \leq j \leq n$ ,

$$\alpha(v_j^{(r)}) = \left(\frac{3}{2}r-2\right)n+1+j,$$

որտեղ  $1 \leq j \leq n$ :

Այնուհետև ներկենք գրաֆի կողերի բազմությունը: Յուրաքանչյուր  $(v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \in E(K_{n,\dots,n}), 1 \leq i < j \leq r, 1 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq n$  կողի համար սահմանենք

$\alpha((v_p^{(i)}, v_q^{(j)}))$ –ն հետևյալ կերպ.

$$\alpha((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})) = (i+j-3)n+p+q,$$

որտեղ  $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{r}{4} \right\rfloor, 2 \leq j \leq \frac{r}{2}, i+j \leq \frac{r}{2}+1$ ,

$$\alpha((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})) = \left(i+j+\frac{r}{2}-4\right)n+p+q,$$

որտեղ  $2 \leq i \leq \frac{r}{2}-1, \left\lfloor \frac{r}{4} \right\rfloor+2 \leq j \leq \frac{r}{2}, i+j \geq \frac{r}{2}+2$ ,



$$\alpha((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})) = \left(\frac{r}{2} + j - i - 1\right)n + p + q,$$

$$\text{որստեղ } 3 \leq i \leq \frac{r}{2}, \frac{r}{2} + 1 \leq j \leq r - 2, j - i \leq \frac{r}{2} - 2,$$

$$\alpha((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})) = (j - i - 1)n + p + q,$$

$$\text{որստեղ } 1 \leq i \leq \frac{r}{2}, \frac{r}{2} + 1 \leq j \leq r, j - i \geq \frac{r}{2},$$

$$\alpha((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})) = (2i - 3)n + p + q,$$

$$\text{որստեղ } 2 \leq i \leq 1 + \left\lfloor \frac{r-2}{4} \right\rfloor, \frac{r}{2} + 1 \leq j \leq \frac{r}{2} + \left\lfloor \frac{r-2}{4} \right\rfloor, j - i = \frac{r}{2} - 1,$$

$$\alpha((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})) = (i + j - 3)n + p + q,$$

$$\text{որստեղ } \left\lfloor \frac{r-2}{4} \right\rfloor + 2 \leq i \leq \frac{r}{2}, \frac{r}{2} + 1 + \left\lfloor \frac{r-2}{4} \right\rfloor \leq j \leq r - 1, j - i = \frac{r}{2} - 1,$$

$$\alpha((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})) = (i + j - r - 1)n + p + q,$$

$$\text{որստեղ } \frac{r}{2} + 1 \leq i \leq \frac{r}{2} + \left\lfloor \frac{r}{4} \right\rfloor - 1, \frac{r}{2} + 2 \leq j \leq r - 2, i + j \leq \frac{3}{2}r - 1,$$

$$\alpha((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})) = \left(i + j - \frac{r}{2} - 2\right)n + p + q,$$

$$\text{որստեղ } \frac{r}{2} + 1 \leq i \leq r - 1, \frac{r}{2} + \left\lfloor \frac{r}{4} \right\rfloor + 1 \leq j \leq r, i + j \geq \frac{3}{2}r:$$

Ապացուցենք, որ  $\alpha$ -ն հանդիսանում է  $K_{n, \dots, n}$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $\left(\left(\frac{3}{2}r - 1\right)n + 1\right)$ -ներկում: Նախ և առաջ ապացուցենք որ յուրաքանչյուր

$c \in \left[1, \left(\frac{3}{2}r - 1\right)n + 1\right]$  թվի համար գոյություն ունի  $ve \in VE(K_{n, \dots, n})$  այնպիսին, որ  $\alpha(ve) = c$ :

Դիտարկենք  $v_1^{(1)}, \dots, v_n^{(1)}$  և  $v_1^{(r)}, \dots, v_n^{(r)}$  գագաթները: Համաձայն  $\alpha$  ներկման սահմանման՝

$$S[v_j^{(1)}, \alpha] = S(v_j^{(1)}, \alpha) \cup \{\alpha(v_j^{(1)})\} = \left(\bigcup_{l=1}^{r-1} ([j+1, j+n] \oplus (l-1)n)\right) \cup \{j\} = [j+1, (r-1)n + j] \cup \{j\} = [j, (r-1)n + j]$$

և

$$S[v_j^{(r)}, \alpha] = S(v_j^{(r)}, \alpha) \cup \{\alpha(v_j^{(r)})\} = \left(\bigcup_{l=\frac{r}{2}}^{\frac{3}{2}r-2} ([j+1, j+n] \oplus (l-1)n)\right) \cup \left\{\left(\frac{3}{2}r - 2\right)n + 1 + j\right\} = \left[\left(\frac{r}{2} - 1\right)n + 1 + j, \left(\frac{3}{2}r - 2\right)n + j\right] \cup \left\{\left(\frac{3}{2}r - 2\right)n + 1 + j\right\} =$$

$= \left[ \left( \frac{r}{2} - 1 \right) n + 1 + j, \left( \frac{3}{2} r - 2 \right) n + 1 + j \right]$ , որտեղ  $1 \leq j \leq n$ : Դիցուք  $\bar{C} = \bigcup_{j=1}^n S[v_j^{(1)}, \alpha]$  և  $\bar{\bar{C}} = \bigcup_{j=1}^n S[v_j^{(r)}, \alpha]$ : Դժվար չէ տեսնել, որ  $\bar{C} \cup \bar{\bar{C}} = \left[ 1, \left( \frac{3}{2} r - 1 \right) n + 1 \right]$ , հետևաբար ցանկացած  $c \in \left[ 1, \left( \frac{3}{2} k - 1 \right) n + 1 \right]$  գոյություն ունի  $ve \in VE(K_{n, \dots, n})$  այնպիսին, որ  $\alpha(ve) = c$ : Այժմ ցույց տանք, որ  $K_{n, \dots, n}$  - ի յուրաքանչյուր գագաթ իրեն կից կողերի հետ միասին ներկված են  $(r-1)n+1$  հաջորդական գույներով: Դիցուք  $v_j^{(i)} \in V(K_{n, \dots, n})$ , որտեղ  $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n$ :

**Ենթադեպք 1.1:**  $1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq n$ :

Համաձայն  $\alpha$  ներկման սահմանման՝

$$\begin{aligned}
 S[v_j^{(1)}, \alpha] &= S(v_j^{(1)}, \alpha) \cup \{\alpha(v_j^{(1)})\} = \left( \bigcup_{l=1}^{r-1} ([j+1, j+n] \oplus (l-1)n) \right) \cup \{j\} = \\
 &= [j+1, (r-1)n+j] \cup \{j\} = [j, (r-1)n+j] \text{ և}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S[v_j^{(2)}, \alpha] &= S(v_j^{(2)}, \alpha) \cup \{\alpha(v_j^{(2)})\} = \\
 &= \left( \bigcup_{l=1}^{r-1} ([j+1, j+n] \oplus (l-1)n) \right) \cup \{(r-1)n+1+j\} = [j+1, (r-1)n+1+j]:
 \end{aligned}$$

**Ենթադեպք 1.2:**  $3 \leq i \leq \frac{r}{2}, 1 \leq j \leq n$ :

Համաձայն  $\alpha$  ներկման սահմանման՝

$$\begin{aligned}
 S[v_j^{(i)}, \alpha] &= S(v_j^{(i)}, \alpha) \cup \{\alpha(v_j^{(i)})\} = \left( \bigcup_{l=i-1}^{r-3+i} ([j+1, j+n] \oplus (l-1)n) \right) \cup \\
 &\cup \{(i-2)n+j\} = [(i-2)n+1+j, (r-3+i)n+j] \cup \{(i-2)n+j\} = [(i-2)n+j, (r-3+i)n+j]:
 \end{aligned}$$

**Ենթադեպք 1.3:**  $\frac{r}{2} + 1 \leq i \leq r-2, 1 \leq j \leq n$ :

Համաձայն  $\alpha$  ներկման սահմանման՝

$$\begin{aligned}
 S[v_j^{(i)}, \alpha] &= S(v_j^{(i)}, \alpha) \cup \{\alpha(v_j^{(i)})\} = \left( \bigcup_{l=i-\frac{r}{2}+1}^{r-1+i} ([j+1, j+n] \oplus (l-1)n) \right) \cup \left\{ \left( \frac{r}{2} + i - 1 \right) n + 1 + j \right\} = \\
 &= \left[ \left( i - \frac{r}{2} \right) n + 1 + j, \left( \frac{r}{2} + i - 1 \right) n + j \right] \cup \left\{ \left( \frac{r}{2} + i - 1 \right) n + 1 + j \right\} = \left[ \left( i - \frac{r}{2} \right) n + 1 + j, \left( \frac{r}{2} + i - 1 \right) n + 1 + j \right]:
 \end{aligned}$$

**Ենթադեպք 1.4:**  $r-1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n$ :

Համաձայն  $\alpha$  ներկման սահմանման՝

$$S[v_j^{(r-1)}, \alpha] = S(v_j^{(r-1)}, \alpha) \cup \{\alpha(v_j^{(r-1)})\} = \left( \bigcup_{l=\frac{r}{2}}^{\frac{3}{2}r-2} ([j+1, j+n] \oplus (l-1)n) \right) \cup \\ \cup \left\{ \left( \frac{r}{2} - 1 \right) n + j \right\} = \left[ \left( \frac{r}{2} - 1 \right) n + 1 + j, \left( \frac{3}{2} r - 2 \right) n + j \right] \cup \left\{ \left( \frac{r}{2} - 1 \right) n + j \right\} = \left[ \left( \frac{r}{2} - 1 \right) n + j, \left( \frac{3}{2} r - 2 \right) n + j \right]$$

և

$$S[v_j^{(r)}, \alpha] = S(v_j^{(r)}, \alpha) \cup \{\alpha(v_j^{(r)})\} = \left( \bigcup_{l=\frac{r}{2}}^{\frac{3}{2}r-2} ([j+1, j+n] \oplus (l-1)n) \right) \cup \left\{ \left( \frac{3}{2} r - 2 \right) n + 1 + j \right\} = \\ = \left[ \left( \frac{r}{2} - 1 \right) n + 1 + j, \left( \frac{3}{2} r - 2 \right) n + 1 + j \right]: \text{Սա ցույց է տալիս, որ } \alpha - \text{ն հանդիսանում է } K_{n, \dots, n}$$

գրաֆի միջակայքային տոտալ  $\left( \left( \frac{3}{2} r - 1 \right) n + 1 \right)$ -ներկում: Հետևաբար,

$$W_r(K_{n, \dots, n}) \geq \left( \frac{3}{2} r - 1 \right) n + 1 \text{ երբ } r \geq 2 \text{ և զույգ է:}$$

**Դեպք 2:**  $n$  - ը զույգ է:

Դիցուք  $n = 2m, m \in \mathbb{N}$  և  $S_i = \{u_1^{(i)}, \dots, u_m^{(i)}, u_1^{(r+i)}, \dots, u_m^{(r+i)}\} (1 \leq i \leq r)$  հանդիսանում է  $K_{n, \dots, n}$  - ի  $r$  հատ անկախ գագաթների բազմություն: Ցանկացած  $i = 1, \dots, 2r$ , սահմանենք  $U_i$  բազմությունը հետևյալ կերպ.  $U_i = \{u_1^{(i)}, \dots, u_m^{(i)}\}$ : Դժվար չէ տեսնել, որ  $V(K_{n, \dots, n}) = \bigcup_{i=1}^{2r} U_i$ : Ցանկացած  $1 \leq i < j \leq 2r$  սահմանենք  $(U_i, U_j)$ - ն որպես  $U_i$  - ի և  $U_j$  - ի միջև եղած կողերի բազմություն: Դժվար չէ տեսնել, որ եթե  $1 \leq i < j \leq 2r$  ապա  $|(U_i, U_j)| = m^2$  բացառությամբ  $|(U_i, U_j)| = 0$  դեպքերի երբ  $i = 1, \dots, r$ : Եթե դիտարկենք  $U_i$  - ն որպես գագաթների, իսկ  $(U_i, U_j)$  - ն որպես կողերի բազմություն, ապա կստանանք  $K_{n, \dots, n}$  - ին իզոմորֆ  $K_{2r} - F$  գրաֆը, որտեղ  $F$  - ը հանդիսանում է  $K_{2r}$  - ի կատարյալ զուգակցում: Այժմ սահմանենք  $K_{n, \dots, n}$  - ի տոտալ  $\beta$  ներկումը: Նախ ներկենք գրաֆի գագաթները հետևյալ կերպ.

$$\beta(u_j^{(1)}) = j,$$

որտեղ  $1 \leq j \leq m$ ,

$$\beta(u_j^{(2)}) = (2r - 2)m + 1 + j,$$

որտեղ  $1 \leq j \leq m$ ,

$$\beta(u_j^{(i+1)}) = (i - 1)m + j,$$

որտեղ  $2 \leq i \leq r - 1, 1 \leq j \leq m$ ,

$$\beta(u_j^{(r+i-1)}) = (2r+i-3)m+1+j,$$

որտեղ  $2 \leq i \leq r-1, 1 \leq j \leq m,$

$$\beta(u_j^{(2r-1)}) = (r-1)m+j,$$

որտեղ  $1 \leq j \leq m,$

$$\alpha(u_j^{(2r)}) = (3r-3)m+1+j,$$

որտեղ  $1 \leq j \leq m:$

Այնուհետև ներկենք գրաֆի կողերի բազմությունը: Յուրաքանչյուր  $(u_p^{(i)}, u_q^{(j)}) \in E(K_{n,\dots,n}), 1 \leq i < j \leq 2r, 1 \leq p \leq m, 1 \leq q \leq m$  կողի համար սահմանենք  $\beta((u_p^{(i)}, u_q^{(j)}))$ -ն հետևյալ կերպ.

$$\beta((u_p^{(i)}, u_q^{(j)})) = (i+j-3)m+p+q,$$

որտեղ  $1 \leq i \leq \lfloor \frac{r}{2} \rfloor, 2 \leq j \leq r, i+j \leq r+1,$

$$\beta((u_p^{(i)}, u_q^{(j)})) = (i+j+r-5)m+p+q,$$

որտեղ  $2 \leq i \leq r-1, \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq r, i+j \geq r+2,$

$$\beta((u_p^{(i)}, u_q^{(j)})) = (r+j-i-2)m+p+q,$$

որտեղ  $3 \leq i \leq r, r+1 \leq j \leq 2r-2, j-i \leq r-2,$

$$\beta((u_p^{(i)}, u_q^{(j)})) = (j-i-2)m+p+q,$$

որտեղ  $1 \leq i \leq r-1, r+2 \leq j \leq 2r, j-i \geq r+1,$

$$\beta((u_p^{(i)}, u_q^{(j)})) = (2i-3)m+p+q,$$

որտեղ  $2 \leq i \leq 1 + \lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor, r+1 \leq j \leq r + \lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor, j-i = r-1,$

$$\beta((u_p^{(i)}, u_q^{(j)})) = (i+j-4)m+p+q,$$

որտեղ  $\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor + 2 \leq i \leq r, r+1 + \lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor \leq j \leq 2r-1, j-i = r-1,$

$$\beta((u_p^{(i)}, u_q^{(j)})) = (i+j-2r-1)m+p+q,$$

որտեղ  $r+1 \leq i \leq r + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 1, r+2 \leq j \leq 2r-2, i+j \leq 3r-1,$

$$\beta\left(\left(u_p^{(i)}, u_q^{(j)}\right)\right) = (i + j - r - 3)m + p + q,$$

որտեղ  $r+1 \leq i \leq 2r-1, r + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1 \leq j \leq 2r, i + j \geq 3r$ :

Ապացուցենք, որ  $\beta$ -ն հանդիսանում է  $K_{n, \dots, n}$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $\left(\left(\frac{3}{2}r-1\right)n+1\right)$ -ներկում: Նախ և առաջ ապացուցենք, որ յուրաքանչյուր

$c \in \left[1, \left(\frac{3}{2}r-1\right)n+1\right]$  թվի համար գոյություն ունի  $ve \in VE(K_{n, \dots, n})$  այնպիսին, որ  $\beta(ve) = c$ :

Դիտարկենք  $u_1^{(1)}, \dots, u_m^{(1)}$  և  $u_1^{(2r)}, \dots, u_m^{(2r)}$  գագաթները: Համաձայն  $\beta$  ներկման սահմանման՝

$$S[u_j^{(1)}, \beta] = S(u_j^{(1)}, \beta) \cup \{\beta(u_j^{(1)})\} = \left(\bigcup_{l=1}^{2r-2} ([j+1, j+m] \oplus (l-1)m)\right) \cup \{j\} = [j+1, (2r-2)m+j] \cup \{j\} = [j, (2r-2)m+j] \quad \text{և}$$

$$S[u_j^{(2r)}, \beta] = S(u_j^{(2r)}, \beta) \cup \{\beta(u_j^{(2r)})\} = \left(\bigcup_{l=r}^{3r-3} ([j+1, j+m] \oplus (l-1)m)\right) \cup \{(3r-3)m+1+j\} = [(r-1)m+1+j, (3r-3)m+j] \cup \{(3r-3)m+1+j\} = [(r-1)m+1+j, (3r-3)m+1+j],$$

որտեղ  $1 \leq j \leq m$ : Դիցուք  $\tilde{C} = \bigcup_{j=1}^m S[u_j^{(1)}, \beta]$  և

$$\tilde{C} = \bigcup_{j=1}^m S[u_j^{(2r)}, \beta]:$$

Դժվար չէ տեսնել, որ  $\tilde{C} \cup \tilde{C} = \left[1, \left(\frac{3}{2}r-1\right)n+1\right]$ , հետևաբար

ցանկացած  $c \in \left[1, \left(\frac{3}{2}r-1\right)n+1\right]$  գոյություն ունի  $ve \in VE(K_{n, \dots, n})$  այնպիսին, որ  $\beta(ve) = c$ :

Այժմ ցույց տանք, որ  $K_{n, \dots, n}$  - ի յուրաքանչյուր գագաթ իրեն կից կողերի հետ միասին ներկված են  $(r-1)n+1$  հաջորդական գույներով: Դիցուք  $u_j^{(i)} \in V(K_{n, \dots, n})$ , որտեղ  $1 \leq i \leq 2r, 1 \leq j \leq m$ :

**Ենթադեպք 2.1:**  $1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq m$ :

Համաձայն  $\beta$  ներկման սահմանման՝

$$S[u_j^{(1)}, \beta] = S(u_j^{(1)}, \beta) \cup \{\beta(u_j^{(1)})\} = \left(\bigcup_{l=1}^{2r-2} ([j+1, j+m] \oplus (l-1)m)\right) \cup \{j\} = [j+1, (2r-2)m+j] \cup \{j\} = [j, (2r-2)m+j] \quad \text{և}$$

$$S[u_j^{(2)}, \beta] = S(u_j^{(2)}, \beta) \cup \{\beta(u_j^{(2)})\} = \left(\bigcup_{l=1}^{2r-2} ([j+1, j+m] \oplus (l-1)m)\right) \cup \{(2r-2)m+1+j\} = [j+1, (2r-2)m+j] \cup \{(2r-2)m+1+j\} = [j+1, (2r-2)m+1+j]:$$

**Ենթադեպք 2.2:**  $3 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq m$ :

Համաձայն  $\beta$  ներկման սահմանման՝

$$S[u_j^{(i)}, \beta] = S(u_j^{(i)}, \beta) \cup \{\beta(u_j^{(i)})\} = \left( \bigcup_{l=i-1}^{2r-4+i} ([j+1, j+m] \oplus (l-1)m) \right) \cup \\ \cup \{(i-2)m+j\} = [(i-2)m+1+j, (2r-4+i)m+j] \cup \{(i-2)m+j\} = [(i-2)m+j, (2r-4+i)m+j]:$$

**Ենթադեպ 2.3:**  $r+1 \leq i \leq 2r-2, 1 \leq j \leq m$ :

Համաձայն  $\beta$  ներկման սահմանման՝

$$S[u_j^{(i)}, \beta] = S(u_j^{(i)}, \beta) \cup \{\beta(u_j^{(i)})\} = \left( \bigcup_{l=i-r+1}^{r-2+i} ([j+1, j+m] \oplus (l-1)m) \right) \cup \{(r+i-2)m+1+j\} = \\ = [(i-r)m+1+j, (r+i-2)m+j] \cup \{(r+i-2)m+1+j\} = [(i-r)m+1+j, (r+i-2)m+1+j]:$$

**Ենթադեպ 2.4:**  $2r-1 \leq i \leq 2r, 1 \leq j \leq m$ :

Համաձայն  $\beta$  ներկման սահմանման՝

$$S[u_j^{(2r-1)}, \beta] = S(u_j^{(2r-1)}, \beta) \cup \{\beta(u_j^{(2r-1)})\} = \left( \bigcup_{l=r}^{3r-3} ([j+1, j+m] \oplus (l-1)m) \right) \cup \\ \cup \{(r-1)m+j\} = [(r-1)m+1+j, (3r-3)m+j] \cup \{(r-1)m+j\} = [(r-1)m+j, (3r-3)m+j] \quad \text{և} \\ S[u_j^{(2r)}, \beta] = S(u_j^{(2r)}, \beta) \cup \{\beta(u_j^{(2r)})\} = \left( \bigcup_{l=r}^{3r-3} ([j+1, j+m] \oplus (l-1)m) \right) \cup \{(3r-3)m+1+j\} = \\ = [(r-1)m+1+j, (3r-3)m+j] \cup \{(3r-3)m+1+j\} = [(r-1)m+1+j, (3r-3)m+1+j]:$$

Սա ցույց է տալիս, որ  $\beta$ -ն հանդիսանում է  $K_{n, \dots, n}$  գրաֆի միջակայքային տոտալ

$\left( \left( \frac{3}{2}r-1 \right) n+1 \right)$ - ներկում: Հետևաբար  $W_r(K_{n, \dots, n}) \geq \left( \frac{3}{2}r-1 \right) n+1$  երբ  $r \geq 2$  և զույգ է:  $\blacktriangleleft$

### 1.3 $n$ -չափանի խորանարդի միջակայքային տոտալ ներկումներ

Առաջին անգամ  $n$ -չափանի խորանարդի ( $Q_n$ ) միջակայքային ներկման մասին խոսվել է Պ. Ա. Պետրոսյանի կողմից՝ [25] - ում: Մասնավորապես, նշված հոդվածում ապացուցվել է, որ ցանկացած  $n \in \mathbb{N}$  բնական թվի համար  $Q_n \in \mathcal{N}$ ,  $w(Q_n) = n$ ,  $W(Q_n) \geq \frac{n(n+1)}{2}$ , և եթե  $n \leq t \leq \frac{n(n+1)}{2}$ , ապա  $Q_n$ -ն ունի միջակայքային  $t$ -ներկում: Այնուհետև [30] - ում Պ. Ա. Պետրոսյանի, Հ. Հ. Խաչատրյանի և Հ. Գ. Թանանյանի կողմից ապացուցվել է, որ  $W(Q_n) = \frac{n(n+1)}{2}$ : Պնդում 1.1.1 - ից հետևում է, որ  $Q_n \in \mathcal{T}$  և  $w_r(Q_n) = n+1$  երբ  $n \geq 3$ : Այս բաժնում ուսումնասիրում ենք  $n$ -չափանի խորանարդի միջակայքային տոտալ ներկումները և ստանում ճշգրիտ արժեք գույների առավելագույն քանակի համար:

**Լեմմա 1.3.1:** Եթե  $n+1 \leq t \leq 2n$  ( $n \geq 3$ ), ապա  $Q_n$ -ն ունի միջակայքային տոտալ  $t$ -ներկում:

**Ապացույց:** Համաձայն վերոնշյալի  $Q_n \in \mathcal{T}$  և  $w_r(Q_n) = n+1$  երբ  $n \geq 3$ : Այժմ ենթադրենք, որ  $n+2 \leq t \leq 2n$ : Դիցուք  $U = \{\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \tilde{\alpha} \in V(Q_n) \text{ և } \|\tilde{\alpha}\| - \text{ը գույգ է}\}$ , և  $V = \{\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n) \mid \tilde{\beta} \in V(Q_n) \text{ և } \|\tilde{\beta}\| - \text{ը կենտ է}\}$ : Համաձայն [25] - ի, գոյություն ունի  $Q_n$ -ի  $\alpha$  միջակայքային  $(t-2)$ -ներկում:  $Q_n$  գրաֆի համար սահմանենք  $\beta$  կողային ներկումը հետևյալ կերպ.

$$\forall e \in E(Q_n) - \text{ի համար } \beta(e) = \alpha(e) + 1:$$

Ակնհայտ է, որ  $\forall v \in V(Q_n)$ -ի համար  $S(v, \beta)$ -ն միջակայք է: Այժմ կառուցենք  $Q_n$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $t$ -ներկում: Սահմանենք  $Q_n$ -ի  $\gamma$  տոտալ ներկումը հետևյալ կերպ.

1.  $\forall v \in V(Q_n)$ -ի համար  $\gamma(v) = \begin{cases} \min S(v, \beta) - 1, & \text{եթե } v \in U, \\ \max S(v, \beta) + 1, & \text{եթե } v \in V, \end{cases}$
2.  $\forall e \in E(Q_n)$ -ի համար  $\gamma(e) = \beta(e)$ :

Դժվար չէ տեսնել, որ  $\gamma$ -ն հանդիսանում է  $Q_n$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $t$ -ներկում երբ  $n \geq 3$ :  $\dashv$

Դիցուք  $\alpha$ -ն հանդիսանում է  $G$  կապակցված գրաֆի միջակայքային տոտալ  $t$ -ներկում: Դիցուք  $e, e' \in VE(G)$ . Սահմանենք  $sp_\alpha(e, e')$  -ը հետևյալ կերպ.

$$sp_\alpha(e, e') = |\alpha(e) - \alpha(e')|:$$

Ցանկացած  $k, 0 \leq k \leq d(G)$  թվի համար սահմանենք  $sp_{\alpha, k}$  -ն հետևյալ կերպ.

$$sp_{\alpha, k} = \max\{sp_\alpha(e, e') \mid e, e' \in VE(G) \text{ և } d_G(e, e') = k\}:$$

**Լեմմա 1.3.2:** Կամայական  $u, v \in V(Q_n)$  գագաթների զույգի համար եթե  $d_G(u, v) = k$ , ապա գոյություն ունեն  $v_1, v_2, \dots, v_k (v_i \neq v_j, \text{ եթե } i \neq j)$  գագաթներ այնպիսին, որ  $d_G(u, v_i) = k-1$  և  $(v, v_i) \in E(Q_n), 1 \leq i \leq k$ :

Ապացույցն ակնհայտ է:  $\dashv$

Այժմ ենթադրենք, որ  $\alpha$ -ն հանդիսանում է  $Q_n$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $W_\tau(Q_n)$ -ներկում: Ակնհայտ է, որ  $sp_{\alpha, 0} = n$ :

**Լեմմա 1.3.3:** Եթե  $1 \leq i \leq k$ , ապա  $sp_{\alpha, k} \leq sp_{\alpha, k-1} + n + 1 - k$ :

**Ապացույց:** Դիցուք  $e, e' \in VE(Q_n)$  հանդիսանում են  $Q_n$  գրաֆի կամայական երկու էլեմենտներ այնպիսին, որ  $d_G(e, e') = k$  և  $\alpha(e) \geq \alpha(e')$ : Քանի որ  $d_G(e, e') = k$ , գոյություն ունեն  $u$  և  $v$  գագաթներ այնպիսին, որ  $u \in e$  և  $v \in e'$  և  $d_G(u, v) = k$ : Համաձայն Լեմմա 1.4.3 - ի, գոյություն ունեն  $v_1, v_2, \dots, v_k (v_i \neq v_j, \text{ եթե } i \neq j)$  գագաթներ այնպիսին, որ  $d_G(u, v_i) = k-1$  և  $(v, v_i) \in E(Q_n), 1 \leq i \leq k$ : Քանի որ  $Q_n$  -ը  $n$ -համասեռ է, ապա

$$\min_{1 \leq i \leq k} \alpha(v_i, v) \leq \alpha(e') + n + 1 - k: \quad (*)$$

Դիցուք  $\alpha(e'') = \min_{1 \leq i \leq k} \alpha(v_i, v)$ : Համաձայն  $(*)$ -ի կունենանք  $\alpha(e') \geq \alpha(e'') - (n + 1 - k)$  և  $d_G(e, e'') = k - 1$ : Հետևաբար

$$sp_\alpha(e, e') = |\alpha(e) - \alpha(e')| \leq |\alpha(e) - \alpha(e'') + n + 1 - k| \leq |\alpha(e) - \alpha(e'')| + n + 1 - k \leq sp_{\alpha, k-1} + n + 1 - k: \quad \dashv$$

**Հետևանք 1.3.1:** Եթե  $n \in \mathbb{N}$ , ապա  $sp_{\alpha, n} \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ :



**Ապացույց:** Ապացույցը հեշտությամբ ստացվում է՝ կիրառելով ինդուկցիայի մեթոդն ըստ  $k$ -ի:  $\lrcorner$

**Հետևանք 1.3.2:** Եթե  $n \in \mathbb{N}$ , ապա  $W_\tau(Q_n) \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ :

**Ապացույց:** Ակնհայտ է, որ կամայական  $e, e' \in VE(Q_n)$  համար  $d_G(e, e') \leq n$ :

Այստեղից և Հետևանք 1.3.1 - ից հետևում է, որ  $W_\tau(Q_n) \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ :  $\lrcorner$

**Թեորեմ 1.3.1:** Եթե  $n \in \mathbb{N}$ , ապա

$$1. \quad W_\tau(Q_n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

2. Եթե  $w_\tau(Q_n) \leq t \leq W_\tau(Q_n)$ , ապա  $Q_n$ -ն ունի միջակայքային տոտալ  $t$ -ներկում:

