

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ  
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

**СРАПИОНЯН ДЖАНИБЕК ЛИПАРИТОВИЧ**

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ  
ОБОЛОЧЕК И КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ОДИНАКОВЫХ НЕЗАМКНУТЫХ  
КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

## **ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук  
по специальности 01.02.04 – „Механика деформируемого  
твердого тела”

Научный руководитель  
доктор физико-математических наук,  
профессор Гулгазарян Г.Р.

**Е Р Е В А Н 2015**

## Оглавление

<b>Введение</b> .....	4
<b>ГЛАВА 1. КОЛЕБАНИЯ БЕЗМОМЕНТНОЙ НЕЗАМКНУТОЙ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ КРИВИЗНЫ СО СВОБОДНЫМИ ТОРЦАМИ И ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ ОБРАЗУЮЩИМИ</b> .....	15
<i>§1.1 Вывод общего дисперсионного уравнения</i> .....	16
1.1.1 Постановка задачи и некоторые математические особенности.....	16
1.1.2 Вывод и анализ дисперсионного уравнения оператора $L_0^{(c,c)}$ .....	19
<i>§1.2. Частные случаи и численные исследования</i> .....	22
1.2.1 Колебания прямоугольной ортотропной пластины со свободными и жестко защемленными параллельными сторонами .....	22
1.2.2 Колебания безмоментной ортотропной круговой цилиндрической оболочки открытого профиля со свободными торцами и жестко защемленными граничными образующими .....	25
1.2.3 Колебания некруговой цилиндрической оболочки открытого профиля со свободными торцами и жестко защемленными граничными образующими .....	27
1.2.4 Численные исследования .....	29
<b>ГЛАВА 2. КОЛЕБАНИЯ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ОРТОТРОПНОЙ КРУГОВОЙ НЕЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ СО СВОБОДНЫМИ ТОРЦАМИ И ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ ОБРАЗУЮЩИМИ</b> .....	35
<i>§2.1 Планарные и изгибные колебания ортотропной прямоугольной пластины со свободными и жестко защемленными параллельными сторонами</i> .....	36
2.1.1 Планарные колебания ортотропной прямоугольной пластины со свободными и жестко защемленными параллельными сторонами.....	36
2.1.2 Изгибные колебания ортотропной прямоугольной пластины со свободными и жестко защемленными параллельными сторонами .....	40
<i>§2.2 Колебания цилиндрической оболочки открытого профиля со свободными торцами и жестко защемленными граничными образующими</i> .....	42

2.2.1 Постановка задачи и основные уравнения.....	42
2.2.2 Вывод и анализ характеристических уравнений .....	44
2.2.3 Асимптотика дисперсионного уравнения (2.2.19) при $R^{-1} \rightarrow 0$ .....	49
2.2.4 Асимптотика дисперсионного уравнения (2.2.19) при $m_* l \rightarrow \infty$ .....	52
2.2.5 Численные исследования .....	52
<b>ГЛАВА 3. КОЛЕБАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ОДИНАКОВЫХ НЕЗАМКНУТЫХ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК СО СВОБОДНЫМИ И СВОБОДНЫМ И ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННЫМ ГРАНИЧНЫМИ ОБРАЗУЮЩИМИ.....</b>	<b>59</b>
<i>§3.1 Колебания тонкостенной упругой конструкции из одинаковых незамкнутых ортотропных цилиндрических оболочек со свободными граничными образу- ющими.....</i>	<i>60</i>
3.1.1 Основные уравнения и постановка краевых задач .....	60
3.1.2 Вывод и анализ характеристических уравнений.....	64
3.1.3 Асимптотика дисперсионного уравнения (3.1.19) при $R_0^{-1} \rightarrow 0$ .....	70
3.1.4 Асимптотика дисперсионного уравнения (3.1.19) при $\beta_0 \rightarrow \infty$ .....	74
3.1.5 Численные исследования .....	75
<i>§3.2 Локализованные колебания тонкостенной упругой конструкции из незамкнутых цилиндрических оболочек со свободным и жестко защемленным граничными образующими.....</i>	<i>81</i>
3.2.1 Основные уравнения и постановка краевых задач .....	81
3.2.2 Вывод и анализ характеристических уравнений .....	84
3.2.3 Асимптотика дисперсионного уравнения (3.2.11) при $R^{-1} \rightarrow 0$ .....	90
3.2.4 Асимптотика дисперсионного уравнения (3.2.11) при $\beta_0 \rightarrow \infty$ .....	94
3.2.5 Численные исследования .....	95
<b>Заключение .....</b>	<b>103</b>
<b>Литература .....</b>	<b>105</b>

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.** Исследования колебательных процессов в цилиндрических оболочках и оболочечных конструкциях занимают важное место в динамике деформируемого твердого тела. Это обусловлено как потребностями самой теории, так и практическими вопросами авиастроения, судостроения, приборостроения, динамики энергетических сооружений, строительства, приборостроения сейсморазведки и др.

Важное прикладное значение имеет изучение собственных колебаний оболочек имеющие затухающий характер. Для тонких оболочек большое значение приобретают исследования собственных колебаний, локализованных у свободного края оболочки – краевые колебания.

Впервые упругие поверхностные волны были рассмотрены Рэлеем [156]. Им было установлено существование упругих волн, распространяющихся вдоль свободной границы полупространства, с амплитудой, экспоненциально убывающей с глубиной.

Подобные волны, которые возникают в упругих телах различной конфигурации, называют поверхностными волнами типа Рэля. Краевые колебания при которых амплитуды перемещений точек срединной поверхности цилиндрической оболочки убывают с увеличением расстояния от точки до свободного края, относятся также к поверхностным колебаниям типа Рэля [21-26, 29, 31-33, 42,51,61-72, 75-82, 84-85, 99-100, 135-141, 145-156, 160-162].

Изучение колебаний стержней, пластин и оболочек на основе точных решений трехмерных задач теории упругости является трудной задачей. Поэтому, разными методами трехмерные уравнения теории упругости приводят к двумерным уравнениям. Эти методы условно разделяют на аналитический и метод гипотез [4-5, 14-17]. Для решения таких проблем в последние десятилетия широко используется асимптотический метод. Он получил развитие в работах Л.А. Агаловяна [4-12], И.И. Воровича [46], Р.С.Геворкяна [5], А.Е. Грина [143-144], А.Л. Гольденвейзера [58], С.О. Саркисяна [115], и др. В работах В. В. Власова и Н. Н. Леонтьева [47], Н. А. Кильчевского [90], А. И. Лурье [98], Х. М. Муштари и И. Г. Терегулова [101], С. П. Тимошенко [120], Н. А. Шульги [126-128], Г. И. Михасева и П. Е. Товстика [99-100] и других ученых был развит аналитический метод приведения трехмерной задачи к

двумерной, основанный на разложении искомым функций в ряд по малому геометрическому параметру.

В.С. Саркисяном и его учениками были развиты и использованы методы разложения по малым физическим и геометрическим параметрам [113-114].

С практической точки зрения наиболее распространение получила классическая теория Кирхгофа-Лява тонких оболочек, на основе гипотезы, согласно которой всякий отрезок прямой, перпендикулярный к срединной поверхности сохраняет после деформации свою прямолинейность, длину и нормальное положение к срединной поверхности [14-17, 44, 107].

Широко применяются также уточненные теории, которые приводят к добавлению в дифференциальных уравнениях классической теории дополнительных членов, расширяющих в некотором смысле область применения классической теории.

В известных трудах и монографиях С.А. Амбарцумяна, Г.Е. Багдасаряна, М.В. Белубекяна теории анизотропных слоистых пластин и оболочек построены уточненные теории [14, 17, 24].

Для ортотропных пластин переменной толщины в монографии Р.М. Киракосяна построена уточненная теория [91].

Основываясь на учете влияния инерции вращения элементов стержня и деформации поперечного сдвига С.П. Тимошенко в 1916 г. осуществил обобщение классической теории поперечных колебаний стержней [120].

С применением классической и уточненной теорий решено большое число задач статики и динамики тонких тел. Им посвящены монографии и работы А.С.Аветисяна, В.М. Александрова, С.А. Амбарцумяна, А.Г.Асланяна, Г.Е. Багдасаряна, А.Г. Баженова, А.Г. Багдоева, М.В. Белубекяна, Е.И.Беспалова, В.В. Болотина, В.В. Василева, А.Т. Василенко, М.В. Вильде, В.В. Власова, И.И. Воровича, В.Ц. Гнуни, А.Л. Гольденвейзера, А.Г. Горшкова, Э.И. Григолюка, Я.М. Григоренко, А.Я. Григоренко, В.Т. Гринченко, А.Н. Гузя, Г.Р. Гулгазаряна, Л.Г. Гулгазарян, З.Н. Данояна, А.Ю. Ишлинского, К.Б. Казаряна, Ю.Д. Каплунова, Ю.К. Коненкова, Р.М. Киракосяна, А.Б. Китайгородского, В.П.Костромина, С.Г. Лехницкого, В.Б. Лидского, А.И. Лурье, В.В. Мелешко, Г.И. Михасева, Л.А. Мовсисяна, Х.М. Муштари, В.В. Новожилова, Б.Л. Пелеха, Э. Рейснера, В.С.Саркисяна, С.В. Саркисяна, И.Г. Терегулова, С.П. Тимошенко, П.Е. Товстика, К.Ф. Черныха, Н.А.

Шулги, А.И. Шинкара и др. Приведенный в конце диссертации список литературы может служить ориентиром в обилии публикаций, но он ни в коей мере не претендует на полноту.

При изучении собственных колебаний цилиндрических оболочек численный расчет не всегда эффективен в связи с тем, что для тонких цилиндрических оболочек первые частоты и частоты для больших волновых чисел распределены очень густо [19], [59], [82]. С помощью комбинирования аналитической и асимптотической теорий с численными расчетами можно преодолеть эти трудности.

Собственные колебания затухающих от свободного торца безмоментной круговой цилиндрической оболочки вдоль направления ее образующих, впервые изучены Р.А. Багдасаряном, М.В. Белубекяном и К.Б. Казаряном [22].

Применяя специальные асимптотические методы, Ю.Д. Каплуновым и его учениками исследовано существование локализованных у свободного края собственных колебаний полубесконечной изотропной круговой цилиндрической оболочки [146, 147].

Г.Р. Гулгазаряном и его учениками изучены вопросы существования локализованных у свободного края, собственных колебаний ортотропных безмоментных и моментных цилиндрических оболочек [61-62, 64-72, 75-82, 84-85, 119, 125, 145].

В работах [82], [85] изучены моментные задачи колебаний ортотропных круговых незамкнутых упругих цилиндрических оболочек со свободным торцом и тремя жестко защемленными краями, со свободным и шарнирно закрепленным торцами и жестко защемленными граничными образующими соответственно.

В работах [84], [125] изучены колебания безмоментных незамкнутых ортотропных упругих цилиндрических оболочек переменной кривизны с выше перечисленными граничными условиями соответственно.

В настоящей диссертационной работе исследован вопрос существования собственных колебаний безмоментной незамкнутой ортотропной цилиндрической оболочки переменной кривизны со свободными торцами и жестко защемленными граничными образующими [119].

Исследуются также собственные колебания тонкой упругой ортотропной круговой незамкнутой цилиндрической оболочки со свободными торцами и жестко защемленными граничными образующими [81].

Исследуются собственные колебания тонкостенных упругих конструкций из одинаковых незамкнутых ортотропных цилиндрических оболочек со свободными и свободным и жестко защемленным граничными образующими [79-80, 145].

Отметим, что задачи [81], [82], [84-85], [119], [125] не допускают разделения переменных. Для нахождения собственных частот и соответствующих собственных форм применялся обобщенный метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича – Власова развитый в [36 - 37, 45, 89, 110].

### **Цель диссертационной работы**

- Исследовать собственные колебания незамкнутых упругих безмоментных цилиндрических оболочек переменной кривизны со свободными торцами и жестко защемленными граничными образующими.
- Исследовать собственные колебания тонкой упругой ортотропной круговой незамкнутой цилиндрической оболочки со свободными торцами и жестко защемленными граничными образующими (моментная задача).
- Исследовать собственные колебания тонкостенной упругой конструкции из одинаковых круговых ортотропных цилиндрической оболочки со свободными граничными образующими.
- Исследовать собственные локализованные колебания тонкостенной упругой конструкции из одинаковых незамкнутых круговых цилиндрических оболочек со свободным и жестко защемленным граничными образующими.

### **Научная новизна:**

- На основе уравнений классической теории ортотропных безмоментных цилиндрических оболочек исследованы собственные колебания незамкнутой ортотропной упругой цилиндрической оболочки с произвольной плоской гладкой направляющей со свободными торцами, когда граничные образующие жестко защемлены.

- Получены дисперсионные уравнения для полубесконечной безмоментной цилиндрической оболочки со свободным торцом и жестко защемленными граничными образующими.
- Получены дисперсионные уравнения планарного и изгибного колебания для прямоугольной пластины со свободными противолежащими сторонами, когда остальные стороны жестко защемлены.
- Получены дисперсионные уравнения планарного и изгибного колебания для полубесконечной пластины-полосы со свободным торцом и жестко защемленными боковыми краями.
- Найдены дисперсионные уравнения для нахождения собственных частот возможных типов собственных колебаний ортотропной круговой цилиндрической оболочки открытого профиля со свободными торцами и жестко защемленными граничными образующими (моментная задача).
- Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями поставленной задачи и аналогичных задач для ортотропной прямоугольной пластины со свободными и жестко защемленными параллельными сторонами.
- Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и задачи на собственные значения полубесконечной цилиндрической оболочки открытого профиля со свободным торцом и жестко защемленными граничными образующими.
- Найдены дисперсионные уравнения для нахождения безразмерных характеристик собственных частот возможных типов колебаний конструкции оболочечного типа, составленной из одинаковых незамкнутых бесконечных и конечных ортотропных цилиндрических оболочек со свободными граничными образующими.
- Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичных задач для ортотропной пластинчатой тонкостенной конструкции (в частности, для аналогичных задач пластины-полосы и прямоугольной пластины) соответственно.
- Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и задач на собственные значения для полубесконечной



пластинчатой конструкции из счетного числа конечных и бесконечных пластин-полос (в частности полубесконечных пластин и пластин-полос) со свободным граничным образующим.

- Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и задач на собственные значения для полубесконечной конструкции оболочечного типа, составленных из счетного числа одинаковых цилиндрических оболочек (конечных и бесконечных) со свободным граничным образующим.

- Найдены дисперсионные уравнения для нахождения безразмерных характеристик собственных частот возможных типов колебаний конструкции оболочечного типа составленных из одинаковых ортотропных незамкнутых круговых цилиндрических оболочек со свободным и жестко защемленным граничными образующими.

- Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичных задач для ортотропной пластинчатой тонкостенной конструкции (в частности, для аналогичных задач пластины-полосы и прямоугольной пластины) соответственно.

- Получена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и задач на собственные значения для полубесконечной пластинчатой конструкции из счетного числа конечных и бесконечных пластин-полос (в частности полубесконечных пластин и пластин-полос) со свободным граничным образующим.

- Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и задач на собственные значения для полубесконечной конструкции оболочечного типа составленных из счетного числа одинаковых незамкнутых круговых бесконечных и конечных цилиндрических оболочек со свободным граничным образующим.

**Практическая значимость.** Полученные результаты могут быть применены при расчете динамического поведения тонких упругих, ортотропных и изотропных цилиндрических оболочек для выявления резонансных зон частот колебаний.

Основываясь на полученных дисперсионных и характеристических уравнений можно вычислить собственные частоты и коэффициенты затухания соответствующих форм колебаний.

Полученные асимптотические формулы, для дисперсионных уравнений, являются вспомогательным критерием для определения безразмерных характеристик собственных частот колебаний цилиндрических оболочек. С помощью полученных асимптотических формул, можно выяснить к какому типу колебаний соответствует полученные значения собственных частот.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа изложена на 117 страницах, включая введение, три главы, заключение, библиографический список, содержащий 162 наименований цитируемой литературы, 13 таблиц, 8 рисунков и 4 графика.

В каждой главе параграфы имеют свои тройные нумерации формул. Первая цифра показывает номер главы. Вторая цифра показывает номер параграфа в главе, третья – номер формулы в параграфе.

**В первой главе** на основе уравнений классической теории ортотропных безмоментных цилиндрических оболочек исследуются собственные колебания незамкнутых ортотропных упругих цилиндрических оболочек переменной кривизны со свободными торцами и жестко защемленными граничными образующими.

**В первом параграфе** выводятся общие дисперсионные уравнения для поставленной задачи.

*Первый пункт* посвящен постановке задачи и некоторым математическим особенностям. Отмечено, что спектр поставленной задачи действителен и не чисто дискретен, а имеет ограниченный участок непрерывного спектра и не более двух точек (см. (1.1.7), (1.1.8)).

*Во втором пункте* выведены дисперсионные уравнения для поставленной задачи (1.1.24). Найдены дисперсионные уравнения для полубесконечной ортотропной безмоментной незамкнутой цилиндрической оболочки переменной кривизны со свободным торцом и жестко защемленными граничными образующими (1.1.25).