**Ապացույց:** Նախ ապացուցենք թեորեմի 2 - րդ կետը: Ակնհայտ է, որ 2 - ը ճիշտ է երբ  $n \leq 3$ : Այժմ ենթադրենք, որ  $n \geq 4$ : Ապացուցենք, որ եթե  $n+1 \leq t \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ , ապա  $Q_n$ -ն ունի միջակայքային տոտալ  $t$ -ներկում: Ենթադրենք պնդումը ճիշտ է կամայական  $4 \leq n' \leq n-1$  դեպքում և ապացուցենք  $n$ -ի համար: Համաձայն Լեմմա 1.4.1 - ի ունենք, որ  $2n+1 \leq t \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ : Դիցուք  $Q_{n-1}^{(i)}$  հանդիսանում է  $Q_n$ -ի ենթագրաֆ ծնված  $\{(i, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \mid (\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \in \{0,1\}^{n-1}\}$  գազաթներով ( $i=0,1$ ): Ակնհայտ է, որ  $Q_{n-1}^{(i)}$ -ն իզոմորֆ է  $Q_{n-1}$ -ին ( $i=0,1$ ): Համաձայն Լեմմա 1.4.1 - ի,  $Q_{n-1}^{(i)} \in \mathcal{T}$  ( $i=0,1$ ): Դիցուք  $\varphi$ -ն հանդիսանում է  $Q_{n-1}^{(0)}$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $(t-n-1)$ -ներկում (համաձայն ինդուկցիոն ենթադրության):  $Q_{n-1}^{(1)}$  գրաֆի համար սահմանենք  $\psi$  տոտալ ներկումը հետևյալ կերպ.

$$\psi\left(\left((1, \tilde{\alpha}), (1, \tilde{\beta})\right)\right) = \varphi\left(\left((0, \tilde{\alpha}), (0, \tilde{\beta})\right)\right) + n + 1,$$

որտեղ  $\left((1, \tilde{\alpha}), (1, \tilde{\beta})\right) \in E(Q_{n-1}^{(1)})$ ,

$$\psi\left((1, \tilde{\alpha})\right) = \varphi\left((0, \tilde{\alpha})\right) + n + 1,$$

որտեղ  $(1, \tilde{\alpha}) \in V(Q_{n-1}^{(1)})$ :

Այժմ սահմանենք  $Q_n$ -ի  $\pi$  տոտալ ներկումը հետևյալ կերպ.

$$\forall \tilde{\alpha} \in V(Q_n) \text{ համար } \pi(\tilde{\alpha}) = \begin{cases} \varphi(\tilde{\alpha}), & \text{եթե } \tilde{\alpha} \in V(Q_{n-1}^{(0)}), \\ \psi(\tilde{\alpha}), & \text{եթե } \tilde{\alpha} \in V(Q_{n-1}^{(1)}), \end{cases}$$

$$\forall(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in E(Q_n) \text{ համար } \pi((\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})) = \begin{cases} \varphi((\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})), & \text{եթե } (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in E(Q_{n-1}^{(0)}), \\ \min S[\tilde{\alpha}, \varphi] + n, & \text{եթե } \tilde{\alpha} \in V(Q_{n-1}^{(0)}), \tilde{\beta} \in V(Q_{n-1}^{(1)}) \\ \psi((\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})), & \text{եթե } (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in E(Q_{n-1}^{(1)}): \end{cases}$$

Դժվար չէ տեսնել, որ  $\pi$ -ն հանդիսանում է  $Q_n$ -ի միջակայքային տոտալ ներկում:

Այստեղից հետևում է, որ կամայական  $n+1 \leq t \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2}$  համար  $Q_n$ -ն ունի

միջակայքային տոտալ  $t$ -ներկում և  $W_t(Q_n) \geq \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ : Մյուս կողմից, համաձայն

Հետևանք 1.3.2-ի  $W_t(Q_n) \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ , հետևաբար  $W_t(Q_n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ :  $\dashv$

## 1.4 Բլոկների գրաֆների միջակայքային տոտալ ներկումներ

Այս բաժնում նկարագրում ենք ալգորիթմ, որը կառուցում է միջակայքային տոտալ ներկում տրված  $G$  բլոկների գրաֆի համար և ստանում ենք որոշակի գնահատականներ  $w_\tau(G)$  և  $W_\tau(G)$  պարամետրերի համար: Դիցուք  $G$ -ն բլոկների գրաֆ է՝  $C_1, C_2, \dots, C_n$  բլոկներով: Հայտնի է, որ բոլոր բլոկները կլիկաներ են: Դիցուք  $V(G) = V(C_1) \cup V(C_2) \cup \dots \cup V(C_n)$  և  $E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \dots \cup E(C_n)$ :  $G$  գրաֆի բլոկների  $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_m}$  հաջորդականությունը, որտեղ  $C_{i_p} \neq C_{i_q}, 1 \leq p < q \leq m$  կանվանենք կլիկաների  $P(C_{i_1}, C_{i_m})$  շղթա  $G$ -ում եթե  $V(C_{i_j}) \cap V(C_{i_{j+1}}) \neq \emptyset (1 \leq j \leq m-1)$ :  $G$  գրաֆի կլիկաների  $P(C_{i_1}, C_{i_m})$  շղթայի համար սահմանենք  $MP(C_{i_1}, C_{i_m})$ -ը և  $LP(C_{i_1}, C_{i_m})$ -ը հետևյալ կերպ՝

$$MP(C_{i_1}, C_{i_m}) = \sum_{j=1}^{m-1} d_G(V(C_{i_j}) \cap V(C_{i_{j+1}})), \quad LP(C_{i_1}, C_{i_m}) = m:$$

$G$  գրաֆի այն  $P(C_{i_1}, C_{i_m})$  կլիկաների շղթան, որի համար  $MP(C_{i_1}, C_{i_m})$  - ն հասնում է իր հնարավոր առավելագույն արժեքին, կանվանենք  $G$ -ի ծանրագույն շղթա: Թեորեմ 1.1.2 - ի համաձայն, ցանկացած  $C$  կլիկա ունի միջակայքային տոտալ  $\alpha$  ներկում  $1, 2, \dots, 2|V(C)|-1$  գույներով, ընդ որում  $W_\tau(C) = 2|V(C)|-1$ : Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ  $C$  կլիկայում մենք կարող ենք ընտրել  $v$  և  $v'(v \neq v')$  գագաթներ այնպես, որ  $1 \in S[v, \alpha]$  և  $(2|V(C)|-1) \in S[v', \alpha]$ : Դիցուք  $P(C_{i_1}, C_{i_m})$  - ն հանդիսանում է  $G$  գրաֆի կլիկաների ծանրագույն շղթա: Կառուցենք  $G$  գրաֆի տոտալ ներկում հետևյալ կերպ.

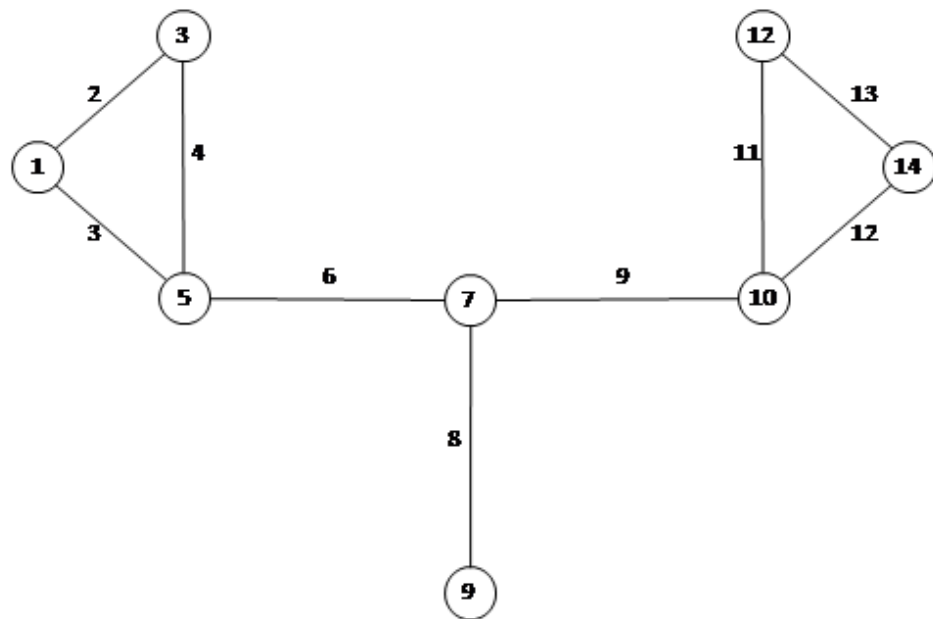
**Քայլ 1.** Սկզբում ներկում ենք  $C_{i_1}$  կլիկայի գագաթների և կողերի բազմությունը միջակայքային տոտալ տարբերակով այնպես, որ  $(2|V(C_{i_1})|-1) \in S[V(C_{i_1}) \cap V(C_{i_2}), \beta_1]$ , որտեղ  $\beta_1$  - ը  $C_{i_1}$  կլիկայի վերոնշյալ ներկումն է:

**Քայլ 2.** Հաջորդիվ ներկում ենք  $C_{i_2}, \dots, C_{i_{m-1}}$  կլիկաները միջակայքային տոտալ տարբերակով այնպես, որ յուրաքանչյուր  $C_{i_j}$  ներկվի  $k_j, 1+k_j, \dots, 2|V(C_{i_j})|-2+k_j$  գույներով ( $k_j = \sum_{p=1}^{j-1} (2|V(C_{i_p})|-2 + l_G(V(C_{i_p}) \cap V(C_{i_{p+1}}))) - 1$  և  $l_G(v)$  - ն  $v$  - ն  $P(C_{i_1}, C_{i_m})$  - ի

միակցման կետ է) այն կողերի քանակն է, որոնք կից են  $v$  - ին և չեն պատկանում  $P(C_i, C_m)$  - ին), ինչպես նաև  $(2|V(C_i)|-2+k_i) \in S[V(C_i) \cap V(C_{i+1}), \beta_j]$  և  $k_i$  - ն  $V(C_{i-1}) \cap V(C_i)$  գագաթի գույնն է, որտեղ  $\beta_j$  - ն  $C_i$  կլիկայի վերոնշյալ ներկումն է: Այնուհետև վերաներկում ենք  $V(C_{i-1}) \cap V(C_i)$  գագաթը  $\beta_{j-1}(V(C_{i-1}) \cap V(C_i))$  գույնով: Եթե կան  $C_i$  - ից տարբեր չներկված բլոկներ, որոնք կից են  $V(C_{i-1}) \cap V(C_i)$  - ին, ապա նախքան  $C_i$  բլոկի ներկելը ներկում ենք բոլոր այդ բլոկները՝ Քայլ 4 - ի համաձայն:

**Քայլ 3.** Ալգորիթմի այս քայլն աշխատում է ամենավերջում: Այս քայլում ներկում ենք  $C_m$  կլիկայի գագաթների և կողերի բազմությունը  $k_m, 1+k_m, \dots, 2|V(C_m)|-2+k_m$  գույներով միջակայքային տոտալ տարբերակով, որից հետո վերաներկում ենք  $V(C_{m-1}) \cap V(C_m)$  գագաթը  $\beta_{m-1}(V(C_{m-1}) \cap V(C_m))$  գույնով:

**Քայլ 4.** Եթե ունենք չներկված  $C_r$  կլիկա, որը կից է որևէ ներկված  $C_s$  կլիկայի, ապա վերցնում ենք  $C_r$  կլիկայի կամայական միջակայքային տոտալ  $\sigma$  ներկում այնպիսին, որ  $1 \in S[V(C_r) \cap V(C_s), \sigma]$  և տեղաշարժում ենք բոլոր գույները  $a-1$ -ով, որտեղ  $a$ -ն  $V(C_r) \cap V(C_s)$  սպեկտրի առավելագույն գույնն է: Այնուհետև վերաներկում ենք  $V(C_r) \cap V(C_s)$  գագաթը իր նախորդ գույնով:



Նկ. 1.4.1

Դժվար չէ տեսնել, որ ստացված ներկումը հանդիսանում է  $G$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $\left(2\sum_{j=1}^m |V(C_{i_j})| - 2LP(C_{i_1}, C_{i_m}) + \sum_{j=1}^{m-1} l_G(V(C_{i_j}) \cap V(C_{i_{j+1}})) + 1\right)$  - ներկում, ինչը նշանակում է, որ  $W_\tau(G) \geq 2\sum_{j=1}^m |V(C_{i_j})| - 2LP(C_{i_1}, C_{i_m}) + \sum_{j=1}^{m-1} l_G(V(C_{i_j}) \cap V(C_{i_{j+1}})) + 1$  (Նկ. 1.4.1):

Այժմ ցույց տանք, որ  $W_\tau(G) \leq 2\sum_{j=1}^m |V(C_{i_j})| - 2LP(C_{i_1}, C_{i_m}) + \sum_{j=1}^{m-1} l_G(V(C_{i_j}) \cap V(C_{i_{j+1}})) + 1$ :

Դիցուք գոյություն ունի  $G$  գրաֆի  $\gamma$  միջակայքային տոտալ  $t$  - ներկում և  $t > 2\sum_{j=1}^m |V(C_{i_j})| - 2LP(C_{i_1}, C_{i_m}) + \sum_{j=1}^{m-1} l_G(V(C_{i_j}) \cap V(C_{i_{j+1}})) + 1$ : Դիցուք  $C_{p_1}$  -ը և  $C_{p_2}$  -ը այնպիսի բլոկներ են, որոնց համար  $1 \in \bigcup_{v \in V(C_{p_1})} S[v, \gamma]$  և  $t \in \bigcup_{v \in V(C_{p_2})} S[v, \gamma]$  (հնարավոր է, որ  $p_1 = p_2$ ):

Դիցուք  $P'(C_{q_1}, C_{q_s})$  -ը  $G$  գրաֆի կիկանների շղթա է, ընդ որում  $C_{q_1} = C_{p_1}$  և  $C_{q_s} = C_{p_2}$  (այն դեպքում, երբ  $q_1 = q_s$ , կվերցնենք  $C_{q_1} = C_{q_s} = P'(C_{q_1}, C_{q_s})$ ): Դժվար չէ տեսնել, որ

$$t \leq 2\sum_{j=1}^s |V(C_{q_j})| - 2LP'(C_{q_1}, C_{q_s}) + \sum_{j=1}^{s-1} l_G(V(C_{q_j}) \cap V(C_{q_{j+1}})) + 1 \leq$$

$$2\sum_{j=1}^m |V(C_{i_j})| - 2LP(C_{i_1}, C_{i_m}) + \sum_{j=1}^{m-1} l_G(V(C_{i_j}) \cap V(C_{i_{j+1}})) + 1, \quad \text{որը հակասում է մեր}$$

ենթադրությանը: Այսպիսով, մենք ունենք, որ

$$W_\tau(G) = 2\sum_{j=1}^m |V(C_{i_j})| - 2LP(C_{i_1}, C_{i_m}) + \sum_{j=1}^{m-1} l_G(V(C_{i_j}) \cap V(C_{i_{j+1}})) + 1:$$

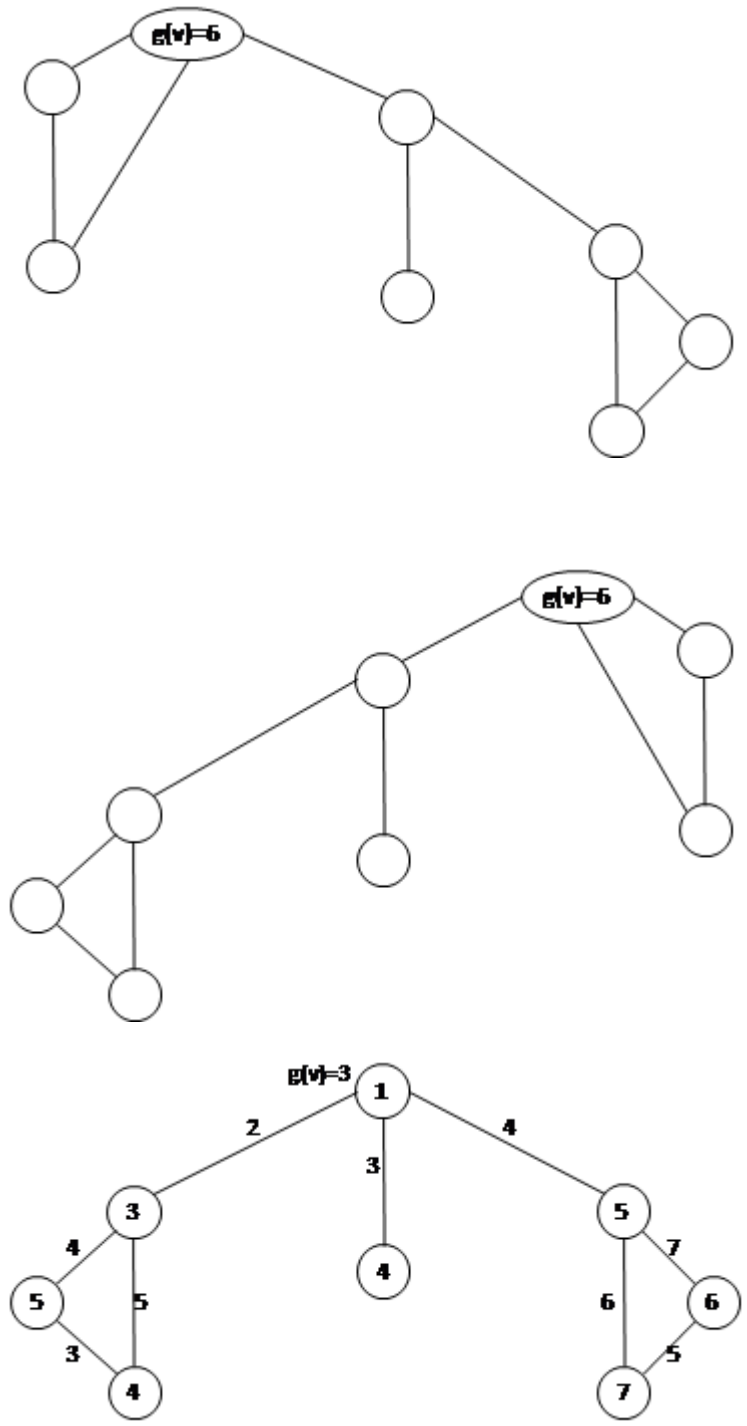
Այժմ տանք որոշակի վերին գնահատական  $G$  բլոկների գրաֆի  $w_\tau(G)$  պարամետրի համար: Դիցուք  $v$  - ն  $G$  գրաֆի միակցման կետ է: Սահմանենք  $g(v)$  - ն հետևյալ կերպ.

$$g(v) = \max_{P_v(C_{i_p}, C_{i_q}), v \in V(C_{i_p})} MP_v(C_{i_p}, C_{i_q}):$$

Դիցուք  $P_v^*(C_{i_p}^*, C_{i_q}^*)$  -ը բլոկների շղթա է, որի համար  $g(v)$  - ն հասանելի է և  $v^*$  - ը այն գագաթն է, որի համար

$$g(v^*) = \min_{v \in V(G)} g(v):$$

Դիցուք  $P_v^*(C_{i_p}^*, C_{i_q}^*)$ -ը բլոկների շղթա է, որի համար  $g(v^*)$  - ը հասանելի է (Նկ. 1.4.2):



Նկ. 1.4.2

Համաձայն Թեորեմ 1.1.2 – ի,  $w_\tau(C_n) \leq \frac{3}{2}n$ : Հաշվի առնելով այս փաստը և Նշում (\*) – ը, ինչպես նաև կիրառելով նույն ալգորիթմը՝ կունենանք, որ  $G$ -ն ունի միջակայքային տոտալ ներկում ոչ ավել քան  $\frac{3}{2} \sum_{j=p}^q |V(C_{i_j}^*)| - LP_{V^*}^*(C_{i_p}^*, C_{i_q}^*) + \sum_{j=p}^{q-1} l_G(V(C_{i_j}^*) \cap V(C_{i_{j+1}}^*)) + 1$  գույներով: Հիմնվելով վերոնշյալ արդյունքների վրա՝ կարող ենք ձևակերպել հետևյալ թեորեմը.

**Թեորեմ 1.4.1:** Եթե  $G$  - ն բլոկների գրաֆ է, ապա

$$(1) G \in T,$$

$$(2) W_\tau(G) = 2 \sum_{j=1}^m |V(C_{i_j})| - 2LP(C_{i_1}, C_{i_m}) + \sum_{j=1}^{m-1} l_G(V(C_{i_j}) \cap V(C_{i_{j+1}})) + 1,$$

$$(3) w_\tau(G) \leq \frac{3}{2} \sum_{j=p}^q |V(C_{i_j}^*)| - LP_{V^*}^*(C_{i_p}^*, C_{i_q}^*) + \sum_{j=p}^{q-1} l_G(V(C_{i_j}^*) \cap V(C_{i_{j+1}}^*)) + 1.$$

Ստացված արդյունքն ընդհանրացնում է լրիվ գրաֆների [24, 35] և ծառերի [32] համար ստացված համանման արդյունքները, որովհետև այդ գրաֆները ևս հանդիսանում են բլոկների գրաֆներ:

## 1.5 Հովհարների և անիվների միջակայքային տոտալ ներկումներ

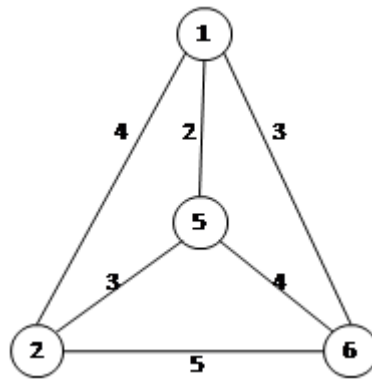
Այս բաժնում կրիտարկենք հովհարների և անիվների [10, 48] միջակայքային տոտալ ներկումները և կստանանք այդ ներկումներում մասնակցող գույների քանակների բոլոր հնարավոր արժեքները:

**Լեմմա 1.5.1:** Եթե  $\alpha$ -ն որևէ  $G$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $t$ -ներկում է, ապա  $\beta$  ներկումը, որտեղ

1.  $\beta(v) = t + 1 - \alpha(v)$  ( $\forall v \in V(G)$  համար),
2.  $\beta(e) = t + 1 - \alpha(e)$  ( $\forall e \in E(G)$  համար),

ևս հանդիսանում է  $G$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $t$ -ներկում:

**Ապացույց:** Պարզ է, որ  $\beta$  ներկման դեպքում յուրաքանչյուր  $i$  գույնով ( $1 \leq i \leq t$ ) ներկվում է գոնե մեկ գագաթ կամ աղեղ: Քանի որ  $\forall v \in V(G)$ -ի համար  $S[v, \alpha]$ -ն հանդիսանում է միջակայք, ապա կունենանք՝  $S[v, \alpha] = [a, b]$ , որտեղ  $a, b \in \mathbb{N}$  և  $a \leq b$ : Այստեղից և  $\beta$  ներկման սահմանումից հետևում է, որ  $\forall v \in V(G)$  համար  $S[v, \beta] = [t + 1 - b, t + 1 - a]$ :  $\lrcorner$



Նկ. 1.5.1

Դիցուք  $W_n$ -ը գագաթների  $V(W_n) = \{u, v_1, \dots, v_{n-1}\}$  և կողերի  $E(W_n) = \{(v_i, v_{i+1}) \mid 1 \leq i \leq n-2\} \cup \{(v_1, v_{n-1})\} \cup \{(u, v_i) \mid 1 \leq i \leq n-1\}$  բազմությամբ “Տատտի անիվ” է:

**Լեմմա 1.5.2:** Ցանկացած  $n \geq 4$  դեպքում  $W_n \in T$  և



$$w_\tau(W_n) = \begin{cases} n+2, & \text{եթե } n=4, \\ n, & \text{եթե } n \geq 5: \end{cases}$$

**Ապացույց:** Նկար 1.5.1 - ից հետևում է, որ  $W_4 \in T$  և  $w_\tau(W_4) \leq 6$ : Մյուս կողմից դժվար չէ համոզվել, որ  $w_\tau(W_4) \geq 6$ :

Այժմ ենթադրենք  $n \geq 5$ :

Ցույց տանք, որ  $\exists W_n$  գրաֆի միջակայքային տոտալ ներկում  $n$  գույների միջոցով:

Սահմանենք  $W_n$  գրաֆի գագաթների և կողերի  $\lambda$ -ներկում:

**Դեպք 1:**  $n$ -ը գույգ թիվ է.

$$\lambda(u) = n, \lambda(v_1) = 2, \lambda(v_i) = 2i + 1,$$

որտեղ  $2 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$ ,

$$\lambda\left(v_{\frac{n}{2}}\right) = n - 2, \lambda\left(v_{\frac{n}{2}+1}\right) = n - 4, \lambda(v_j) = 2(n - j + 1),$$

որտեղ  $\frac{n}{2} + 2 \leq j \leq n - 1$ ,

$$\lambda((u, v_k)) = 2k - 1,$$

որտեղ  $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ ,

$$\lambda((u, v_l)) = 2(n - l),$$

որտեղ  $\frac{n}{2} + 1 \leq l \leq n - 1$ ,

$$\lambda\left(\left(v_{\frac{n}{2}}, v_{\frac{n}{2}+1}\right)\right) = n - 3, \lambda((v_p, v_{p+1})) = 2(p + 1),$$

որտեղ  $1 \leq p \leq \frac{n}{2} - 1$ ,

$$\lambda((v_1, v_{n-1})) = 3, \lambda((v_q, v_{q+1})) = 2(n - q) + 1,$$

որտեղ  $\frac{n}{2} + 1 \leq q \leq n - 2$ :

**Դեպք 2:**  $n$ -ը կենտ թիվ է.

$$\lambda(u) = n, \lambda(v_1) = 2, \lambda(v_i) = 2i + 1,$$

որտեղ  $2 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$ ,

$$\lambda\left(v_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right) = n-4, \quad \lambda\left(v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\right) = n-2, \quad \lambda(v_j) = 2(n-j+1),$$

$$\text{որտեղ } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq j \leq n-1,$$

$$\lambda((u, v_k)) = 2k-1,$$

$$\text{որտեղ } 1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor,$$

$$\lambda((u, v_l)) = 2(n-l),$$

$$\text{որտեղ } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq l \leq n-1,$$

$$\lambda\left(\left(v_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\right)\right) = n-3, \quad \lambda((v_p, v_{p+1})) = 2(p+1),$$

$$\text{որտեղ } 1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1,$$

$$\lambda((v_1, v_{n-1})) = 3, \quad \lambda((v_q, v_{q+1})) = 2(n-q)+1,$$

$$\text{որտեղ } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq q \leq n-2,$$

Դժվար չէ տեսնել, որ  $\lambda$ -ն հանդիսանում է  $w_n$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $n$ -ներկում: Այստեղից հետևում է, որ  $W_n \in \mathcal{T}$  և  $w_\tau(W_n) \leq n$ :  $\blacktriangleleft$

**Լեմմա 1.5.3:** Ցանկացած  $n \geq 5$  դեպքում  $W_n \in \mathcal{T}_{n+1}$  և  $W_n \in \mathcal{T}_{n+2}$ :

**Ապացույց:** Նախ ցույց տանք, որ  $n \geq 5$  դեպքում  $W_n \in \mathcal{T}_{n+2}$ :

Սահմանենք  $w_n$  գրաֆի գագաթների և կողերի  $\lambda$ -ներկում հետևյալ կերպ.

$$\lambda(u) = 1, \quad \lambda(v_1) = 3,$$

$$\lambda(v_i) = 2(i+1),$$

$$\text{որտեղ } 2 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1,$$

$$\lambda\left(v_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right) = n-1,$$

$$\lambda(v_j) = 2(n-j)+3,$$

$$\text{որտեղ } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq j \leq n-1,$$

$$\lambda((u, v_k)) = 2k,$$

որտեղ  $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$

$$\lambda((u, v_l)) = 2(n-l)+1,$$

որտեղ  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq l \leq n-1,$

$$\lambda((v_p, v_{p+1})) = 2p+3,$$

որտեղ  $1 \leq p \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor,$

$$\lambda((v_q, v_{q+1})) = 2(n-q+1),$$

որտեղ  $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 \leq q \leq n-2,$

$$\lambda((v_1, v_{n-1})) = 4:$$

Դժվար չէ տեսնել, որ  $n \geq 5$  դեպքում  $\lambda$ -ն հանդիսանում է  $W_n$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $(n+2)$ -ներկում:

Այժմ ցույց տանք, որ  $n \geq 5$  դեպքում  $W_n \in T_{n+1}$ :

Սահմանենք  $W_n$  գրաֆի գագաթների և կողերի  $\mu$  ներկում հետևյալ կերպ.