**Во втором параграфе** рассматриваются частные случаи в зависимости от кривизны направляющей кривой и проведены численные исследования.

*В первом пункте* исследуются колебания прямоугольной ортотропной пластины со свободными и жестко защемленными параллельными сторонами. Выведены

дисперсионные уравнения поставленной задачи (1.2.13). Путем перехода  $ml$  к бесконечности ( $m$  – число волн,  $l$  – длина пластины), получен аналог дисперсионного уравнения Рэлея для полубесконечной пластины-полосы со свободным торцом и жестко заземленными краями (1.2.14).

Во втором пункте исследуются колебания безмоментной ортотропной круговой цилиндрической оболочки открытого профиля со свободными торцами и жестко заземленными граничными образующими.

Получена асимптотическая связь между дисперсионным уравнением поставленной задачи и аналогичной задачи для прямоугольной пластины (1.2.18).

В третьем пункте исследуются колебания некруговой цилиндрической оболочки открытого профиля со свободными торцами и жестко заземленными граничными образующими. Получена приближенная формула для характеристики коэффициентов затухания (1.2.31).

В четвертом пункте приведены численные исследования.

**Во второй главе** исследуются собственные колебания тонкой упругой ортотропной круговой незамкнутой цилиндрической оболочки со свободными торцами и жестко заземленными граничными образующими (моментная задача). Применяется метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича-Власова.

**В первом параграфе** исследуются планарные и изгибные колебания ортотропной прямоугольной пластины со свободными и жестко заземленными параллельными сторонами.

В первом пункте исследуются планарные колебания ортотропной прямоугольной пластины со свободными и жестко заземленными параллельными сторонами. Выводятся дисперсионные уравнения поставленной задачи (2.1.13). Путем перехода  $m \cdot l$  ((2.1.4),(2.0.4)) к бесконечности получены аналог дисперсионного уравнения Рэлея для полубесконечной ортотропной пластины-полосы со свободным торцом и жестко заземленными краями.

Во втором пункте исследуются собственные изгибные колебания ортотропной прямоугольной пластины со свободными и жестко заземленными параллельными сторонами. Получены дисперсионные уравнения для поставленной задачи (2.1.28).

Путем перехода  $m_*l$  к бесконечности получен аналог дисперсионного уравнения Коненкова [92] для полубесконечной пластины-полосы со свободным торцом и жестко заземленными смежными краями (2.1.29).

**Во втором параграфе** исследуются собственные колебания ортотропной круговой цилиндрической оболочки открытого профиля со свободными торцами и жестко заземленными образующими.

Первый пункт посвящен постановке задачи и приведены основные уравнения.

Во втором пункте выводятся дисперсионные уравнения для нахождения частот возможных типов собственных колебаний (2.2.19).

В третьем пункте установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями поставленной задачи и аналогичных задач для ортотропной пластины со свободными и жестко заземленными параллельными сторонами (2.2.25).

Путем перехода  $R^{-1}$  к нулю и  $m_*l$  к бесконечности устанавливается асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и задачи на собственные значения для полубесконечной пластины-полосы со свободным торцом и жестко заземленными смежными краями (2.2.28).

В четвертом пункте устанавливается асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и задачи на собственные значения полубесконечной цилиндрической оболочки открытого профиля со свободным торцом и жестко заземленными граничными образующими (2.2.30).

Пятый пункт посвящен численным исследованиям.

**В третьей главе** исследуются собственные колебания тонкостенных упругих конструкций из одинаковых незамкнутых ортотропных цилиндрических оболочек со свободными и свободным и жестко заземленным граничными образующими.

**В первом параграфе** исследуются собственные колебания тонкостенной упругой конструкции из одинаковых незамкнутых ортотропных цилиндрических оболочек со свободными граничными образующими.

Первый пункт посвящен постановке задачи и приведены основные уравнения.

Во втором пункте выводятся дисперсионные уравнения для нахождения безразмерных характеристик собственных частот возможных типов колебаний конструкции оболочечного типа, составленной из одинаковых незамкнутых

бесконечных и конечных ортотропных цилиндрических оболочек со свободными граничными образующими (3.1.19).

В третьем пункте установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичных задач для ортотропной пластинчатой тонкостенной конструкции (в частности, для аналогичных задач пластины-полосы и прямоугольной пластины) соответственно (3.1.28). Путем перехода  $R^{-1}$  к нулю и  $\beta_0$  (длина конструкции) к бесконечности получена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и задач на собственные значения для пластинчатой конструкции из счетного числа конечных и бесконечных пластин-полос (в частности, полубесконечных пластин и пластин-полос) со свободным граничным образующим (3.1.33).

В четвертом пункте установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и задач на собственные значения для полубесконечной конструкции оболочечного типа составленных из счетного числа одинаковых цилиндрических оболочек (конечных и бесконечных) со свободным граничным образующим (3.1.37).

Пятый пункт посвящен численным исследованиям.

Во втором параграфе исследуются собственные локализованные колебания тонкостенной упругой конструкции из одинаковых незамкнутых цилиндрических оболочек со свободным и жестко защемленным граничными образующими.

Первый пункт посвящен постановке задачи и приведены основные уравнения.

Во втором пункте выводятся дисперсионные уравнения для нахождения безразмерных характеристик собственных частот возможных типов колебаний конструкции оболочечного типа, составленных из одинаковых ортотропных незамкнутых цилиндрических оболочек со свободным и жестко защемленным граничными образующими (3.2.11).

В третьем пункте устанавливается асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичных задач для ортотропной пластинчатой тонкостенной конструкции (в частности, для аналогичных задач пластины-полосы и прямоугольной пластины) соответственно (3.2.17).

Путем перехода  $R^{-1}$  к нулю и  $\beta_0$  (длина конструкции) к бесконечности получена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и задач на собственные значения для пластинчатой конструкции из счетного числа конечных и бесконечных пластин-полос (в частности полубесконечных пластин и пластин-полос) со свободным граничным краем (3.2.23).

В четвертом пункте установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и задач на собственные значения для полубесконечной конструкции оболочечного типа составленных из счетного числа одинаковых незамкнутых цилиндрических оболочек (конечных и бесконечных) со свободным граничным образующим (3.2.27).

Пятый пункт посвящен численным исследованиям. На примерах оболочечных конструкций подтверждается достоверность применимости приближенного (асимптотического) метода для изучения локализованных колебаний конструкции оболочечного типа.

# ГЛАВА 1. КОЛЕБАНИЯ БЕЗМОМЕНТНОЙ НЕЗАМКНУТОЙ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ КРИВИЗНЫ СО СВОБОДНЫМИ ТОРЦАМИ И ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ ОБРАЗУЮЩИМИ

В этой главе исследуются собственные колебания ортотропной безмоментной цилиндрической оболочки открытого профиля, со свободными торцами и жестко защемленными граничными образующими. Предполагается, что образующие ортогональны к краям оболочки и квадрат кривизны направляющей кривой поверхности можно представить в виде ряда

$$R^{-2} = k^2 \left( r_0/2 + \sum_{m=1}^{\infty} r_m \cos km\beta \right), \quad 0 \leq \beta \leq s, \quad k = 2\pi/s, \quad \sum_{m=1}^{\infty} |r_m| < +\infty \quad (1.0.1)$$

Здесь  $\beta$  — длина переменной дуги направляющей кривой,  $s$  — полная длина направляющей кривой между жестко защемленными граничными образующими. Для цилиндрических оболочек со свободными краями первые частоты и частоты соответствующих больших волновых чисел распределены очень густо [19, 59, 69]. Поэтому численный расчет не всегда эффективен. Эти трудности преодолеваются с помощью комбинирования аналитической и асимптотической теорий, а также численными методами.

Задача не допускает разделения переменных. Такие задачи обычно решаются методами понижения размерности задачи на основе интегральных или коллокационных подходов типа Канторовича-Власова в сочетании с численными методами решения одномерных задач [36-37, 45, 89, 110]. Для нахождения собственных частот и соответствующих собственных форм применяется обобщенный метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича-Власова развитых в [36-37, 45, 89, 110]. В качестве базисных функций используются следующие функции [84], [125]:

$$W_m(\beta) = 1 - \cos km\beta, \quad k = 2\pi/s, \quad 0 \leq \beta \leq s, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (1.0.2)$$

В дальнейшем под  $s$  для пластины подразумевается ширина пластины, а для цилиндрической оболочки — длина направляющей кривой. Заметим, что

$$W_m(0) = W_m(s) = W'_m(0) = W'_m(s) = 0 \quad (1.0.3)$$

## § 1.1 Вывод общего дисперсионного уравнения.

### 1.1.1. Постановка задачи и некоторые математические особенности.

Исследуются собственные колебания незамкнутой ортотропной безмоментной цилиндрической оболочки переменной кривизны со свободными торцами и жестко заземленными граничными образующими. На поверхности оболочки вводятся криволинейные координаты  $(\alpha, \beta)$ , где  $\alpha(0 \leq \alpha \leq l)$  и  $\beta(0 \leq \beta \leq s)$  являются соответственно текущей длиной образующей и текущей длиной дуги направляющей кривой (рис. 1.1),  $l$  – длина цилиндрической оболочки, а  $s$  – длина направляющей кривой.

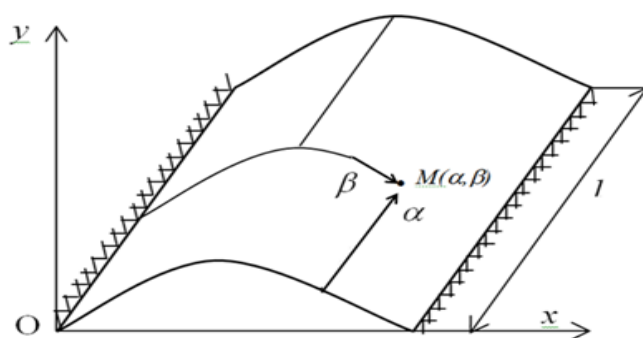


Рис. 1.1

Для определения частот собственных колебаний оболочки необходимо найти ненулевое решение соответствующих уравнений безмоментной теории ортотропных цилиндрических оболочек, записанных в выбранных криволинейных координатах  $\alpha, \beta$  [14], [84]

$$\begin{aligned}
 -B_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha^2} - B_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \beta^2} - (B_{11} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} + B_{12} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{u_3}{R} \right) &= \lambda u_1 \\
 -(B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha \partial \beta} - B_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} - B_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} + B_{22} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{u_3}{R} \right) &= \lambda u_2 \\
 -\frac{B_{12}}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} - \frac{B_{22}}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \frac{B_{22}}{R^2} u_3 &= \lambda u_3
 \end{aligned} \tag{1.1.1}$$



При граничных условиях

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left( \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \right) \right|_{\alpha=0,l} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_1}{\partial \beta} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0,l} = 0 \quad (1.1.2)$$

$$u_1 \Big|_{\beta=0,s} = u_2 \Big|_{\beta=0,s} = 0 \quad (1.1.3)$$

где соотношения (1.1.2) являются условиями свободного края при  $\alpha = 0, \alpha = l$ , а соотношения (1.1.3) – условиями жесткого защемления при  $\beta = 0, \beta = s$ .

Здесь  $u_1, u_2, u_3$  – проекции вектора перемещений, соответственно в направлениях  $\alpha, \beta$  и нормали поверхности оболочки,  $B_{ik}$  – коэффициенты упругости,  $R^{-1} = R^{-1}(\beta)$  – кривизна направляющей кривой поверхности,  $\lambda = \omega^2 \rho$ , где  $\omega$  – угловая частота собственных колебаний,  $\rho$  – плотность материала.

Исследование непрерывного спектра задачи (1.1.1) - (1.1.3) проводится аналогичным методом развитым в [19], [59], [64], [74].

Скалярное произведение вектор-функций  $f^{(j)}(\alpha, \beta) = (u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{(j)})$ ,  $j = 1, 2$  вводится по формуле

$$(f^{(1)}, f^{(2)}) = \int_0^l \int_0^s \sum_{j=1}^3 u_j^{(1)} \bar{u}_j^{(2)} d\beta d\alpha \quad (1.1.4)$$

Обозначим через  $L_0^{(cc)}$  оператор, соответствующий левой части системы уравнений (1.1.1), первоначально определенный на гладких вектор-функциях, удовлетворяющих условиям (1.1.2)-(1.1.3). Нетрудно проверить, что для таких вектор-функций выполняется соотношение

$$(L_0^{(cc)} f^{(1)}, f^{(2)}) = (f^{(1)}, L_0^{(cc)} f^{(2)}) \quad (1.1.5)$$

Более того, для любой функции  $f^{(j)}(\alpha, \beta) = (u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{(j)})$ ,  $j = 1, 2$ , удовлетворяющей условиям (1.1.2)-(1.1.3), имеет место неравенство

$$(L_0^{(cc)} f, f) \geq 0 \quad (1.1.6)$$

Из неравенства (1.1.6) следует, что с задачей на собственные значения (1.1.1)-(1.1.3) можно связать неотрицательно определенный самосопряженный оператор

(расширения по Фридрихсу оператора [112] стр. 350). Для которого сохраним обозначение  $L_0^{(cc)}$ . Аналогично [74] можно доказать, что спектр оператора  $L_0^{(cc)}$  неотрицателен и не является чисто дискретным. Операторы, порожденные системой уравнений (1.1.1), имеют участок непрерывного спектра, совпадающий с отрезком  $[0, \lambda_0]$  – множеством значений функции

$$\Omega(\beta, \theta) = \frac{B_{66}(B_{11}B_{22} - B_{12}^2)R^{-2}(\beta)\sin^4 \theta}{B_{66}(B_{11}\sin^4 \theta + B_{22}\cos^4 \theta) + (B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66})\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \quad (1.1.7)$$

$$0 \leq \beta \leq s, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Этот участок непрерывного спектра появляется из-за нарушения эллиптичности системы (1.1.1) по Дуглису-Ниренбергу [116-117]. Известно, что эллиптичности системы недостаточно для того, чтобы задача Дирихле была корректно поставлена даже в случае однородных систем. Для существования нетривиального решения задачи (1.1.1)-(1.1.3) следует дополнительно потребовать выполнение вдоль границы некоторого условия алгебраического характера. Это условие называется условием дополненности (условие Шапиро-Лопатинского) [74]. Для задачи (1.1.1)-(1.1.3) условие Шапиро-Лопатинского эквивалентно условию ([19], стр. 76, [74], [125])

$$\theta(\lambda, \beta) \Big|_{\beta=0, \beta=s} = B_{66}(\lambda - B_{22}R^{-2}(\beta)) + \sqrt{B_{22}\lambda(B_{11}\lambda - (B_{11}B_{22} - B_{12}^2)R^{-2}(\beta))} \Big|_{\beta=0, s} \neq 0 \quad (1.1.8)$$

Через  $\Omega_\gamma$  обозначим множество значений  $\lambda$  (не более двух точек), при которых нарушается условие (1.1.8):

$$\theta(\lambda, \beta) \Big|_{\beta=0, \beta=s} = 0 \quad (1.1.9)$$

Вне множества  $[0, \lambda_0] \cup \Omega_\gamma$  для оператора  $L_0^{(cc)}$ , выполняется условие дополненности (1.1.8) (условие Шапиро-Лопатинского) [116-117].

При этом, вне множества  $[0, \lambda_0] \cup \Omega_\gamma$  спектр оператора  $L_0^{(cc)}$  состоит из изолированных собственных значений конечной кратности. Это утверждение следует из следующей теоремы [74], [59]:

**Теорема.** Для того, чтобы точка  $\lambda$  принадлежала непрерывному спектру оператора  $L_0^{(cc)}$ , необходимо и достаточно, чтобы при этом  $\lambda$  нарушалось условие

эллиптичности системы (1.1.1) или условие Шапиро-Лопатинского краевой задачи (1.1.1)-(1.1.3).

Оператор  $L_0^{(cc)}$  имеет сколь угодно большие положительные собственные значения. Это следует из его неотрицательности и неограниченности. Неотрицательно определенность оператора  $L_0^{(cc)}$  позволяет задачу (1.1.1)-(1.1.3) изучать в виде обобщенной задачи на собственные значения ([103], стр. 92) с применением обобщенного метода сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Конторовича-Власова.

**1.1.2. Вывод и анализ дисперсионного уравнения оператора  $L_0^{(cc)}$ .** Решение системы (1.1.1), удовлетворяющее условиям (1.1.3), ищем в виде [84], [125]

$$\begin{aligned} u_1 &= \exp(k\chi\alpha) \left( \sum_{m=1}^{\infty} u_m \sin km\beta \right), & u_2 &= \exp(k\chi\alpha) \left( \sum_{m=1}^{\infty} v_m (1 - \cos km\beta) \right), \\ w &= k \exp(k\chi\alpha) \left( \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin km\beta \right) \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

Здесь  $w = u_3 / R$ ,  $u_m, v_m, w_m, \chi$  – неопределенные константы.

Действуя аналогичным образом, как в [84], [125], подставим выражения (1.1.10) в первые два уравнения системы (1.1.1). Полученные уравнения умножаем на  $\sin km\beta$ ,  $\cos km\beta$  соответственно и интегрируем в пределах от 0 до  $s$ . В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} (B_{11}\chi^2 - B_{66}m^2 + \lambda/k^2)u_m + (B_{12} + B_{66})\chi_m v_m = B_{12}\chi w_m \\ (B_{12} + B_{66})\chi_m u_m - (B_{66}\chi^2 - B_{22}m^2 + \lambda/k^2)v_m = B_{22}m w_m \end{cases} \quad (1.1.11)$$

После решения которой, получим

$$c_m u_m = \chi a_m w_m, \quad c_m v_m = -m b_m w_m \quad (1.1.12)$$

$$a_m = \frac{B_{12}}{B_{11}} \chi^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} m^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta^2, \quad \eta^2 = \frac{\lambda}{k^2 B_{66}}$$

$$b_m = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} \chi^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} m^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta^2 \quad (1.1.13)$$

$$c_m = \chi^4 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} m^2 \chi^2 + \frac{B_{11} + B_{66}}{B_{11}} \eta^2 \chi^2 + (m^2 - \eta^2) \left( \frac{B_{22}}{B_{11}} m^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta^2 \right)$$

Обе части третьего уравнения системы (1.1.1) умножим на  $R^{-1}$ . Подставляя в него (1.1.10), учитывая представление (1.0.1), соотношения (1.1.12), правило умножения тригонометрических рядов ([124], стр. 592), умножим обе части полученного уравнения на  $\sin km\beta$  и интегрируем в пределах от 0 до  $s$ , придем к бесконечной системе уравнений

$$\left( (r_0 - r_{2m})A_m - 2\frac{B_{66}}{B_{22}}\eta^2 \right) w_m + \sum_{n=1, n \neq m}^{\infty} (r_{|n-m|} - r_{n+m})A_n w_n = 0, m = \overline{1, +\infty}, \quad (1.1.14)$$

$$A_n = P_n / c_n, P_n = c_n + n^2 b_n - (B_{12} / B_{22}) \chi^2 a_n, n = \overline{1, +\infty}. \quad (1.1.15)$$

В области определения  $A_n$  имеет асимптотическое представление  $A_n = O(1/n^2)$ , следовательно  $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < +\infty$ . С учетом (1.0.1), получается

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} |A_n| (|r_{n+m}| + |r_{|n-m|}) \leq 3 \left( |r_0|/2 + \sum_{n=1}^{\infty} |r_n| \right) \cdot \left( \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \right) < +\infty. \quad (1.1.16)$$

Из (1.1.16) следует, что бесконечный определитель системы (1.1.14) при  $\lambda \notin [0, \lambda_0]$  и  $\chi$  в области определения коэффициентов (1.1.15) относится к известному классу сходящихся определителей – к нормальным определителям [94]. Чтобы система (1.1.14) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель равнялся нулю:

$$D(\chi^2, \eta^2, B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}, B_{66}, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) = 0. \quad (1.1.17)$$

Пусть  $\chi_1, \chi_2$  различные корни уравнения (1.1.17) с неположительными действительными частями и  $\chi_{j+2} = -\chi_j, j = 1, 2$ . Пусть  $(w_1^{(j)}, w_2^{(j)}, \dots, w_m^{(j)}, \dots), j = \overline{1, 4}$  являются нетривиальными решениями системы (1.1.14) при  $\chi_j, j = \overline{1, 4}$  соответственно. Представим решение задачи (1.1.1)-(1.1.3) в виде

$$u_i = \sum_{j=1}^4 u_i^{(j)}, i = 1, 2, w = \sum_{j=1}^4 w^{(j)}, \quad (1.1.18)$$

где  $u_i^{(j)}, w^{(j)}, i = 1, 2, j = \overline{1, 4}$  решения системы (1.1.1), имеющие вид (1.1.10) при  $\chi = \chi_j$ . Подставим (1.1.18) в граничные условия (1.1.2). Полученные уравнения, которые содержат  $\sin km\beta$ , умножаем на  $\sin km\beta$ , а те которые содержат  $\cos km\beta$ ,

умножаем на  $\cos km\beta$ , затем интегрируя в пределах от 0 до s, получим совокупность систем уравнений

$$\sum_{j=1}^4 \frac{R_{1j}^{(m)}}{C_m^{(j)}} W_m^{(j)} = 0, \quad \sum_{j=1}^4 \frac{R_{2j}^{(m)}}{C_m^{(j)}} W_m^{(j)} = 0 \quad (1.1.19)$$

$$\sum_{j=1}^4 \frac{R_{1j}^{(m)} \exp(z_j)}{C_m^{(j)}} W_m^{(j)} = 0, \quad \sum_{j=1}^4 \frac{R_{2j}^{(m)} \exp(z_j)}{C_m^{(j)}} W_m^{(j)} = 0 \quad m = \overline{1, +\infty}$$

$$R_{1j}^{(m)} = \chi_j^2 a_m^{(j)} - \frac{B_{1,2}}{B_{11}} m^2 b_m^{(j)} - \frac{B_{1,2}}{B_{11}} c_m^{(j)}, \quad R_{2j}^{(m)} = \chi_j (a_m^{(j)} + b_m^{(j)}), \quad z_j = k\chi_j l \quad (1.1.20)$$

а  $a_m^{(j)}$ ,  $b_m^{(j)}$ ,  $c_m^{(j)}$  – значения  $a_m$ ,  $b_m$ ,  $c_m$  из (1.1.13) при  $\chi = \chi_j$  соответственно. Чтобы совокупность систем уравнений (1.1.19) имела нетривиальное решение, достаточно, чтобы совокупность уравнений

$$\Delta = \text{Det} \begin{vmatrix} R_{11}^{(m)} & R_{12}^{(m)} & R_{11}^{(m)} \exp(z_1) & R_{12}^{(m)} \exp(z_2) \\ R_{21}^{(m)} & R_{22}^{(m)} & -R_{21}^{(m)} \exp(z_1) & -R_{22}^{(m)} \exp(z_2) \\ R_{11}^{(m)} \exp(z_1) & R_{12}^{(m)} \exp(z_1) & R_{11}^{(m)} & R_{12}^{(m)} \\ R_{21}^{(m)} \exp(z_1) & R_{22}^{(m)} \exp(z_1) & -R_{21}^{(m)} & -R_{22}^{(m)} \end{vmatrix} = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (1.1.21)$$

вне множества  $[0, \lambda_0] \cup \Omega_\gamma$  имела  $\lambda$  – решение. Заметим, что определитель из (1.1.21)

можно привести к виду

$$\Delta = m^{14} (x_2 - x_1)^2 \text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^4 \quad (1.1.22)$$

$$\begin{aligned} \text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^4 &= K_2^2 (\eta_m^2, x_1, x_2) (1 + \exp(2z_1 + 2z_2)) + \\ &8m_{11} m_{22} m_{12} m_{21} \exp(z_1 + z_2) - (m_{11} m_{22} + m_{12} m_{21})^2 (\exp(2z_1) + \exp(2z_2)) - \\ &4m_{11} m_{22} (m_{11} m_{22} + m_{12} m_{21}) (\exp(z_2) - \exp(z_1)) [z_1 z_2] - 4m_{11}^2 m_{21}^2 [z_1, z_2]^2, \\ &x_j = \chi_j / m, \quad \eta_m = \eta / m, \quad [z_1, z_2] = kml (\exp(z_2) - \exp(z_1)) / (z_2 - z_1) \end{aligned}$$

$$K_2 (\eta_m^2, x_1, x_2) = \delta_1 x_1^2 x_2^2 + \delta_2 x_1 x_2 + \delta_3 (x_1^2 + x_2^2) + \delta_4$$

$$\delta_1 = \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2} \left( \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11} B_{66}} - \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_m^2 \right), \quad z_j = kmx_j l$$

$$\delta_2 = -\eta_m^2 \left( \frac{B_{22} (B_{11} B_{22} - B_{12}^2)}{B_{11}^3} + \frac{B_{12} (B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{22} B_{66} - B_{12} B_{66})}{B_{11}^3} \eta_m^2 \right) \quad (1.1.23)$$

$$\delta_3 = \frac{B_{12}(B_{11}B_{22} - B_{12}^2)}{B_{11}^3} \eta_m^2 (1 - \eta_m^2), \quad \delta_4 = \frac{B_{12}B_{66}(B_{12} + B_{66})}{B_{11}^3} \eta_m^4 (1 - \eta_m^2)$$

$$m_{11} = \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2} - \frac{B_{12}B_{66}}{B_{11}^2} \eta_m^2 \right) x_1^2 + \frac{B_{12}B_{66}}{B_{11}^2} \eta_m^2 (1 - \eta_m^2)$$

$$m_{12} = \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2} - \frac{B_{12}B_{66}}{B_{11}^2} \eta_m^2 \right) (x_1 + x_2) \quad m_{21} = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2} x_1^3 + \frac{B_{12} + B_{22}}{B_{11}} \eta_m^2 x_1$$

$$m_{22} = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2} (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + \frac{B_{12} + B_{22}}{B_{11}} \eta_m^2$$

Уравнения (1.1.21) эквивалентны уравнениям

$$\text{Det} \left\| m_{ij} \right\|_{ij}^4 = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (1.1.24)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение: если  $R^{-2}(\beta)$  можно представить в виде (1.0.1) и  $\lambda \notin [0, \lambda_0] \cup \Omega_\gamma$ , то уравнения (1.1.24) являются дисперсионными уравнениями оператора  $L_0^{(cc)}$ , где  $\chi_1 = m\chi_1, \chi_n = m\chi_2$  – различные корни уравнения (1.1.17) с неположительными действительными частями. Заметим, что если  $\chi_1 = m\chi_1$ , и  $\chi_2 = m\chi_1$  имеют отрицательные действительные части, то при  $ml \rightarrow \infty$  уравнения (1.1.24) преобразуются к уравнениям

$$K_2(\eta_1^2, x_1, x_2) = \delta_1 x_1^2 x_n^2 + \delta_2 x_1 x_n + \delta_3 (x_1^2 + x_2^2) + \delta_4 = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (1.1.25)$$

Уравнения (1.1.25) являются дисперсионными уравнениями для полубесконечной ортотропной безмоментной незамкнутой цилиндрической оболочки с произвольной плоской направляющей со свободным торцом, когда граничные образующие жестко заземлены, которые, естественно, совпадают с дисперсионными уравнениями полученными для случаев, рассмотренных в [84, 125]. В общем случае решение уравнения (1.1.17) представляет сложную задачу. Поэтому, для установления асимптотических формул, рассмотрим следующие частные случаи.

## § 1.2 Частные случаи и численные исследования

**1.2.1 Колебания прямоугольной ортотропной пластины со свободными и жестко заземленными параллельными сторонами.** В этом случае  $R^{-2}(\beta) \equiv 0$  ( $r_m = 0, m = \overline{0, +\infty}$ ),

т.е. имеем ортотропную прямоугольную пластину со свободными и жестко заземленными параллельными сторонами. Здесь система (1.1.1) принимает вид

$$\begin{aligned} -B_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha^2} - B_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \beta^2} - (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} &= \lambda u_1 \\ - (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha \partial \beta} - B_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} - B_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} &= \lambda u_2 \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

который моделирует малые планарные колебания пластин. Граничные условия (1.1.2)-(1.1.3) преобразуются к виду

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \right|_{\alpha=0,l} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_1}{\partial \beta} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0,l} = 0 \quad (1.2.2)$$

$$u_1 \Big|_{\beta=0,s} = u_2 \Big|_{\beta=0,s} = 0 \quad (1.2.3)$$

Задаче (1.2.1)-(1.2.3) соответствует самосопряженный и неотрицательно определенный оператор, который имеет неотрицательный дискретный спектр с предельной точкой на  $+\infty$ . Поэтому, для решения задачи (1.2.1)-(1.2.3) применим обобщенный метод Канторовича-Власова. Решение системы (1.2.1), удовлетворяющее условиям (1.2.3), ищем в виде

$$u_1 = u_m \sin km\beta \exp(km\alpha), \quad u_2 = v_m (1 - \cos km\beta) \exp(km\alpha) \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (1.2.4)$$

где  $k = 2\pi/s$ ,  $s$  – ширина пластины, а  $u_m, v_m$  и  $\alpha$  неизвестные параметры.

Подставляя (1.2.4) в систему уравнений (1.2.1) и полученное первое уравнение умножая на  $\sin km\beta$ , а второе – на  $\cos km\beta$  и интегрируя от 0 до  $s$ , получим систему уравнений

$$\begin{cases} (B_{11}y^2 + B_{66}(1 - \eta_m^2))u_m + (B_{12} + B_{66})ymv_m = 0 \\ -(B_{12} + B_{66})ymu_m + (B_{66}y^2 - B_{22} + B_{66}\eta_m^2)v_m = 0 \end{cases} \quad (1.2.5)$$

где  $\eta_m^2 = \lambda / (B_{66}k^2m^2)$ ,  $m = \overline{1, +\infty}$ . Приравнявая определитель системы (1.2.5) к нулю, получим характеристические уравнения

$$y^4 - \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} - \frac{B_{11} + B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 \right) y^2 + (1 - \eta_m^2) \left( \frac{B_{22}}{B_{11}} - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 \right) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (1.2.6)$$

Пусть  $y_1, y_2$  являются различными корнями уравнения (1.2.6) с неположительными действительными частями. Тогда  $y_3 = -y_1$  и  $y_4 = -y_2$  также различные корни уравнения (1.2.6). Решения задачи (1.2.1)-(1.2.3) ищем в виде

$$u_1 = \sin km\beta \sum_{j=1}^4 u_m^{(j)} W_j \exp(kmy_j \alpha) \\ u_2 = (1 - \cos km\beta) \sum_{j=1}^4 v_m^{(j)} W_j \exp(kmy_j \alpha) \quad (1.2.7)$$

$$u_m^{(j)} = -\frac{B_{12} + B_{66}}{B_{11}} y_j, \quad v_m^{(j)} = y_j^2 + \frac{B_{66}}{B_{11}} (1 - \eta_m^2) \quad (1.2.8)$$

Подставим (1.2.7) в граничные условия (1.2.2). Первые и вторые из полученных уравнений умножаем на  $\sin km\beta$  и  $\cos km\beta$  соответственно. Интегрируя все полученные уравнения в пределах от 0 до  $s$ , получим совокупность систем уравнений

$$\sum_{j=1}^4 P_{1j}^{(m)} W_j = 0, \quad \sum_{j=1}^4 P_{2j}^{(m)} W_j = 0 \\ \sum_{j=1}^4 P_{1j}^{(m)} \exp(z_j) W_j = 0, \quad \sum_{j=1}^4 P_{2j}^{(m)} \exp(z_j) W_j = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (1.2.9)$$

$$P_{1j}^{(m)} = y_j^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} (1 - \eta_m^2), \quad P_{2j}^{(m)} = y_j \left( y_j^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 \right), \quad z_j = kmy_j l \quad (1.2.10)$$

Чтобы совокупность систем (1.2.9) имела нетривиальное решение необходимо и достаточно, чтобы совокупность уравнений имела  $\eta_m$  решение

$$\Delta_m = \exp(-z_1 - z_2) (y_2 - y_1)^2 P(\eta_m^2, y_1, y_2) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (1.2.11)$$



$$P(\eta_m^2, y_1, y_2) = -\left(\frac{B_{12} + B_{66}}{B_{11}}\right)^2 K_2^2(\eta_m, y_1, y_2)(1 + \exp(2z_1 + 2z_2)) -$$

$$8m_{11}m_{12}m_{21}m_{22} \exp(z_1 + z_2) + 4m_{11}m_{21}(m_{11}m_{22} + m_{12}m_{21})[z_1z_2](\exp(z_2) - \exp(z_1)) + (m_{11}m_{22} + m_{12}m_{21})^2(\exp(2z_1) + \exp(2z_2)) + 4m_{11}^2m_{21}^2[z_1z_2]^2, \quad (1.2.12)$$

$$K_2(\eta_m, y_1, y_2) = (1 - \eta_m^2) \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right) - \eta_m^2 y_1 y_2,$$

$$m_{11} = y_1^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}}(1 - \eta_m^2); \quad m_{12} = y_1 + y_2,$$

$$m_{21} = y_1 \left( y_1^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 \right), \quad m_{22} = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 + y_1 y_2;$$

$$[z_1 z_2] = klm(\exp(z_2) - \exp(z_1))/(z_2 - z_1)$$

Уравнение (1.2.11) эквивалентно уравнению

$$P(\eta_m^2, y_1, y_2) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (1.2.13)$$

Уравнения (1.2.13) являются дисперсионными уравнениями задачи (1.2.1)-(1.2.3).