1.  $\forall v \in V(W_n)$  համար  $\mu(v) = \lambda(v),$
2.  $\forall e \in E(W_n)$  համար

$$\mu(e) = \begin{cases} \lambda(e), & \text{եթե } \lambda(e) \neq n+2, \\ n-2, & \text{եթե } \lambda(e) = n+2: \end{cases}$$

Դժվար չէ համոզվել, որ  $n \geq 5$  դեպքում  $\mu$ -ն հանդիսանում է  $W_n$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $(n+1)$ -ներկում:  $\lrcorner$

**Լեմմա 1.5.4:** Ցանկացած  $n \geq 4$  դեպքում  $W_\tau(W_n) \geq n+3$ :

**Ապացույց:** Ցույց տանք, որ  $n \geq 4$  դեպքում  $\exists W_n$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $(n+3)$ - ներկում:

Սահմանենք  $W_n$  գրաֆի գագաթների և կողերի  $\mu$  ներկում:

**Դեպք1:**  $n-1$  զույգ թիվ է.

$$\mu(v_i) = 2i-1,$$

որտեղ  $1 \leq i \leq \frac{n}{2}+1,$

$$\mu(v_j) = 2(n - j + 1),$$

որտեղ  $\frac{n}{2} + 2 \leq j \leq n - 1,$

$$\mu((v_k, v_{k+1})) = 2k,$$

որտեղ

$$\mu((v_1, v_{n-1})) = 3, \mu((v_l, v_{l+1})) = 2(n - l) + 1,$$

որտեղ  $\frac{n}{2} + 1 \leq l \leq n - 2,$

$$\mu((u, v_1)) = 4, \mu((u, v_p)) = 2p + 1,$$

որտեղ  $2 \leq p \leq \frac{n}{2},$

$$\mu(u) = n + 3, \mu((u, v_q)) = 2(n - q + 2),$$

որտեղ  $\frac{n}{2} + 1 \leq q \leq n - 1:$

**Դեպք 2:**  $n - 1$  կենսո թիվ է.

$$\mu(v_i) = 2i - 1, \mu((v_i, v_{i+1})) = 2i,$$

որտեղ  $1 \leq i \leq \frac{n-1}{2},$

$$\mu(v_j) = 2(n - j + 1),$$

որտեղ  $\frac{n+1}{2} \leq j \leq n - 1,$

$$\mu((v_1, v_{n-1})) = 3, \mu((v_k, v_{k+1})) = 2(n - k) + 1,$$

որտեղ  $\frac{n+1}{2} \leq k \leq n - 2,$

$$\mu((u, v_1)) = 4, \mu((u, v_p)) = 2p + 1,$$

որտեղ  $2 \leq p \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,$

$$\mu(u) = n + 3, \mu((u, v_q)) = 2(n - q + 2),$$

որտեղ  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \leq q \leq n - 1:$

Դժվար չէ ստուգել, որ  $\mu$ -ն հանդիսանում է  $W_n$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $(n+3)$ - ներկում  $n \geq 4$  դեպքում:  $\blacktriangleleft$

**Լեմմա 1.5.5:** Ցանկացած  $n \geq 9$  դեպքում  $W_r(W_n) \geq n+4$ :

**Ապացույց:** Ապացուցենք, որ  $n \geq 9$  դեպքում  $\exists W_n$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $(n+4)$ - ներկում:

Սահմանենք  $W_n$  գրաֆի գագաթների և կողերի  $\mu$  ներկում:

**Դեպք 1:**  $n$ - ը զույգ թիվ է.

$$\mu(u) = 7, \mu(v_1) = 1, \mu(v_2) = 6, \mu(v_3) = 8, \mu(v_i) = 2i + 1,$$

որտեղ  $4 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1,$

$$\mu\left(v_{\frac{n-1}{2}}\right) = n + 2, \mu\left(v_{\frac{n}{2}}\right) = n + 4, \mu(v_{n-1}) = 3, \mu(v_j) = 2(n - j),$$

որտեղ  $\frac{n}{2} + 1 \leq j \leq n - 2,$

$$\mu((u, v_1)) = 3, \mu((u, v_2)) = 5, \mu((u, v_k)) = 2k + 3,$$

որտեղ  $3 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1,$

$$\mu((u, v_l)) = 2(n - l + 1),$$

որտեղ  $\frac{n}{2} \leq l \leq n - 1,$

$$\mu((v_1, v_2)) = 4, \mu((v_2, v_3)) = 7, \mu((v_p, v_{p+1})) = 2(p + 2),$$

որտեղ  $3 \leq p \leq \frac{n}{2} - 2,$

$$\mu((v_1, v_{n-1})) = 2, \mu((v_q, v_{q+1})) = 2(n - q),$$

որտեղ  $\frac{n}{2} - 1 \leq q \leq n - 2:$

**Դեպք 2:**  $n$ - ը կենտ թիվ է.

$$\mu(u) = 7, \mu(v_1) = 1, \mu(v_2) = 6, \mu(v_3) = 8, \mu(v_i) = 2i + 1,$$

որտեղ  $4 \leq i \leq \frac{n-3}{2},$

$$\lambda\left(v_{\frac{n-1}{2}}\right) = n + 4, \mu\left(v_{\frac{n+1}{2}}\right) = n + 2, \mu(v_{n-1}) = 3, \mu(v_j) = 2(n - j),$$

որստեղ  $\frac{n+3}{2} \leq j \leq n-2$ ,

$$\mu((u, v_1)) = 3, \mu((u, v_2)) = 5, \mu((u, v_k)) = 2k + 3,$$

որստեղ  $3 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ ,

$$\mu((u, v_l)) = 2(n-l+1),$$

որստեղ  $\frac{n+1}{2} \leq l \leq n-1$ ,

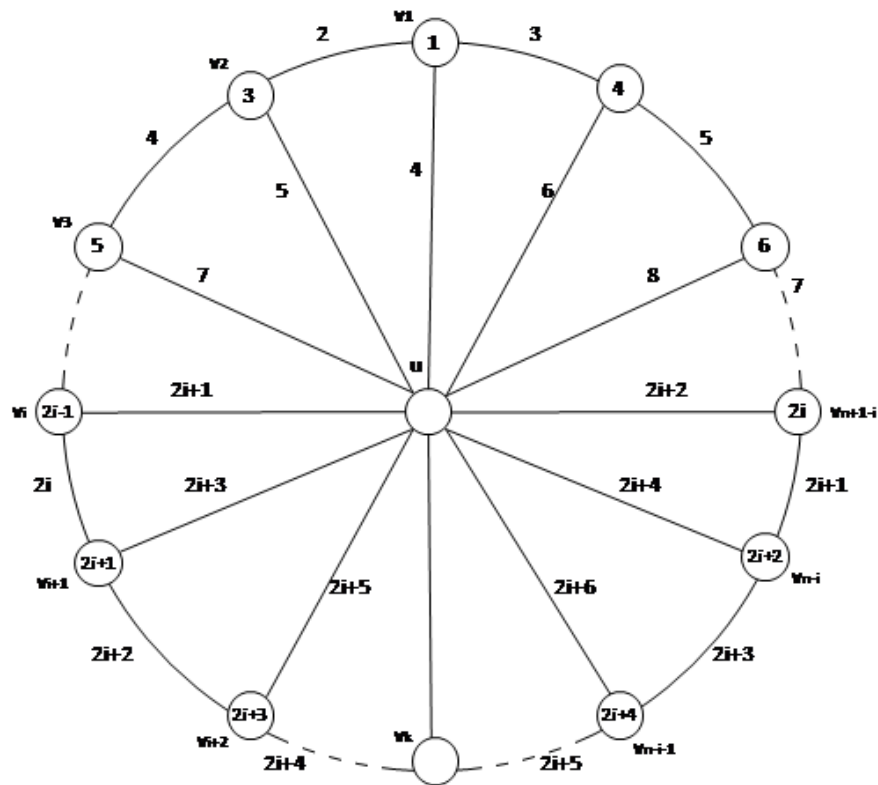
$$\mu((v_1, v_2)) = 4, \mu((v_2, v_3)) = 7, \mu((v_p, v_{p+1})) = 2(p+2),$$

որստեղ  $3 \leq p \leq \frac{n-1}{2}$ ,

$$\mu((v_1, v_{n-1})) = 2, \mu((v_q, v_{q+1})) = 2(n-q)+1,$$

որստեղ  $\frac{n+1}{2} \leq q \leq n-2$ :

Դժվար չէ ստուգել, որ  $\mu$ -ն հանդիսանում է  $W_n$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $(n+4)$ - ներկում  $n \geq 9$  դեպքում:  $\lrcorner$



Նկ. 1.5.2

**Լեմմա 1.5.6:** Ցանկացած  $n \geq 4$  դեպքում  $W_\tau(W_n) \leq n+4$ :

**Ապացույց:** Նախ ցույց տանք, որ  $n \geq 4$  դեպքում  $W_n \notin T_{n+5}$ :

Ենթադրենք, որ  $n \geq 4$  դեպքում  $\exists W_n$  գրաֆի  $\alpha$  միջակայքային տոտալ  $(n+5)$ -ներկում:

Դիտարկենք  $u$  գագաթը: Ակնհայտ է, որ

$$1 \leq \min S[u, \alpha] \leq 6:$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$n \leq \max S[u, \alpha] \leq n+5:$$

Լեմմա 1.5.1 - ից հետևում է, որ հնարավոր են հետևյալ դեպքերը՝

1)  $S[u, \alpha] = [6, n+5]$ ,

2)  $S[u, \alpha] = [5, n+4]$ ,

3)  $S[u, \alpha] = [4, n+3]$ :

**Դեպք 1:**  $S[u, \alpha] = [6, n+5]$  կամ  $S[u, \alpha] = [5, n+4]$ :

Ակնհայտ է, որ  $\forall 1 \leq i \leq n-1$  համար  $\alpha((u, v_i)) \geq 5$ : Այստեղից հետևում է, որ

$\forall 1 \leq i \leq n-1$  համար  $\min S[v_i, \alpha] \geq 2$ , ինչը բերում է հակասության:

Դեպք 1 - ի ապացույցն ավարտված է:

**Դեպք 2:**  $S[u, \alpha] = [4, n+3]$ :

Նախ ցույց տանք, որ  $\alpha(u) \neq 4$ : Ենթադրենք հակառակը՝  $\alpha(u) = 4$ : Այստեղից հետևում է, որ  $\forall 1 \leq i \leq n-1$  համար  $\alpha((u, v_i)) \geq 5$ , ինչը բերում է հակասության:

Որոշակիության համար ենթադրենք, որ  $e = (u, v_1)$  և  $\alpha(e) = 4$ :

Նկատենք, որ  $\alpha(v_1) = 1$ :

Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարելի է ենթադրել, որ  $\alpha((v_1, v_2)) = 2$ ,  $\alpha((v_1, v_{n-1})) = 3$ ,  $\alpha((u, v_2)) = 5$ ,  $\alpha((u, v_{n-1})) = 6$  և  $\exists v_k$  գագաթ այնպիսին, որ  $\alpha(v_k) = n+5$  կամ  $\alpha((v_k, v_{k+1})) = n+5$  (Նկ. 1.5.2):

Դիտարկենք  $P_1 = \{v_1, (v_1, v_2), v_2, \dots, v_k, (v_k, v_{k+1}), v_{k+1}\}$  և

$P_1 = \{v_{n-1}, (v_{n-1}, v_{n-2}), v_{n-2}, \dots, v_{k+1}, (v_{k+1}, v_k), v_k\}$  պարզ ցիկլերը, որտեղ  $1 \leq k \leq n-2$ :

Ցույց տանք, որ  $\forall 2 \leq i \leq k$  համար

1.  $\alpha(v_i) = 2i-1, \alpha((v_i, v_{i+1})) = 2i, \alpha((u, v_i)) = 2i+1$ ,

2.  $\alpha(v_{n+1-i}) = 2i, \alpha((v_{n-i}, v_{n+1-i})) = 2i+1, \alpha((u, v_{n+1-i})) = 2(i+1)$ :

Ապացույցը կատարենք ինդուկցիայի եղանակով ըստ  $i$ -ի:

$i = 2$  դեպքում բավական է ցույց տալ, որ  $\alpha(v_2) = 3$ ,  $\alpha((v_3, v_2)) = 4$ ,  $\alpha(v_{n-1}) = 4$  և  $\alpha((v_{n-2}, v_{n-1})) = 5$ :

Դիտարկենք  $v_2$  գագաթը: Քանի որ  $\alpha((v_1, v_2)) = 2$  և  $\alpha((u, v_2)) = 5$ , ապա  $\min S[v_2, \alpha] = 2$  և  $\max S[v_2, \alpha] = 5$ , հետևաբար  $\{3, 4\} \subseteq S[v_2, \alpha]$ : Եթե ընդունենք, որ  $\alpha(v_2) = 4$ , ապա  $\alpha((v_3, v_2)) = 3$  և  $\max S[v_3, \alpha] < 7$ , ինչը բերում է հակասության, քանի որ  $\max S[v_3, \alpha] \geq 7$ : Ապացուցածից հետևում է նաև, որ  $\alpha((u, v_3)) = 7$  (Նկ. 1.5.2):

Այժմ դիտարկենք  $v_{n-1}$  գագաթը: Քանի որ  $\alpha((v_1, v_{n-1})) = 3$  և  $\alpha((u, v_{n-1})) = 6$ , ապա  $\min S[v_{n-1}, \alpha] = 3$  և  $\max S[v_{n-1}, \alpha] = 6$ , հետևաբար  $\{4, 5\} \subseteq S[v_{n-1}, \alpha]$ : Ենթադրենք  $\alpha(v_{n-1}) = 5$ : Այստեղից հետևում է, որ  $\alpha((v_{n-2}, v_{n-1})) = 4$  և  $\max S[v_{n-1}, \alpha] < 8$ , ինչը բերում է հակասության, քանի որ  $\max S[v_{n-1}, \alpha] \geq 8$  (Նկ. 1.5.2):

Դիցուք 1 և 2 պնդումները ապացուցված են բոլոր  $i'$ -ների համար  $1 \leq i' \leq i$ : Ապացուցենք, որ 1 և 2 պնդումները ճիշտ են  $i+1$  դեպքում: Համոզվենք, որ  $\alpha(v_{i+1}) = 2i+1$ ,  $\alpha((v_{i+1}, v_{i+2})) = 2i+2$ ,  $\alpha((u, v_{i+1})) = 2i+3$ ,  $\alpha(v_{n-i}) = 2i+2$ ,  $\alpha((v_{n-i-1}, v_{n-i})) = 2i+3$ ,  $\alpha((u, v_{n-i})) = 2i+4$ : Ինդուկցիոն ենթադրության համաձայն ունենք, որ  $\forall 2 \leq j \leq i$  համար

$$1'. \quad \alpha(v_j) = 2j-1, \alpha((v_j, v_{j+1})) = 2j, \alpha((u, v_j)) = 2j+1,$$

$$2'. \quad \alpha(v_{n+1-j}) = 2j, \alpha((v_{n-j}, v_{n+1-j})) = 2j+1, \alpha((u, v_{n+1-j})) = 2(j+1):$$

$$1' - \text{ից և } 2' - \text{ից հետևում է, որ } \alpha((u, v_{i+1})) = 2i+3 \text{ և } \alpha((u, v_{n-i})) = 2i+4:$$

Դիտարկենք  $v_{i+1}$  գագաթը: Քանի որ  $\alpha((v_i, v_{i+1})) = 2i$  և  $\alpha((u, v_{i+1})) = 2i+3$ , ապա  $\min S[v_{i+1}, \alpha] = 2i$  և  $\max S[v_{i+1}, \alpha] = 2i+3$ , հետևաբար  $\{2i+1, 2i+2\} \subseteq S[v_{i+1}, \alpha]$ : Եթե ենթադրենք, որ  $\alpha(v_{i+1}) = 2i+2$ , ապա կունենանք  $\alpha((v_{i+1}, v_{i+2})) = 2i+1$  և  $\max S[v_{i+2}, \alpha] < 2i+5$ , ինչը բերում է հակասության, քանի որ  $\max S[v_{i+2}, \alpha] \geq 2i+5$ : Այստեղից հետևում է, որ  $\alpha((u, v_{i+2})) = 2i+5$  (Նկ.1.5.2):

Այժմ դիտարկենք  $v_{n-i}$  գագաթը: Քանի որ  $\alpha((v_{n+1-i}, v_{n-i})) = 2i+1$  և  $\alpha((u, v_{n-i})) = 2i+4$ , ապա  $\min S[v_{n-i}, \alpha] = 2i+1$  և  $\max S[v_{n-i}, \alpha] = 2i+4$ , հետևաբար  $\{2i+2, 2i+3\} \subseteq S[v_{n-i}, \alpha]$ : Ենթադրենք  $\alpha(v_{n-i}) = 2i+3$ : Այստեղից հետևում է, որ  $\alpha((v_{n-i-1}, v_{n-i})) = 2i+2$  և  $\max S[v_{n-i-1}, \alpha] < 2i+6$ , ինչը բերում է հակասության, քանի որ  $\max S[v_{n-i-1}, \alpha] \geq 2i+6$  (Նկ.1.5.2):

1 պնդումից հետևում է, որ  $k \geq \frac{n}{2} + 2$ :



2 պնդումից հետևում է, որ  $k \leq \frac{n}{2} - 1$ :

Դժվար չէ տեսնել, որ գոյություն չունի այնպիսի  $k$  բնական թիվ, որը կբավարարի վերը նշված անհավասարություններին, ինչը բերում է հակասության:

Դեպք 2 - ի ապացույցն ավարտված է:

Նմանատիպ մոտեցմամբ կարելի է ցույց տալ, որ  $n \geq 4$  դեպքում  $W_n \notin T_{n+6}$ :

Մյուս կողմից ցույց տանք, որ  $n \geq 4$  դեպքում  $W_\tau(W_n) \leq n+6$ :

Ենթադրենք  $\beta$ -ն հանդիսանում է  $W_n$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $W_\tau(W_n)$ - ներկում  $n \geq 4$  դեպքում:

Դիտարկենք  $u$  գագաթը: Հեշտ է տեսնել, որ

$$1 \leq \min S[u, \beta] \leq 4,$$

հետևաբար

$$n \leq \max S[u, \beta] \leq n+3:$$

Այստեղից հետևում է, որ  $\forall 1 \leq i \leq n-1$  համար

$$\max S[v_i, \beta] \leq n+6:$$

Ապացուցածից հետևում է, որ  $n \geq 4$  դեպքում  $W_\tau(W_n) \leq n+4$ :  $\lrcorner$

**Դիտողություն 1.5.1:** Նմանատիպ դիտողություններով կարելի է ցույց տալ, որ  $4 \leq n \leq 8$  դեպքում  $W_\tau(W_n) \leq n+3$ :

Լեմմաներ 1.5.2 – 1.5.6 – ից և դիտողությունից օգտվելով՝ հանգում ենք հետևյալին.

**Թեորեմ 1.5.1:** Ցանկացած  $n \geq 4$  դեպքում

1.  $W_n \in T$ ,
2.  $w_\tau(W_n) = \begin{cases} n+2, & \text{եթե } n=4, \\ n, & \text{եթե } n \geq 5, \end{cases}$
3.  $W_\tau(W_n) = \begin{cases} n+3, & \text{եթե } 4 \leq n \leq 8, \\ n+4, & \text{եթե } n \geq 9, \end{cases}$
4. Եթե  $w_\tau(W_n) \leq t \leq W_\tau(W_n)$ , ապա  $W_n \in T_t$ :

Այժմ դիտարկենք  $F_n$  հովհարները: Դիցուք  $F_n$  -ը ( $n \geq 3$ ) գագաթների  $V(F_n) = \{u, v_1, \dots, v_{n-1}\}$  և կողերի  $E(F_n) = \{(v_i, v_{i+1}) | 1 \leq i \leq n-2\} \cup \{(u, v_i) | 1 \leq i \leq n-1\}$  բազմությամբ հովհար է:

**Լեմմա 1.5.7:** Ցանկացած  $n \geq 3$  դեպքում  $F_n \in T$  և  $w_\tau(F_n) = n$ :

**Ապացույց:** Ապացուցենք, որ  $(n \geq 3)$  դեպքում  $\exists F_n$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $n$ - ներկում:

Սահմանենք  $F_n$  գրաֆի գագաթների և կողերի  $\alpha$  ներկում:

$$\alpha(u) = 1, \alpha(v_{n-1}) = n-1, \alpha(v_i) = i+2,$$

որտեղ  $1 \leq i \leq n-2$ ,

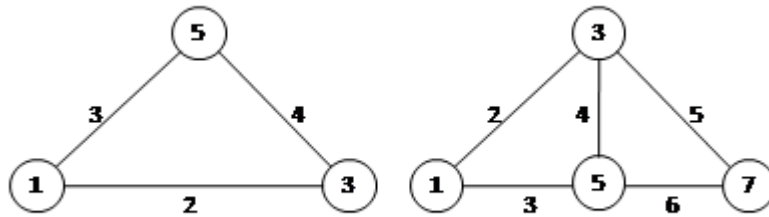
$$\alpha((u, v_j)) = j+1,$$

որտեղ  $1 \leq j \leq n-1$ ,

$$\alpha((v_k, v_{k+1})) = k,$$

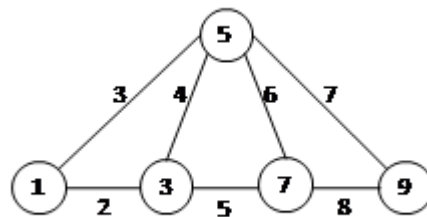
որտեղ  $1 \leq k \leq n-2$ :

Դժվար չէ տեսնել, որ  $\alpha$ -ն հանդիսանում է  $F_n$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $n$ - ներկում: Այստեղից հետևում է, որ  $F_n \in \mathcal{T}$  և  $w_\tau(F_n) \leq n$ : Մյուս կողմից ակնհայտ է, որ  $w_\tau(F_n) \geq n$ :  $\leftarrow$



Նկ. 1.5.3

**Դիտողություն 1.5.2:** Նկատենք, որ  $W_\tau(F_3) = 5$  և  $W_\tau(F_4) = 7$  (Նկ. 1.5.3):



Նկ. 1.5.4

**Լեմմա 1.5.8:** Ցանկացած  $n \geq 5$  դեպքում  $W_\tau(F_n) = n+4$ :

**Ապացույց:**  $n = 5$  դեպքում ապացույցը հետևում է նկար 1.5.4 – ից:

Այժմ ենթադրենք  $n \geq 6$ :

Սահմանենք  $F_n$  գրաֆի գագաթների և կողերի  $\beta$  ներկում:

$$\beta(u) = 5, \beta(v_1) = 1, \beta(v_2) = 3, \beta(v_3) = 7, \beta(v_{n-1}) = n+1, \beta(v_i) = i+6,$$

որտեղ  $4 \leq i \leq n-2$ ,

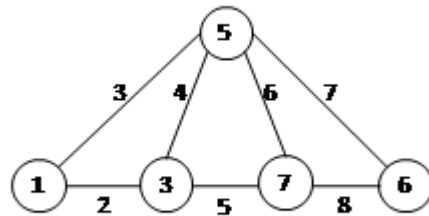
$$\beta((u, v_1)) = 3, \beta((u, v_2)) = 4, \beta((u, v_j)) = j+3,$$

որտեղ  $3 \leq j \leq n-1$ ,

$$\beta((v_1, v_2)) = 2, \beta((v_2, v_3)) = 5, \beta((v_k, v_{k+1})) = k+5,$$

որտեղ  $3 \leq k \leq n-2$ :

Դժվար չէ տեսնել, որ  $\beta$ -ն հանդիսանում է  $n \geq 6$  դեպքում  $F_n$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $(n+4)$ -ներկում: Մյուս կողմից դժվար չէ համոզվել, որ  $W_r(F_n) \leq n+4$ :  $\dashv$



Նկ. 1.5.5

**Հետևանք 1.5.1:** Ցանկացած  $n \geq 5$  դեպքում  $F_n \in \mathcal{T}_{n+3}$ :

**Ապացույց:**  $n = 5$  դեպքում ապացույցը հետևում է նկար 1.5.5 – ից:

Այժմ ենթադրենք  $n \geq 6$ :

Ձևափոխենք  $F_n$  գրաֆի Լեմմա 1.2.8 – ում տրված  $\beta$  ներկումը  $\gamma$  ներկմամբ հետևյալ կերպ.

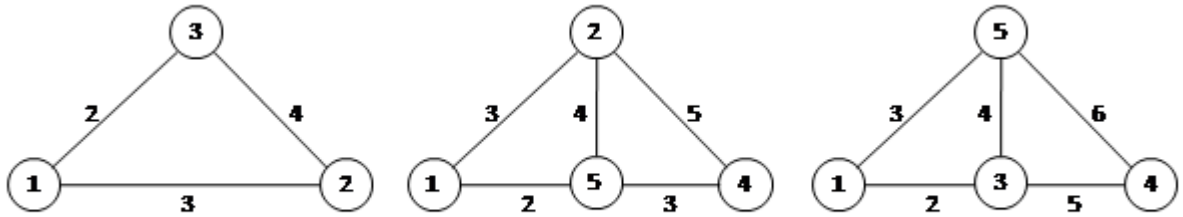
$$\gamma(v_{n-2}) = n, \gamma(v) = \beta(v),$$

որտեղ  $v \in V(F_n)(v \neq v_{n-2})$ ,

$$\gamma(e) = \beta(e),$$

որտեղ  $e \in E(F_n)$ :

Դժվար չէ տեսնել, որ  $\gamma$ -ն հանդիսանում է  $n \geq 6$  դեպքում  $F_n$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $(n+3)$ -ներկում:  $\dashv$



Նկ. 1.5.6

**Լեմմա 1.5.9:** Ցանկացած  $n \geq 3$  դեպքում  $F_n \in \mathcal{T}_{n+1}$  և  $F_n \in \mathcal{T}_{n+2}$  :

**Ապացույց:**  $n=3$  և  $n=4$  դեպքերում ապացույցը հետևում է նկար 1.5.3 – ից և նկար 1.5.6 – ից:

Այժմ ենթադրենք  $n \geq 5$ :

Սահմանենք  $F_n$  գրաֆի գագաթների և կողերի  $\lambda$  ներկում:

$$\lambda(u) = 2, \lambda(v_1) = 1, \lambda(v_2) = 4, \lambda(v_3) = 5, \lambda(v_i) = i,$$

որտեղ  $4 \leq i \leq n-1$ ,

$$\lambda((u, v_1)) = 3, \lambda((u, v_2)) = 1, \lambda((u, v_j)) = j+1,$$

որտեղ  $3 \leq j \leq n-1$ ,

$$\lambda((v_1, v_2)) = 2, \lambda((v_2, v_3)) = 3, \lambda((v_k, v_{k+1})) = k+3,$$

որտեղ  $3 \leq k \leq n-2$ :

Դժվար չէ տեսնել, որ  $\lambda$ -ն հանդիսանում է  $n \geq 5$  դեպքում  $F_n$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $(n+1)$ -ներկում:

Այժմ ապացուցենք, որ  $n \geq 5$  դեպքում  $F_n \in \mathcal{T}_{n+2}$  :

Ձևափոխենք  $F_n$  գրաֆի վերը նկարագրված  $\lambda$  ներկումը  $\mu$  ներկմամբ հետևյալ կերպ.

$$\mu(v_{n-1}) = n+2, \mu(v) = \lambda(v),$$

որտեղ  $v \in V(F_n) (v \neq v_{n-1})$ ,

$$\mu(e) = \lambda(e),$$

որտեղ  $e \in E(F_n)$ :

Դժվար չէ տեսնել, որ  $\mu$ -ն հանդիսանում է  $n \geq 5$  դեպքում  $F_n$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $(n+2)$ -ներկում:  $\dashv$

Լեմմաներ 1.5.7 – 1.5.9 – ից և դիտողություն 1.5.2 - ից օգտվելով հանգում ենք հետևյալին.

**Թեորեմ 1.5.2:** Ցանկացած  $n \geq 3$  դեպքում

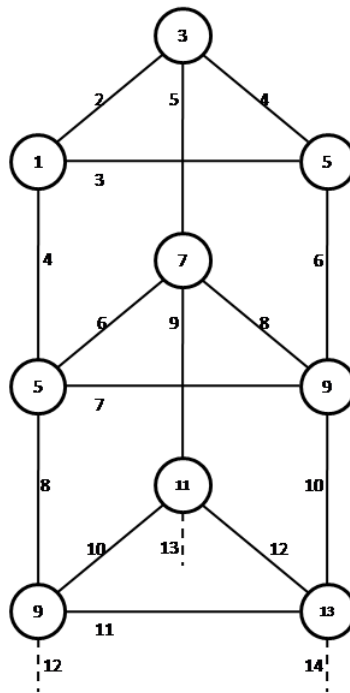
1.  $F_n \in \mathcal{T}$ ,
2.  $w_\tau(F_n) = n$ ,
3.  $W_\tau(F_n) = \begin{cases} n+2, & \text{երբ } n=3, \\ n+3, & \text{երբ } n=4, \\ n+4, & \text{երբ } n \geq 5, \end{cases}$
4. Երբ  $w_\tau(F_n) \leq t \leq W_\tau(F_n)$ , ապա  $F_n \in \mathcal{T}_t$ :

## Գլուխ 2.

### Գրաֆների դեկարտյան արտադրյալների միջակայքային տոտալ ներկումներ

#### 2.1 Համասեռ գրաֆների դեկարտյան արտադրյալների միջակայքային տոտալ ներկումներ

Այս գլխում կհետազոտենք գրաֆների որոշ դեկարտյան արտադրյալների միջակայքային տոտալ ներկելիությունը և կստանանք որոշակի գնահատականներ այդ ներկումներում մասնակցող գույների առավելագույն ու նվազագույն քանակների համար: Ընթացիկ բաժնի հիմնական հետազոտության դասեր են հանդիսանում համասեռ գրաֆների և շղթաների, ինչպես նաև համասեռ գրաֆների և ցիկլերի դեկարտյան արտադրյալները:



Նկ. 2.1.1

**Թեորեմ 2.1.1:** Եթե  $G$ -ն  $r$ -համասեռ գրաֆ է և  $G \in \mathcal{T}$ , ապա կամայական  $m \in \mathbb{N}$  բնական թվի համար  $G \square P_m \in \mathcal{T}$  և

$$W_\tau(G \square P_m) \geq W_\tau(G) + (m-1)(r+2):$$

**Ապացույց:** Դիցուք  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  և  $V(G \square P_m) = \bigcup_{i=1}^m V^{(i)}$ , որտեղ

$V^{(i)} = \{v_j^{(i)} \mid 1 \leq j \leq n\}$ , իսկ  $E(G \square P_m) = \bigcup_{i=1}^m E^{(i)} \cup \bigcup_{j=1}^n E_j$ , որտեղ  $E^{(i)} = \{(v_j^{(i)}, v_k^{(i)}) \mid (v_j, v_k) \in E(G)\}$

և  $E_j = \{(v_j^{(i)}, v_j^{(i+1)}) \mid 1 \leq i \leq m-1\}$ : Տույց տանք, որ  $G \square P_m$ -ն ունի միջակայքային տոտալ  $(W_\tau(G) + (m-1)(r+2))$ -ներկում:

Սահմանենք  $H_i$  ենթագրաֆը հետևյալ կերպ.  $H_i = (V^{(i)}, E^{(i)})$ , որտեղ  $1 \leq i \leq m$ :

Դիցուք  $\alpha$ -ն  $G$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $W_\tau(G)$ -ներկում է: Սահմանենք  $H_1, H_2, \dots, H_m$  ենթագրաֆների  $\beta$  տոտալ ներկումը հետևյալ կերպ.

$$\beta(v_j^{(i)}) = \alpha(v_j) + (i-1)(r+2),$$

որտեղ  $v_j^{(i)} \in V^{(i)}, 1 \leq i \leq m$ ,

$$\beta((v_j^{(i)}, v_k^{(i)})) = \alpha((v_j, v_k)) + (i-1)(r+2),$$

որտեղ  $(v_j^{(i)}, v_k^{(i)}) \in E^{(i)}, 1 \leq i \leq m$ :

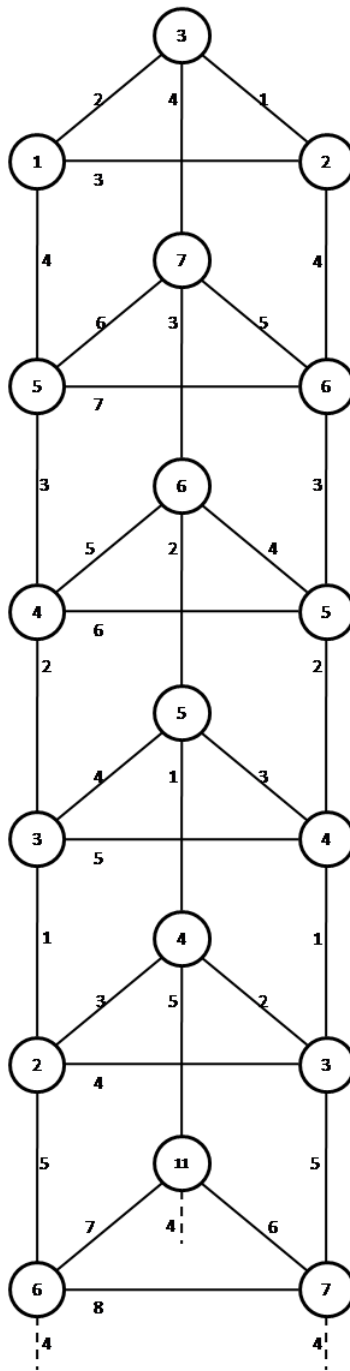
Սահմանենք  $G \square P_m$  գրաֆի  $\gamma$  տոտալ ներկումը հետևյալ կերպ.

$$\gamma(v_j^{(i)}) = \beta(v_j^{(i)}),$$

որտեղ  $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ ,

$$\gamma((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})) = \begin{cases} \beta((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})), & \text{եթե } i = j \text{ և } (v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \in E^{(i)}, \\ \max \mathcal{S}(v_p^{(i)}, \beta) + 1, & \text{եթե } j = i+1 \text{ և } (v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \in E_p: \end{cases}$$

Դժվար չէ համոզվել, որ  $\gamma$ -ն հանդիսանում է միջակայքային տոտալ  $(W_\tau(G) + (m-1)(r+2))$ -ներկում  $G \square P_m$  գրաֆի համար (Նկ. 2.1.1):  $\square$



Նկ. 2.1.2

**Թեորեմ 2.1.2:** Եթե  $G$ -ն  $r$ -համասեռ գրաֆ է և  $G \in \mathcal{T}$ , ապա կամայական  $m \in \mathbb{N}$  բնական թվի համար

$$w_r(G \square P_m) \leq \begin{cases} w_r(G) + r + 2, & \text{եթե } m \leq r + 3, \\ w_r(G) + r + 3, & \text{եթե } m > r + 3: \end{cases}$$



**Ապացույց:** Դիցուք  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  և  $V(G \square P_m) = \bigcup_{i=1}^m V^{(i)}$ , որտեղ

$V^{(i)} = \{v_j^{(i)} \mid 1 \leq j \leq n\}$ , իսկ  $E(G \square P_m) = \bigcup_{i=1}^m E^{(i)} \cup \bigcup_{j=1}^n E_j$ , որտեղ  $E^{(i)} = \{(v_j^{(i)}, v_k^{(i)}) \mid (v_j, v_k) \in E(G)\}$

և  $E_j = \{(v_j^{(i)}, v_j^{(i+1)}) \mid 1 \leq i \leq m-1\}$ :

Սահմանենք  $H_i$  ենթագրաֆը հետևյալ կերպ.  $H_i = (V^{(i)}, E^{(i)})$ , որտեղ  $1 \leq i \leq m$ :

**Դեպք 1:**  $m \leq r+3$ :

Ցույց տանք, որ  $G \square P_m$ -ն ունի միջակայքային տոտալ  $(w_\tau(G) + r + 2)$ -ներկում:

Դիցուք  $\alpha$ -ն  $G$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $w_\tau(G)$ -ներկում է: Սահմանենք  $H_1, H_2, \dots, H_m$  ենթագրաֆների  $\beta$  տոտալ ներկումը հետևյալ կերպ.

$$\beta(v_j^{(1)}) = \alpha(v_j), \beta(v_j^{(2)}) = \alpha(v_j) + r + 2,$$

որտեղ  $1 \leq j \leq n$ ,

$$\beta(v_j^{(p)}) = \beta(v_j^{(2)}) - p + 2,$$

որտեղ  $3 \leq p \leq m, 1 \leq j \leq n$ ,

$$\beta((v_j^{(1)}, v_k^{(1)})) = \alpha((v_j, v_k)), \beta((v_j^{(2)}, v_k^{(2)})) = \alpha((v_j, v_k)) + r + 2,$$

որտեղ  $(v_j^{(i)}, v_k^{(i)}) \in E^{(i)}, 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n$ :

$$\beta((v_j^{(p)}, v_k^{(p)})) = \beta((v_j^{(2)}, v_k^{(2)})) - p + 2,$$

որտեղ  $3 \leq p \leq m, (v_j^{(i)}, v_k^{(i)}) \in E^{(i)}, 3 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n$ :

Սահմանենք  $G \square P_m$  գրաֆի  $\gamma_1$  տոտալ ներկումը հետևյալ կերպ.

1.  $\gamma_1(v_j^{(i)}) = \beta(v_j^{(i)})$ , որտեղ  $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ ,

2.  $\gamma_1((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})) = \begin{cases} \beta((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})), & \text{եթե } i = j \text{ և } (v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \in E^{(i)}, \\ \max S(v_p^{(1)}, \beta) + 2 - i, & \text{եթե } j = i + 1 \text{ և } (v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \in E_p: \end{cases}$

Դժվար չէ համոզվել, որ  $\gamma_1$ -ը հանդիսանում է միջակայքային տոտալ  $(w_\tau(G) + r + 2)$ -ներկում  $G \square P_m$  գրաֆի համար (Նկ. 2.1.2):

**Դեպք 2:**  $m > r+3$ :

Ցույց տանք, որ  $G \square P_m$ -ն ունի միջակայքային տոտալ  $(w_\tau(G) + r + 3)$ - ներկում:

Դիցուք  $\alpha$ -ն  $G$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $w_\tau(G)$ -ներկում է:  $H_1, H_2, \dots, H_{r+3}$  ենթագրաֆների  $\beta$  տոտալ ներկումը սահմանենք ճիշտ այնպես, ինչպես դեպք 1 - ում, իսկ  $H_{r+4}, H_{r+5}, \dots, H_m$  ենթագրաֆների  $\beta$  տոտալ ներկումը հետևյալ կերպ.

$$\beta(v_j^{(r+4)}) = \alpha(v_j) + r + 3, \beta((v_j^{(r+4)}, v_k^{(r+4)})) = \alpha((v_j, v_k)) + r + 3,$$

որտեղ  $(v_j^{(r+4)}, v_k^{(r+4)}) \in E^{(r+4)}, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n$ :

$$\beta(v_j^{(i)}) = \beta(v_j^{(i-r-3)}), \beta((v_j^{(i)}, v_k^{(i)})) = \beta((v_j^{(i-r-3)}, v_k^{(i-r-3)})),$$

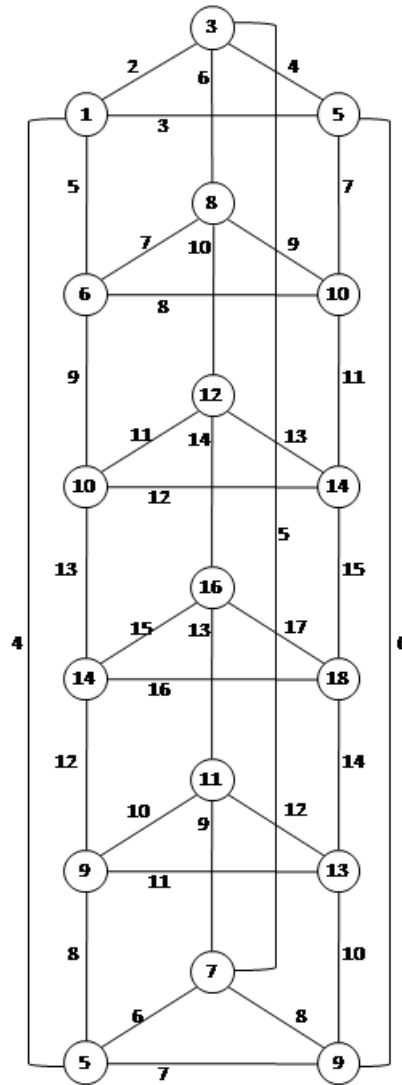
որտեղ  $(v_j^{(i)}, v_k^{(i)}) \in E^{(i)}, r+5 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n$ :

Սահմանենք  $G \square P_m$  գրաֆի  $\gamma_2$  տոտալ ներկումը հետևյալ կերպ.

$$1. \quad \gamma_2(v_j^{(i)}) = \beta(v_j^{(i)}), \text{ որտեղ } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n,$$

$$2. \quad \gamma_2((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})) = \begin{cases} \beta((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})), & \text{եթե } i = j \text{ և } (v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \in E^{(i)}, \\ \gamma_1((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})), & \text{եթե } j = i+1, i < r+3 \text{ և } (v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \in E_p, \\ \max S(v_p^{(1)}, \beta) + 2, & \text{եթե } j = i+1, i = r+3 \text{ և } (v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \in E_p, \\ \gamma_2((v_p^{(i-r-3)}, v_q^{(j-r-3)})), & \text{եթե } j = i+1, i > r+3 \text{ և } (v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \in E_p : \end{cases}$$

Դժվար չէ համոզվել, որ  $\gamma_2$ -ը հանդիսանում է միջակայքային տոտալ  $(w_\tau(G) + r + 3)$ - ներկում  $G \square P_m$  գրաֆի համար (Նկ. 2.1.2):  $\blacktriangleleft$



Նկ. 2.1.3

**Թեորեմ 2.1.3:** Եթե  $G$ -ն  $r$ -համասեռ գրաֆ է և  $G \in \mathcal{T}$ , ապա կամայական  $m \geq 2$

բնական թվի համար  $G \square C_{2m} \in \mathcal{T}$  և

$$W_r(G \square C_{2m}) \geq W_r(G) + m(r+2) + 1:$$

**Ապացույց:** Դիցուք  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  և  $V(G \square C_{2m}) = \bigcup_{i=1}^{2m} V^{(i)}$ , որտեղ

$$V^{(i)} = \{v_j^{(i)} \mid 1 \leq j \leq n\}, \text{ իսկ } E(G \square C_{2m}) = \bigcup_{i=1}^{2m} E^{(i)} \cup \bigcup_{j=1}^n E_j, \text{ որտեղ } E^{(i)} = \{(v_j^{(i)}, v_k^{(i)}) \mid (v_j, v_k) \in E(G)\}$$

և  $E_j = \{(v_j^{(i)}, v_j^{(i+1)}) | 1 \leq i \leq 2m-1\} \cup \{(v_j^{(1)}, v_j^{(2m)})\}$ : Սահմանենք  $H_i$  ենթագրաֆը հետևյալ կերպ.  $H_i = (V^{(i)}, E^{(i)})$ ,  $1 \leq i \leq 2m$ :

Ցույց տանք, որ  $G \square C_{2m}$  -ը ունի միջակայքային տոտալ  $(W_\tau(G) + m(r+2) + 1)$  - ներկում:

Դիցուք  $\alpha$ -ն  $G$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $W_\tau(G)$  - ներկում է: Սահմանենք  $H_1, H_2, \dots, H_{2m}$  ենթագրաֆների  $\beta$  տոտալ ներկումը հետևյալ կերպ.

$$\beta(v_j^{(1)}) = \alpha(v_j), \beta(v_j^{(2)}) = \alpha(v_j) + r + 3,$$

որտեղ  $1 \leq j \leq n$ ,

$$\beta((v_p^{(1)}, v_q^{(1)})) = \alpha((v_p, v_q)), \beta((v_p^{(2)}, v_q^{(2)})) = \alpha((v_p, v_q)) + r + 3,$$

որտեղ  $1 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq n, (v_j^{(i)}, v_k^{(i)}) \in E^{(i)}, 1 \leq i \leq 2$ ,

$$\beta(v_j^{(i)}) = \beta(v_j^{(2)}) + (i-2)(r+2), \beta((v_p^{(i)}, v_q^{(i)})) = \beta((v_p^{(2)}, v_q^{(2)})) + (i-2)(r+2),$$

որտեղ  $3 \leq i \leq m+1, 1 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq n, (v_j^{(i)}, v_k^{(i)}) \in E^{(i)}$ ,

$$\beta(v_j^{(i)}) = \beta(v_j^{(1)}) + (2m+1-i)(r+2), \beta((v_j^{(i)}, v_k^{(i)})) = \beta((v_j^{(1)}, v_k^{(1)})) + (2m+1-i)(r+2),$$

որտեղ  $m+2 \leq i \leq 2m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n, (v_j^{(i)}, v_k^{(i)}) \in E^{(i)}$ :

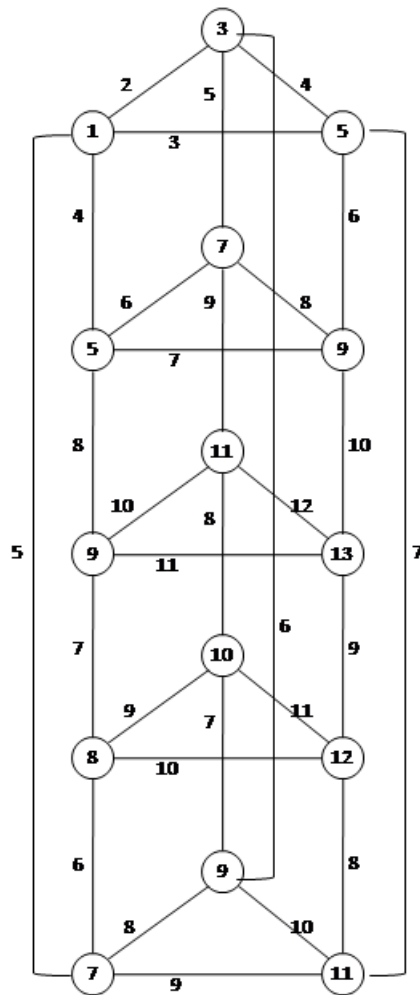
Սահմանենք  $G \square C_{2m}$  գրաֆի  $\gamma$  տոտալ ներկումը հետևյալ կերպ.

$$\gamma(v_j^{(i)}) = \beta(v_j^{(i)}),$$

որտեղ  $1 \leq i \leq 2m, 1 \leq j \leq n$ ,

$$\gamma((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})) = \begin{cases} \beta((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})), & \text{եթե } i = j \text{ և } (v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \in E^{(i)}, \\ \max S(v_p^{(1)}, \beta) + 2, & \text{եթե } j = 2, i = 1 \text{ և } (v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \in E_p, \\ \max S(v_p^{(1)}, \beta) + 1, & \text{եթե } j = 1, i = 2m \text{ և } (v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \in E_p, \\ \gamma((v_p^{(i-1)}, v_q^{(j-1)})) + r + 2, & \text{եթե } j = i+1, 1 < i \leq m \text{ և } (v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \in E_p, \\ \gamma((v_p^{(i-1)}, v_q^{(j-1)})) - 1, & \text{եթե } j = i+1, i = m+1 \text{ և } (v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \in E_p, \\ \gamma((v_p^{(i-1)}, v_q^{(j-1)})) - r - 2, & \text{եթե } j = i+1, m+1 < i < 2m \text{ և } (v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \in E_p: \end{cases}$$

Դժվար չէ համոզվել, որ  $\gamma$ -ն հանդիսանում է միջակայքային տոտալ  $(W_\tau(G) + m(r+2) + 1)$  - ներկում  $G \square C_{2m}$  գրաֆի համար (Նկ. 2.1.3):  $\square$



Նկ. 2.1.4

**Թեորեմ 2.1.4:** Եթե  $G$ -ն  $r$ -համասեռ գրաֆ է և  $G \in T$ , ապա կամայական  $m \geq \max(2, r)$  բնական թվի համար  $G \square C_{2m+1} \in T$  և

$$W_r(G \square C_{2m+1}) \geq W_r(G) + m(r+2) - 1:$$

**Ապացույց:** Դիցուք  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  և  $V(G \square C_{2m+1}) = \bigcup_{i=1}^{2m+1} V^{(i)}$ , որտեղ

$V^{(i)} = \{v_j^{(i)} \mid 1 \leq j \leq n\}$ , իսկ  $E(G \square C_{2m+1}) = \bigcup_{i=1}^{2m+1} E^{(i)} \cup \bigcup_{j=1}^n E_j$ , որտեղ

$E^{(i)} = \{(v_j^{(i)}, v_k^{(i)}) \mid (v_j, v_k) \in E(G)\}$  և  $E_j = \{(v_j^{(i)}, v_j^{(i+1)}) \mid 1 \leq i \leq 2m\} \cup \{(v_j^{(1)}, v_j^{(2m+1)})\}$ : Սահմանենք

$H_i = (V^{(i)}, E^{(i)})$ ,  $1 \leq i \leq 2m+1$ : Ցույց տանք, որ

$G \square C_{2m+1}$ -ն ունի միջակայքային տոտալ  $(W_r(G) + m(r+2) - 1)$ -ներկում:

Դիցուք  $\alpha$ -ն  $G$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $W_\tau(G)$ -ներկում է:

Սահմանենք  $H_1, H_2, \dots, H_{2m+1}$  ենթագրաֆների  $\beta$  տոտալ ներկումը հետևյալ կերպ.

$$\beta(v_j^{(1)}) = \alpha(v_j), \beta((v_j^{(1)}, v_k^{(1)})) = \alpha((v_j, v_k)),$$

որտեղ  $1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n, (v_j^{(1)}, v_k^{(1)}) \in E^{(1)}$ ,

$$\beta(v_j^{(i)}) = \alpha(v_j) + (i-1)(r+2), \beta((v_j^{(i)}, v_k^{(i)})) = \alpha((v_j, v_k)) + (i-1)(r+2),$$

որտեղ  $(v_j^{(i)}, v_k^{(i)}) \in E^{(i)}, 2 \leq i \leq m+1, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n$ ,

$$\beta(v_j^{(i)}) = \beta(v_j^{(i-1)}) - 1, \beta((v_j^{(i)}, v_k^{(i)})) = \beta((v_j^{(i-1)}, v_k^{(i-1)})) - 1,$$

որտեղ  $m+2 \leq i \leq m+r+1, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n$ ,

$$\beta(v_j^{(m+r+2)}) = \beta(v_j^{(m+r+1)}) - r - 3, \beta((v_j^{(m+r+2)}, v_k^{(m+r+2)})) = \beta((v_j^{(m+r+1)}, v_k^{(m+r+1)})) - r - 3,$$

որտեղ  $(v_j^{(m+r+2)}, v_k^{(m+r+2)}) \in E^{(m+r+2)}, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n$ ,

$$\beta(v_j^{(i)}) = \beta(v_j^{(i-1)}) - r - 2, \beta((v_j^{(i)}, v_k^{(i)})) = \beta((v_j^{(i-1)}, v_k^{(i-1)})) - r - 2,$$

որտեղ  $m+r+3 \leq i \leq 2m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n, (v_j^{(i)}, v_k^{(i)}) \in E^{(i)}$ :

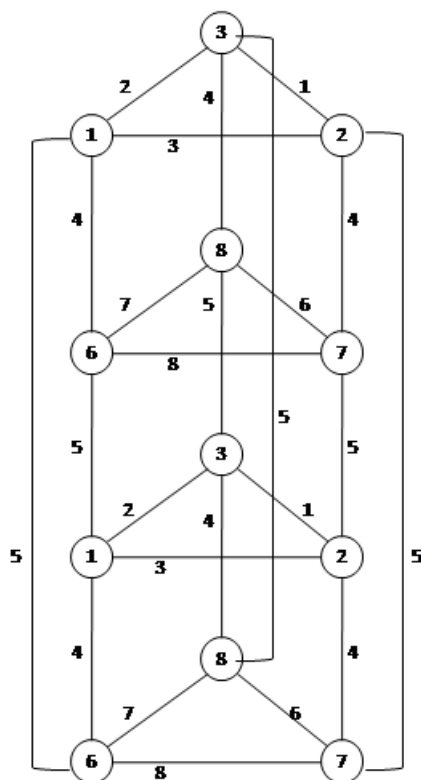
Սահմանենք  $G \square C_{2m+1}$  գրաֆի  $\gamma$  տոտալ ներկումը հետևյալ կերպ.

$$\gamma(v_j^{(i)}) = \beta(v_j^{(i)}),$$

որտեղ  $1 \leq i \leq 2m+1, 1 \leq j \leq n$ ,

$$\gamma((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})) = \begin{cases} \beta((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})), & \text{եթե } i = j \text{ և } (v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \in E^{(i)}, \\ \max S(v_p^{(i)}, \beta) + 1, & \text{եթե } j = i+1, i \leq m \text{ և } (v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \in E_p, \\ \gamma((v_p^{(i-1)}, v_q^{(j-1)})) - 1, & \text{եթե } j = (i+1) \bmod (2m+1), \\ & m < i \leq m+r+1 \text{ և } (v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \in E_p, \\ \gamma((v_p^{(i-1)}, v_q^{(j-1)})) - r - 2, & \text{եթե } j = (i+1) \bmod (2m+1), \\ & m+r+1 < i \leq 2m+1 \text{ և } (v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \in E_p : \end{cases}$$

Դժվար չէ համոզվել, որ  $\gamma$ -ն հանդիսանում է միջակայքային տոտալ  $(W_\tau(G) + m(r+2) - 1)$ -ներկում  $G \square C_{2m+1}$  գրաֆի համար (Նկ. 2.1.4):  $\dashv$



Նկ. 2.1.5

**Թեորեմ 2.1.5:** Եթե  $G$ -ն  $r$ -համասեռ գրաֆ է և  $G \in \mathcal{T}$ , ապա կամայական  $m \geq 2$  բնական թվի համար

$$w_\tau(G \square C_{2m}) \leq w_\tau(G) + r + 3:$$

**Ապացույց:** Դիցուք  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  և  $V(G \square C_{2m}) = \bigcup_{i=1}^{2m} V^{(i)}$ , որտեղ

$V^{(i)} = \{v_j^{(i)} \mid 1 \leq j \leq n\}$ , իսկ  $E(G \square C_{2m}) = \bigcup_{i=1}^{2m} E^{(i)} \cup \bigcup_{j=1}^n E_j$ , որտեղ  $E^{(i)} = \{(v_j^{(i)}, v_k^{(i)}) \mid (v_j, v_k) \in E(G)\}$

և  $E_j = \{(v_j^{(i)}, v_j^{(i+1)}) \mid 1 \leq i \leq 2m-1\} \cup \{(v_j^{(1)}, v_j^{(2m)})\}$ : Սահմանենք  $H_i$  ենթագրաֆը հետևյալ կերպ.  $H_i = (V^{(i)}, E^{(i)})$ ,  $1 \leq i \leq 2m$ : Տույց տանք, որ  $G \square C_{2m}$ -ն ունի միջակայքային տոտալ  $(w_\tau(G) + r + 3)$ -ներկում: Դիցուք  $\alpha$ -ն  $G$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $w_\tau(G)$ -ներկում է: Սահմանենք  $H_1, H_2, \dots, H_{2m}$  ենթագրաֆների  $\beta$  տոտալ ներկումը հետևյալ կերպ.

$$\beta(v_j^{(2k-1)}) = \alpha(v_j), \beta(v_j^{(2k)}) = \alpha(v_j) + r + 3,$$

որտեղ  $1 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq n,$

$$\beta((v_p^{(2k-1)}, v_q^{(2k-1)})) = \alpha((v_p, v_q)), \beta((v_p^{(2k)}, v_q^{(2k)})) = \alpha((v_p, v_q)) + r + 3,$$

որտեղ  $1 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq n, (v_p^{(i)}, v_q^{(i)}) \in E^{(i)}, 1 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq n:$

Սահմանենք  $G \square C_{2m}$  գրաֆի  $\gamma$  տոտալ ներկումը հետևյալ կերպ.

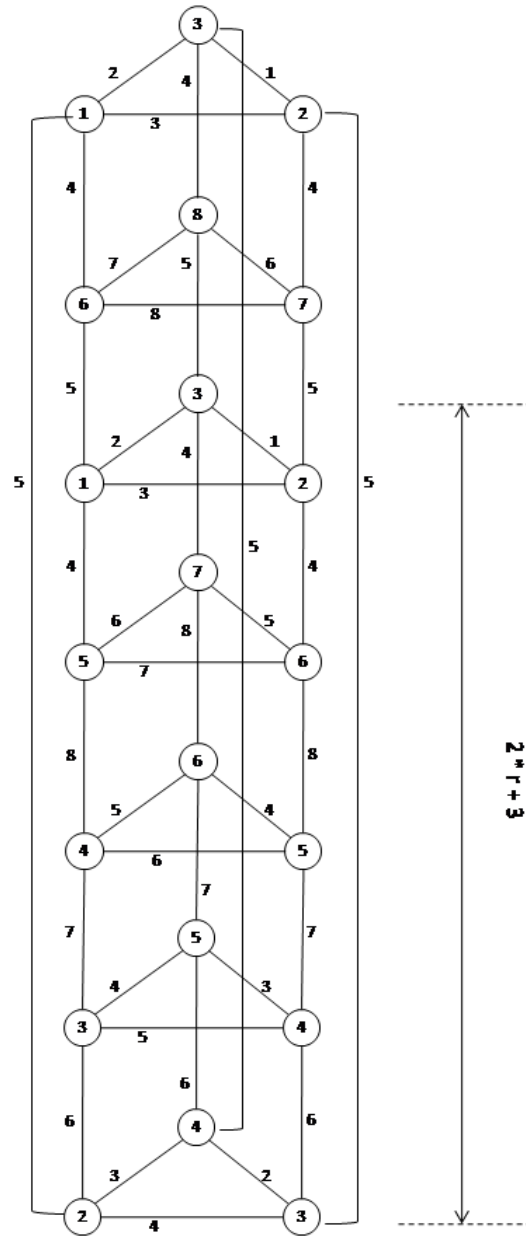
$$\gamma(v_j^{(i)}) = \beta(v_j^{(i)}),$$

որտեղ  $1 \leq i \leq 2m, 1 \leq j \leq n,$

$$\gamma((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})) = \begin{cases} \beta((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})), & \text{եթե } i = j, (v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \in E^{(i)}, \\ \max S(v_p, \alpha) + 1, & \text{եթե } j = i + 1, i - \text{ն կենտ է,} \\ & 1 \leq i \leq 2m, (v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \in E_p \\ \max S(v_p, \alpha) + 2, & \text{եթե } j = i + 1 \pmod{2m}, i - \text{ն զույգ է,} \\ & 1 \leq i \leq 2m, (v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \in E_p : \end{cases}$$

Դժվար չէ համոզվել, որ  $\gamma$ -ն հանդիսանում է միջակայքային տոտալ  $(w_\tau(G) + r + 3)$ - ներկում  $G \square C_{2m}$  գրաֆի համար (Նկ. 2.1.5):  $\blacktriangleleft$





Նկ. 2.1.6

**Թեորեմ 2.1.6:** Եթե  $G$ -ն  $2r$ -համասեռ գրաֆ է և  $G \in \mathcal{T}$ , ապա կամայական  $m \geq r+1$  բնական թվի համար

$$w_r(G \square C_{2m+1}) \leq w_r(G) + 2r + 3:$$

**Ապացույց:** Դիցուք  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  և  $V(G \square C_{2m+1}) = \bigcup_{i=1}^{2m+1} V^{(i)}$ , որտեղ

$V^{(i)} = \{v_j^{(i)} \mid 1 \leq j \leq n\}$ , իսկ  $E(G \square C_{2m+1}) = \bigcup_{i=1}^{2m+1} E^{(i)} \cup \bigcup_{j=1}^n E_j$ , որտեղ

$E^{(i)} = \{(v_j^{(i)}, v_k^{(i)}) \mid (v_j, v_k) \in E(G)\}$  և  $E_j = \{(v_j^{(i)}, v_j^{(i+1)}) \mid 1 \leq i \leq 2m\} \cup \{(v_j^{(1)}, v_j^{(2m+1)})\}$ : Սահմանենք  $H_i$  ենթագրաֆը հետևյալ կերպ.  $H_i = (V^{(i)}, E^{(i)})$ ,  $1 \leq i \leq 2m+1$ :

Ցույց տանք, որ  $G \square C_{2m+1}$ -ն ունի միջակայքային տոտալ  $(w_\tau(G) + 2r + 3)$ -ներկում:

Դիցուք  $\alpha$ -ն  $G$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $w_\tau(G)$ -ներկում է: Սահմանենք  $H_1, H_2, \dots, H_{2m+1}$  ենթագրաֆների  $\beta$  տոտալ ներկումը հետևյալ կերպ.

$$\beta(v_j^{(2k-1)}) = \alpha(v_j), \beta((v_p^{(2k-1)}, v_q^{(2k-1)})) = \alpha((v_p, v_q)),$$

որտեղ  $1 \leq k \leq m-r, 1 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq n$ ,

$$\beta(v_j^{(2k)}) = \alpha(v_j) + 2r + 3, \beta((v_p^{(2k)}, v_q^{(2k)})) = \alpha((v_p, v_q)) + 2r + 3,$$

որտեղ  $1 \leq k \leq m-r-1, 1 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq n$ ,

$$\beta(v_j^{(2m-2r)}) = \alpha(v_j) + 2r + 2, \beta((v_p^{(2m-2r)}, v_q^{(2m-2r)})) = \alpha((v_p, v_q)) + 2r + 2,$$

որտեղ  $1 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq n$ ,

$$\beta(v_j^{(i)}) = \beta(v_j^{(i-1)}) - 1, \beta((v_p^{(i)}, v_q^{(i)})) = \beta((v_p^{(i-1)}, v_q^{(i-1)})) - 1,$$

որտեղ  $2m-2r+1 \leq i \leq 2m+1, 1 \leq j \leq n, (v_p^{(i)}, v_q^{(i)}) \in E^{(i)}$ :

Սահմանենք  $G \square C_{2m+1}$  գրաֆի  $\gamma$  տոտալ ներկումը հետևյալ կերպ.

$$\gamma(v_j^{(i)}) = \beta(v_j^{(i)}),$$

որտեղ  $1 \leq i \leq 2m+1, 1 \leq j \leq n$ ,

$$\gamma((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})) = \begin{cases} \beta((v_p^{(i)}, v_q^{(j)})), & \text{եթե } i = j, (v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \in E^{(i)}, \\ \max S(v_p, \alpha) + 1, & \text{եթե } j = i + 1, i - \bar{n} \text{ կենստ է,} \\ & 1 \leq i \leq 2m - 2r, (v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \in E_p \\ \max S(v_p, \alpha) + 2, & \text{եթե } j = i + 1, i - \bar{n} \text{ զույգ է,} \\ & 1 \leq i \leq 2m - 2r - 1, (v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \in E_p, \\ \max S(v_p^{(2m-2r)}, \beta) + 1, & \text{եթե } j = i + 1, i = 2m - 2r, (v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \in E_p, \\ \gamma((v_p^{(i-1)}, v_q^{(j-1)})) - 1, & \text{եթե } j = i + 1 \pmod{2m+1}, \\ & 2m - 2r < i \leq 2m + 1, (v_p^{(i)}, v_q^{(j)}) \in E_p: \end{cases}$$

Դժվար չէ համոզվել, որ  $\gamma$ -ն հանդիսանում է միջակայքային տոտալ  $(w_\tau(G) + 2r + 3)$ -ներկում  $G \square C_{2m+1}$  գրաֆի համար (Նկ. 2.1.6):  $\dashv$

## 2.2 Հարթ դեկարտյան արտադրյալների միջակայքային տոտալ ներկումներ

Այս բաժնում կստանանք հարթ դեկարտյան արտադրյալների միջակայքային տոտալ ներկումներում մասնակցող գույների նվազագույն քանակի ճշգրիտ արժեքը: Հայտնի է [7], որ տեղի ունի հետևյալ թեորեման.