Если  $y_1$  и  $y_2$  имеют отрицательные действительные части, то при  $ml \rightarrow \infty$  уравнения (1.2.13) преобразуются в уравнения

$$K_2(\eta_m, y_1, y_2) = (1 - \eta_m^2) \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right) - \eta_m^2 y_1 y_2 = 0 \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (1.2.14)$$

Уравнения (1.2.14) являются дисперсионными уравнениями для полубесконечной пластины - полосы со свободным торцом, когда остальные края жестко защемлены, которые, естественно, совпадают с дисперсионными уравнениями, полученными для случаев, рассмотренных в [84, 125].

**1.2.2. Колебания безмоментной ортотропной круговой цилиндрической оболочки открытого профиля со свободными торцами и жестко защемленными граничными образующими.** В этом случае  $R^{-2} = k^2 r_0 / 2 (r_m = 0, m = \overline{1, +\infty})$  т.е.

имеем безмоментную круговую ортотропную цилиндрическую оболочку открытого профиля со свободными торцами, когда граничные образующие жестко защемлены.

Здесь система (1.1.14) принимает вид

$$\left( r_0 A_m - 2 \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta^2 \right) W_m = 0, \quad m = 1, +\infty \quad (1.2.15)$$

Следовательно, уравнение (1.1.17) распадается на совокупность уравнений

$$r_{mm} = r_0 P_m - 2 \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta^2 C_m = 0, \quad m = 1, +\infty \quad (1.2.16)$$

или уравнений

$$\begin{aligned} & \left( \eta^2 - \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11} B_{66}} \frac{r_0}{2} \right) \chi^4 - \eta^2 \left( \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - 2 B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}} m^2 - \frac{B_{11} + B_{66}}{B_{11}} \eta^2 + \right. \\ & \left. \frac{B_{11} B_{12} - B_{12}^2 + B_{66} B_{22}}{B_{11} B_{66}} \frac{r_0}{2} \right) \chi^2 + \eta^2 (m^2 - \eta^2) \left( \frac{B_{22}}{B_{11}} m^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \frac{r_0}{2} \right) = 0, \quad m = 1, +\infty \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

В этом случае для нахождения безразмерной характеристики собственных частот  $\eta/m$  используются уравнения (1.1.24), в которых  $x_1 = \chi_1/m$ ,  $x_2 = \chi_2/m$ , а  $\chi_1$  и  $\chi_2$  являются корнями уравнения (1.2.17) с неположительными действительными частями.

Обозначим через  $y = \chi/m$  в уравнениях (1.2.17) и перейдем к пределу  $r_0/m^2 \rightarrow 0$ . Тогда уравнения (1.2.17) преобразуются к характеристические уравнения (1.2.6) моделирующие планарные колебания прямоугольной пластины со свободными торцами и жестко заземленными сторонами. Тогда, в этом случае, для дисперсионных уравнений (1.1.24) справедливы следующие асимптотические формулы

$$\text{Det} \| m_{ij} \|_{ij=1}^4 = \left( \frac{B_{11}}{B_{12} + B_{66}} \right)^2 N_1^2(\eta_m) P(\eta_m^2, y_1, y_2) + O(r_0/m^2) = 0, \quad m = 1, +\infty \quad (1.2.18)$$

где  $P(\eta_m^2, y_1, y_2)$  определяется по формуле (1.2.12)

$$N_1(\eta_m) = \frac{B_{22}(B_{11} B_{22} - B_{12}^2)}{B_{11}^3} + \frac{B_{12}(B_{11} B_{12} - B_{12}^2 - B_{12} B_{66} - B_{22} B_{66})}{B_{11}^3} \eta_m^2 \quad (1.2.19)$$

Из (1.2.18) следует, что при  $r_0/m^2 \rightarrow 0$  уравнения (1.1.24) преобразуются в уравнения (1.2.13). Пусть  $y_1$  и  $y_2$  корни уравнения (1.2.6) с отрицательными

действительными частями. Учитывая выражение для  $P(\eta_m^2, y_1, y_2)$  из (1.2.12), заключаем, что при  $ml \rightarrow \infty$  уравнения (1.2.18) можно написать в виде

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{ij=1}^4 = -N_1^2(\eta_m)K_2^2(\eta_m, y_1, y_2) + \sum_{j=1}^2 O(\exp(z_j)) + O(r_0/2m^2) = 0 \quad m=1, +\infty \quad (1.2.20)$$

Из (1.2.20) следует, что при  $ml \rightarrow \infty$ ,  $r_0/m^2 \rightarrow 0$ ,  $\eta_m$  - корни уравнения (1.1.24) стремятся к корням уравнения (1.2.14).

### 1.2.3 Колебания некруговой цилиндрической оболочки открытого профиля со свободными торцами и жестко защемленными граничными образующими.

В этом случае  $R^{-2} = k^2(r_0/2 + r_1 \cos k\beta)$ , т. е. имеем некруговую цилиндрическую оболочку открытого профиля со свободными торцами и жестко защемленными граничными образующими. Здесь система уравнений (1.1.14) принимает вид

$$r_1 P_{m-1} \omega_{m-1} + r_{mm} \omega_m + r_1 P_{m+1} \omega_{m+1} = 0, \quad m=1, +\infty \quad (1.2.21)$$

$$\omega_m = w_m / c_m, \quad r_{mm} = r_0 p_m - 2B_{66} \eta^2 c_m / B_{22} \quad (1.2.22)$$

Так как определитель системы (1.2.21) относится к нормальному типу, то для нахождения ненулевого решения приравняем ее нулю

$$D(\chi^2, \eta^2, B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{21}, B_{66}, r_0, r_1) = 0 \quad (1.2.23)$$

Решение  $\chi^2$  уравнения (1.2.23) находится аналогичным образом как в [64]. Для этого, возьмем усеченный определитель из D при конечном n и приравняем нулю

$$D_n((\chi^2)^2, \eta^2, B_{11}, B_{22}, B_{12}, B_{21}, B_{66}, r_0, r_1) = 0 \quad (1.2.24)$$

Найдем решение  $\chi_n$  алгебраического уравнения (1.2.24). Точное решение уравнения (1.2.23) следует из  $\chi_n$  при  $n \rightarrow \infty$ . Раскрывая определитель  $D_m$  по элементам последнего столбца или строки, получим следующую рекуррентную последовательность:

$$\begin{aligned} D_1 &= r_{11}, \quad D_2 = r_{22}D_1 - r_1^2 P_1 P_2 \\ D_m &= r_{mm}D_{m-1} - r_1^2 P_{m-1} P_m D_{m-2}, \quad m = \overline{3, +\infty} \end{aligned} \quad (1.2.25)$$

*Справедливо следующее утверждение:* при фиксированном  $m \geq 2$  и  $\lambda \notin [0, \lambda_0]$  уравнение (1.2.23) имеет формальные решения вида

$$(\chi_j)^2 = (\chi_j^{(m)})^2 + \alpha_j^{(m)} r_1^2 + \beta_j^{(m)} r_1^4 + \dots, \quad j=1,2 \quad (1.2.26)$$

где  $\chi_j^{(m)}$  ( $j=1,2$ ) корни уравнения  $r_{mm} = 0$  (т.е. уравнения (1.2.17) с неположительными действительными частями) и

$$\alpha_j^{(m)} = \frac{P_m(P_{m-1}r_{m+1m+1} + P_{m+1}r_{m-1m-1})}{r_{m-1m-1}r_{m+1m+1}r'_{mm}} \Big|_{\chi=\chi_j^{(m)}}, \quad j=1,2 \quad (1.2.27)$$

где  $r'_{mm}$  -производная по  $\chi^2$ .

Доказательство проводится аналогично [65], [83], в которых граничные образующие рассмотренных задач о собственных колебаниях, шарнирно закреплены. Легко проверить, что уравнение  $r_{mm} = 0$  при фиксированном  $m$  имеет два положительных или комплексно сопряженных  $(\chi_j^{(m)})^2$ ,  $j=1,2$  корня. Тогда корни  $\chi^2$  уравнения

$$D_m = r_{m+1m+1}D_m - r_1^2 P_m P_{m+1} D_{m-1} = (r_{m+1m+1}r_{mm} - r_1^2 P_m P_{m+1})D_{m-1} - r_1^2 P_{m-1} P_m r_{m+1m+1} D_{m-2} = 0 \quad (1.2.28)$$

ищем в виде

$$\chi_{jm}^2 = (\chi_j^{(m)})^2 + \alpha_j^{(m)} r_1^2 + \beta_j^{(m)} r_1^4 + \dots \quad j=1,2, m = \overline{2, +\infty} \quad (1.2.29)$$

Поставляя (1.2.29) в (1.2.28) и приравнивая коэффициенты при  $r_1^2$  нулю, получим

$$(r_{m+1m+1}r'_{mm}\alpha_j^{(m)} - P_{m+1}P_m)D_{m-1} - r_{m+1m+1}P_m P_{m-1}D_{m-2} \Big|_{r_1=0} = 0 \quad (1.2.30)$$

Учитывая, что  $D_{m-1} \Big|_{r_1=0} = r_{m-1m-1}, D_{m-2} \Big|_{r_1=0} = 0$  получим формулы (1.2.27).

Докажем, что если использовать определители более высокого порядка чем  $m+1$  и искать нули этого определителя в виде (1.2.29), то коэффициенты при  $r_1^2$  не изменятся. Действительно, так как  $D_m \Big|_{\chi=\chi_j^{(m)}} = O(r_1^2)$ ,  $D_{m+1} \Big|_{\chi=\chi_j^{(m)}} = O(r_1^4)$  и  $D_{m+2} = r_{m+2m+2}D_{m+1} - r_1^2 P_{m+1} P_{m+2} D_m^{(2)}$ , то  $D_{m+2} \Big|_{\chi=\chi_j^{(m)}} = O(r_1^4)$ . Методом математической индукции убеждаемся, что  $D_n \Big|_{\chi=\chi_j^{(m)}} = O(r_1^4)$  при  $n \geq m+1$ . Следовательно  $\alpha_j^{(m)}$  ( $j=1,2$ ) не изменяются при  $n \rightarrow \infty$ , т.е. доказаны представления (1.2.26) с гарантированными значениями первых двух слагаемых. Таким образом, в этом случае для нахождения коэффициентов затухания  $\chi_j / m$  ( $j=1,2$ ) можно использовать приближенные формулы

$$\chi_j / m = -((\chi_j^{(m)} / m))^2 + \alpha_j^{(m)} r_1^2 / m^2)^{1/2}, \quad j = 1, 2, \quad (1.2.31)$$

а для нахождения соответствующих характеристик собственных частот  $\eta / m$  уравнение (1.1.24).

**1.2.4. Численные исследования.** В таблицах 1.2.1-1.2.2 приведены безразмерные характеристики собственных значений  $\eta / m$  и характеристики коэффициентов затухания соответствующих форм для цилиндрических оболочек с длинами  $l=15, l=5$  образующей и направляющей [84]

$$y = ba^{-2}(a^2 - x^2), \quad |x| \leq a, \quad a = 2, \quad b = 0.5; \quad a = 2, \quad b = 1 \quad (1.2.32)$$

изготовленных из ортотропного материала с параметрами [73]:

$$\begin{aligned} \text{Стеклопластик: } \rho &= 2,4 \cdot 10^3 \text{ Кг/М}^3, \quad E_1 = 6,37 \cdot 10^{10} \text{ Н/М}^2, \\ E_2 &= 1,47 \cdot 10^{10} \text{ Н/М}^2; \quad G = 4,9 \cdot 10^9 \text{ Н/М}^2, \quad \nu_1 = 0,26; \quad \nu_2 = 0,06 \end{aligned} \quad (1.2.33)$$

В таблице 1.2.1 представлены результаты для вариантов 1,2,3 соответственно при  $R^{-2} = 0, R^{-2} = k^2 r_0 / 2, R^{-2} = k^2 (r_0 / 2 + r_1 \cos k\beta)$  примененные к цилиндрическим оболочкам изготовленных из стеклопластика с механическими параметрами (1.2.33) и геометрическими параметрами (1.2.32):  $a = 2, b = 0,5, s = 4,16092, r_0 = 0,05072, r_1 = 0,02351$ , при  $l = 15, l = 5$ . Результаты представленные в таблице 1.2.2 соответствуют оболочкам с параметрами (1.2.33) и (1.2.32):  $a = 2, b = 1, s = 4,59117, r_0 = 0,205, r_1 = 0,30625$ , при  $l = 15, l = 5$ .

*Замечание.* Для изотропного материала имеем

$$\frac{B_{12}}{B_{11}} = \frac{B_{12}}{B_{22}} = \nu, \quad \frac{B_{66}}{B_{11}} = \frac{B_{66}}{B_{22}} = \frac{1 - \nu}{2}, \quad (1.2.34)$$

где  $\nu$  - коэффициент Пуассона.

Следовательно чтобы использовать полученные характеристические и дисперсионные уравнения можно в них формально подставить

$$B_{11} = B_{22} = 1, \quad B_{12} = \nu, \quad B_{66} = \frac{1 - \nu}{2}. \quad (1.2.35)$$

В таблицах 1.2.3 и 1.2.4 представлены результаты для вариантов 1,2,3 соответственно при  $R^{-2} = 0, R^{-2} = \frac{k^2 r_0}{2}, R^{-2} = k^2 \left( \frac{r_0}{2} + r_1 \cos k\beta \right)$  примененные к цилиндрическим оболочкам изготовленные из изотропного материала с коэффициентом Пуассона

$\nu = \frac{1}{3}$  при тех же геометрических параметрах, что в таблицах 1.2.1, 1.2.2 соответственно.

Отметим, что в вариантах 1 предполагается  $s=4$ . В качестве коэффициентов затухания, приведены значения следующих величин

$$k\chi_0 / m = \max \{k \operatorname{Re} \chi_1 / m, k \operatorname{Re} \chi_2 / m\} \quad (1.2.36)$$

Заключение. Рассмотрены ортотропные безмоментные цилиндрические оболочки с произвольными гладкими направляющими. Предполагается, что торцы оболочки свободны от напряжений, а граничные образующие жестко защемлены. Показано, что в таких оболочках, квадрат кривизны которых можно представить в виде (1.0.1), могут существовать собственные колебания затухающих от свободных краев вдоль ее образующих. Частоты собственных колебаний таких ортотропных цилиндрических оболочек определяются совокупностью уравнений (1.1.24). Для круговой цилиндрической оболочки коэффициенты затухания определяются из уравнения (1.2.17), а для пластины – (1.2.6). При некруговой цилиндрической оболочке для коэффициентов затухания можно использовать приближенные формулы (1.2.31). Для нахождения собственных частот и коэффициентов затухания аналогичных задач для прямоугольной пластины можно отдельно использовать формулы (1.2.13) и (1.2.6) соответственно.

Численный анализ показывает, что при больших  $m$  или при малой кривизне все характеристики собственных колебаний ортотропных и изотропных цилиндрической оболочек стремятся к характеристикам планарных собственных колебаний прямоугольной ортотропной и изотропной пластины со свободными торцами и жестко зашечленными сторонами соответственно.

Численный анализ показывает, что безразмерные характеристики частот собственных колебаний локализованных у свободных торцов безмоментной цилиндрической оболочки при  $ml \rightarrow \infty$  стремятся к корням уравнения Рэлея для полубесконечной пластины.

Сравнивая численные результаты исходной задачи и задач рассмотренных в работах [64–65], [84], заключаем, что это явление присуще для всех конечных безмоментных цилиндрических оболочек со свободным торцом.