**Թեորեմ 2.2.1:** Եթե  $G$ -ն և  $H$ -ը ունեն առնվազն 3 գագաթներ, ապա նրանց  $G \square H$  դեկարտյան արտադրյալը հարթ է այն և միայն այն դեպքում, երբ  $G \square H = P_n \square P_m$  կամ  $G \square H = P_n \square C_m$ :

Նախ նկատենք, որ  $P_1 \square P_1, P_1 \square P_2, P_2 \square P_2$  պատկանում են  $\mathcal{T}$ -ին և  $w_\tau(P_1 \square P_1) = 1, w_\tau(P_1 \square P_2) = 3, w_\tau(P_2 \square P_2) = 4$ :

**Թեորեմ 2.2.2:** Կամայական  $n$  և  $m$  բնական թվերի համար եթե  $\max(n, m) \geq 3$ , ապա  $P_n \square P_m \in \mathcal{T}$  և

$$w_\tau(P_n \square P_m) = \Delta(P_n \square P_m) + 1:$$

**Ապացույց:** Դիցուք  $V(P_n \square P_m) = \bigcup_{i=1}^n V^{(i)}$ , որտեղ  $V^{(i)} = \{v_j^{(i)} \mid 1 \leq j \leq m\}$ , իսկ

$$E(P_n \square P_m) = \bigcup_{i=1}^n E^{(i)} \cup \bigcup_{i=1}^m E_j, \quad \text{որտեղ} \quad E^{(i)} = \{(v_j^{(i)}, v_{j+1}^{(i)}) \mid 1 \leq j \leq m-1\} \quad \text{և}$$

$E_j = \{(v_j^{(i)}, v_{j+1}^{(i)}) \mid 1 \leq i \leq n-1\}$ : Սահմանենք  $P_n \square P_m$  գրաֆի  $\alpha$  միջակայքային տոտալ  $(\Delta(P_n \square P_m) + 1)$ -ներկումը:

**Դեպք 1:**  $n = 2$ :

**Դեպք 1.1:**  $m = 0 \pmod 3$ :

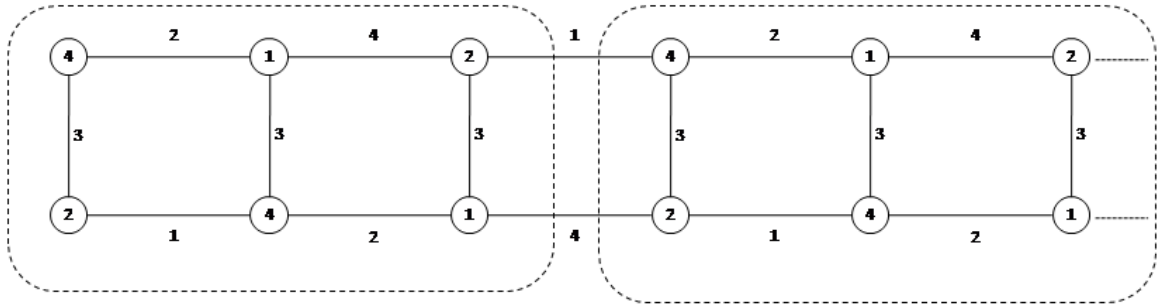
Այս դեպքում  $\alpha$ -ն սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$\alpha(v_j^{(1)}) = \begin{cases} 4, & \text{եթե } j = 1 \pmod 3, \\ 1, & \text{եթե } j = 2 \pmod 3, \\ 2, & \text{եթե } j = 0 \pmod 3, \end{cases} \quad \alpha(v_j^{(2)}) = \begin{cases} 2, & \text{եթե } j = 1 \pmod 3, \\ 4, & \text{եթե } j = 2 \pmod 3, \\ 1, & \text{եթե } j = 0 \pmod 3, \end{cases}$$

$$\alpha((v_j^{(1)}, v_{j+1}^{(1)})) = \begin{cases} 2, & \text{Եթե } j = 1 \bmod 3, \\ 4, & \text{Եթե } j = 2 \bmod 3, \\ 1, & \text{Եթե } j = 0 \bmod 3, \end{cases} \quad \alpha((v_j^{(2)}, v_{j+1}^{(2)})) = \begin{cases} 1, & \text{Եթե } j = 1 \bmod 3, \\ 2, & \text{Եթե } j = 2 \bmod 3, \\ 4, & \text{Եթե } j = 0 \bmod 3, \end{cases}$$

$\alpha((v_j^{(1)}, v_j^{(2)})) = 3$  կամայական  $j \in \square$  բնական թվի համար:

Դժվար չէ համոզվել, որ  $\alpha$ -ն հանդիսանում է միջակայքային տոտալ  $(\Delta(P_n \square P_m) + 1)$ -ներկում  $P_n \square P_m$  գրաֆի համար (Նկ. 2.2.1):



Նկ. 2.2.1

**Դեպք 1.2:**  $m = 1 \bmod 3$ :

Այս դեպքում  $\alpha$ -ն սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$\alpha(v_j^{(1)}) = \begin{cases} 4, & \text{Եթե } j = 2 \bmod 3, \\ 1, & \text{Եթե } j = 0 \bmod 3, j \neq 3, \\ 2, & \text{Եթե } j = 1 \bmod 3, j \neq 1, \end{cases} \quad \alpha(v_j^{(2)}) = \begin{cases} 2, & \text{Եթե } j = 2 \bmod 3, \\ 4, & \text{Եթե } j = 0 \bmod 3, \\ 1, & \text{Եթե } j = 1 \bmod 3, j \neq 1, \end{cases}$$

$$\alpha(v_3^{(1)}) = 3, \quad \alpha(v_1^{(1)}) = 1, \quad \alpha(v_1^{(2)}) = 3,$$

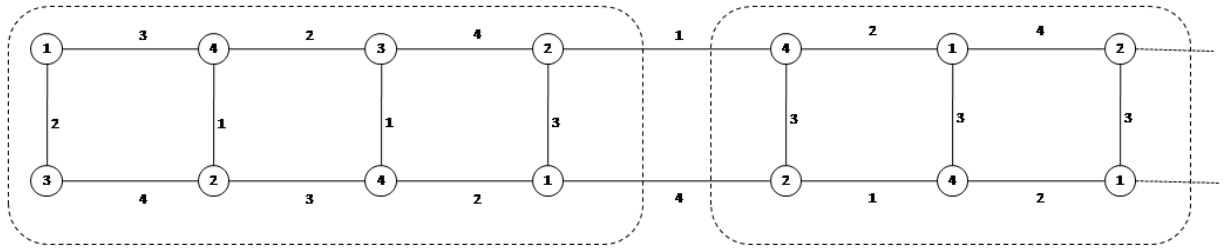
$$\alpha((v_j^{(1)}, v_{j+1}^{(1)})) = \begin{cases} 2, & \text{Եթե } j = 2 \bmod 3, \\ 4, & \text{Եթե } j = 0 \bmod 3, \\ 1, & \text{Եթե } j = 1 \bmod 3, j \neq 1, \end{cases} \quad \alpha((v_j^{(2)}, v_{j+1}^{(2)})) = \begin{cases} 1, & \text{Եթե } j = 2 \bmod 3, j \neq 2, \\ 2, & \text{Եթե } j = 0 \bmod 3, \\ 4, & \text{Եթե } j = 1 \bmod 3, \end{cases}$$

$$\alpha((v_1^{(1)}, v_2^{(1)})) = 3, \quad \alpha((v_2^{(2)}, v_3^{(2)})) = 3, \quad \alpha((v_1^{(1)}, v_1^{(2)})) = 2,$$

$$\alpha((v_2^{(1)}, v_2^{(2)})) = 1, \quad \alpha((v_3^{(1)}, v_3^{(2)})) = 1,$$

$\alpha((v_j^{(1)}, v_j^{(2)})) = 3$  կամայական  $j \geq 4$  բնական թվի համար:

Դժվար չէ համոզվել, որ  $\alpha$ -ն հանդիսանում է միջակայքային տոտալ  $(\Delta(P_n \square P_m)+1)$ - ներկում  $P_n \square P_m$  գրաֆի համար (Նկ. 2.2.2):



Նկ. 2.2.2

**Դեպք 1.3:**  $m = 2 \pmod 3$ :

Այս դեպքում  $\alpha$  - ն սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$\alpha(v_j^{(1)}) = \begin{cases} 4, & \text{եթե } j = 0 \pmod 3, j \neq 3, \\ 1, & \text{եթե } j = 1 \pmod 3, \\ 2, & \text{եթե } j = 2 \pmod 3, j \neq 2, \end{cases} \quad \alpha(v_j^{(2)}) = \begin{cases} 2, & \text{եթե } j = 0 \pmod 3, \\ 4, & \text{եթե } j = 1 \pmod 3, j \neq 1, \\ 1, & \text{եթե } j = 2 \pmod 3, \end{cases}$$

$$\alpha(v_3^{(1)}) = 3, \quad \alpha(v_2^{(1)}) = 4, \quad \alpha(v_1^{(2)}) = 3,$$

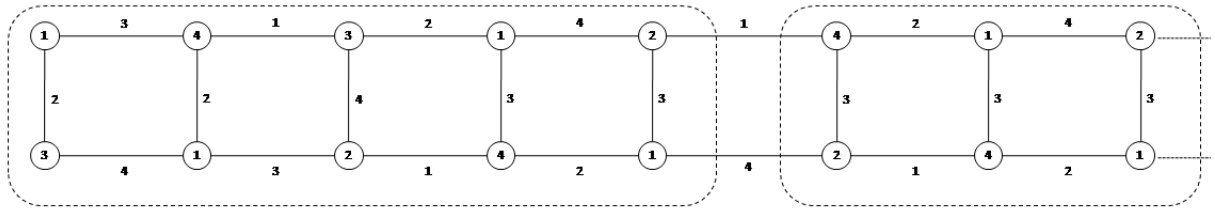
$$\alpha((v_j^{(1)}, v_{j+1}^{(1)})) = \begin{cases} 2, & \text{եթե } j = 0 \pmod 3, \\ 4, & \text{եթե } j = 1 \pmod 3, j \neq 1, \\ 1, & \text{եթե } j = 2 \pmod 3, \end{cases} \quad \alpha((v_j^{(2)}, v_{j+1}^{(2)})) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } j = 0 \pmod 3, \\ 2, & \text{եթե } j = 1 \pmod 3, j \neq 1, \\ 4, & \text{եթե } j = 2 \pmod 3, j \neq 2, \end{cases}$$

$$\alpha(v_1^{(1)}, v_2^{(1)}) = 3, \quad \alpha(v_1^{(2)}, v_2^{(2)}) = 4, \quad \alpha(v_2^{(2)}, v_3^{(2)}) = 3,$$

$$\alpha(v_1^{(1)}, v_1^{(2)}) = 2, \quad \alpha(v_2^{(1)}, v_2^{(2)}) = 2, \quad \alpha(v_3^{(1)}, v_3^{(2)}) = 4,$$

$\alpha(v_j^{(1)}, v_j^{(2)}) = 3$  կամայական  $j \geq 4$  բնական թվի համար:

Դժվար չէ համոզվել, որ  $\alpha$ -ն հանդիսանում է միջակայքային տոտալ  $(\Delta(P_n \square P_m)+1)$ - ներկում  $P_n \square P_m$  գրաֆի համար (Նկ. 2.2.3):



Նկ. 2.2.3

**Դեպք 2:**  $n = 3$ :

**Դեպք 2.1:**  $m = 0 \pmod 3$ :

Այս դեպքում  $\alpha$  - ն սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$\alpha(v_j^{(1)}) = \begin{cases} 2, & \text{եթե } j = 1 \pmod 3, \\ 1, & \text{եթե } j = 2 \pmod 3, \\ 3, & \text{եթե } j = 0 \pmod 3, \end{cases}$$

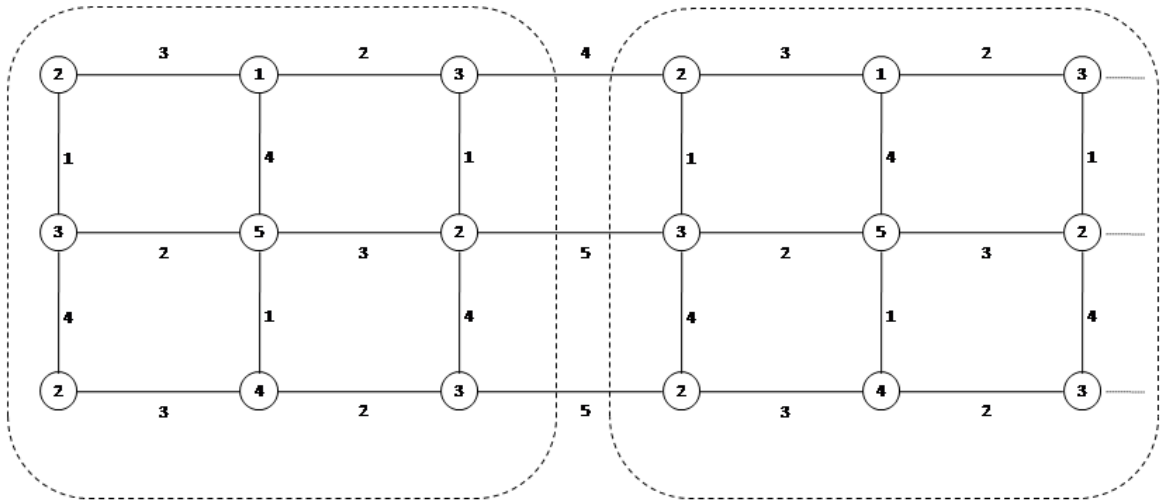
$$\alpha(v_j^{(2)}) = \begin{cases} 3, & \text{եթե } j = 1 \pmod 3, \\ 5, & \text{եթե } j = 2 \pmod 3, \\ 2, & \text{եթե } j = 0 \pmod 3, \end{cases} \quad \alpha(v_j^{(3)}) = \begin{cases} 2, & \text{եթե } j = 1 \pmod 3, \\ 4, & \text{եթե } j = 2 \pmod 3, \\ 3, & \text{եթե } j = 0 \pmod 3, \end{cases}$$

$$\alpha((v_j^{(1)}, v_{j+1}^{(1)})) = \begin{cases} 3, & \text{եթե } j = 1 \pmod 3, \\ 2, & \text{եթե } j = 2 \pmod 3, \\ 4, & \text{եթե } j = 0 \pmod 3, \end{cases} \quad \alpha((v_j^{(2)}, v_{j+1}^{(2)})) = \begin{cases} 2, & \text{եթե } j = 1 \pmod 3, \\ 3, & \text{եթե } j = 2 \pmod 3, \\ 5, & \text{եթե } j = 0 \pmod 3, \end{cases}$$

$$\alpha((v_j^{(3)}, v_{j+1}^{(3)})) = \begin{cases} 3, & \text{եթե } j = 1 \pmod 3, \\ 2, & \text{եթե } j = 2 \pmod 3, \\ 5, & \text{եթե } j = 0 \pmod 3, \end{cases} \quad \alpha((v_j^{(1)}, v_j^{(2)})) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } j = 1 \pmod 3, \\ 4, & \text{եթե } j = 2 \pmod 3, \\ 1, & \text{եթե } j = 0 \pmod 3, \end{cases}$$

$$\alpha((v_j^{(2)}, v_j^{(3)})) = \begin{cases} 4, & \text{եթե } j = 1 \pmod 3, \\ 1, & \text{եթե } j = 2 \pmod 3, \\ 4, & \text{եթե } j = 0 \pmod 3: \end{cases}$$

Դժվար չէ համոզվել, որ  $\alpha$ -ն հանդիսանում է միջակայքային տոտալ  $(\Delta(P_n \square P_m) + 1)$ - ներկում  $P_n \square P_m$  գրաֆի համար (Նկ. 2.2.4):



Նկ. 2.2.4

**Դեպք 2.2:**  $m = 1 \pmod 3$ :

Այս դեպքում  $\alpha$  - ն սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$\alpha(v_j^{(1)}) = \begin{cases} 2, & \text{եթե } j = 2 \pmod 3, \\ 1, & \text{եթե } j = 0 \pmod 3, \\ 3, & \text{եթե } j = 1 \pmod 3, j \neq 1, \end{cases}$$

$$\alpha(v_j^{(2)}) = \begin{cases} 3, & \text{եթե } j = 2 \pmod 3, \\ 5, & \text{եթե } j = 0 \pmod 3, \\ 2, & \text{եթե } j = 1 \pmod 3, j \neq 1, \end{cases} \quad \alpha(v_j^{(3)}) = \begin{cases} 2, & \text{եթե } j = 2 \pmod 3, \\ 4, & \text{եթե } j = 0 \pmod 3, \\ 3, & \text{եթե } j = 1 \pmod 3, \end{cases}$$

$$\alpha(v_1^{(1)}) = 5, \quad \alpha(v_1^{(2)}) = 4,$$

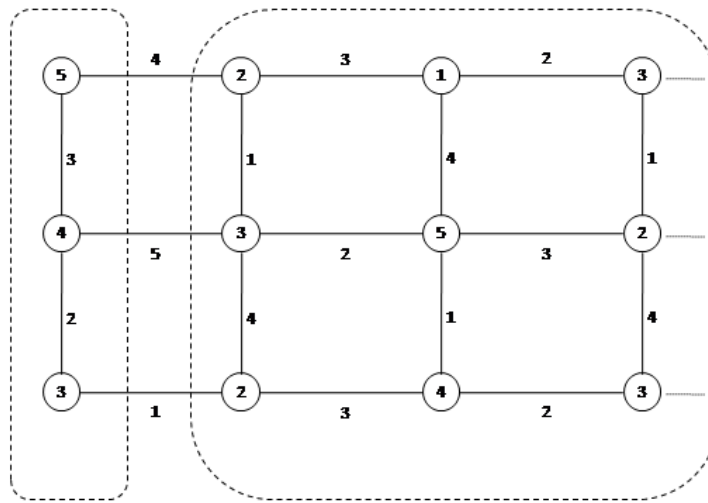
$$\alpha((v_j^{(1)}, v_{j+1}^{(1)})) = \begin{cases} 3, & \text{եթե } j = 2 \pmod 3, \\ 2, & \text{եթե } j = 0 \pmod 3, \\ 4, & \text{եթե } j = 1 \pmod 3, \end{cases} \quad \alpha((v_j^{(2)}, v_{j+1}^{(2)})) = \begin{cases} 2, & \text{եթե } j = 2 \pmod 3, \\ 3, & \text{եթե } j = 0 \pmod 3, \\ 5, & \text{եթե } j = 1 \pmod 3, \end{cases}$$

$$\alpha((v_j^{(3)}, v_{j+1}^{(3)})) = \begin{cases} 3, & \text{եթե } j = 2 \pmod 3, \\ 2, & \text{եթե } j = 0 \pmod 3, \\ 1, & \text{եթե } j = 1 \pmod 3, \end{cases} \quad \alpha((v_j^{(1)}, v_j^{(2)})) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } j = 2 \pmod 3, \\ 4, & \text{եթե } j = 0 \pmod 3, \\ 1, & \text{եթե } j = 1 \pmod 3, j \neq 1, \end{cases}$$

$$\alpha((v_j^{(2)}, v_j^{(3)})) = \begin{cases} 4, & \text{Եթե } j = 2 \pmod 3, \\ 1, & \text{Եթե } j = 0 \pmod 3, \\ 4, & \text{Եթե } j = 1 \pmod 3, j \neq 1, \end{cases}$$

$$\alpha(v_1^{(1)}, v_1^{(2)}) = 3, \quad \alpha(v_1^{(2)}, v_1^{(3)}) = 2:$$

Դժվար չէ համոզվել, որ  $\alpha$ -ն հանդիսանում է միջակայքային տոտալ  $(\Delta(P_n \square P_m) + 1)$ - ներկում  $P_n \square P_m$  գրաֆի համար (Նկ. 2.2.5):



Նկ. 2.2.5

**Դեպք 2.3:**  $m = 2 \pmod 3$ :

Այս դեպքում  $\alpha$ -ն սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$\alpha(v_j^{(1)}) = \begin{cases} 2, & \text{Եթե } j = 0 \pmod 3, \\ 1, & \text{Եթե } j = 1 \pmod 3, j \neq 1, \\ 3, & \text{Եթե } j = 2 \pmod 3, j \neq 2, \end{cases} \quad \alpha(v_j^{(2)}) = \begin{cases} 3, & \text{Եթե } j = 0 \pmod 3, \\ 5, & \text{Եթե } j = 1 \pmod 3, j \neq 1, \\ 2, & \text{Եթե } j = 2 \pmod 3, j \neq 2, \end{cases}$$

$$\alpha(v_j^{(3)}) = \begin{cases} 2, & \text{Եթե } j = 0 \pmod 3, \\ 4, & \text{Եթե } j = 1 \pmod 3 \text{ և } j \neq 1, \\ 3, & \text{Եթե } j = 2 \pmod 3, \end{cases}$$

$$\alpha(v_1^{(1)}) = 3, \quad \alpha(v_2^{(1)}) = 5, \quad \alpha(v_1^{(2)}) = 4, \quad \alpha(v_2^{(2)}) = 1,$$



$$\alpha(v_1^{(3)}) = 1, \alpha((v_j^{(1)}, v_{j+1}^{(1)})) = \begin{cases} 3, & \text{եթե } j = 0 \pmod 3, \\ 2, & \text{եթե } j = 1 \pmod 3, \\ 4, & \text{եթե } j = 2 \pmod 3, \end{cases}$$

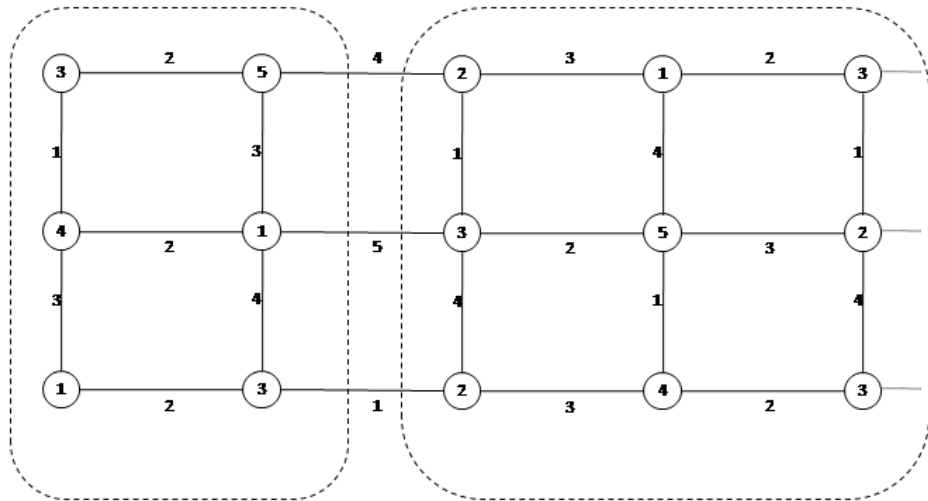
$$\alpha((v_j^{(2)}, v_{j+1}^{(2)})) = \begin{cases} 2, & \text{եթե } j = 0 \pmod 3, \\ 3, & \text{եթե } j = 1 \pmod 3, j \neq 1, \\ 5, & \text{եթե } j = 2 \pmod 3, \end{cases} \quad \alpha((v_j^{(3)}, v_{j+1}^{(3)})) = \begin{cases} 3, & \text{եթե } j = 0 \pmod 3, \\ 2, & \text{եթե } j = 1 \pmod 3, \\ 1, & \text{եթե } j = 2 \pmod 3, \end{cases}$$

$$\alpha((v_j^{(1)}, v_j^{(2)})) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } j = 0 \pmod 3, \\ 4, & \text{եթե } j = 1 \pmod 3, j \neq 1, \\ 1, & \text{եթե } j = 2 \pmod 3, j \neq 2, \end{cases}$$

$$\alpha((v_j^{(2)}, v_j^{(3)})) = \begin{cases} 4, & \text{եթե } j = 0 \pmod 3, \\ 1, & \text{եթե } j = 1 \pmod 3, j \neq 1, \\ 4, & \text{եթե } j = 2 \pmod 3, \end{cases}$$

$$\alpha(v_1^{(2)}, v_2^{(2)}) = 2, \quad \alpha(v_1^{(1)}, v_1^{(2)}) = 1, \quad \alpha(v_2^{(1)}, v_2^{(2)}) = 3, \quad \alpha(v_1^{(2)}, v_1^{(3)}) = 3:$$

Դժվար չէ համոզվել, որ  $\alpha$ -ն հանդիսանում է միջակայքային տոտալ  $(\Delta(P_n \square P_m) + 1)$ - ներկում  $P_n \square P_m$  գրաֆի համար (Նկ. 2.2.6):



Նկ. 2.2.6

**Դեպք 3:**  $n = 2k + 2 (k \in \mathbb{N})$ :

Սահմանենք  $P_n \square P_m$  գրաֆի  $H_i$  ենթագրաֆները հետևյալ կերպ.

$$H_i = (V^{(2i+1)} \cup V^{(2i+2)}, E^{(2i+1)} \cup E^{(2i+2)} \cup \{(v_j^{(2i+1)}, v_j^{(2i+2)}) | 1 \leq j \leq m\}), 0 \leq i \leq k :$$

**Դեպք 3.1:**  $m = 0 \pmod{3}$ :

Կամայական  $0 \leq i \leq k$  համար որպես  $H_i$  ենթագրաֆի տոտալ  $\beta$  ներկում վերցնենք դեպք 1.1 – ում նկարագրված  $\alpha$  ներկումը՝ հետևյալ փոփոխություններով.

$$\beta(v_1^{(2i+1)}) = 5, 1 \leq i \leq k,$$

$$\beta(v_{m-1}^{(2i+2)}) = 5, 0 \leq i \leq k-1,$$

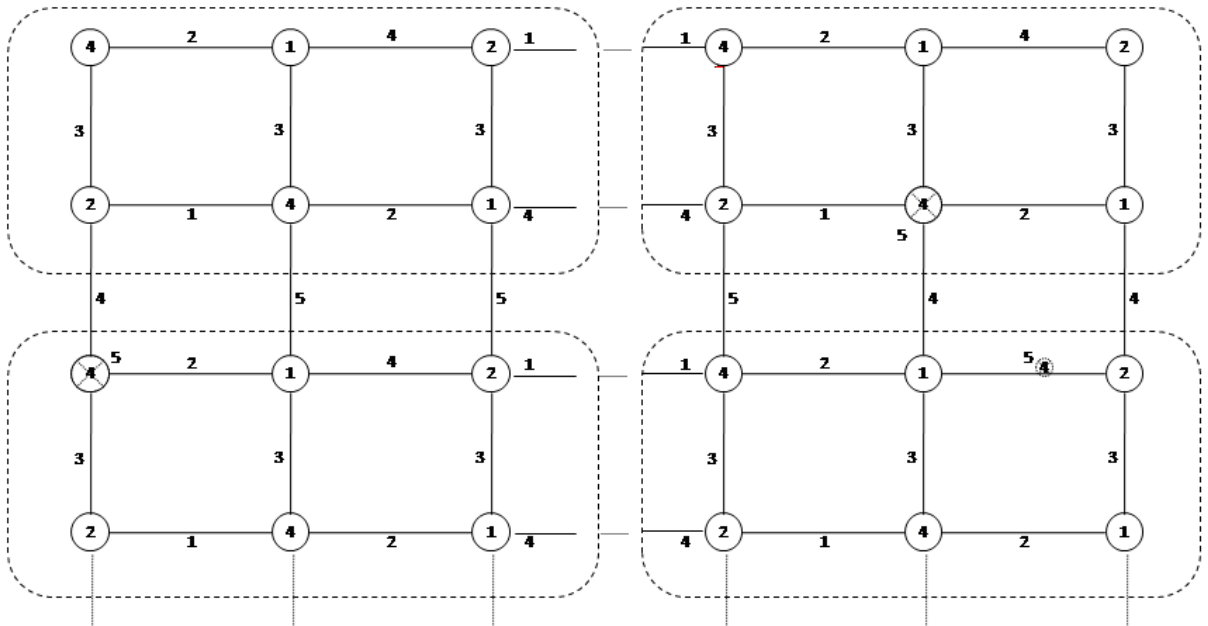
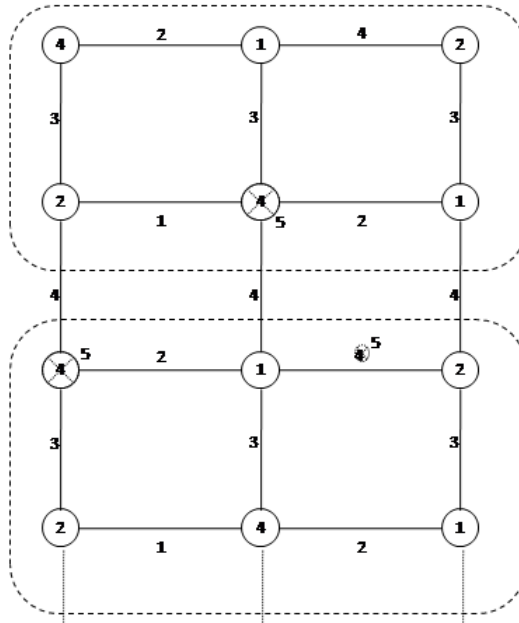
$$\beta((v_{m-1}^{(2i+1)}, v_m^{(2i+1)})) = 5, 1 \leq i \leq k :$$

Սահմանենք

$$\beta((v_j^{(2i+2)}, v_j^{(2i+3)})) = 4, 0 \leq i \leq k-1, j = \{1, m-1, m\},$$

$$\beta((v_j^{(2i+2)}, v_j^{(2i+3)})) = 5, 0 \leq i \leq k-1, 2 \leq j \leq m-2 :$$

Դժվար չէ համոզվել, որ  $\beta$ -ն հանդիսանում է միջակայքային տոտալ  $(\Delta(P_n \square P_m) + 1)$ - ներկում  $P_n \square P_m$  գրաֆի համար (Նկ. 2.2.7):