Таблица 1.2.1

l	m	Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3	
		$k\chi_0/m$	$\eta/m$	$k\chi_0/m$	$\eta/m$	$k\chi_0/m$	$\eta/m$
15	1	-0.1202	0.96516	-0.1131	0.96642		
	2	-0.0966	0.97767	-0.0928	0.97770	-0.0927	0.97770
		-0.0653	0.98989	-0.0571	0.99162	-0.0571	0.99162
	3	-0.0896	0.98082	-0.0862	0.98081	-0.0862	0.98081
		-0.0824	0.98379	-0.0779	0.98434	-0.7792	0.98434
	4	-0.0875	0.98175	-0.0840	0.98178	-0.0840	0.98178
		-0.0855	0.98254	-0.0817	0.98277	-0.0817	0.98277
	5	-0.0868	0.98203	-0.0833	0.98207	-0.0833	0.98207
		-0.0863	0.98223	-0.0827	0.98234	-0.0827	0.98235
6	-0.0866	0.98210	-0.0831	0.98218	-0.0831	0.98215	
	-0.0864	0.98220	-0.0828	0.98230	-0.0829	0.82230	
7	-0.0866	0.98213	-0.0831	0.98216	-0.0831	0.98216	
	-0.0866	0.98214	-0.0831	0.98219	-0.0830	0.98219	
10	-0.8660	0.98213	-0.0832	0.98215	-0.0832	0.98215	
	-0.0866	0.98213	-0.0832	0.98215	-0.0832	0.98215	
100	-0.0866	0.98213	-0.0832	0.98213	-0.0832	0.98215	
			-0.0831	0.98213	-0.0832	0.98215	
5	3	-0.1202	0.96516	-0.1169	0.96434	-0.1169	0.96434
	4	-0.1085	0.97170	-0.1055	0.97106	-0.1055	0.97106
	5	-0.1013	0.97540	-0.0984	0.97491	-0.9839	0.97490
		-0.0408	0.99605	-0.0284	0.99793	-0.0284	0.99794
	6	-0.0965	0.97769	-0.0936	0.97730	-0.0936	0.97730
		-0.0653	0.98988	-0.0590	0.99104	-0.0590	0.99104
	7	-0.0933	0.97918	-0.0904	0.97887	-0.0940	0.97887
-0.0749		0.98665	-0.0700	0.98740	-0.0700	0.98740	
10	-0.0886	0.98126	-0.0855	0.98112	-0.0855	0.98113	
	-0.0840	0.98317	-0.0803	0.98340	-0.0803	0.98340	
100	-0.0866	0.98213	-0.0832	0.98213	-0.0832	0.98213	
			-0.0832	0.98213	-0.0831	0.98213	

Таблица 1.2.2

$l$	m	Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3	
		$k\chi_0/m$	$\eta/m$	$k\chi_0/m$	$\eta/m$	$k\chi_0/m$	$\eta/m$
15	1	-0.1202	0.96516	-0.1087	0.96230		
	2	-0.0965	0.97769	-0.0835	0.97784	-0.0824	0.97788
		-0.0653	0.98988	-0.0309	0.99698	-0.0260	0.99783
	3	-0.0896	0.98082	-0.0779	0.98081	-0.0776	0.98110
		-0.0825	0.98379	-0.0665	0.98607	-0.0661	0.98637
	4	-0.0875	0.98175	-0.0759	0.98186	-0.0757	0.98201
		-0.0855	0.98254	-0.0724	0.98349	-0.0722	0.98365
	5	-0.0868	0.98203	-0.0752	0.98219	-0.0751	0.98228
		-0.0863	0.98223	-0.0739	0.98280	-0.0738	0.98290
6	-0.0866	0.98210	-0.0750	0.98227	-0.0749	0.98234	
	-0.0864	0.98220	-0.0746	0.98250	-0.0746	0.98249	
7	-0.0866	0.98213	-0.0750	0.98223	-0.0750	0.98231	
	-0.0866	0.98214	-0.0748	0.98240	-0.0749	0.98360	
10	-0.0866	0.98213	-0.0753	0.98220	-0.0752	0.98223	
	-0.0866	0.98213	-0.0752	0.98220	-0.0752	0.98223	
100	-0.0866	0.98213	-0.0754	0.98213	-0.0754	0.98213	
5	3	-0.1202	0.96516	-0.1087	0.96230	-0.1083	0.96278
	4	-0.1085	0.97170	-0.0983	0.96938	-0.0980	0.96957
	5	-0.1013	0.97540	-0.0914	0.97355	-0.0913	0.97366
		-0.0408	0.99605				
	6	-0.0965	0.97767	-0.0867	0.97623	-0.0867	0.97623
		-0.0052	0.98988	-0.0417	0.99456	-0.0414	0.99468
	7	-0.0933	0.97917	-0.0835	0.97802	-0.0834	0.97807
-0.0749		0.98665	-0.0574	0.98960	-0.0572	0.98974	
10	-0.0886	0.98126	-0.0753	0.98220	-0.0782	0.98074	
	-0.0840	0.98317	-0.0752	0.98220	-0.0710	0.98415	
100	-0.0866	0.98213	-0.0754	0.98213	-0.0755	0.98210	



Таблица 1.2.3

$l$	$m$	Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3	
		$k\chi_0/m$	$\eta/m$	$k\chi_0/m$	$\eta/m$	$k\chi_0/m$	$\eta/m$
15	1	-0.6180	0.91934	-0.5372	0.92598	-0.5361	0.92612
		-0.6176	0.91946	-0.5362	0.92627	-0.5351	0.92643
	2	-0.6178	0.91940	-0.5780	0.92110	-0.5778	0.92118
				-0.5780	0.92111	-0.5778	0.92113
	3	-0.6178	0.91940	-0.5867	0.92017	-0.5865	0.92020
	4	-0.6178	0.91940	-0.5898	0.91983	-0.5802	0.91970
	5	-0.6178	0.91940	-0.5913	0.91967	-0.5912	0.91967
	6	-0.6178	0.91940	-0.5921	0.91959	-0.5920	0.91959
	7	-0.6178	0.91940	-0.5926	0.91954	-0.5926	0.91954
10	-0.6178	0.91940	-0.5933	0.91947	-0.5933	0.91947	
100	-0.6178	0.91940	-0.5939	0.91940	-0.5939	0.91940	
5	1	-0.6974	0.89602	-0.6179	0.89961	-0.3142	0.97572
		-0.4421	0.95958	-0.3156	0.97554	-0.6168	0.89977
	2	-0.6224	0.91814	-0.5839	0.91939	-0.5837	0.91941
		-0.6129	0.92075	-0.5715	0.92297	-0.5713	0.92299
	3	-0.6180	0.91934	-0.5870	0.92006	-0.5709	0.92014
		-0.6176	0.91946	-0.5863	0.92025	-0.5864	0.92032
	4	-0.6178	0.91940	-0.5898	0.91982	-0.5901	0.91976
		-0.6178	0.91940	-0.5898	0.91983	-0.5900	0.91976
	5	-0.6178	0.91940	-0.5913	0.91968	-0.5913	0.91967
					-0.5913	0.91967	
6	-0.6178	0.91940	-0.5921	0.91958	-0.5921	0.91859	
7	-0.6178	0.91940	-0.5926	0.91954	-0.5926	0.91954	
10	-0.6178	0.91940	-0.5933	0.91947	-0.5933	0.91947	
100	-0.6178	0.91940	-0.5939	0.91940	-0.5939	0.91940	

Таблица 1.2.4

$l$	m	Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3	
		$k\chi_0/m$	$\eta/m$	$k\chi_0/m$	$\eta/m$	$k\chi_0/m$	$\eta/m$
15	1	-0.6180	0.91934	-0.3793	0.94638	-0.2628	0.96592
		-0.6176	0.91946	-0.3735	0.94621	-0.2432	0.97116
	2	-0.6178	0.91940	-0.4859	0.92619	-0.4504	0.93208
						-0.4503	0.93211
	3	-0.6178	0.91940	-0.5132	0.92245	-0.4778	0.93606
	4	-0.6178	0.91940	-0.5237	0.92113	-0.5359	0.91828
	5	-0.6178	0.91940	-0.5288	0.92050	-0.5312	0.91994
	6	-0.6178	0.91940	-0.5316	0.92017	-0.5326	0.91996
	7	-0.6178	0.91940	-0.5334	0.91996	-0.5338	0.91986
10	-0.6178	0.91940	-0.5358	0.91968	-0.5359	0.91966	
100	-0.6178	0.91940	-0.5382	0.91940	-0.5383	0.91940	
5	1	-0.6974	0.89602	-0.4667	0.91246	-0.4722	0.76082
		-0.4421	0.95958			-0.3377	0.94031
	2	-0.6224	0.91814	-0.4962	0.92280	-0.4620	0.92830
		-0.6129	0.92075	-0.4736	0.93015	-0.4358	0.93663
	3	-0.6180	0.91934	-0.5139	0.92220	-0.4790	0.93574
		-0.6176	0.91946	-0.5124	0.92270	-0.4765	0.93639
	4	-0.6178	0.91940	-0.5238	0.92111	-0.5344	0.91829
		-0.6178	0.91940	-0.6237	0.92114	-0.5343	0.91832
	5	-0.6178	0.91940	-0.5288	0.92050	-0.5311	0.91993
			-0.5288	0.92051	-0.5312	0.91994	
6	-0.6178	0.91940	-0.5317	0.92017	-0.5326	0.91996	
7	-0.6178	0.91940	-0.5334	0.91997	-0.5338	0.91986	
10	-0.6178	0.91940	-0.5359	0.91968	-0.5359	0.91966	
100	-0.6178	0.91940	-0.5383	0.91940	-0.5383	0.91940	

## ГЛАВА 2. КОЛЕБАНИЯ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ОРТОТРОПНОЙ КРУГОВОЙ НЕЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ СО СВОБОДНЫМИ ТОРЦАМИ И ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ ОБРАЗУЮЩИМИ

В этой главе исследуются свободные колебания тонкой упругой незамкнутой цилиндрической оболочки со свободными торцами и жестко защемленными граничными образующими (моментная задача). Задача не допускает разделения переменных. Для нахождения собственных частот и соответствующих собственных форм применяется метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича–Власова [36-37,45, 89,110]. В качестве базисных функций используются собственные функции задачи

$$w^{IV} = \theta^4 w, \quad w|_{\beta=0,s} = w'|_{\beta=0,s} = 0, \quad 0 \leq \beta \leq s. \quad (2.0.1)$$

которая рассмотрена также в работах [82], [85]. Под  $s$  для пластины подразумевается ширина пластины, а для цилиндрической оболочки открытого профиля длина направляющей окружности срединной поверхности. Задача (2.0.1) самосопряженная и имеет положительный простой дискретный спектр с предельной точкой на  $+\infty$ . Собственным значениям  $\theta_m^4$ ,  $m = \overline{1, +\infty}$  задачи (2.0.1) соответствуют собственные функции

$$w_m(\theta_m \beta) = \sin \frac{\theta_m s}{2} (ch \theta_m \beta - \cos \theta_m \beta) - \cos \frac{\theta_m s}{2} (sh \theta_m \beta - \sin \theta_m \beta), \quad 0 \leq \beta \leq s, m = \overline{1, +\infty}, \quad (2.0.2)$$

которые, вместе с их производными, образуют ортогональный базис в соответствующем гильбертовом пространстве  $L_2[0, s]$  (см. [59], стр.84). Заметим, что  $\theta_m$ ,  $m = \overline{1, +\infty}$  определяются из уравнения

$$ch \theta s \cos \theta s = 1. \quad (2.0.3)$$

Введем аналогичные обозначения как в [82], [85]

$$k = \frac{\pi}{s}; \quad \theta_m s = k m \mu_m, \quad m \in N; \quad \beta_m = \int_0^s w''^2_m(\theta_m \beta) d\beta / \int_0^s w'^2_m(\theta_m \beta) d\beta. \quad (2.0.4)$$

Имеем

$$\theta_m s = \pi m \mu_m = \frac{\pi}{2}(2m+1) + \alpha(m), \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha(m) = 0; \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_m = 1; \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = 1; \quad (2.0.5)$$

$$\int_0^s W_m'^2(\theta_m, \beta) d\beta = \frac{s}{2}(1 + \cos \theta_m s) - \frac{\sin \theta_m s}{\theta_m}, \quad (2.0.6)$$

$$\int_0^s W_m''^2(\theta_m, \beta) d\beta = \frac{s}{2}(1 - \cos \theta_m s),$$

$$\int_0^s W_n'''(\theta_m, \beta) W_m'(\theta_m, \beta) d\beta = \begin{cases} - \int_0^s W_m''^2(\theta_m, \beta) d\beta \\ 0, n \neq m \end{cases}$$

Используя полученные ниже дисперсионные уравнения и асимптотические формулы этих дисперсионных уравнений, можно, меняя геометрию оболочек и механические свойства материала, управлять спектром, смещая начало спектра или точки сгущения из нежелательной области резонанса [87].

## § 2.1. Планарные и изгибные колебания ортотропной прямоугольной пластины со свободными и жестко заземленными параллельными сторонами

**2.1.1. Планарные колебания ортотропной прямоугольной пластины со свободными и жестко заземленными параллельными сторонами.** В этом пункте, для дальнейшего использования, выводятся дисперсионные уравнения для планарного колебания ортотропной прямоугольной пластины со свободными и жестко заземленными параллельными сторонами, используя базисные функции (2.0.2) (ср. с результатами пункта 1.2.1).

Введем триортогональную систему прямолинейных координат  $(\alpha, \beta, \gamma)$  с началом в одной из свободной торцевой плоскости пластины так, что координатная плоскость  $\alpha\beta$  совпадает со срединной плоскостью пластины, а главные направления упругости материала пластины совпадают с координатными линиями (Рис. 2.1). Обозначим через  $h, s, l$  толщину, ширину и длину пластины соответственно. При свободных колебаниях рассматривается вопрос существования планарных колебаний прямоугольной пластины с двумя свободными и двумя жестко заземленными

параллельными сторонами. В качестве исходных уравнений, используем уравнения малых планарных колебаний, которые соответствуют классической теории ортотропных пластин ((1.2.1)). Граничные условия имеют вид (1.2.2) и (1.2.3) [16].

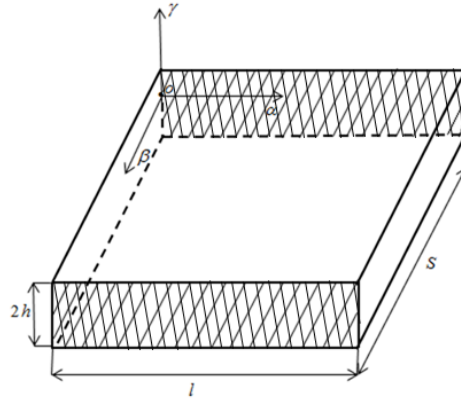


Рис.2.1

В уравнениях (1.2.1) и граничных условиях (1.2.2) и (1.2.3) предполагается, что  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq l$ ) и  $\beta$  ( $0 \leq \beta \leq s$ ) ортогональные координаты точки срединной плоскости,  $u_1, u_2$  – проекции вектора смещений точки срединной плоскости, соответственно в направлениях  $\alpha, \beta$ ,  $B_{ik}$ ,  $i, k = 1, 2, 6$  – коэффициенты упругости.  $\lambda = \omega^2 \rho$ , где  $\omega$  – угловая частота собственных колебаний,  $\rho$  – плотность материала.

Соотношения (1.2.2) выражают условия свободного края при  $\alpha = 0, \alpha = l$ , а условия (1.2.3) – условиями жесткого защемления при  $\beta = 0, \beta = s$ .

Решение системы (1.2.1) ищем в виде

$$(u_1, u_2) = \{u_m w_m(\theta_m \beta), v_m w'_m(\theta_m \beta)\} \exp(k \chi \alpha), \quad m = \overline{1, +\infty}, \quad (2.1.1)$$

где  $u_m, v_m, \chi$  неизвестные постоянные, а  $w_m(\theta_m \beta)$  и  $k$  определены в (2.0.2) и (2.0.4). Условия (1.2.3) выполняются автоматически. Подставим (2.1.1) в (1.2.1). Действуя аналогичным образом, как в [82], [85], первое уравнение полученной системы умножаем на  $w''_m(\theta_m \beta)$ , а второе на  $w'_m(\theta_m \beta)$ . Интегрируя оба уравнения в пределах от 0 до s, получим систему уравнений

$$\begin{cases} (B_{11} \chi^2 - B_{66} m^2 \mu_m^2 \beta_m + B_{66} \eta^2) u_m - (B_{12} + B_{66}) \chi t \mu_m \beta_m v_m = 0 \\ (B_{12} + B_{66}) \chi t \mu_m u_m + (B_{66} \chi^2 - B_{22} m^2 \mu_m^2 \beta_m + B_{66} \eta^2) v_m = 0 \end{cases}, \quad (2.1.2)$$

где  $\eta^2 = \lambda / (k^2 B_{66})$ , а  $\mu_m$  и  $\beta_m$  определены в (2.0.4). Для существования ненулевого решения данной системы необходимо и достаточно, чтобы определитель системы (2.1.2) равнялся нулю, откуда получаются характеристические уравнения системы уравнений (1.2.1)

$$c_m = y^4 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} y^2 + \frac{B_{11} + B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 y^2 - (1 - \eta_m^2) \left( \frac{B_{22}}{B_{11}} - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 \right) = 0. \quad (2.1.3)$$

$$y = \frac{\chi}{m_*}, \quad \eta_m = \frac{\eta}{m_*}, \quad m_*^2 = m^2 \mu_m^2 \beta_m \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (2.1.4)$$

Так как уравнение (2.1.3) является биквадратным относительно  $y$ , то предположим, что  $y_1$  и  $y_2$  являются различными корнями этого уравнения с неположительными действительными частями.

Представим решение задачи (1.2.1), (1.2.2), (1.2.3) в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= w_m(\theta_m \beta) \left( \sum_{j=1}^2 w_j u_m^{(j)} \exp(km_* y_j \alpha) - \sum_{j=1}^2 w_{2+j} u_m^{(j)} \exp(-km_* y_j \alpha) \right), \\ u_2 &= w'_m(\theta_m \beta) \left( \sum_{j=1}^2 w_j v_m^{(j)} \exp(km_* y_j \alpha) + \sum_{j=1}^2 w_{2+j} v_m^{(j)} \exp(-km_* y_j \alpha) \right). \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

$$u_m^{(j)} = \frac{B_{12} + B_{66}}{B_{11}} y_j, \quad v_m^{(j)} = \left( y_j^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} (1 - \eta_m^2) \right) m \mu_m, \quad m = \overline{1, +\infty}. \quad (2.1.6)$$

Удовлетворив граничным условиям (1.2.2), первое и третье из полученных уравнений умножаем на  $w_m''(\theta_m \beta)$ , а второе и четвертое – на  $w'_m(\theta_m \beta)$ . Интегрируя все полученные уравнения в пределах от 0 до  $s$ , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 R_{ij}^{(m)} w_j + (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^2 R_{ij}^{(m)} w_{2+j} &= 0, \quad i = 1, 2, \\ \sum_{j=1}^2 R_{ij}^{(m)} \exp(z_j) w_j + (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^2 R_{ij}^{(m)} \exp(-z_j) w_{2+j} &= 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

$$R_{1j}^{(m)} = y_j^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} (1 - \eta_m^2), \quad R_{2j}^{(m)} = y_j \left( y_j^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 \right), \quad z_j = km_* y_j l, \quad j = 1, 2. \quad (2.1.8)$$

Приравнявая определитель системы (2.1.7) к нулю, получим дисперсионное уравнение

$$E_m(\eta_m) = (y_2 - y_1)^2 K_{2m}^2(\eta_m)(1 + \exp(2(z_1 + z_2))) + 8(1 - \eta_m^2)y_1y_2R^2(\eta_m)\exp(z_1 + z_2) - (y_1 + y_2)^2 K_{5m}^2(\eta_m)(\exp(2z_2) + \exp(2z_1)) = 0. \quad (2.1.9)$$

$$K_{im}(\eta_m) = (1 - \eta_m^2) \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right) + (-1)^{i-1} \eta_m^2 y_1 y_2, \quad i = 2, 5, \quad (2.1.10)$$

$$R(\eta_m) = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \frac{B_{11} - B_{12}}{B_{11}} \eta_m^2.$$

Заметим, что  $E_m(\eta_m)$  из (2.1.9) можно привести к виду

$$E_m(\eta_m) = (y_2 - y_1)^2 \bar{E}_m(\eta_m). \quad (2.1.11)$$

$$\bar{E}_m(\eta_m) = K_{2m}^2(\eta_m)(1 + \exp(2(z_1 + z_2))) + \frac{8B_{11}^2 m_{11} m_{22} m_{21} m_{12}}{(B_{12} + B_{66})^2} \exp(z_1 + z_2) - \frac{B_{11}^2 (m_{11} m_{22} + m_{21} m_{12})^2}{(B_{12} + B_{66})^2} (\exp(2z_1) + \exp(2z_2)) - \frac{4B_{11}^2 m_{11}^2 m_{21}^2}{(B_{12} + B_{66})^2} [z_1 z_2]^2 - \frac{4B_{11}^2 m_{11} m_{21} (m_{11} m_{22} + m_{21} m_{12})}{(B_{12} + B_{66})^2} (\exp(z_2) - \exp(z_1)) [z_1 z_2], \quad (2.1.12)$$

$$m_{11} = R_{11}, \quad m_{21} = R_{21}, \quad m_{12} = y_1 + y_2, \quad [z_1 z_2] = km_* l (\exp(z_2) - \exp(z_1)) / (z_2 - z_1),$$

$$m_{22} = y_1 y_2 + \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2.$$

Учитывая (2.1.11), можно утверждать, что дисперсионное уравнение (2.1.9) эквивалентно дисперсионному уравнению

$$\bar{E}_m(\eta_m) = 0. \quad (2.1.13)$$

Численный анализ показывает, что применение дисперсионного уравнения (2.1.13) более эффективно, когда значения корней уравнения (2.1.3) близки друг к другу.

Заметим, что если  $y_1$  и  $y_2$  корни уравнения (2.1.3) с отрицательными действительными частями, то при  $m_* l \rightarrow \infty$  уравнения (2.1.9) и (2.1.13) преобразуются в уравнение [82]:

$$K_{2m}(\eta_m) = (1 - \eta_m^2) \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right) - \eta_m^2 y_1 y_2 = 0. \quad (2.1.14)$$

Уравнение (2.1.14) является уравнением Рэля для полубесконечной ортотропной пластины-полосы со свободным торцом, когда край  $\beta = 0$ ,  $\beta = s$  жестко защемлены.

### 2.1.2. Изгибные колебания ортотропной прямоугольной пластины со свободными и жестко защемленными параллельными сторонами.

Рассмотрим ортотропную прямоугольную пластину где  $h, s, l$  являются толщиной, шириной и длиной пластины соответственно (рис. 2.1). При свободных колебаниях рассматривается вопрос существования изгибных колебаний прямоугольной пластины с двумя свободными и двумя жестко защемленными параллельными сторонами. Для определения нетривиального решения задачи рассмотрим уравнение малых изгибных колебаний, которое соответствует классической теории ортотропных пластин [16].

$$\mu^4 \left( B_{11} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^4} + 2(B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + B_{22} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \beta^4} \right) = \lambda u_3, \quad (2.1.15)$$

при граничных условиях

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} \Big|_{\alpha=0,l} = \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha^3} + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha \partial \beta^2} \Big|_{\alpha=0,l} = 0, \quad (2.1.16)$$

$$u_3 \Big|_{\beta=0,s} = \frac{\partial u_3}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0,s} = 0, \quad (2.1.17)$$

где соотношения (2.1.16) выражают условия свободного края при  $\alpha = 0, \alpha = l$ , а условия (2.1.17) жесткого защемления при  $\beta = 0, \beta = s$ ;  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq l$ ) и  $\beta$  ( $0 \leq \beta \leq s$ ) – ортогональные координаты точки срединной плоскости пластины;  $u_3$  – нормальная компонента вектора перемещения точки срединной плоскости;  $B_{ik}, i, k = 1, 2, 6$  – коэффициенты упругости,  $\mu^4 = h^2 / 12$  ( $h$  – толщина пластины).  $\lambda = \omega^2 \rho$ , где  $\omega$  – угловая частота собственных колебаний,  $\rho$  – плотность материала.

Решение уравнения (2.1.15) ищем в виде

$$u_3 = w_m(\theta_m \beta) \exp(k \chi \alpha); \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (2.1.18)$$

где  $w_m(\theta_m \beta)$  определено в (2.0.2) а  $\chi$  неопределенная константа. Условия (2.1.17) выполняются автоматически. Подставим (2.1.18) в (2.1.15). Действуем аналогичным



образом как в [82], [85]. Из полученного уравнения, умножая на  $w_m''(\theta_m \beta)$  и интегрируя в пределах от 0 до  $S$ , получим характеристическое уравнение

$$R_{mm} = m_*^2 a^2 \left( \frac{B_{11}}{B_{22}} y^4 - \frac{2(B_{12} + 2B_{66})}{B_{22}} y^2 + \frac{1}{\beta_m^2} \right) - \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta_m^2 = 0 \quad (2.1.19)$$

$$y = \frac{\chi}{m_*}, \eta^2 = \frac{\lambda}{k^2 B_{66}}, \eta_m = \frac{\eta}{m_*}, a^2 = \mu^4 k^2, k = \frac{\pi}{S}, m_*^2 = m^2 \mu_m^2 \beta_m, \quad (2.1.20)$$

где  $\mu_m$  и  $\beta_m$  определены в (2.0.4). Так как уравнение (2.1.19) является биквадратным относительно  $Y$ , то предположим, что  $y_3$  и  $y_4$  являются различными корнями этого уравнения с неположительными действительными частями. Решение задачи (2.1.15)-(2.1.17) ищем в виде

$$u_3 = w_m(\theta_m \beta) \left( \sum_{j=3}^4 w_j \exp(km_* y_j \alpha) + \sum_{j=3}^4 w_{2+j} \exp(-km_* y_j \alpha) \right). \quad (2.1.21)$$

Подставим (2.1.21) в граничные условия (2.1.16). Умножая все полученные уравнения на  $w_m''(\theta_m \beta)$  и интегрируя в пределах от 0 до  $S$ , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{j=3}^4 R_{ij}^{(m)} w_j + (-1)^{i-1} \sum_{j=3}^4 R_{ij}^{(m)} w_{2+j} &= 0, \quad i = 3, 4; \\ \sum_{j=1}^2 R_{ij}^{(m)} \exp(z_j) w_j + (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^2 R_{ij}^{(m)} \exp(-z_j) w_{2+j} &= 0, \quad i = 3, 4. \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

$$R_{3j}^{(m)} = y_j^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}}; \quad R_{4j}^{(m)} = y_j^3 - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} y_j; \quad z_j = km_* y_j l, \quad j = 3, 4 \quad (2.1.23)$$

Приравнивая определитель системы (2.1.22) к нулю, получим дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} F_m(\eta_m) &= (y_4 - y_3)^2 K_{1m}^2(\eta_m) (1 + \exp(2(z_3 + z_4))) + 8y_3 y_4 S^2(\eta_m) \exp(z_3 + z_4) - \\ &- (y_3 + y_4)^2 K_{4m}^2(\eta_m) (\exp(2z_3) + \exp(2z_4)) = 0. \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

$$K_{im}(\eta_m) = y_3^2 y_4^2 + (-1)^{i-1} 4 \frac{B_{66}}{B_{11}} y_3 y_4 - \left( \frac{B_{12}}{B_{11}} \right)^2, \quad i = 1, 4, \quad (2.1.25)$$

$$S(\eta_m) = y_3^2 y_4^2 - \frac{B_{12}(B_{12} + 4B_{66})}{B_{11}^2}, \quad m = \overline{1, +\infty}.$$

Заметим, что  $F_m(\eta_m)$  из (2.1.24) можно привести к виду

$$F_m(\eta_m) = (y_4 - y_3)^2 \bar{F}_m(\eta_m), \quad m = \overline{1, +\infty}. \quad (2.1.26)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_m(\eta_m) = & K_{1m}^2(\eta_m)(1 + \exp(2(z_3 + z_4))) + 8m_{33}m_{44}m_{34}m_{43} \exp(z_3 + z_4) - \\ & - (m_{33}m_{44} + m_{34}m_{43})^2 (\exp(2z_3) + \exp(2z_4)) - 4m_{33}^2m_{43}^2[z_3z_4] - \\ & - 4m_{33}m_{43}(m_{33}m_{44} + m_{34}m_{43})(\exp(z_4) - \exp(z_3))[z_3z_4], \quad m_{33} = R_{33}^{(m)}, \quad m_{43} = R_{43}^{(m)}, \\ & m_{34} = y_3 + y_4, \quad m_{44} = y_3y_4 + \frac{B_{12}}{B_{11}}, \quad [z_3z_4] = km_*l(\exp(z_3) - \exp(z_4))/(z_3 - z_4). \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

Учитывая (2.1.26) можно утверждать, что дисперсионное уравнение (2.1.24) эквивалентно дисперсионному уравнению

$$\bar{F}_m(\eta_m) = 0. \quad (2.1.28)$$

Численный анализ показывает, что применение дисперсионного уравнения (2.1.28) более эффективно, когда значения корней уравнения (2.1.19) близки друг к другу.

Заметим, что если  $y_3$  и  $y_4$  корни уравнения (2.1.19) с отрицательными действительными частями, то при  $m_*l \rightarrow \infty$  уравнения (2.1.24) и (2.1.28) преобразуются в уравнение [82]

$$K_{1m}(\eta_m) = y_3^2y_4^2 + 4\frac{B_{66}}{B_{11}}y_3y_4 - \left(\frac{B_{12}}{B_{11}}\right)^2 = 0, \quad (2.1.29)$$

которое является дисперсионным уравнением изгибного колебания для полубесконечной ортотропной пластины-полосы со свободным торцом, когда края  $\beta = 0$ ,  $\beta = s$  жестко защемлены.

## §2.2. Колебания цилиндрической оболочки открытого профиля со свободными торцами и жестко защемленными граничными образующими

### 2.2.1. Постановка задачи и основные уравнения.

Рассматриваются собственные колебания круговой ортотропной тонкой упругой цилиндрической оболочки открытого профиля со свободными торцами и жестко защемленными граничными

образующими. Предполагается, что образующие ортогональны краям оболочки. На срединной поверхности оболочки вводятся криволинейные координаты  $(\alpha, \beta)$ , где  $\alpha (0 \leq \alpha \leq l)$  и  $\beta (0 \leq \beta \leq s)$  являются соответственно длиной образующей и длиной дуги направляющей окружности (Рис. 2.2).

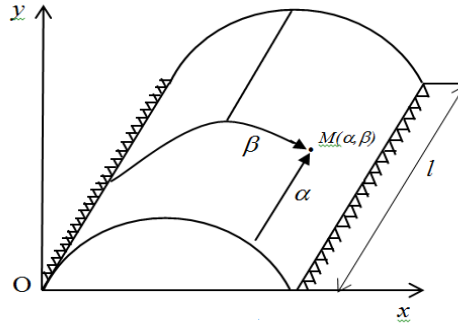


Рис. 2.2

$l$  – длина цилиндрической оболочки, а  $s$  – длина направляющей окружности. В качестве исходных уравнений, описывающих колебания оболочки, используются уравнения, которые соответствуют классической теории ортотропных цилиндрических оболочек записанные в выбранных криволинейных координатах  $\alpha, \beta$  [14]

$$\begin{aligned}
 & -B_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha^2} - B_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \beta^2} - (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha} = \lambda u_1, \\
 & -(B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha \partial \beta} - B_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} - B_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} + \frac{B_{22}}{R} \frac{\partial u_3}{\partial \beta} - \frac{\mu^4}{R^2} \left( 4B_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} + \right. \\
 & \left. + B_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} \right) - \frac{\mu^4}{R} \left( B_{22} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta^3} + (B_{12} + 4B_{66}) \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta \partial \alpha^2} \right) = \lambda u_2, \\
 & \mu^4 \left( B_{11} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^4} + 2(B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + B_{22} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \beta^4} \right) + \frac{\mu^4}{R} \left( B_{22} \frac{\partial^3 u_2}{\partial \beta^3} + \right. \\
 & \left. + (B_{12} + 4B_{66}) \frac{\partial^3 u_2}{\partial \beta \partial \alpha^2} \right) - \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} - \frac{B_{22}}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \frac{B_{22}}{R^2} u_3 = \lambda u_3.
 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

при граничных условиях [14]

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left( \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \right) \right|_{\alpha=0,l} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_1}{\partial \beta} + \frac{4\mu^4}{R} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} \right) \right|_{\alpha=0,l} = 0, \\ \left. \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \right) \right|_{\alpha=0,l} = 0, \quad \left. \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha^3} + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} \left( \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha \partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} \right) \right|_{\alpha=0,l} = 0. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

$$u_1|_{\beta=0,s} = u_2|_{\beta=0,s} = u_3|_{\beta=0,s} = \left. \frac{\partial u_3}{\partial \beta} \right|_{\beta=0,s} = 0, \quad (2.2.3)$$

где соотношения (2.2.2) являются условиями свободного края при  $\alpha = 0, l$ , а соотношения (2.2.3) – условиями жесткого защемления при  $\beta = 0, \beta = s$ ,  $u_1, u_2, u_3$  – проекции вектора перемещений, соответственно в направлениях  $\alpha, \beta$  и нормали к срединной поверхности оболочки,  $R$  – радиус направляющей окружности срединной поверхности,  $\mu^4 = h^2/12$  ( $h$  – толщина оболочки).  $\lambda = \omega^2 \rho$ , где  $\omega$  – угловая частота собственных колебаний,  $\rho$  – плотность материала,  $B_{ij}$  – коэффициенты упругости.

Можно доказать, что задача (2.2.1)-(2.2.3) самосопряженная и имеет неотрицательный дискретный спектр с предельной точкой на  $+\infty$  [59, с. 362].