Նկ. 2.2.7

**Դեպք 3.2:**  $m = 1 \pmod 3$ :

Կամայական  $0 \leq i \leq k$  համար որպես  $H_i$  ենթագրաֆի տոտալ  $\beta$  ներկում վերցնենք դեպք 1.2 – ում նկարագրված  $\alpha$  ներկումը՝ հետևյալ փոփոխություններով.

$$\beta(v_2^{(2i+1)}) = 5, 1 \leq i \leq k,$$

$$\beta(v_{m-1}^{(2i+2)}) = 5, 0 \leq i \leq k-1,$$

$$\beta((v_1^{(2i+2)}, v_2^{(2i+2)})) = 5, 0 \leq i \leq k-1,$$

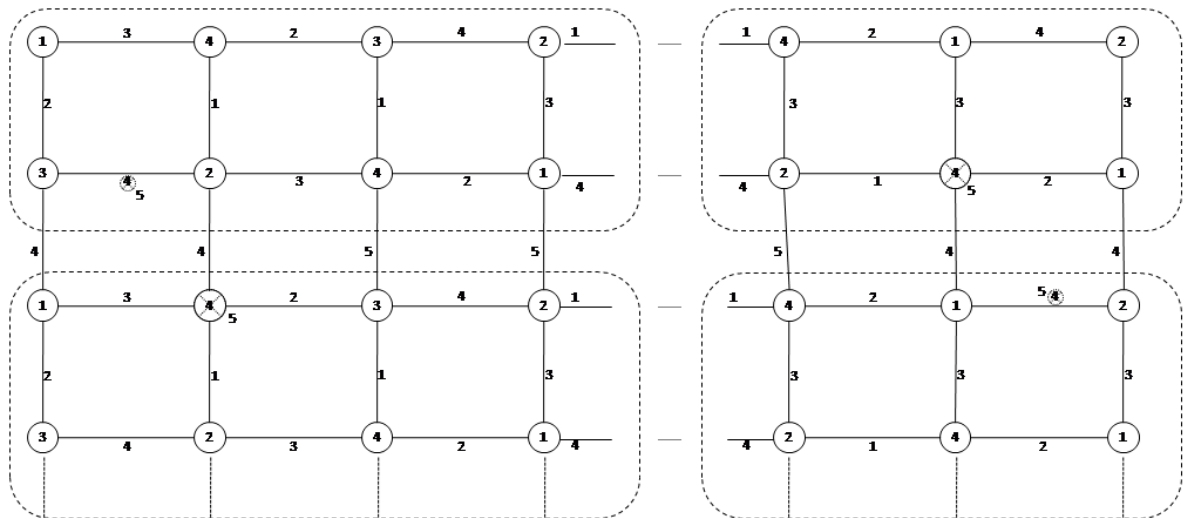
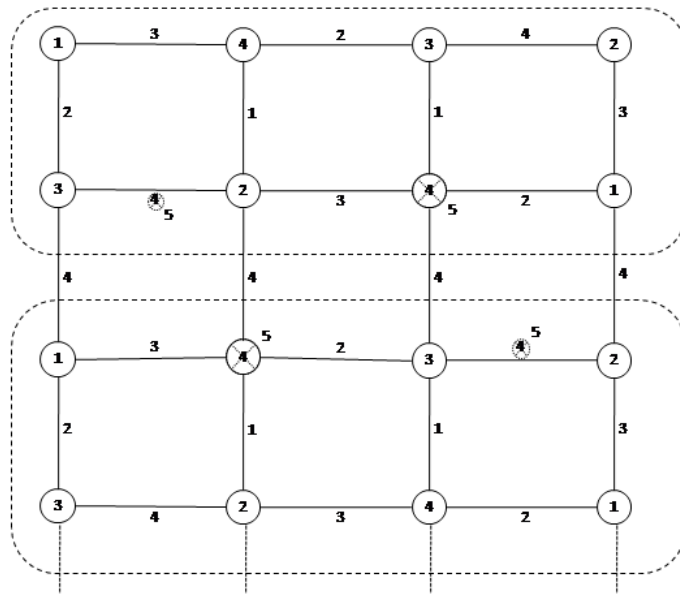
$$\beta((v_{m-1}^{(2i+1)}, v_m^{(2i+1)})) = 5, 1 \leq i \leq k:$$

Սահմանենք

$$\beta((v_j^{(2i+2)}, v_j^{(2i+3)})) = 4, 0 \leq i \leq k-1, j = \{1, 2, m-1, m\},$$

$$\beta((v_j^{(2i+2)}, v_j^{(2i+3)})) = 5, 0 \leq i \leq k-1, 3 \leq j \leq m-2:$$

Դժվար չէ համոզվել, որ  $\beta$ -ն հանդիսանում է միջակայքային տոտալ  $(\Delta(P_n \square P_m) + 1)$ - ներկում  $P_n \square P_m$  գրաֆի համար (Նկ. 2.2.8):



Նկ. 2.2.8

**Դեպք 3.3:**  $m = 2 \pmod{3}$ :

Կամայական  $0 \leq i \leq k$  համար որպես  $H_i$  ենթագրաֆի միջակայքային տոտալ  $\beta$  ներկում վերցնենք դեպք 1.3 – ում նկարագրված  $\alpha$  ներկումը հետևյալ փոփոխություններով՝

$$\beta(v_2^{(2i+1)}) = 5 \quad \forall 1 \leq i \leq k, \quad \beta(v_{m-1}^{(2i+2)}) = 5 \quad \forall 0 \leq i \leq k-1,$$

$$\beta((v_1^{(2i+2)}, v_2^{(2i+2)})) = 5 \quad \forall 0 \leq i \leq k-1,$$

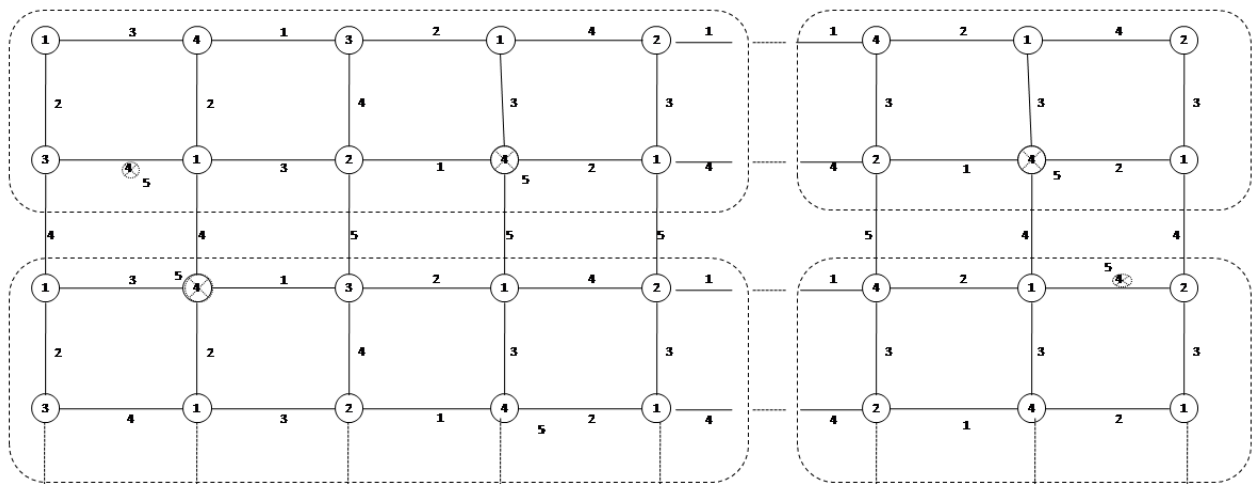
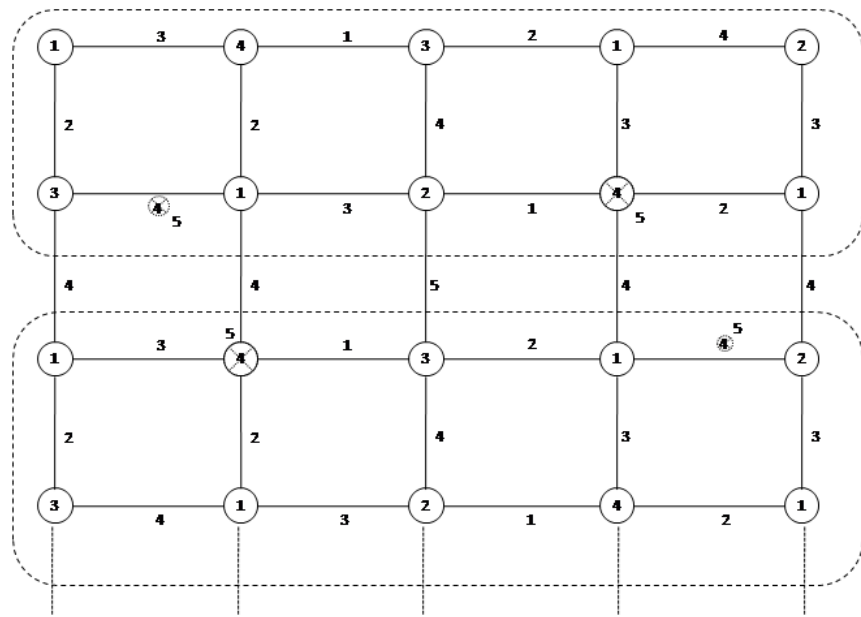
$$\beta((v_{m-1}^{(2i+1)}, v_m^{(2i+1)})) = 5 \quad \forall 1 \leq i \leq k:$$

Սահմանենք

$$\beta((v_j^{(2i+2)}, v_j^{(2i+3)})) = 4 \quad \forall 0 \leq i \leq k-1, j = 1, 2, m-1, m,$$

$$\beta((v_j^{(2i+2)}, v_j^{(2i+3)})) = 5 \quad \forall 0 \leq i \leq k-1, 3 \leq j \leq m-2:$$

Դժվար չէ համոզվել, որ  $\beta$ -ն հանդիսանում է միջակայքային տոտալ  $(\Delta(P_n \square P_m) + 1)$ - ներկում  $P_n \square P_m$  գրաֆի համար (Նկ. 2.2.9):



Նկ. 2.2.9

**Դեպք 4:**  $n = 2k + 3(k \in \mathbb{N})$ :

Սահմանենք  $P_n \square P_m$  գրաֆի  $G_0$  և  $G_1$  ենթագրաֆները հետևյալ կերպ.

$$G_0 = (V^{(1)} \cup V^{(2)} \cup V^{(3)}, E^{(1)} \cup E^{(2)} \cup E^{(3)} \cup \{(v_j^{(1)}, v_j^{(2)}) | 1 \leq j \leq m\} \cup \{(v_j^{(2)}, v_j^{(3)}) | 1 \leq j \leq m\}),$$

$$G_1 = \left( \bigcup_{i=4}^n V^{(i)}, \bigcup_{i=4}^n E^{(i)} \cup \{(v_j^{(i)}, v_j^{(i+1)}) | 1 \leq j \leq m, 4 \leq i \leq n-1\} \right):$$

**Դեպք 4.1:**  $m = 0 \pmod 3$ :

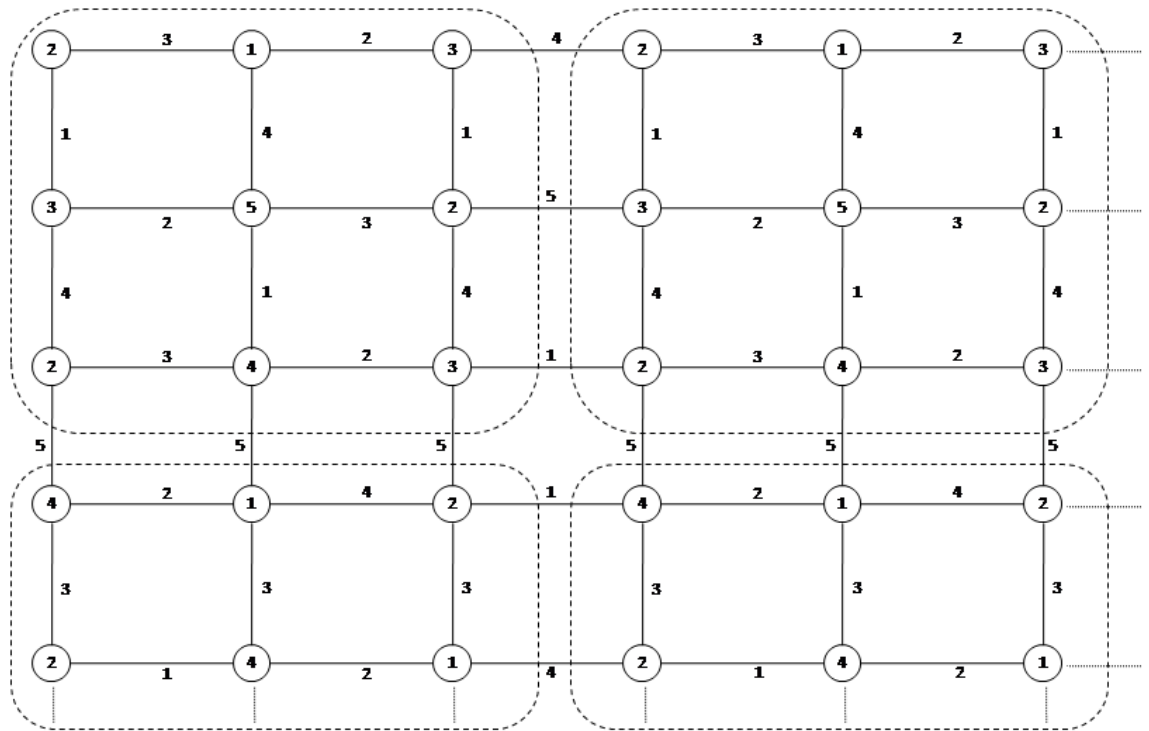
Այս դեպքում որպես  $G_0$  ենթագրաֆի տոտալ  $\beta$  ներկում վերցնենք դեպք 2.1 – ում նկարագրված  $\alpha$  ներկումը, իսկ որպես  $G_1$  ենթագրաֆի տոտալ  $\beta$  ներկում՝ դեպք 3.1 – ի  $\alpha$  ներկումը:

Սահմանենք

$$\beta((v_j^{(3)}, v_j^{(4)})) = 5,$$

որտեղ  $1 \leq j \leq m$ :

Դժվար չէ համոզվել, որ  $\beta$ -ն հանդիսանում է միջակայքային տոտալ  $(\Delta(P_n \square P_m) + 1)$ - ներկում  $P_n \square P_m$  գրաֆի համար (Նկ. 2.2.10):



Նկ. 2.2.10

**Դեպք 4.2:**  $m = 1 \pmod 3$ :

Որպես  $G_0$  ենթագրաֆի տոտալ  $\beta$  ներկում վերցնենք դեպք 2.2 – ում նկարագրված  $\alpha$  ներկումը, իսկ որպես  $G_1$  ենթագրաֆի տոտալ  $\beta$  ներկում՝ դեպք 3.2 – ի  $\alpha$  ներկումը:

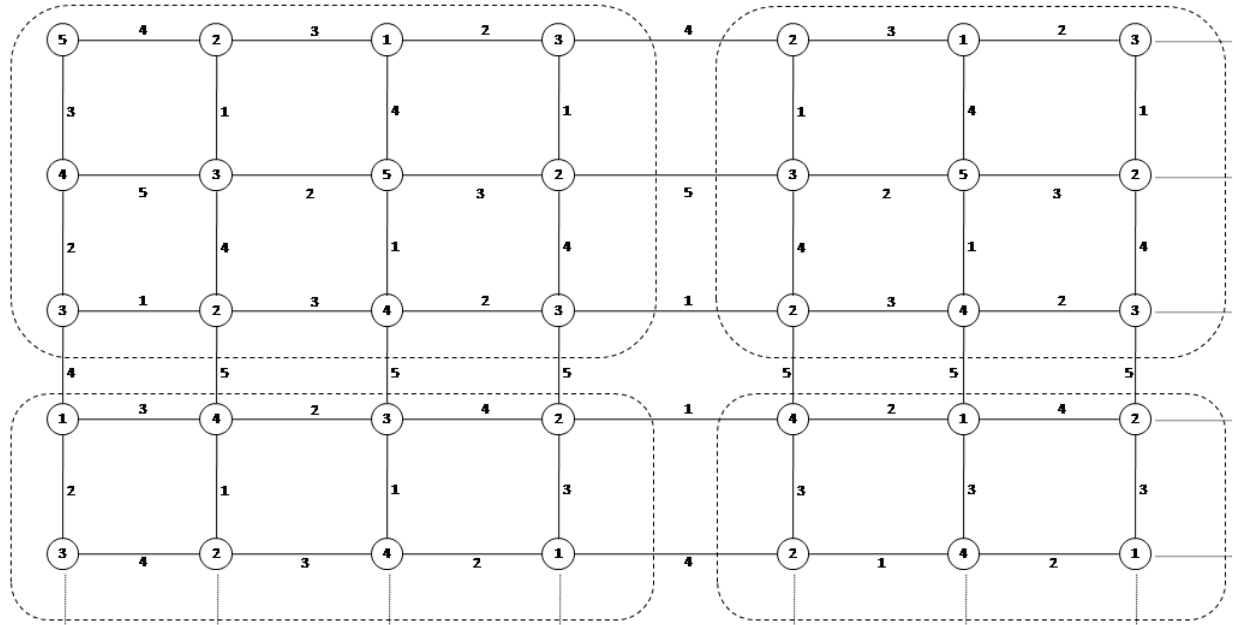
Սահմանենք



$$\beta((v_1^{(3)}, v_1^{(4)})) = 4, \beta((v_j^{(3)}, v_j^{(4)})) = 5,$$

որտեղ  $2 \leq j \leq m$ :

Դժվար չէ համոզվել, որ  $\beta$ -ն հանդիսանում է միջակայքային տոտալ  $(\Delta(P_n \square P_m) + 1)$ - ներկում  $P_n \square P_m$  գրաֆի համար (Նկ. 2.2.11):



Նկ. 2.2.11

**Դեպք 4.3:**  $m = 2 \pmod{3}$ :

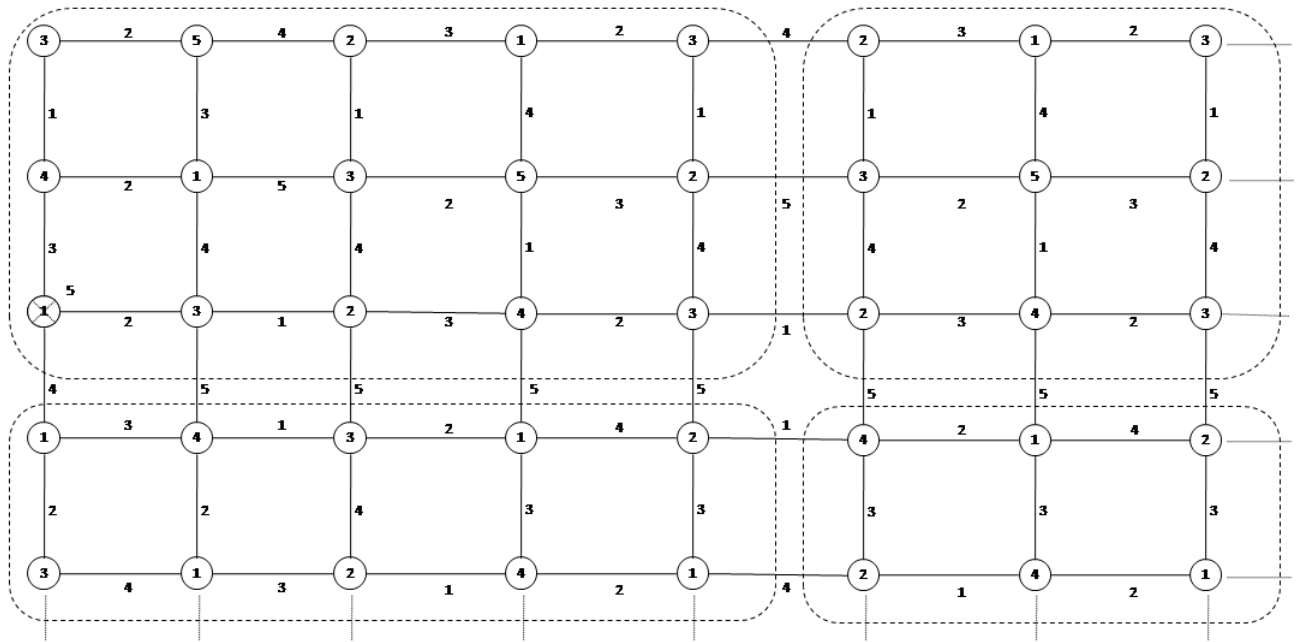
Որպես  $G_0$  ենթագրաֆի տոտալ  $\beta$  ներկում վերցնենք դեպք 2.3 - ում նկարագրված  $\alpha$  ներկումը հետևյալ փոփոխությամբ՝  $\beta(v_1^{(3)}) = 5$ , իսկ որպես  $G_1$  ենթագրաֆի տոտալ  $\beta$  ներկում՝ դեպք 3.3 - ի  $\alpha$  ներկումը:

Սահմանենք

$$\beta((v_1^{(3)}, v_1^{(4)})) = 4, \beta((v_j^{(3)}, v_j^{(4)})) = 5,$$

որտեղ  $2 \leq j \leq m$ :

Դժվար չէ համոզվել, որ  $\beta$ -ն հանդիսանում է միջակայքային տոտալ  $(\Delta(P_n \square P_m) + 1)$ - ներկում  $P_n \square P_m$  գրաֆի համար (Նկ. 2.2.12): ↵



Նկ. 2.2.12

Հայտնի է, որ  $P_2 \square C_5 \in T$  և  $w_\tau(P_2 \square C_5) = \Delta(P_2 \square C_5) + 2$ :

**Թեորեմ 2.2.3:** Կամայական  $n \geq 2$  և  $m \geq 3$  բնական թվերի համար, եթե  $P_n \square C_m \neq P_2 \square C_5$ , ապա  $P_n \square C_m \in T$  և

$$w_\tau(P_n \square C_m) = \Delta(P_n \square C_m) + 1:$$

**Ապացույց:** Դիցուք  $V(P_n \square C_m) = \bigcup_{i=1}^n V^{(i)}$  որտեղ  $V^{(i)} = \{v_j^{(i)} \mid 1 \leq j \leq m\}$ , իսկ

$$E(P_n \square C_m) = \bigcup_{i=1}^n E^{(i)} \cup \bigcup_{i=1}^m E_j,$$

որտեղ  $E^{(i)} = \{(v_j^{(i)}, v_{(j+1)\%m}^{(i)}) \mid 1 \leq j \leq m\}$  և

$E_j = \{(v_j^{(i)}, v_j^{(i+1)}) \mid 1 \leq i \leq n-1\}$  : Սահմանենք  $P_n \square C_m$  գրաֆի  $\alpha$  միջակայքային տոտալ  $(\Delta(P_n \square C_m) + 1)$ - ներկումը:

**Դեպք 1:**  $m = 0 \pmod{3}$ :

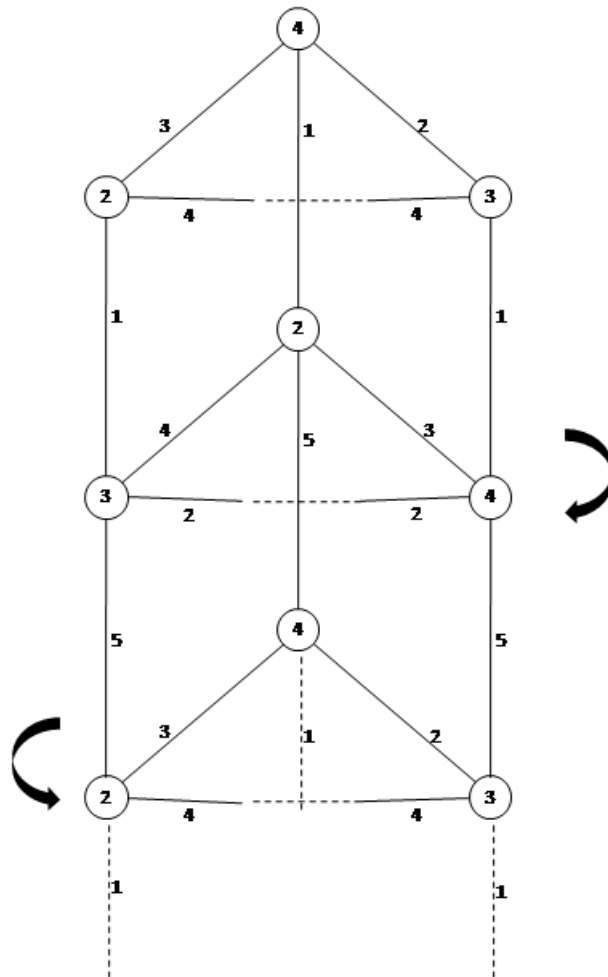
Այս դեպքում  $\alpha$ - ն սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$\alpha(v_j^{(2k+1)}) = \begin{cases} 2, & \text{եթե } j = 1 \pmod{3}, \\ 4, & \text{եթե } j = 2 \pmod{3}, \\ 3, & \text{եթե } j = 0 \pmod{3}, \end{cases} \quad \alpha((v_j^{(2k+1)}, v_{(j+1)\pmod{m}}^{(2k+1)})) = \begin{cases} 3, & \text{եթե } j = 1 \pmod{3}, \\ 2, & \text{եթե } j = 2 \pmod{3}, \\ 4, & \text{եթե } j = 0 \pmod{3}, \end{cases}$$

$$\alpha(v_j^{(2k)}) = \begin{cases} 3, & \text{եթե } j = 1 \pmod 3, \\ 2, & \text{եթե } j = 2 \pmod 3, \\ 4, & \text{եթե } j = 0 \pmod 3, \end{cases} \quad \alpha((v_j^{(2k)}, v_{(j+1) \pmod m}^{(2k)})) = \begin{cases} 4, & \text{եթե } j = 1 \pmod 3, \\ 3, & \text{եթե } j = 2 \pmod 3, \\ 2, & \text{եթե } j = 0 \pmod 3, \end{cases}$$

$$\alpha(v_j^{(2k+1)}, v_j^{(2k+2)}) = 1, \quad \alpha(v_j^{(2k+2)}, v_j^{(2k+3)}) = 5:$$

Դժվար չէ համոզվել, որ  $\alpha$ -ն հանդիսանում է միջակայքային տոտալ  $(\Delta(P_n \square C_m) + 1)$ - ներկում  $P_n \square C_m$  գրաֆի համար (Նկ. 2.2.13):



Նկ. 2.2.13

**Դեպք 2:**  $m = 1 \pmod 3$ :

**Դեպք 2.1:**  $n = 0 \pmod 2$ :

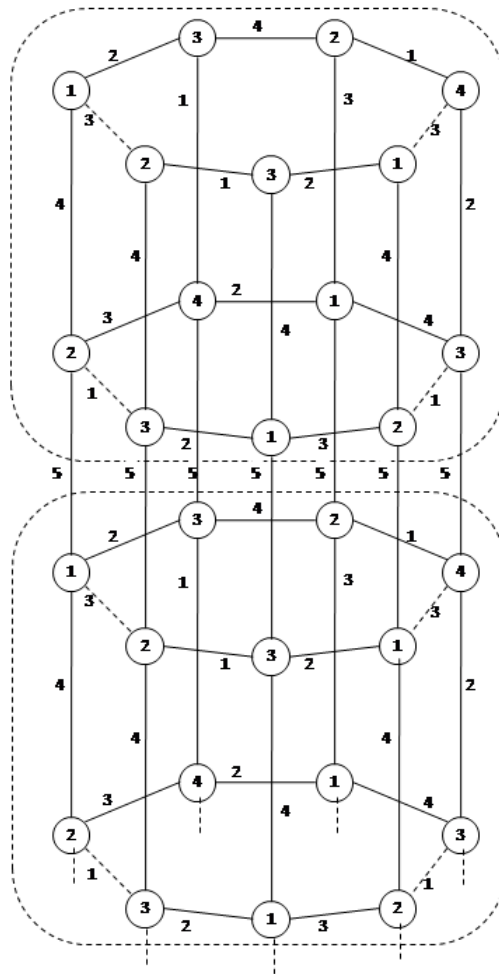
Այս դեպքում  $\alpha$  - ն սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$\alpha(v_j^{(2k+1)}) = \begin{cases} 1, & \text{երբ } j = 1, \\ 3, & \text{երբ } j = 2, \\ 2, & \text{երբ } j = 3, \\ 4, & \text{երբ } j = 4, \\ 1, & \text{երբ } j = 2 \bmod 3, j \neq 2, \\ 3, & \text{երբ } j = 0 \bmod 3, j \neq 3, \\ 2, & \text{երբ } j = 1 \bmod 3, j \geq 7, \end{cases} \quad \alpha((v_j^{(2k+1)}, v_{(j+1) \bmod m}^{(2k+1)})) = \begin{cases} 2, & \text{երբ } j = 1, \\ 4, & \text{երբ } j = 2, \\ 1, & \text{երբ } j = 0 \bmod 3, \\ 3, & \text{երբ } j = 1 \bmod 3, j \neq 1, \\ 2, & \text{երբ } j = 2 \bmod 3, j \neq 2, \end{cases}$$

$$\alpha(v_j^{(2k)}) = \begin{cases} 2, & \text{երբ } j = 1, \\ 4, & \text{երբ } j = 2, \\ 1, & \text{երբ } j = 3, \\ 3, & \text{երբ } j = 1 \bmod 3, j \geq 4, \\ 2, & \text{երբ } j = 2 \bmod 3, j \neq 2, \\ 1, & \text{երբ } j = 0 \bmod 3, j \neq 3, \end{cases} \quad \alpha((v_j^{(2k)}, v_{(j+1) \bmod m}^{(2k)})) = \begin{cases} 3, & \text{երբ } j = 1, \\ 2, & \text{երբ } j = 2, \\ 4, & \text{երբ } j = 3, \\ 1, & \text{երբ } j = 1 \bmod 3, j \neq 1, \\ 3, & \text{երբ } j = 2 \bmod 3, j \neq 2, \\ 2, & \text{երբ } j = 0 \bmod 3, j \neq 3, \end{cases}$$

$$\alpha((v_j^{(2k+1)}, v_{(j+1) \bmod m}^{(2k+2)})) = \begin{cases} 1, & \text{երբ } j = 2, \\ 3, & \text{երբ } j = 3, \\ 2, & \text{երբ } j = 4, \\ 4, & \text{երբ } j = 1 \text{ կամ } j \geq 5, \end{cases} \quad \alpha((v_j^{(2k+2)}, v_{(j+1) \bmod m}^{(2k+3)})) = 5 \quad \forall j \in \mathbb{Z} :$$