**2.2.2. Вывод и анализ характеристических уравнений.** В первом, втором и третьем уравнениях системы (2.2.1), спектральный параметр  $\lambda$  формально заменим на  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  соответственно. Пусть  $R^{-1} = kr_0/2$ , где  $k = \pi/s$ , а  $r_0$  безразмерный параметр. Решение системы (2.2.1) ищем в виде

$$(u_1, u_2, u_3) = \{u_m w_m(\theta_m \beta), v_m w'_m(\theta_m \beta), w_m(\theta_m \beta)\} \exp(k \chi \alpha), \quad m = \overline{1, +\infty}. \quad (2.2.4)$$

Здесь  $w_m(\theta_m \beta)$  – определяется по формуле (2.0.2),  $u_m, v_m, \chi$  – неопределенные константы. При этом условия (2.2.3) выполняются автоматически. Действуем аналогичным образом как в [82], [85]. Подставим (2.2.4) в (2.2.1). Полученные первое и третье уравнения умножаем на  $w''_m(\theta_m \beta)$ , а второе на  $w'_m(\theta_m \beta)$ . Затем, все

три уравнения интегрируем в пределах от 0 до  $s$ . Из первых двух полученных уравнений имеем

$$(c_m + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_m d_m) u_m = \frac{r_0 \chi}{2} \left\{ a_m - a^2 m_*^2 \frac{B_{22}(B_{12} + B_{66})}{B_{11} B_{66}} l_m + \frac{r_0^2}{4} a^2 \frac{B_{22} B_{12}}{B_{11} B_{66}} d_m \right\}, \quad (2.2.5)$$

$$(c_m + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_m d_m) v_{cm} = \frac{r_0 m \mu_m}{2} \{ b_m - a^2 g_m l_m \}, \quad (2.2.6)$$

а из третьего уравнения, учитывая соотношения (2.2.5) и (2.2.6), получим характеристическое уравнение [82], [85]

$$R_{mm} c_m + \frac{r_0^2}{4} \left\{ c_m + m_*^2 b_m - \frac{B_{12}}{B_{22}} \chi^2 a_m + a^2 \left[ R_{mm} g_m d_m - m_*^2 b_m \left( \frac{2(B_{12} + 4B_{66})}{B_{22}} \chi^2 - \frac{m_*^2(1 + \beta_m^2)}{\beta_m^2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{r_0^2}{4} a^2 d_m (b_m + \frac{B_{12}}{B_{11}} \chi^2) + a^4 m_*^2 g_m l_m \left( \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \chi^2 - \frac{m_*^2}{\beta_m^2} \right) \right\} = 0; \quad (2.2.7)$$

$$a_m = \frac{B_{12}}{B_{11}} \chi^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} m_*^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_2^2, \quad b_m = B_1 \chi^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} m_*^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_1^2, \quad B_1 = \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}},$$

$$c_m = \chi^4 - B_2 m_*^2 \chi^2 + \left( \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_1^2 + \eta_2^2 \right) m_*^2 \chi^2 + (m_*^2 - \eta_1^2) \left( \frac{B_{22}}{B_{11}} m_*^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_2^2 \right), \quad d_m = \frac{4B_{66}}{B_{22}} \chi^2 - m_*^2,$$

$$B_2 = \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}}, \quad l_m = \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \chi^2 - m_*^2, \quad g_m = \frac{B_{22}}{B_{66}} \chi^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} m_*^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_1^2, \quad a^2 = \mu^4 k^2, \quad (2.2.8)$$

$$R_{mm} = a^2 \left( \frac{B_{11}}{B_{22}} \chi^4 - \frac{2(B_{12} + 2B_{66}) m_*^2}{B_{22}} \chi^2 + \frac{m_*^4}{\beta_m^2} \right) - \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta_3^2, \quad m_*^2 = m^2 \mu_m^2 \beta_m, \quad \eta_i^2 = \frac{\lambda_i}{B_{66} k^2}, \quad i = \overline{1,3}.$$

Пусть  $\chi_j, j = \overline{1,4}$  – попарно различные нули уравнения (2.2.7) с неположительными действительными частями,  $\chi_{j+4} = -\chi_j, j = \overline{1,4}$ . Пусть  $(u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{(j)}), j = \overline{1,8}$  нетривиальные решения вида (2.2.4) системы (2.2.1) при  $\chi = \chi_j, j = \overline{1,8}$  соответственно.

Решение задачи (2.2.1)-(2.2.3) ищем в виде

$$u_i = \sum_{j=1}^8 w_j u_i^{(j)}, \quad i = \overline{1,3}. \quad (2.2.9)$$

Подставим (2.2.9) в граничные условия (2.2.2). В полученных уравнениях, которые содержат  $w_m(\theta_m \beta)$  умножаем на  $w_m''(\theta_m \beta)$ , а остальные уравнения на  $w_m'(\theta_m \beta)$ . Интегрируя в пределах от 0 до  $s$ , получим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^8 \frac{M_{ij}^{(m)} w_j}{c_m^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_m^{(j)} d_m^{(j)}} = 0, \quad i = \overline{1,8}. \quad (2.2.10)$$

$$\begin{aligned} M_{1j}^{(m)} &= \chi_j^2 a_m^{(j)} - \frac{B_{12}}{B_{11}} m_*^2 b_m^{(j)} - \frac{B_{12}}{B_{11}} c_m^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11}^2} d_m^{(j)} (m_*^2 - \eta_1^2) - \\ &- a^2 m_*^2 \frac{B_{22}}{B_{11}} l_m^{(j)} \left( \chi_j^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} m_*^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_1^2 \right), \\ M_{2j}^{(m)} &= \chi_j \left\{ a_m^{(j)} + b_m^{(j)} + a^2 \left[ 4c_m^{(j)} - l_m^{(j)} \left( \frac{B_{22}}{B_{66}} \chi_j^2 + \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} m_*^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_1^2 \right) \right] + \right. \\ &\left. + a^2 \frac{r_0^2}{4} \left( 4b_m^{(j)} + \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} d_m^{(j)} - 4a^2 \frac{B_{12}}{B_{22}} \chi_j^2 g_m^{(j)} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

$$M_{3j}^{(m)} = \left( \chi_j^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}} m_*^2 \right) c_m^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} \left[ a^2 \chi_j^2 g_m^{(j)} \left( \frac{4B_{66}}{B_{22}} \chi_j^2 - \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11} B_{22}} m_*^2 \right) - \frac{B_{12}}{B_{11}} m_*^2 b_m^{(j)} \right],$$

$$\begin{aligned} M_{4j}^{(m)} &= \chi_j \left\{ \left( \chi_j^2 - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} m_*^2 \right) c_m^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} \left[ a^2 \chi_j^2 g_m^{(j)} \left( \frac{4B_{66}}{B_{22}} \chi_j^2 - \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - 4B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{22}} m_*^2 \right) - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} m_*^2 b_m^{(j)} \right] \right\}, \quad M_{5j}^{(m)} = M_{1j}^{(m)} \exp(z_j), \quad M_{6j}^{(m)} = M_{2j}^{(m)} \exp(z_j), \end{aligned}$$

$$M_{7j}^{(m)} = M_{3j}^{(m)} \exp(z_j), \quad M_{8j}^{(m)} = M_{4j}^{(m)} \exp(z_j), \quad z_j = k \chi_j l, \quad j = \overline{1,8}.$$

Верхний индекс  $j$  в скобках означает, что соответствующая функция взята при  $\chi = \chi_j$ . Чтобы система (2.2.10) имела нетривиальное решение необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{Det} \left\| M_{ij}^{(m)} \right\|_{i,j=1}^8 = 0. \quad (2.2.12)$$

На примере цилиндрической оболочки из стеклопластика численный анализ показал, что левая часть этого равенства становится малой, когда любые два корня уравнения (2.2.7) становятся близкими друг к другу, что может привести к появлению

ложных решений. Оказывается, что множитель в левой части равенства (2.2.12), стремящийся к нулю при сближении корней, можно выделить. Для этого введем обозначения, как в [82]:

$$x_j = \chi_j / m_*, j = \overline{1,8}; \eta_{im} = \eta_i / m_*, i = \overline{1,3}; \varepsilon_m = r_0 / (2m_*),$$

$$[z_i z_j] = km_* l (\exp(z_i) - \exp(z_j)) / (z_i - z_j), [z_i z_j z_k] = km_* l ([z_i z_j] - [z_i z_k]) / (z_j - z_k), \quad (2.2.13)$$

$$[z_1 z_2 z_3 z_4] = km_* l ([z_1 z_2 z_3] - [z_1 z_2 z_4]) / (z_3 - z_4),$$

$$\sigma_1 = \sigma_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$

$$\sigma_2 = \sigma_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4,$$

$$\sigma_3 = \sigma_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4,$$

При этом  $\bar{\sigma}_4 = \bar{\bar{\sigma}}_4 = \bar{\bar{\bar{\sigma}}}_3 = 0$ . Пусть  $f_n, n = \overline{1,6}$  симметрический многочлен  $n$ -й степени от переменных  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Известно, что он выражается через элементарные симметрические многочлены единственным образом. Обозначая

$$f_n = f_n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4), \bar{f}_n = f_n(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3, 0), \bar{\bar{f}}_n = f_n(\bar{\bar{\sigma}}_1, \bar{\bar{\sigma}}_2, 0, 0), n = \overline{1,6}, \quad (2.2.14)$$

$$f_1 = \sigma_1, f_2 = \sigma_1^2 - \sigma_2, f_3 = \sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3, f_4 = \sigma_1^4 - 3\sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_3 - \sigma_4, \quad (2.2.15)$$

$$\bar{f}_5 = \bar{\sigma}_1^5 - 4\bar{\sigma}_1^3\bar{\sigma}_2 + 3\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2^2 + 3\bar{\sigma}_1^2\bar{\sigma}_3 - 2\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3, \bar{\bar{f}}_6 = \bar{\bar{\sigma}}_1^6 - 5\bar{\bar{\sigma}}_1^4\bar{\bar{\sigma}}_2 + 6\bar{\bar{\sigma}}_1^2\bar{\bar{\sigma}}_2^2 - \bar{\bar{\sigma}}_2^3$$

и выполняя элементарные действия над столбцами определителя (2.2.12), получаем

$$Det \| M_{ij}^{(m)} \|_{i,j=1}^8 = m_*^{34} K^2 \exp(-z_1 - z_2 - z_3 - z_4) Det \| m_{ij} \|_{i,j=1}^8, \quad (2.2.16)$$

$$K = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4), \quad (2.2.17)$$

$$m_{11} = Hx_1^4 + d_1x_1^2 + d_2, m_{12} = H\bar{f}_3 + d_1\bar{f}_1, m_{13} = H\bar{f}_2 + d_1, m_{14} = Hf_1;$$

$$m_{21} = Tx_1^5 + d_3x_1^3 + d_4x_1, m_{22} = T\bar{f}_4 + d_3\bar{f}_2 + d_4, m_{23} = T\bar{f}_3 + d_3\bar{f}_1, m_{24} = Tf_2 + d_3;$$

$$m_{31} = \delta_m x_1^6 + d_5x_1^4 + d_6x_1^2 + d_7, m_{32} = \delta_m \bar{f}_5 + d_5\bar{f}_3 + d_6\bar{f}_1,$$

$$m_{33} = \delta_m \bar{f}_4 + d_5\bar{f}_2 + d_6, m_{34} = \delta_m f_3 + d_5f_1;$$

$$m_{41} = \delta_m x_1^7 + d_8x_1^5 + d_9x_1^3 + d_{10}x_1, m_{42} = \delta_m \bar{f}_6 + d_8\bar{f}_4 + d_9\bar{f}_2 + d_{10},$$

$$m_{43} = \delta_m \bar{f}_5 + d_8\bar{f}_3 + d_9\bar{f}_1, m_{44} = \delta_m f_4 + d_8f_2 + d_9;$$

$$\begin{aligned}
m_{i5} &= (-1)^{i+1} m_{i1} \exp(z_1), \quad m_{i6} = (-1)^{i+1} (m_{i2} \exp(z_2) + m_{i1} [z_1 z_2]), \\
m_{i7} &= (-1)^{i+1} (m_{i3} \exp(z_3) + m_{i2} [z_2 z_3] + m_{i1} [z_1 z_2 z_3]), \\
m_{i8} &= (-1)^{i+1} (m_{i4} \exp(z_4) + m_{i3} [z_3 z_4] + m_{i2} [z_2 z_3 z_4] + m_{i1} [z_1 z_2 z_3 z_4]), \quad i = \overline{1,4}; \\
m_{5j} &= m_{1j+4}, \quad m_{6j} = -m_{24+j}, \quad m_{7j} = m_{3j+4}, \quad m_{8j} = -m_{24+j}, \quad j = 1, 2, 3, 4; \\
m_{5j} &= m_{1j-4}, \quad m_{6j} = -m_{2j-4}, \quad m_{7j} = m_{3j-4}, \quad m_{8j} = -m_{4j-4}, \quad j = 5, 6, 7, 8; \\
H &= -a^2 m_*^2 \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}}, \quad T = -\frac{B_{12}}{B_{66}} a^2 m_*^2 \delta_m, \quad \delta_m = 1 + 4a^2 m_*^2 \varepsilon_m^2, \quad F = -a^2 m_*^2 \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{66}}; \\
d_1 &= \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2} - \frac{B_{12} B_{66}}{B_{11}^2} \eta_{1m}^2 + 4a^2 m_*^2 \varepsilon_m^2 \frac{B_{12} B_{66}}{B_{11}^2} (1 - \eta_{1m}^2) + \\
&+ \frac{a^2 m_*^2}{B_{11}^2} (B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - 4B_{12} B_{66} + B_{12} (B_{12} + 4B_{66}) \eta_{1m}^2), \\
d_2 &= \frac{B_{12}}{B_{11}^2} (1 - \eta_{1m}^2) (B_{66} \eta_{2m}^2 + a^2 m_*^2 B_{22} (1 - \varepsilon_m^2)), \\
d_3 &= \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11} B_{66}} \delta_m + a^2 m_*^2 \left( \frac{B_{12}}{B_{11}} - 3B_1 + 4\eta_{2m}^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 \right) + 4a^4 m_*^4 \varepsilon_m^2 \frac{B_{12}}{B_{11}} (1 - \eta_{1m}^2), \\
d_4 &= \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 + a^2 m_*^2 \left( \frac{B_{22} (B_{12} + 4B_{66})}{B_{11} B_{66}} - 3 \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 - 4 \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 (1 - \eta_{1m}^2) \right) - \\
&- a^2 m_*^2 \varepsilon_m^2 \frac{B_{22}}{B_{11}} \left( \frac{(B_{12} + 4B_{66})}{B_{66}} - 4\eta_{1m}^2 \right), \\
d_5 &= \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 + \eta_{2m}^2 - B_1 - a^2 m_*^2 \varepsilon_m^2 \left( B_1 + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} - \frac{4B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 \right), \\
d_6 &= \varepsilon_m^2 \left( a^2 m_*^2 \frac{B_{22} (B_{11} B_{22} - B_{12}^2)}{B_{11}^2 B_{22}} (1 - \eta_{1m}^2) - \frac{B_{12}}{B_{11}} B_1 \right) - \left( \frac{B_{11} B_{22} + B_{12} B_{66}}{B_{11}^2} \eta_{1m}^2 + \frac{B_{12} + B_{66}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 \right) + \\
&+ \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 \eta_{2m}^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} + \frac{B_{12}}{B_{11}} B_2, \quad d_7 = \frac{B_{12}}{B_{11}} (1 - \eta_{1m}^2) \left( \frac{B_{22}}{B_{11}} \varepsilon_m^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 \right), \\
d_8 &= \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 + \eta_{2m}^2 - B_1 - \frac{4B_{66}}{B_{11}} - a^2 m_*^2 \varepsilon_m^2 \left( B_2 + \frac{4B_{66} - 2B_{12}}{B_{11}} - \frac{4B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 \right),
\end{aligned} \tag{2.2.18}$$



$$d_9 = \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 \eta_{2m}^2 - \frac{B_{11} B_{22} + B_{12} B_{66} + 4B_{66}^2}{B_{11}^2} \eta_{1m}^2 - \frac{B_{12} + 5B_{66}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 + \frac{(B_{12} + 4B_{66})}{B_{11}} B_2 +$$

$$+ \frac{B_{22}}{B_{11}} + \varepsilon_m^2 \left( a^2 m_*^2 \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - 4B_{12} B_{66}}{B_{11}^2} (1 - \eta_{1m}^2) - \frac{(B_{12} + 4B_{66})}{B_{11}} B_1 \right),$$

$$d_{10} = \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} (1 - \eta_{1m}^2) \left( \frac{B_{22}}{B_{11}} \varepsilon_m^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 \right).$$

Уравнение (2.2.12) эквивалентно уравнению

$$\text{Det} \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^8 = 0. \quad (2.2.19)$$

где  $m_{ij}$  даны формулами из (2.2.18).

Учитывая возможные соотношения между  $\lambda_1, \lambda_2$  и  $\lambda_3$ , заключаем, что уравнение (2.2.19) определяет частоты соответствующих типов колебаний.

При  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$  уравнение (2.2.7) является характеристическим уравнением системы (2.2.1), а уравнение (2.2.19) - дисперсионным уравнением задачи (2.2.1)-(2.2.3).

### 2.2.3. Асимптотика дисперсионного уравнения (2.2.19) при $R^{-1} \rightarrow 0$ .

Рассмотрим случай, когда кривизна цилиндрической оболочки стремится к нулю.