Դժվար չէ համոզվել, որ  $\alpha$ -ն հանդիսանում է միջակայքային տոտալ  $(\Delta(P_n \square C_m) + 1)$ -ներկում  $P_n \square C_m$  գրաֆի համար (Նկ. 2.2.14):



Նկ. 2.2.14

**Դեպք 2.2:**  $n = 1 \pmod{2}$ :

Այս դեպքում  $\alpha$  - ն սահմաններ հետևյալ կերպ.

$$\alpha(v_j^{(2k+1)}) = \begin{cases} 1, & \text{երբ } j = 1, \\ 3, & \text{երբ } j = 2, \\ 2, & \text{երբ } j = 3, \\ 4, & \text{երբ } j = 4, \\ 1, & \text{երբ } j = 2 \pmod{3}, j \neq 2, \\ 3, & \text{երբ } j = 0 \pmod{3}, j \neq 3, \\ 2, & \text{երբ } j = 1 \pmod{3}, j \geq 7, \end{cases} \quad \alpha((v_j^{(2k+1)}, v_{(j+1) \pmod{m}}^{(2k+1)})) = \begin{cases} 2, & \text{երբ } j = 1, \\ 4, & \text{երբ } j = 2, \\ 1, & \text{երբ } j = 0 \pmod{3}, \\ 3, & \text{երբ } j = 1 \pmod{3}, j \neq 1, \\ 2, & \text{երբ } j = 2 \pmod{3}, j \neq 2, \end{cases}$$

երբ  $2k+1 < n$ ,

$$\alpha(v_j^{(n)}) = \begin{cases} 3, & \text{Եթե } j = 1, \\ 1, & \text{Եթե } j = 2 \text{ կամ } j = 4, \\ 3, & \text{Եթե } j = 2 \bmod 3, j \neq 2, \\ 4, & \text{Եթե } j = 0 \bmod 3, \\ 2, & \text{Եթե } j = 1 \bmod 3, j \geq 7, \end{cases} \quad \alpha((v_j^{(n)}, v_{(j+1)\%m}^{(n)})) = \begin{cases} 2, & \text{Եթե } j = 1 \text{ կամ } j = 3, \\ 3, & \text{Եթե } j = 2, \\ 4, & \text{Եթե } j = 1 \bmod 3, j \neq 1, \\ 2, & \text{Եթե } j = 2 \bmod 3, j \neq 2, \\ 3, & \text{Եթե } j = 0 \bmod 3, j \neq 3, \end{cases}$$

$$\alpha(v_j^{(2k)}) = \begin{cases} 2, & \text{Եթե } j = 1, \\ 4, & \text{Եթե } j = 2, \\ 1, & \text{Եթե } j = 3, \\ 3, & \text{Եթե } j = 1 \bmod 3, j \geq 4, \\ 2, & \text{Եթե } j = 2 \bmod 3, j \neq 2, \\ 1, & \text{Եթե } j = 0 \bmod 3, j \neq 3, \end{cases}$$

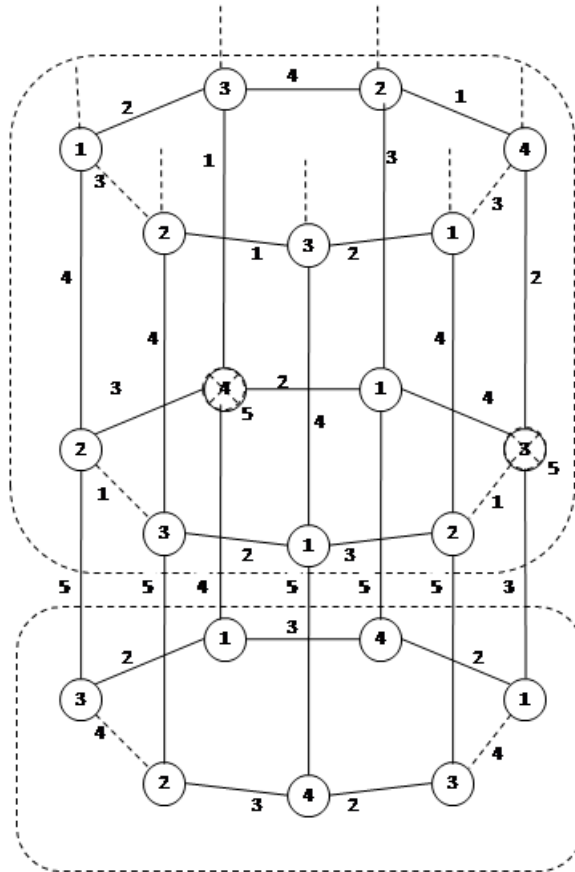
$$\text{Եթե } 2k < n-1, \alpha(v_j^{(n-1)}) = \begin{cases} 2, & \text{Եթե } j = 1, \\ 5, & \text{Եթե } j = 2 \text{ կամ } j = 4, \\ 1, & \text{Եթե } j = 0 \bmod 3, \\ 2, & \text{Եթե } j = 2 \bmod 3, j \geq 5, \\ 3, & \text{Եթե } j = 1 \bmod 3, j \geq 7, \end{cases}$$

$$\alpha((v_j^{(2k)}, v_{(j+1)\bmod m}^{(2k)})) = \begin{cases} 3, & \text{Եթե } j = 1, \\ 2, & \text{Եթե } j = 2, \\ 4, & \text{Եթե } j = 3, \\ 1, & \text{Եթե } j = 1 \bmod 3, j \neq 1, \\ 3, & \text{Եթե } j = 2 \bmod 3, j \neq 2, \\ 2, & \text{Եթե } j = 0 \bmod 3, j \neq 3, \end{cases} \quad \alpha((v_j^{(2k+2)}, v_{(j+1)\bmod m}^{(2k+3)})) = 5 \text{ որտեղ } j \in \square \text{ և}$$

$$2k+3 < n, \alpha((v_j^{(n-1)}, v_{(j+1)\bmod m}^{(n)})) = \begin{cases} 4, & \text{Եթե } j = 2, \\ 3, & \text{Եթե } j = 4, \\ 5, & \text{հ.դ.,} \end{cases}$$

$$\alpha((v_j^{(2k+1)}, v_{(j+1)\bmod m}^{(2k+2)})) = \begin{cases} 1, & \text{Եթե } j = 2, \\ 3, & \text{Եթե } j = 3, \\ 2, & \text{Եթե } j = 4, \\ 4, & \text{Եթե } j = 1 \text{ կամ } j \geq 5: \end{cases}$$

Դժվար չէ համոզվել, որ  $\alpha$ -ն հանդիսանում է միջակայքային տոտալ  $(\Delta(P_n \square C_m) + 1)$ -ներկում  $P_n \square C_m$  գրաֆի համար (Նկ. 2.2.15):



Նկ. 2.2.15

**Դեպք 3:**  $m = 2 \pmod 3$ :

**Դեպք 3.1:**  $n = 0 \pmod 2$ :

Այս դեպքում  $\alpha$  - ն սահմանները հետևյալ կերպ.

$$\alpha(v_j^{(1)}) = \begin{cases} 2, & \text{երբ } j = 1 \text{ կամ } j = 4, \\ 5, & \text{երբ } j = 2, \\ 1, & \text{երբ } j = 3, \\ 3, & \text{երբ } j = 5, \\ 2, & \text{երբ } j = 0 \pmod 3, j \neq 3, \\ 5, & \text{երբ } j = 1 \pmod 3, j \geq 7, \\ 4, & \text{երբ } j = 2 \pmod 3, j \geq 8, \end{cases}$$

$$\alpha((v_j^{(1)}, v_{(j+1) \pmod m}^{(1)})) = \begin{cases} 4, & \text{երբ } j = 1 \text{ կամ } j = 4, \\ 2, & \text{երբ } j = 2, \\ 3, & \text{երբ } j = 3, \\ 5, & \text{երբ } j = 2 \pmod 3, j \neq 2, \\ 4, & \text{երբ } j = 0 \pmod 3, j \neq 3, \\ 2, & \text{երբ } j = 1 \pmod 3, j \geq 7, \end{cases}$$

$$\alpha(v_j^{(2)}) = \begin{cases} 5, & \text{երբ } j = 1, \\ 4, & \text{երբ } j = 2, \\ 3, & \text{երբ } j = 3, \\ 1, & \text{երբ } j = 5, \\ 5, & \text{երբ } j = 0 \pmod 3, j \neq 3, \\ 4, & \text{երբ } j = 1 \pmod 3, j \geq 4, \\ 2, & \text{երբ } j = 2 \pmod 3, j \geq 8, \end{cases} \quad \alpha((v_j^{(2)}, v_{(j+1) \pmod m}^{(2)})) = \begin{cases} 2, & \text{երբ } j = 1, \\ 5, & \text{երբ } j = 2, \\ 3, & \text{երբ } j = 4, \\ 4, & \text{երբ } j = 2 \pmod 3, j \neq 2, \\ 2, & \text{երբ } j = 0 \pmod 3, \\ 5, & \text{երբ } j = 1 \pmod 3, j \geq 7, \end{cases}$$

$$\alpha((v_j^{(1)}, v_j^{(2)})) = \begin{cases} 4, & \text{երբ } j = 3, \\ 1, & \text{երբ } j = 4, \\ 2, & \text{երբ } j = 5, \\ 3, & \text{հ.դ.,} \end{cases} \quad \alpha((v_j^{(2)}, v_j^{(3)})) = \begin{cases} 5, & \text{երբ } j = 4 \text{ կամ } j = 5, \\ 1, & \text{հ.դ.,} \end{cases}$$

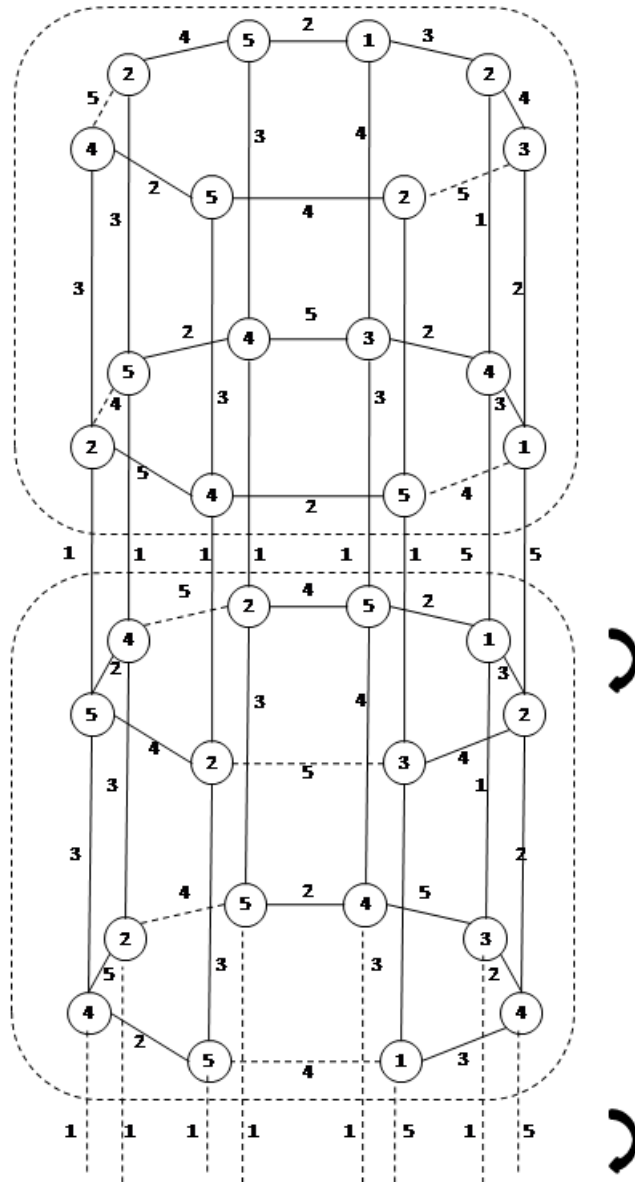
$$\alpha(v_{(j+1) \pmod m}^{(2k+3)}) = \alpha(v_j^{(2k+1)}), \quad \alpha((v_{(j+1) \pmod m}^{(2k+3)}, v_{(j+2) \pmod m}^{(2k+3)})) = \alpha((v_j^{(2k+1)}, v_{(j+1) \pmod m}^{(2k+1)})),$$

$$\alpha(v_{(j+1) \pmod m}^{(2k+4)}) = \alpha(v_j^{(2k+2)}), \quad \alpha((v_{(j+1) \pmod m}^{(2k+4)}, v_{(j+2) \pmod m}^{(2k+4)})) = \alpha((v_j^{(2k+2)}, v_{(j+1) \pmod m}^{(2k+2)})),$$

$$\alpha(v_{(j+1) \pmod m}^{(2k+3)}, v_{(j+1) \pmod m}^{(2k+4)}) = \alpha(v_j^{(2k+1)}, v_j^{(2k+2)}), \quad \alpha(v_{(j+1) \pmod m}^{(2k+4)}, v_{(j+1) \pmod m}^{(2k+5)}) = \alpha(v_j^{(2k+2)}, v_j^{(2k+3)}):$$

Դժվար չէ համոզվել, որ  $\alpha$ -ն հանդիսանում է միջակայքային տոտալ  $(\Delta(P_n \square C_m) + 1)$ -ներկում  $P_n \square C_m$  գրաֆի համար (Եկ. 2.2.16):





Նկ. 2.2.16

**Դեպք 3.2:**  $n = 1 \pmod{2}$ :

Այս դեպքում  $\alpha$  - ն սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$\alpha(v_j^{(1)}) = \begin{cases} 4, & \text{երբ } j = 1, \\ 3, & \text{երբ } j = 2, \\ 2, & \text{երբ } j = 3, \\ 1, & \text{երբ } j = 4, \\ 4, & \text{երբ } j = 0 \pmod{3}, j \neq 3, \\ 3, & \text{երբ } j = 1 \pmod{3}, j \geq 7, \\ 2, & \text{երբ } j = 2 \pmod{3}, j \geq 5, \end{cases} \quad \alpha((v_j^{(1)}, v_{(j+1) \pmod{m}}^{(1)})) = \begin{cases} 2, & \text{երբ } j = 1, \\ 4, & \text{երբ } j = 2, \\ 3, & \text{երբ } j = 3, \\ 3, & \text{երբ } j = 2 \pmod{3}, j \neq 2, \\ 2, & \text{երբ } j = 0 \pmod{3}, j \neq 3, \\ 4, & \text{երբ } j = 1 \pmod{3}, j \geq 4, \end{cases}$$

$$\alpha((v_j^{(1)}, v_j^{(2)})) = \begin{cases} 5, & \text{երթն } j = 3, \\ 2, & \text{երթն } j = 4, \\ 1, & \text{հ.դ.,} \end{cases} \quad \alpha((v_j^{(2)}, v_j^{(3)})) = \begin{cases} 4, & \text{երթն } j = 3, \\ 1, & \text{երթն } j = 4, \\ 2, & \text{երթն } j = 5, \\ 3, & \text{հ.դ.,} \end{cases}$$

$$\alpha(v_j^{(2)}) = \begin{cases} 2, & \text{երթն } j = 1, \\ 5, & \text{երթն } j = 2, \\ 1, & \text{երթն } j = 3, \\ 3, & \text{երթն } j = 5, \\ 2, & \text{երթն } j = 0 \pmod 3, j \neq 3, \\ 5, & \text{երթն } j = 1 \pmod 3, j \geq 4, \\ 4, & \text{երթն } j = 2 \pmod 3, j \geq 8, \end{cases} \quad \alpha((v_j^{(2)}, v_{(j+1) \pmod m}^{(2)})) = \begin{cases} 4, & \text{երթն } j = 1 \text{ կամ } j = 4, \\ 2, & \text{երթն } j = 2, \\ 3, & \text{երթն } j = 3, \\ 5, & \text{երթն } j = 2 \pmod 3, j \neq 2, \\ 4, & \text{երթն } j = 0 \pmod 3, j \neq 3, \\ 2, & \text{երթն } j = 1 \pmod 3, j \geq 7, \end{cases}$$

$$\alpha(v_j^{(3)}) = \begin{cases} 5, & \text{երթն } j = 1, \\ 4, & \text{երթն } j = 2, \\ 3, & \text{երթն } j = 3, \\ 1, & \text{երթն } j = 5, \\ 5, & \text{երթն } j = 0 \pmod 3, j \neq 3, \\ 4, & \text{երթն } j = 1 \pmod 3, j \geq 4, \\ 2, & \text{երթն } j = 2 \pmod 3, j \geq 8, \end{cases} \quad \alpha((v_j^{(3)}, v_{(j+1) \pmod m}^{(3)})) = \begin{cases} 2, & \text{երթն } j = 1, \\ 5, & \text{երթն } j = 2, \\ 3, & \text{երթն } j = 4, \\ 4, & \text{երթն } j = 2 \pmod 3, j \neq 2, \\ 2, & \text{երթն } j = 0 \pmod 3, \\ 5, & \text{երթն } j = 1 \pmod 3, j \geq 7, \end{cases}$$

$$\alpha((v_j^{(3)}, v_j^{(4)})) = \begin{cases} 5, & \text{երթն } j = 4 \text{ կամ } j = 5, \\ 1, & \text{հ.դ.,} \end{cases}$$

$$\alpha(v_j^{(4)}) = \begin{cases} 4, & \text{երթն } j = 1, \\ 2, & \text{երթն } j = 2 \text{ կամ } j = 5, \\ 5, & \text{երթն } j = 3, \\ 1, & \text{երթն } j = 4, \\ 3, & \text{երթն } j = 0 \pmod 3, j \neq 3, \\ 2, & \text{երթն } j = 1 \pmod 3, j \geq 7, \\ 5, & \text{երթն } j = 2 \pmod 3, j \geq 8, \end{cases} \quad \alpha((v_j^{(4)}, v_{(j+1) \pmod m}^{(4)})) = \begin{cases} 5, & \text{երթն } j = 1, \\ 4, & \text{երթն } j = 2 \text{ կամ } j = 5, \\ 2, & \text{երթն } j = 3, \\ 3, & \text{երթն } j = 4, \\ 5, & \text{երթն } j = 0 \pmod 3, j \neq 3, \\ 4, & \text{երթն } j = 1 \pmod 3, j \geq 7, \\ 2, & \text{երթն } j = 2 \pmod 3, j \geq 8, \end{cases}$$

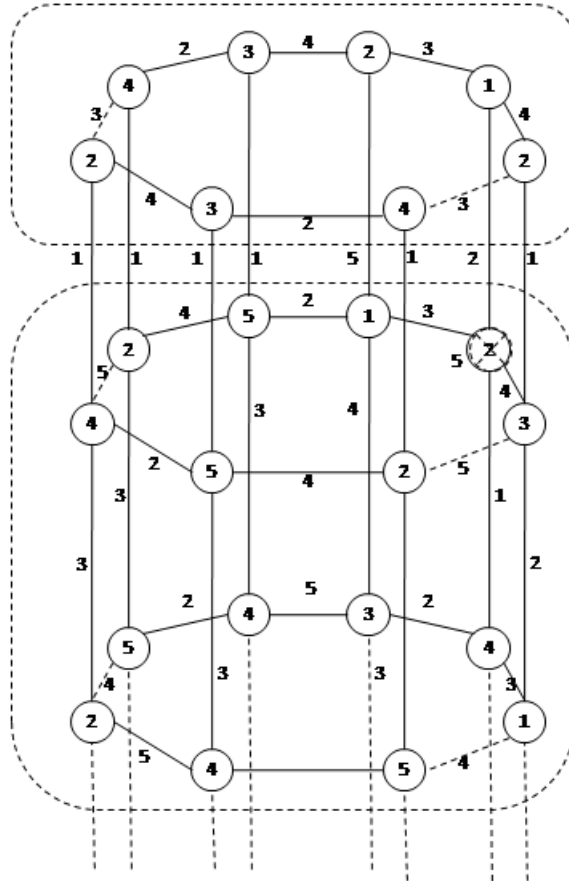
$$\alpha(v_j^{(5)}) = \begin{cases} 2, & \text{երթն } j = 1, \\ 5, & \text{երթն } j = 2, \\ 4, & \text{երթն } j = 3, \\ 3, & \text{երթն } j = 4, \\ 1, & \text{երթն } j = 0 \pmod 3, j \neq 3, \\ 5, & \text{երթն } j = 1 \pmod 3, j \geq 7, \\ 4, & \text{երթն } j = 2 \pmod 3, j \geq 5, \end{cases} \quad \alpha((v_j^{(5)}, v_{(j+1) \pmod m}^{(5)})) = \begin{cases} 4, & \text{երթն } j = 1, \\ 2, & \text{երթն } j = 2, \\ 5, & \text{երթն } j = 3, \\ 3, & \text{երթն } j = 5, \\ 4, & \text{երթն } j = 0 \pmod 3, j \neq 3, \\ 2, & \text{երթն } j = 1 \pmod 3, j \geq 4, \\ 5, & \text{երթն } j = 2 \pmod 3, j \geq 8, \end{cases}$$

$$\alpha(v_{(j+1) \pmod m}^{(2k+6)}) = \alpha(v_j^{(2k+4)}), \quad \alpha((v_{(j+1) \pmod m}^{(2k+6)}, v_{(j+2) \pmod m}^{(2k+6)})) = \alpha((v_j^{(2k+4)}, v_{(j+1) \pmod m}^{(2k+4)})),$$

$$\alpha(v_{(j+1) \bmod m}^{(2k+7)}) = \alpha(v_j^{(2k+5)}), \quad \alpha((v_{(j+1) \bmod m}^{(2k+7)}, v_{(j+2) \bmod m}^{(2k+7)})) = \alpha((v_j^{(2k+5)}, v_{(j+1) \bmod m}^{(2k+5)})),$$

$$\alpha(v_{(j+1) \bmod m}^{(2k+4)}, v_{(j+1) \bmod m}^{(2k+5)}) = \alpha(v_j^{(2k+2)}, v_j^{(2k+3)}), \quad \alpha(v_{(j+1) \bmod m}^{(2k+5)}, v_{(j+1) \bmod m}^{(2k+6)}) = \alpha(v_j^{(2k+3)}, v_j^{(2k+4)}):$$

Դժվար չէ համոզվել, որ  $\alpha$ -ն հանդիսանում է միջակայքային տոտալ  $(\Delta(P_n \square C_m) + 1)$ -ներկում  $P_n \square C_m$  գրաֆի համար (Նկ. 2.2.17):  $\lrcorner$



Նկ. 2.2.17

Այսպիսով, մեզ հաջողվեց կառուցել միջակայքային տոտալ ներկումներ ինչպես ցանցերի, այնպես էլ գլանների համար: Ունենալով այդ ներկումները և հաշվի առնելով Թեորեմ 2.2.1 – ը, կարող ենք ձևակերպել հետևյալ թեորեման.

**Թեորեմ 2.2.4:** Եթե  $G \square H$  դեկարտյան արտադրյալը հարթ է, ընդ որում երկու արտադրիչներն էլ ունեն առնվազն երեք գագաթ, ապա  $G \square H \in T$  և  $w_r(G \square H) = 5$ :

### Գլուխ 3.

## Միջակայքային տոտալ ներկում չունեցող գրաֆներ

### 3.1 Միջակայքային տոտալ ներկում չունեցող գրաֆներ՝ կառուցված կարճագույն շղթաների հիման վրա

Այս բաժնում կկառուցենք միջակայքային տոտալ ներկում չունեցող գրաֆների դաս՝ հիմնված երկկողմանի գրաֆների վրա:

Սահմանենք  $P(n, k)(n, k \in \mathbb{N})$  գրաֆը հետևյալ կերպ.

$$V(P(n, k)) = U \cup V,$$

որտեղ  $U = \{a\} \cup \{c_{(i,j)} \mid 1 \leq i < j \leq k\}$ ,  $V = \{b_j^{(i)} \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n\}$ ,

$$E(P(n, k)) = \{(a, b_j^{(i)}) \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n\} \cup \{(c_{(i,j)}, b_l^{(i)}), (c_{(i,j)}, b_l^{(j)}) \mid 1 \leq i < j \leq k, 1 \leq l \leq n\}:$$

Պարզ է, որ  $P(n, k)$ -ն կապակցված երկկողմանի գրաֆ է և

$$|V(P(n, k))| = n \cdot k + \binom{k}{2} + 1, d(a) = \Delta(P(n, k)) = n \cdot k, d(b_j^{(i)}) = k, d(c_{(i,j)}) = 2n, 1 \leq i \leq k,$$

$1 \leq j \leq n$ :

**Թեորեմ 3.1.1:** Եթե  $n + k < \frac{n \cdot k - 1}{2}(n, k \in \mathbb{N})$ , ապա  $P(n, k) \notin T$ :

**Ապացույց:** Ենթադրենք հակառակը՝  $\alpha$ -ն հանդիսանում է  $P(n, k)$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $t$ -ներկում, որտեղ  $t \geq n \cdot k + 1$ :

$$\text{Դիցուք } s = \min S(a, \alpha), \alpha((a, b_{j_0}^{(i_0)})) = s \quad \text{և} \quad \alpha((a, b_{j_1}^{(i_1)})) = \max S(a, \alpha) \geq s + n \cdot k - 1:$$

Դիտարկենք երկու դեպք:

**Դեպք 1:**  $i_0 = i_1$  :

Այս դեպքում, համաձայն  $P(n, k)$  գրաֆի սահմանման գոյություն ունի  $c_{(i_0, j)} \in V(P(n, k))$ , երբ  $i_0 < j$  կամ  $c_{(j, i_0)} \in V(P(n, k))$ , երբ  $i_0 > j$ , որ  $(b_{j_0}^{(i_0)}, c_{(i_0, j)}), (b_{j_1}^{(i_0)}, c_{(i_0, j)}) \in E(P(n, k))$  կամ  $(b_{j_0}^{(i_0)}, c_{(j, i_0)}), (b_{j_1}^{(i_0)}, c_{(j, i_0)}) \in E(P(n, k))$ : Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ գոյություն ունի  $c_{(i_0, j)} \in V(P(n, k))$ ,  $i_0 < j$ , և  $(b_{j_0}^{(i_0)}, c_{(i_0, j)}), (b_{j_1}^{(i_0)}, c_{(i_0, j)}) \in E(P(n, k))$ :

Քանի որ  $d(b_{j_0}^{(i_0)}) = k$ ,  $d(c_{(i_0, j)}) = 2n$ , ապա  $\alpha((b_{j_0}^{(i_0)}, c_{(i_0, j)})) \leq s + k$  և, հետևաբար՝

$$\alpha((b_{j_1}^{(i_0)}, c_{(i_0, j)})) \leq s + k + 2n:$$

Պարզ է, որ  $\alpha((a, b_{j_1}^{(i_1)})) \leq s + k + 2n + k = s + 2k + 2n$ : Մյուս կողմից  $\alpha((a, b_{j_1}^{(i_1)})) \geq s + n \cdot k - 1$ , հետևաբար՝

$$s + n \cdot k - 1 \leq s + 2k + 2n,$$

որտեղից

$$\frac{n \cdot k - 1}{2} \leq n + k,$$

որը հակասում է Թեորեմ 3.1.1 - ի պայամանին:

**Դեպք 2:**  $i_0 \neq i_1$  :

Այս դեպքում, համաձայն  $P(n, k)$  գրաֆի սահմանման, գոյություն ունի  $c_{(i_0, i_1)} \in V(P(n, k))$ , որ  $(b_{j_0}^{(i_0)}, c_{(i_0, i_1)}), (b_{j_1}^{(i_1)}, c_{(i_0, i_1)}) \in E(P(n, k))$ :

Քանի որ  $d(b_{j_0}^{(i_0)}) = k$ ,  $d(c_{(i_0, i_1)}) = 2n$ , ապա  $\alpha((b_{j_0}^{(i_0)}, c_{(i_0, i_1)})) \leq s + k$  և հետևաբար՝

$$\alpha((b_{j_1}^{(i_1)}, c_{(i_0, i_1)})) \leq s + k + 2n:$$

Պարզ է, որ  $\alpha((a, b_j^{(i)})) \leq s+k+2n+k = s+2k+2n$ : Մյուս կողմից  $\alpha((a, b_j^{(i)})) \geq s+n \cdot k - 1$ , հետևաբար՝

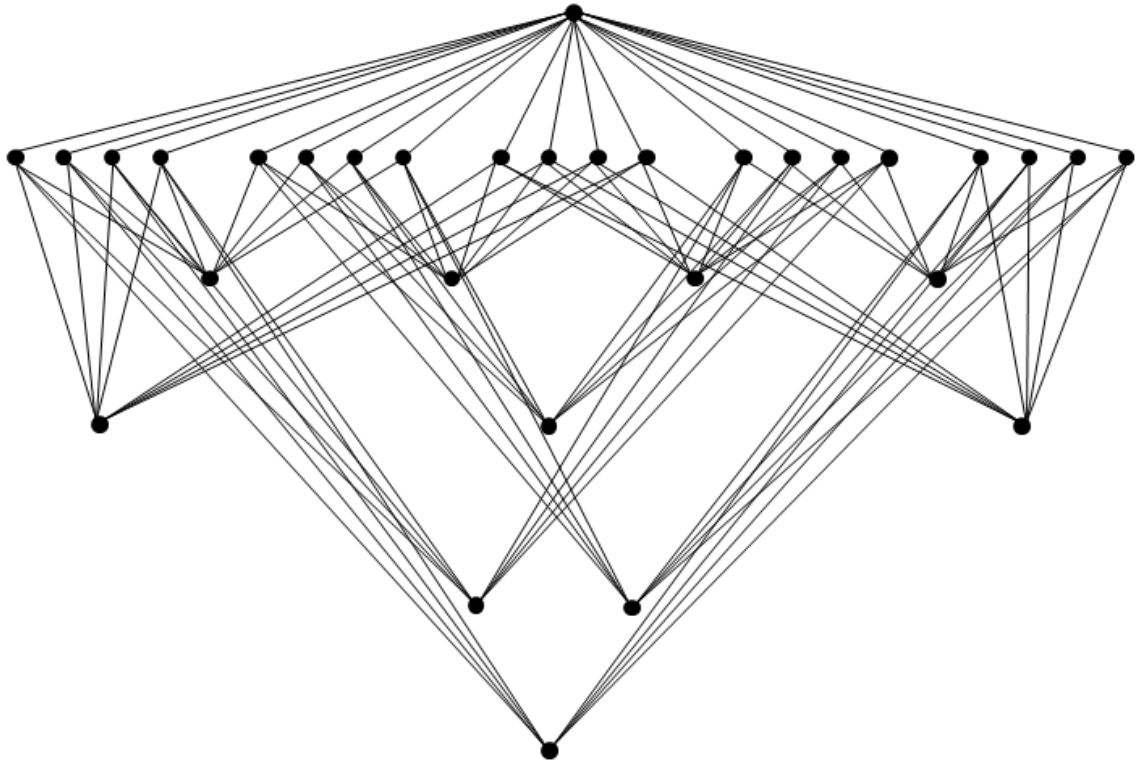
$$s+n \cdot k - 1 \leq s+2k+2n,$$

որտեղից

$$\frac{n \cdot k - 1}{2} \leq n+k,$$

որը հակասում է Թեորեմ 3.1.1-ի պայամանին:  $\lrcorner$

Նկար 3.1.1 - ում պատկերված է  $P(4,5)$  երկկողմանի գրաֆը, որը, համաձայն Թեորեմ 3.1.1 - ի, չունի միջակայքային տոտալ ներկում:



Նկ. 3.1.1

### 3.2 Միջակայքային տոտալ ներկում չունեցող գրաֆներ՝ կառուցված ծառերի հիման վրա

Այս բաժնում կկառուցենք միջակայքային տոտալ ներկում չունեցող գրաֆների դաս՝ հիմնված ծառերի վրա: Դիցուք  $T$ -ն ծառ է, որն ունի առնվազն երկու կախված գագաթներ:

Սահմանենք  $\hat{T}$  գրաֆը հետևյալ կերպ.

$$V(\hat{T}) = V(T) \cup \{u\}, u \notin V(T), E(\hat{T}) = E(T) \cup \{(u, v) | v \in F(T)\}:$$

որտեղ  $F(T) = \{v | v \in V(T), d_T(v) = 1\}$ : Նկատենք, որ եթե  $T$  ծառի ցանկացած երկու կախված գագաթների միջև հեռավորությունը զույգ թիվ է, ապա ստացված  $\hat{T}$  գրաֆը երկկողմանի է:

**Թեորեմ 3.2.1:** Եթե  $T$ -ն ծառ է և  $|F(T)| > 3 + \max_{P \in \mathcal{P}} \sum_{v \in V(P)} d_T(v)$ , ապա  $\hat{T} \notin \mathcal{T}$ , որտեղ

$\mathcal{P}$ -ն  $T$  ծառի կախված գագաթները միացնող շղթաների բազմությունն է:

**Ապացույց:** Ենթադրենք հակառակը՝  $\alpha$ -ն հանդիսանում է  $\hat{T}$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $t$ -ներկում, որտեղ  $t \geq |F(T)| + 1$ :

Դիցուք  $s = \min S(u, \alpha)$ ,  $\alpha((u, v)) = s$  և  $\alpha((u, v')) = \max S(u, \alpha) \geq s + |F(T)| - 1$ : Քանի որ  $\hat{T} - u$ -ն ծառ է, ապա  $\hat{T} - u$  գրաֆում գոյություն ունի միակ  $P_{vv'}$  շղթա, որը միացնում է  $v$  և  $v'$  գագաթները: Դիցուք  $P_{vv'} = (v_1, e_1, v_2, \dots, v_i, e_i, v_{i+1}, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$ , որտեղ  $v_1 = v, v_{k+1} = v'$ :

Դժվար չէ համոզվել, որ ցանկացած  $i, 1 \leq i \leq k$ , համար տեղի ունի հետևյալը.

$$\alpha((v_i, v_{i+1})) \leq s + 1 + \sum_{j=1}^i d_T(v_j):$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$\alpha((v_k, v_{k+1})) = \alpha((v_k, v')) \leq s + 1 + \sum_{j=1}^k d_T(v_j) \leq s + 1 + \max_{P \in \mathcal{P}} \sum_{v \in V(P)} d_T(v),$$

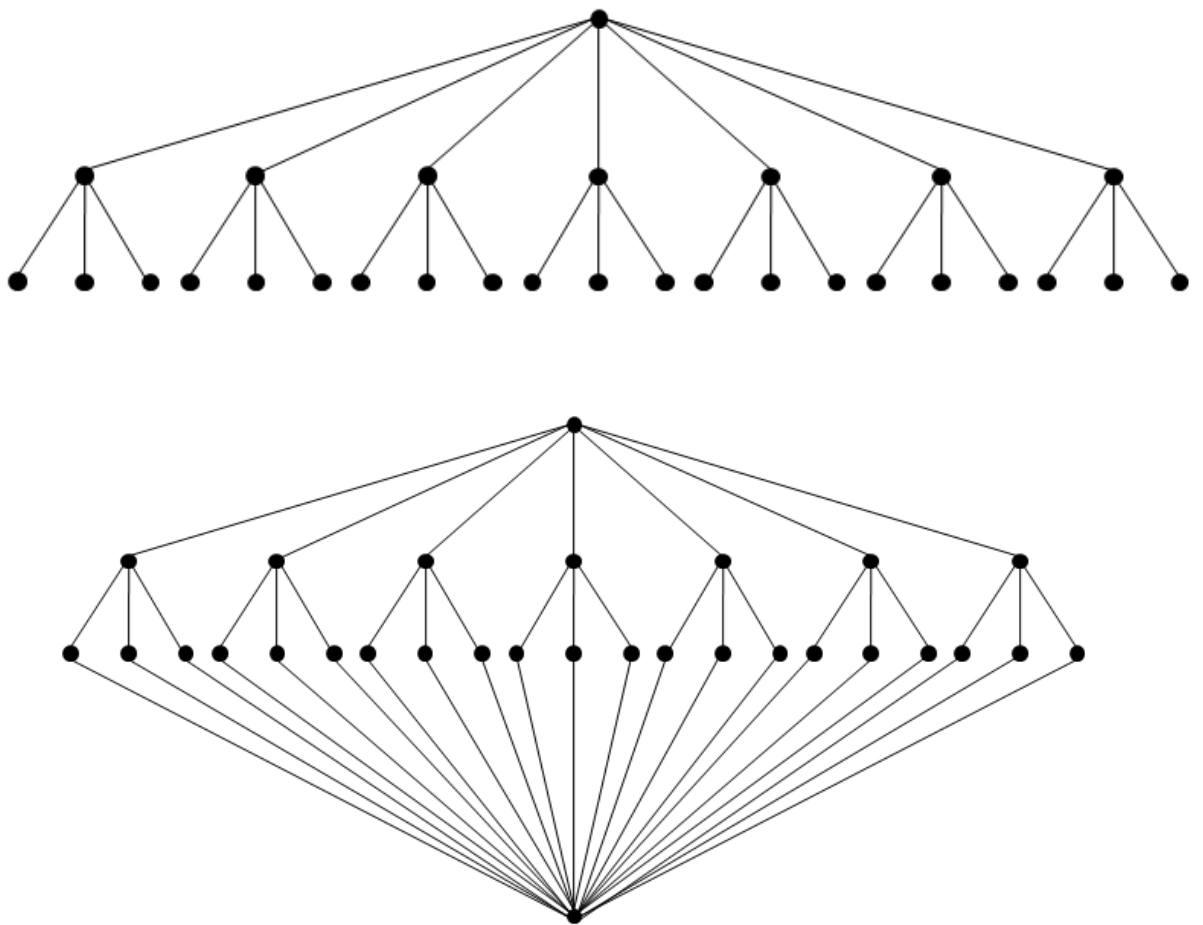
ուստի

$$s + |F(T)| - 1 \leq \max S(u, \alpha) = \alpha((u, v')) \leq s + 2 + \max_{P \in \mathcal{P}} \sum_{v \in V(P)} d_T(v),$$

և, հետևաբար՝  $|F(T)| \leq 3 + \max_{P \in \mathcal{P}} \sum_{v \in V(P)} d_T(v)$ , որը հակասում է Թեորեմ 3.2.1 - ի պայմանին:  $\leftarrow$

**Հետևանք 3.2.1:** Եթե  $T$ -ն ծառ է, որի ցանկացած երկու կախված գագաթների միջև հեռավորությունը զույգ թիվ է և  $|F(T)| > 3 + \max_{P \in \mathcal{P}} \sum_{v \in V(P)} d_T(v)$ , ապա երկկողմանի  $\hat{T}$  գրաֆը չունի միջակայքային տոտալ ներկում:

Դիտարկենք Նկար 3.2.1 - ում պատկերված  $T$  ծառը: Համաձայն Թեորեմ 3.2.1 - ի  $\hat{T}$  գրաֆը չունի միջակայքային տոտալ ներկում:



Նկ. 3.2.1



### 3.3 Միջակայքային տոտալ ներկում չունեցող գրաֆներ՝ կառուցված ենթատրոհումների հիման վրա

Այս բաժնում կկառուցենք միջակայքային տոտալ ներկում չունեցող գրաֆների դաս՝ հիմնված ենթատրոհումների վրա:

Դիցուք  $G$ -ն  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  գագաթների բազմությամբ գրաֆ է: Սահմանենք  $S(G)$  և  $\hat{G}$  գրաֆները [31] հետևյալ կերպ.

$$V(S(G)) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \cup \{w_{ij} \mid (v_i, v_j) \in E(G)\},$$

$$E(S(G)) = \{(v_i, w_{ij}), (v_j, w_{ij}) \mid (v_i, v_j) \in E(G)\},$$

$$V(\hat{G}) = V(S(G)) \cup \{u\}, u \notin V(S(G)),$$

$$E(\hat{G}) = E(S(G)) \cup \{(u, w_{ij}) \mid (v_i, v_j) \in E(G)\}:$$

Այլ կերպ ասած՝  $S(G)$ -ն գրաֆ է, որը ստացվում է  $G$ -ի բոլոր կողերը տրոհելով, իսկ  $\hat{G}$ -ը ստացվում է  $S(G)$ -ից՝ միացնելով բոլոր  $w_{ij}$  գագաթները նոր  $u$  գագաթին: Դժվար չէ տեսնել, որ  $S(G)$ -ն և  $\hat{G}$ -ն երկկողմանի գրաֆներ են:

**Թեորեմ 3.3.1:** Եթե  $G$ -ն կապակցված գրաֆ է և  $|E(G)| > 1 + \max_{P \in \mathcal{P}} \sum_{v \in V(P)} d_{\hat{G}}(v)$ ,

որտեղ  $\mathcal{P}$ -ն  $S(G)$ -ի  $w_{ij}$  գագաթները միացնող բոլոր կարճագույն շղթաների բազմությունն է, ապա  $\hat{G} \notin \mathcal{T}$ :

**Ապացույց:** Ենթադրենք հակառակը՝  $\alpha$ -ն հանդիսանում է  $G$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $t$ -ներկում, որտեղ  $t \geq |E(G)|$ : Դիտարկենք  $u$  գագաթը: Դիցուք  $w$ -ն և  $w'$ -ը հանդիսանում են  $u$  գագաթի երկու հարևան գագաթներ այնպիսին, որ  $\alpha((u, w)) = \min S(u, \alpha) = s$  և  $\alpha((u, w')) = \max S(u, \alpha) \geq s + |E(G)| - 1$ : Քանի որ  $\hat{G} - u = S(G)$  և  $\hat{G} - u$  - ն կապակցված է, ապա  $\hat{G} - u$  գրաֆում գոյություն ունի  $w$  և  $w'$  գագաթները միացնող  $P(w, w')$  կարճագույն շղթա, որտեղ  $P(w, w') = (x_1, e_1, x_2, \dots, x_i, e_i, x_{i+1}, \dots, x_k, e_k, x_{k+1})$ ,  $x_1 = w, x_{k+1} = w'$ : Նկատենք, որ

$$\alpha((x_i, x_{i+1})) \leq s + \sum_{j=1}^i d_{\hat{G}}(x_j), 1 \leq i \leq k, \text{ և } \alpha((x_{k+1}, u)) = \alpha((w', u)) \leq s + \sum_{j=1}^{k+1} d_{\hat{G}}(x_j):$$

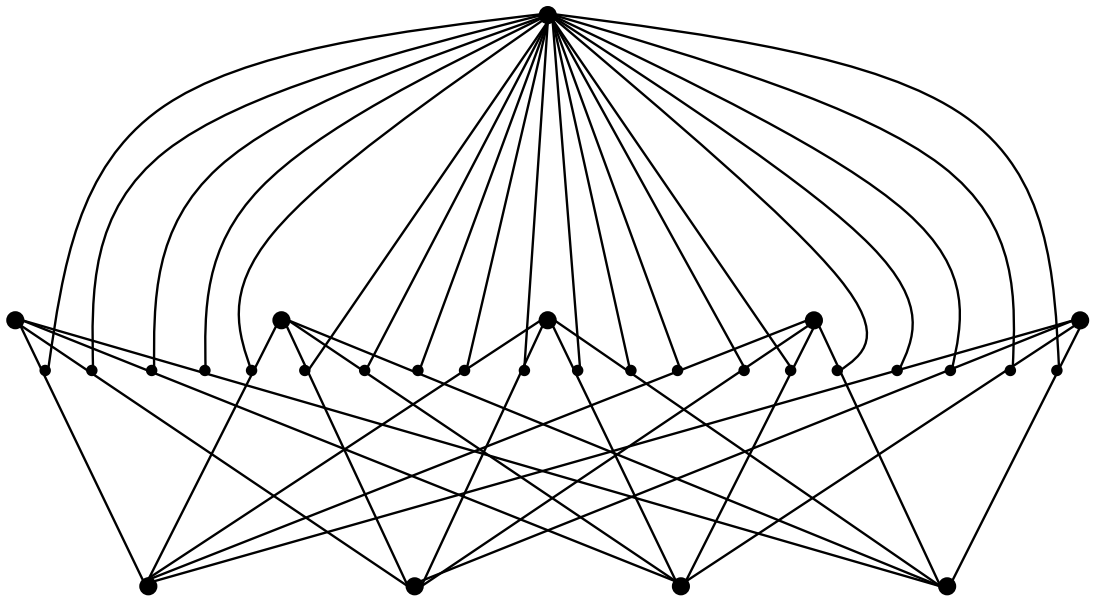
Ուստի  $s + |E(G)| - 1 \leq \max_{P \in \mathcal{P}} S(u, \alpha) = \alpha((u, w')) \leq s + \sum_{j=1}^{k+1} d_{\hat{G}}(x_j) \leq s + \max_{P \in \mathcal{P}} \sum_{v \in V(P)} d_{\hat{G}}(v),$

որտեղից  $|E(G)| \leq 1 + \max_{P \in \mathcal{P}} \sum_{v \in V(P)} d_{\hat{G}}(v)$ , որը հակասում է Թեորեմ 3.3.1 - ի պայամանին:  $\lrcorner$

**Լեմա 3.3.1:** Եթե  $n \geq 8$ , ապա  $\hat{K}_n \notin T$  :

**Լեմա 3.3.2:** Եթե  $m \cdot n - m - n > 10$ , ապա  $\hat{K}_{m,n} \notin T$  :

Համաձայն Լեմա 3.3.2 - ի նկար 3.3.1 - ում պատկերված գրաֆը չունի միջակայքային տոտալ ներկում:



Նկ. 3.3.1

## Եզրակացություն

Աշխատանքում դիտարկված են վերջավոր, ոչ կողմնորոշված գրաֆներ՝ առանց պատիկ կողերի և օղակների [3, 10, 48]:  $G=(V,E)$  գրաֆի գագաթների և կողերի բազմությունները նշանակված են, համապատասխանաբար,  $V(G)$ -ով և  $E(G)$ -ով:  $VE(G)$ -ով նշանակված է հետևյալ բազմությունը՝  $V(G)\cup E(G)$ : Ցանկացած  $v\in V(G)$  համար  $d_G(v)$ -ով նշանակված է այդ գագաթի աստիճանը  $G$  գրաֆում, իսկ  $\Delta(G)$ -ով՝ գագաթների աստիճաններից առավելագույնը:  $G$  գրաֆի ցանկացած  $u,v\in V(G)$  գագաթների միջև հեռավորությունը նշանակված է  $d_G(u,v)$ -ով, իսկ  $d(G)$ -ով՝  $G$  գրաֆի տրամագիծը:

Ոչ բացասական ամբողջ թվերի բազմությունը նշանակված է  $\mathbb{N}_+$ -ով, իսկ բնական թվերի բազմությունը՝  $\mathbb{N}$  -ով: Ցանկացած  $a,b\in\mathbb{N}_+$  և  $a\leq b$  համար  $[a,b]$ -ով նշանակված է  $\{a,a+1,\dots,b\}$  բազմությունը:

Դիցուք տրված են  $G=(V(G),E(G))$  և  $H=(V(H),E(H))$  գրաֆները:  $G$  և  $H$  գրաֆների դեկարտյան արտադրյալը՝  $G\Box H$ -ը սահմանված է հետևյալ կերպ.

$$V(G\Box H)=V(G)\times V(H),$$

$$E(G\Box H)=\{((u_1,v_1),(u_2,v_2))\mid (u_1=u_2,(v_1,v_2)\in E(H))\text{ կամ } (v_1=v_2,(u_1,u_2)\in E(G))\}:$$

Եթե  $G$ -ն և  $H$ -ը կապակցված գրաֆներ են, ապա  $G\Box H$ -ը ևս կապակցված է և  $\Delta(G\Box H)=\Delta(G)+\Delta(H)$ :

$\alpha:E(G)\rightarrow\{1,2,\dots,t\}$  ֆունկցիան կոչվում է  $G$  գրաֆի ճիշտ կողային  $t$ -ներկում, եթե տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.

1.  $\forall i (1\leq i\leq t)$  համար  $\exists e\in E(G)$  այնպիսին, որ  $\alpha(e)=i$ ,
2.  $\forall v\in V(G)$  գագաթին կից կողերը ներկված են զույգ առ զույգ տարբեր գույներով:

Ցանկացած  $v\in V(G)$  համար  $S(v,\alpha)$ -ով նշանակված է այն գույների բազմությունը, որոնցով ներկվում են  $v$  գագաթին կից կողերը  $\alpha$  կողային ներկման ժամանակ: Ակնհայտ է, որ եթե  $\alpha$ -ն ճիշտ կողային ներկում է, ապա  $\forall v\in V(G)$  գագաթի համար  $|S(v,\alpha)|=d_G(v)$ :

$\alpha: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, t\}$  ճիշտ կողային  $t$ -ներկումը կոչվում է  $G$  գրաֆի միջակայքային կողային  $t$ -ներկում, եթե  $\forall v \in V(G)$  համար  $S(v, \alpha)$ -ն միջակայք է:

$N_t$ -ով նշանակված է այն գրաֆների բազմությունը, որոնք ունեն միջակայքային կողային  $t$ -ներկում երբ  $t \in \mathbb{N}$ , իսկ  $N$ -ով՝  $N \equiv \bigcup_{t \geq 1} N_t$ : Միջակայքային կողային ներկման մեջ օգտագործվող գույների առավելագույն հնարավոր քանակը նշանակված է  $W(G)$ -ով, երբ  $G \in N$ :

$\alpha: VE(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, t\}$  ֆունկցիան կոչվում է  $G$  գրաֆի տոտալ  $t$ -ներկում, եթե տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.

1.  $\forall i (1 \leq i \leq t)$  համար  $\exists ve \in VE(G)$  այնպիսին, որ  $\alpha(ve) = i$ ,
2.  $\forall e = (u, v) \in E(G)$  համար  $\alpha(u) \neq \alpha(v)$ ,
3. ցանկացած հարևան  $e, e' \in E(G)$  կողերի համար  $\alpha(e) \neq \alpha(e')$ ,
4.  $\forall v \in V(G)$  գագաթի և նրան կից  $e$  կողի համար  $\alpha(v) \neq \alpha(e)$ :

Տոտալ ներկման մեջ օգտագործվող գույների նվազագույն հնարավոր քանակը նշանակված է  $\chi''(G)$ : Դիցուք  $\alpha$ -ն  $G$  գրաֆի տոտալ  $t$ -ներկում է: Ցանկացած  $v \in V(G)$  համար  $S[v, \alpha]$ -ն ( $v$  գագաթի սպեկտր  $\alpha$  ներկման ժամանակ) սահմանված է հետևյալ ձևով.  $S[v, \alpha] = S(v, \alpha) \cup \{\alpha(v)\}$ :

$\alpha: VE(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, t\}$  տոտալ  $t$ -ներկումը կոչվում է  $G$  գրաֆի միջակայքային տոտալ  $t$ -ներկում, եթե  $\forall v \in V(G)$  համար  $S[v, \alpha]$ -ն միջակայք է:

$T_t$ -ով նշանակված է այն գրաֆների բազմությունը, որոնք ունեն միջակայքային տոտալ  $t$ -ներկում, երբ  $t \geq 1$ , իսկ  $T$ -ով՝  $T \equiv \bigcup_{t \geq 1} T_t$ : Միջակայքային տոտալ ներկման

մեջ օգտագործվող գույների նվազագույն և առավելագույն հնարավոր քանակները նշանակված են, համապատասխանաբար,  $w_r(G)$ -ով և  $W_r(G)$ -ով, երբ  $G \in T$ :

Աշխատանքում ուսումնասիրված են գրաֆների միջակայքային տոտալ ներկումների գոյության, կառուցման, ինչպես նաև այդպիսի ներկում ունեցող գրաֆների  $w_r(G)$  և  $W_r(G)$  պարամետրերի գնահատման խնդիրները: Մասնավորապես, աշխատանքում ստացվել են հետևյալ արդյունքները.

- 1) Միջակայքային տոտալ ներկումներ ունեցող գրաֆների  $w_r(G)$  և  $W_r(G)$  պարամետրերի ընդհանուր գնահատականներ,

- 2) Լրիվ բազմակողմանի գրաֆների միջակայքային տոտալ ներկման  $w_\tau(G)$  և  $W_\tau(G)$  պարամետրերի համար ստացված են հասանելի ստորին և վերին գնահատականներ,
- 3)  $n$ -չափանի խորանարդի, հովհարների և անիվների համար գտնված են այդ գրաֆների միջակայքային տոտալ ներկման մեջ մասնակցող գույների քանակների բոլոր հնարավոր արժեքները,
- 4) Բլոկների գրաֆների միջակայքային տոտալ ներկման  $w_\tau(G)$  և  $W_\tau(G)$  պարամետրերի համար ստացված են հասանելի ստորին և վերին գնահատականներ,
- 5) Գրաֆների դեկարտյան արտադրյալների միջակայքային տոտալ ներկման  $w_\tau(G)$  և  $W_\tau(G)$  պարամետրերի համար ստացված են ստորին և վերին գնահատականներ,
- 6) Հարթ դեկարտյան արտադրյալների միջակայքային տոտալ ներկման  $w_\tau(G)$  պարամետրի համար ստացված է ճշգրիտ արժեք,
- 7) Նկարագրված են մի շարք մեթոդներ միջակայքային տոտալ ներկում չունեցող գրաֆների կառուցման համար:

## Գրականություն

1. A.C. Асратян, P.P. Камалян, Интервальные раскраски ребер мультиграфа, Прикладная математика, вып. 5, 1987, с. 25-34.
2. A.S. Asratian, R.R. Kamalian, Investigation on interval edge-colorings of graphs, Journal of Combin. Theory, Ser. B, vol. 62, 1994, pp. 34-43.
3. A.S. Asratian, T.M.J. Denley, R. Haggkvist, Bipartite graphs and their applications, Cambridge Tracts in Mathematics, № 131, Cambridge University Press, 1998, 259 pp.
4. A.S. Asratian, C.J. Casselgren, On interval edge colorings of  $(\alpha, \beta)$ -biregular bipartite graphs, Discrete Math. 307, 2006, pp. 1951-1956.
5. M. Behzad, Graphs and their chromatic numbers, Ph.D. thesis, MichiganStateUniversity, 1965.
6. M. Behzad, G. Chartrand, J.K. Cooper Jr., The colour numbers of complete graphs, J. London Math. Soc. 42, 1967, pp. 226-228.
7. M. Behzad and E. S. Mahmoodian, On topological invariants of the product of graphs, Canad. Math. Bull. 12., 1969, 157-166.
8. O.V. Borodin, On the total colouring of planar graphs, J. Reine Angew. Math. 394, 1989, pp. 180-185.
9. O.V. Borodin, A.V. Kostochka, D.R. Woodall, Total colorings of planar graphs with large maximum degree, J. Graph Theory 26, 1997, pp. 53-59.
10. G. Chartrand, P. Zhang, Chromatic Graph Theory, Taylor & Francis Group, LLC, 2009.
11. B.-L. Chen, H.-L. Fu and M. T. Ko, Total chromatic number and chromatic index of split graphs, J. Combin. Math. Combin. Comput. 17 (1995), 137-146.
12. K.H. Chew, H.P. Yap, Total chromatic number of complete r-partite graphs, J. Graph Theory 16, 1992, pp. 629-634.
13. S. Even, A. Itai, A. Shamir, On the complexity of timetable and multicommodity flow problems, SIAM J. Comput., vol. 5, N4 (1976) 691-703.
14. J. Folkman, D.R. Fulkerson, Edge colourings in bipartite graphs, in Combinatorial Mathematics and its Applications, University of North Carolina Press, Chapel Hill (1969) 561-577.

15. A.J.W. Hilton, H.R. Hind, Total chromatic number of graphs having large maximum degree, *Discrete Math.* 117, 1993, pp. 127-140.
16. T.R. Jensen, B. Toft, *Graph Coloring Problems*, Wiley Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, 1995.
17. A.V. Kostochka, The total coloring of a multigraphs with maximal degree 4, *Discrete Mathematics* 17, 1977, pp. 161-163.
18. A.V. Kostochka, The total coloring of a multigraphs with maximal degree 5 is at most seven, *Discrete Mathematics* 162, 1996, pp. 199-214.
19. L. Kowalik, J.-S. Sereni, R. Skrekovski, Total-colouring of plane graphs with maximum degree nine, *SIAM J. Discrete Math.* 22, 2008, pp. 1462-1479.
20. D.E. Lane, An algorithm for the construction of the regular season schedule for the Canadian Football league, *O. R. W. P.*, N59, 1981.
21. R. Laskar and W. Hare, Chromatic numbers for certain graphs, *J. London Math. Soc.* (2), 4 (1972), 489-492.
22. M. Molloy, B. Reed, A bound on the total chromatic number, *Combinatorica* 18, 1998, pp. 241-280.
23. P.A. Petrosyan, Interval total colorings of complete bipartite graphs, *Proceedings of the CSIT Conference, Yerevan, 2007*, pp. 84-85.
24. P.A. Petrosyan, Interval total colorings of certain graphs, *Mathematical Problems of Computer Science, Vol. 31, 2008*, pp. 122-129.
25. P.A. Petrosyan, Interval edge-colorings of complete graphs and n-dimensional cubes, *Discrete Math.* 310, pp. 1580-1587, 2010.
26. P.A. Petrosyan, H.Z. Arakelyan, On a generalization of interval edge colorings of graphs, *Math. Probl. of Comp. Sci.* 29 (2007) 26-32.
27. P.A. Petrosyan, H.Z. Arakelyan, V.M. Baghdasaryan, A generalization of interval edge-colorings of graphs, *Disc. Appl. Math.* 158 (2010) 1827-1837.
28. P.A. Petrosyan, N.A. Khachatryan, Interval total colorings of graphs with a spanning star, *Mathematical Problems of Computer Science, Vol. 32, 2009*, pp. 78-85.
29. P.A. Petrosyan, N.A. Khachatryan, Upper bounds for the maximum span in interval total colorings of graphs, *Mathematical Problems of Computer Science, Vol. 35, 2011*, pp. 19-25.
30. P.A. Petrosyan, H.H. Khachatrian and H. G. Tananyan, Interval edge-colorings of Cartesian products of graphs I, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, vol. 33, no. 3, pp. 613-632, 2013.
31. P.A. Petrosyan, H.H. Khachatrian, Interval non-edge-colorable bipartite graphs and multigraphs, *J. Graph Theory* 76 (2014) 200-216.

32. P.A. Petrosyan, A.S. Shashikyan, On interval total colorings of trees, *Mathematical Problems of Computer Science*, Vol. 32, 2009, pp. 70-73.
33. P.A. Petrosyan, A.S. Shashikyan, On interval total colorings of bipartite graphs, *Proceedings of the CSIT Conference*, 2009, pp. 95-98.
34. P.A. Petrosyan, A.S. Shashikyan, On interval total colorings of doubly convex bipartite graphs, *Mathematical Problems of Computer Science*, Vol. 33, 2010, 54-58.
35. P.A. Petrosyan, A.Yu. Torosyan, Interval total colorings of complete graphs, *Proceedings of the CSIT Conference*, 2009, pp. 99-102.
36. M. Rosenfeld, On the total coloring of certain graphs, *Israel J. Math.* 9, 1971, pp. 396-402.
37. D.P. Sanders, Y. Zhao, On total 9-coloring planar graphs of maximum degree seven, *J. Graph Theory* 31, 1999, pp. 67-73.
38. Ա.Ս. Շաշիկյան, Երկկողմանի գրաֆների միջակայքային տոտալ ներկումների մասին, *մազիստր. թեզ*, ԵՊՀ, 2009, 29 էջ.
39. N. Vijayaditya, On the total chromatic number of a graph, *J. London Math. Soc.* (2) 3, 1971, pp. 405-408.
40. В.Г. Визинг, Хроматический класс мультиграфа, *Кибернетика*, N 3, с. 29-39, 1965.
41. В.Г. Визинг, Хроматический класс мультиграфа, канд. дисс., Новосибирск, 1965.
42. W. Wang, Total chromatic number of planar graphs with maximum degree ten, *J. Graph Theory* 54, 2006, pp. 91-102.
43. D. de Werra, Balanced schedules, *INFOR*. N9 (1971) 230-237.
44. D. de Werra, Scheduling in sports, *Ann. Discrete Math.*, vol. 11 (1981) 381-395.
45. D. de Werra, Minimizing irregularities in sports schedules using graph theory, *Discrete Appl. Math.*, vol. 4 (1982) 217-226.
46. D. de Werra, T. Ekim, C. Raess, Construction of sports schedules with multiple venues, *Discr. Appl. Math.* 154 (2006) 47-58.
47. D. de Werra, P.H. Solot, Compact cylindrical chromatic scheduling, *SIAM J. Disc. Math.* 4 (1991) 528-534.
48. D.B. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
49. H.P. Yap, *Total colorings of graphs*, Lecture Notes in Mathematics 1623, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
50. Z. Zhang, J. Zhand, J. Wang, The total chromatic numbers of some graphs, *Scientia Sinica A* 31, 1988, pp. 1434-1441.