Предположим, что  $\eta_{1m} = \eta_{2m} = \eta_{3m} = \eta_m = \eta / m_*$ . Тогда при  $r_0 \rightarrow 0$  уравнение (2.2.7) преобразуется в совокупность уравнений

$$c_m = \chi^4 - B_2 \chi^2 m_*^2 + \frac{B_{11} + B_{66}}{B_{11}} \eta^2 \chi^2 + (m_*^2 - \eta^2) \left( \frac{B_{22}}{B_{11}} m_*^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta^2 \right) = 0, \quad (2.2.20)$$

$$R_{mm} = a^2 \left( \frac{B_{11}}{B_{22}} \chi^4 - \frac{2(B_{12} + 2B_{66})m_*^2}{B_{22}} \chi^2 + \frac{m_*^4}{\beta_m^2} \right) - \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta^2 = 0. \quad (2.2.21)$$

Предельный переход  $r_0 \rightarrow 0$  здесь понимается в том смысле, что фиксируя радиус  $R$  и  $b$  - расстояние между граничными образующими цилиндрической оболочки, совершается переход к цилиндрической оболочке радиуса  $R'$  кратному  $R:R' = nR$ , и к пределу  $r'_0 = r_0 / n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Уравнения (2.2.20), (2.2.21) являются характеристическими уравнениями для уравнений планарных и изгибных колебаний пластины соответственно, когда две

противолежачие стороны жестко заземлены. Корни  $\chi/m_*$  уравнений (2.2.20) и (2.2.21) с неположительными действительными частями, обозначаются через  $y_1, y_2$  и  $y_3, y_4$  соответственно. Аналогичным образом как в [62] доказывається, что при

$$\varepsilon_m \ll 1; \quad y_i \neq y_j, \quad i \neq j, \quad (2.2.22)$$

корни  $(\chi/m_*)^2$  уравнения (2.2.7) можно представить в виде

$$x_i^2 = y_i^2 + \alpha_i^{(m)} \varepsilon_m^2 + \beta_i^{(m)} \varepsilon_m^4 + \dots, \quad i = \overline{1,4}. \quad (2.2.23)$$

При условии (2.2.22), учитывая соотношения (2.2.11), (2.2.16), (2.2.23) и тот факт, что

$$M_{3i}/m_*^6 = M_{4i}/m_*^7 = M_{7i}/m_*^4 = M_{8i}/m_*^5 = O(\varepsilon_m^2), \quad i = 1, 2 \quad (2.2.24)$$

уравнение (2.2.19) можно привести к виду

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 = N^2(\eta_m) K_{3m}^2(\eta_m) \bar{E}_m(\eta_m) \bar{F}_m(\eta_m) + O(\varepsilon_m^2) = 0, \quad (2.2.25)$$

где  $\bar{E}_m(\eta_m)$  и  $\bar{F}_m(\eta_m)$  определяются формулами (2.1.12) и (2.1.27) соответственно,

$$N(\eta_m) = (y_1 + y_2)(y_1 + y_3)(y_1 + y_4)(y_2 + y_3)(y_2 + y_4)(y_3 + y_4),$$

$$K_{3m}(\eta_m) = N_1(\eta) + a^2 m_*^2 N_2(\eta) + a^4 m_*^4 N_3(\eta),$$

$$N_1(\eta_m) = \frac{B_{22}(B_{11}B_{22} - B_{12}^2)}{B_{11}^3} + \frac{B_{12}(B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{66}B_{22} - B_{66}B_{12})}{B_{11}^3} \eta_m^2, \quad (2.2.26)$$

$$N_2(\eta_m) = -\frac{2B_{22}(B_{11}B_{22} - B_{12}^2)}{B_{11}^3} - \frac{1}{B_{66}B_{11}^3} (B_{11}B_{22}B_{12}^2 - B_{12}^4 + 2B_{11}B_{22}B_{12}B_{66} - 6B_{12}^3B_{66} - 10B_{12}^2B_{66}^2 - 2B_{22}B_{66}B_{12}^2 - 8B_{12}B_{22}B_{66}^2 - 8B_{12}B_{66}^3 - 4B_{11}B_{22}B_{66}^2 - 4B_{22}B_{66}^3) \eta_m^2 + \frac{(B_{12} + 4B_{66})(B_{11} - B_{66})B_{12}}{B_{11}^3} \eta_m^4,$$

$$N_3(\eta_m) = \frac{B_{22}(B_{12} + B_{66})}{B_{11}^2B_{66}} \left\{ \frac{(B_{12} + 4B_{66})^2}{B_{11}B_{22}} - \frac{(B_{12} + 4B_{66})}{B_{22}} B_2 + 1 - \frac{(B_{12} + 4B_{66})(B_{12}B_{22} + B_{12}B_{66} + 3B_{22}B_{66} + 4B_{66}^2 - B_{11}B_{22})}{B_{11}B_{22}^2} \eta_m^2 + \frac{(B_{12} + 4B_{66})^2 B_{66}}{B_{11}B_{22}^2} \eta_m^4 \right\}$$

Из (2.2.25) следует, что при  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  уравнения (2.2.12) и (2.2.19) распадаются на уравнения

$$\bar{E}_m(\eta_m) = 0, \quad \bar{F}_m(\eta_m) = 0, \quad K_{3m}(\eta_m) = 0. \quad (2.2.27)$$

Из них первые два – дисперсионные уравнения планарных и изгибных колебаний в аналогичной задаче для ортотропной прямоугольной пластины (с двумя свободными и двумя жестко защемленными параллельными сторонами см. (2.1.13) и (2.1.28)). Корням третьего уравнения соответствуют планарные колебания цилиндрической оболочки. Третье уравнение появляется в результате использования уравнения соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек. Пусть  $y_1, y_2$  и  $y_3, y_4$  являются  $\chi/m_*$ -корнями уравнений (2.2.20) и (2.2.21) с отрицательными действительными частями соответственно, тогда при  $m_*l \rightarrow \infty$  уравнения (2.2.19) и (2.2.25) преобразуются в уравнение

$$\text{Det} \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^8 = N^2(\eta_m) K_{1m}^2(\eta_m) K_{2m}^2(\eta_m) K_{3m}^2(\eta_m) + O(\varepsilon_m^2) + \sum_{j=1}^4 O(\exp(z_j)) = 0. \quad (2.2.28)$$

Из (2.2.28) следует, что при  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  и  $m_*l \rightarrow \infty$  дисперсионное уравнение (2.2.19) распадается на уравнения

$$\begin{aligned} K_{1m}(\eta_m) &= y_3^2 y_4^2 + 4 \frac{B_{66}}{B_{11}} y_3 y_4 - \left( \frac{B_{12}}{B_{11}} \right)^2 = 0, \\ K_{2m}(\eta_m) &= (1 - \eta_m^2) \left( \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11} B_{66}} - \eta_m^2 \right) - \eta_m^2 y_1 y_2 = 0, \\ K_{3m}(\eta_m) &= N_1(\eta_m) + a^2 m_*^2 N_2(\eta_m) + a^4 m_*^4 N_3(\eta_m) = 0. \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

Заметим, что уравнения (2.2.29) совпадают с уравнениями для полубесконечной оболочки, с свободным торцом [82], [85]. Первые два уравнения из (2.2.29) являются дисперсионными уравнениями изгибных и планарных колебаний полубесконечной ортотропной пластины-полосы со свободным торцом при наличии жесткого защемления на боковых краях соответственно (см. (2.1.14) и (2.1.29)). Следовательно,

при малых  $\varepsilon_m$  и больших  $m_*l$  приближенные значения корней уравнения (2.2.19) являются корнями уравнения (2.2.29).

#### 2.2.4. Асимптотика дисперсионного уравнения (2.2.19) при $m_*l \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим случай оболочки, для которой  $m_*l \rightarrow \infty$ . Предположим что  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$  и  $\chi_4$  (корни уравнения (2.2.7)) имеют отрицательные действительные части. Тогда уравнение (2.2.19) можно привести к виду

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 = \left( \text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^4 \right)^2 + \sum_{j=1}^4 O(\exp(k\chi_j l)) = 0. \quad (2.2.30)$$

Откуда следует, что при  $m_*l \rightarrow \infty$  уравнение (2.2.19) преобразуется в уравнение

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^4 = 0, \quad (2.2.31)$$

которое, при  $m \in N$ , определяет всевозможные локализованные собственные колебания у свободного торца полубесконечной ортотропной круговой цилиндрической оболочки открытого профиля при наличии жесткого защемления на граничных образующих. Если  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  имеем [82], [85]

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^4 = N(\eta_m) K_{1m}(\eta_m) K_{2m}(\eta_m) K_{3m}(\eta_m) + O(\varepsilon_m^2), \quad (2.2.32)$$

**2.2.5. Численные исследования.** В табл. 2.2.1 приведены значения некоторых корней ( $\eta_m$ ) уравнений (2.2.27) и коэффициентов затухания ( $k_1\chi_0/m_*$ ) для прямоугольной пластины из стеклопластика с параметрами (1.2.33) при  $h = 1/50$ ;  $k = \pi/4$ ;  $l = 15, 5$ . В качестве характеристики коэффициентов затухания, для планарных и изгибных колебаний, приведены следующие величины.

$$k_1\chi_0/m_* = \max \{k_1 \text{Re } y_1, k_1 \text{Re } y_2\}; \quad k_1\chi_0/m_* = \max \{k_1 \text{Re } y_3, k_1 \text{Re } y_4\}, \quad k_1 = k m_* \quad (2.2.33)$$

Численный анализ показывает, что у противоположных свободных сторон прямоугольной пластины, когда боковые стороны жестко защемлены, могут появляться локализованные колебания планарного и изгибного типа. В зависимости от геометрических и механических свойств материала пластины колебательные движения у свободных краев могут разделяться, а при  $m_*l \rightarrow \infty$  частоты планарного

и изгибного локализованного колебания у свободных сторон прямоугольной пластины стремятся к частотам планарных и изгибных локализованных колебаний у свободного края полубесконечной пластины – полосы соответственно, когда боковые края жестко заземлены. В табл. 2.2.2 приведены некоторые безразмерные характеристики собственных значений  $\eta/m_*$  и характеристики коэффициентов затухания соответствующих форм  $k_1\chi_0/m_*$ , для ортотропных цилиндрических оболочек открытого профиля из стеклопластика с механическими параметрами (1.2.33) и геометрическими параметрами:  $R = 40$ ,  $r_0 = 0.0637$ ,  $k = 0.7851$ ,  $h = 1/50$ ,  $b = 4$  ( $b$  – расстояние между граничными образующими),  $l = 15$ . Результаты представленные в табл. 2.2.3, соответствуют цилиндрической оболочки открытого профиля из стеклопластика с механическими параметрами (1.2.33) и теми же геометрическими параметрами, что в табл. 2.2.2, но при  $l = 5$ . В качестве характеристики коэффициентов затухания, приведены значения следующих величин

$$k_1\chi_0/m_* = \max\{k_1 \operatorname{Re} x_1, k_1 \operatorname{Re} x_2, k_1 \operatorname{Re} x_3, k_1 \operatorname{Re} x_4\}, \quad \kappa_1 = k m_*. \quad (2.2.34)$$

В табл. 2.2.2 и 2.2.3 после характеристик собственных частот указан тип колебаний:  $b$  – преимущественно изгибный,  $e$  – преимущественно планарный,  $n$  – новый тип колебаний.

В табл. 2.2.2 и 2.2.3 случай  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$  соответствует задаче (2.2.1)-(2.2.3). Случай  $\eta_1 = \eta_2 = 0, \eta_3 = \eta$  соответствует задаче (2.2.1)-(2.2.3), в которой отсутствуют тангенциальные компоненты силы инерции, т.е. имеем преимущественно изгибный тип колебаний. Аналогично, случай  $\eta_1 = \eta_2 = \eta, \eta_3 = 0$  соответствует преимущественно планарному типу, а случай  $\eta_1 = 0, \eta_2 = \eta_3 = \eta$  преимущественно изгибно крутильному типу. Вычисления показывают, что первые частоты собственных колебаний, локализованных у свободных краев цилиндрических оболочек, где присутствует нормальная компонента силы инерции, являются частотами колебаний преимущественно изгибного типа. Наряду с первыми частотами колебаний

квазипоперечного типа существуют частоты незатухающих колебаний квазитангенциального типа. С увеличением  $m$  эти колебания становятся колебаниями рэлеевского типа.

При  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  собственные колебания для задачи (2.2.1)-(2.2.3) расчлняются на квазипоперечные и квазитангенциальные колебания и частоты этой задачи стремятся к частотам аналогичной задачи для прямоугольной пластины. С увеличением  $m$  колебания квазипоперечного типа становятся незатухающими, а безразмерные характеристики  $\eta_m$  собственной частоты квазитангенциальных колебаний стремятся к корню уравнения Рэлея (2.1.14) (для стеклопластика:  $\eta_m \approx 0.98213$ ).

При  $m_* l \rightarrow \infty$  собственные частоты задачи (2.2.1)-(2.2.3) стремятся к собственным частотам колебаний локализованных у свободного края полубесконечной цилиндрической оболочки открытого профиля при наличии жесткого защемления на граничных образующих. В зависимости от параметра  $a^2 m_*^2$  появляются не более двух новых типов колебаний, характерных только для цилиндрических оболочек, обусловленных продольными и крутильными компонентами силы инерции. При преимущественно тангенциальном типе колебаний цилиндрических оболочек ( $\eta_1 = \eta_2 = \eta, \eta_3 = 0$ ), кроме планарного колебания "рэлеевского" типа могут появиться не более чем два новых колебания, также обусловленные продольными и крутильными компонентами силы инерции. Заметим также, что при отсутствии нормальной компоненты силы инерции, тангенциальные локализованные колебания появляются при более малых значениях  $\theta_m$ .

При увеличении  $m$  собственные частоты и соответствующие коэффициенты затухания задачи (2.2.1)-(2.2.3) стремятся к собственным частотам и коэффициентам затухания цилиндрической оболочки открытого профиля со свободными торцами, когда граничные образующие шарнирно закреплены (ср. табл. 2,3 из [69]). В таблицах параметры незатухающих колебаний не приводятся, а там где не обнаружены частоты затухающих колебаний, ячейки пусты.

Численные результаты показывают, что асимптотические формулы (2.2.25) и (2.2.28) дисперсионного уравнения (2.2.19) являются хорошим ориентиром для нахождения собственных частот задачи (2.2.1)-(2.2.3).

Заметим, что так, как в рассматриваемой задаче оба торца цилиндрических оболочек свободны, то дисперсионное уравнение (2.2.19), начиная с некоторого  $m_0$  при каждом типе колебаний, имеет пары собственных частот, которые с увеличением  $m$  сливаются. Это означает, что колебательные процессы у свободных торцов становятся одинаковыми.

Отметим, что для получения дисперсионных и характеристических уравнений аналогичных задач для цилиндрических оболочек изготовленных из изотропного материала достаточно использовать соотношения (1.2.34) и (1.2.35).

Таблица 2.2.1

$m$	$\theta_m$	$K_{3m}(\eta_m) = 0$	$\bar{E}_m(\eta_m) = 0, l = 15$	$\bar{E}_m(\eta_m) = 0, l = 5$	$\bar{F}_m(\eta_m) = 0, l = 15$	$\bar{F}_m(\eta_m) = 0, l = 5$
			$k_1 \chi_0 / m_* \eta_m$	$k_1 \chi_0 / m_* \eta_m$	$k_1 \chi_0 / m_* \eta_m$	$k_1 \chi_0 / m_* \eta_m$
1	1.1825		-0.09046 0.94845	-0.14784 0.85406	-0.04770 0.01416	-0.07361 0.01440
2	1.9633		-0.15298 0.97318	-0.23483 0.93531	-0.07596 0.01705	-0.12346 0.01702
3	2.7489		-0.16479 0.97490	-0.24944 0.94128	-0.08069 0.30100	-0.13107 0.03007
			-0.05123 0.99761			
5	4.3197		-0.23827 0.98000	-0.33059 0.96105	-0.10705 0.04597	-0.17112 0.04593
			-0.20589 0.98516			
9	7.4613		-0.39996 0.98195	-0.47769 0.97414	-0.15443 0.07765	-0.23539 0.07761
			-0.39599 0.98232			
10	8.2467		-0.46971 0.98207	-0.53694 0.97649	-0.17339 0.08052	-0.25860 0.08048
			-0.46803 0.98220	-0.29511 0.99297	-0.08475 0.08055	
11	9.0321		-0.48522 0.98208	-0.55006 0.97690	-0.17758 0.09349	-0.26356 0.09345
			-0.48388 0.98218	-0.32749 0.99187	-0.09631 0.09351	
15	12.174		-0.65763 0.98213	-0.69845 0.97981	-0.22483 0.12515	-0.31121 0.11215
			-0.65750 0.98213	-0.59377 0.98546	-0.18635 0.12517	
20	16.101		-0.90148 0.98213	-0.91936 0.98141	-0.27977 0.15969	0.38428 0.15965
			-0.90148 0.98213	-0.87993 0.98298	-0.27977 0.15969	
29	23.169		-0.91718 0.98213	-1.26755 0.98201	-0.40537 0.02360	-0.48179 0.23596
			-0.91718 0.98213	-1.25846 0.98227	-0.40191 0.23600	-0.09383 0.23603
30	23.955		-1.33457 0.98213	-1.33752 0.98204	-0.42731 0.23883	-0.50074 0.23881
			-1.33457 0.98213	-1.33051 0.98223	-0.42595 0.23883	-0.18985 0.23889
60	47.517		-2.63331 0.98213	-2.63266 0.98213	-0.89730 0.47623	-0.86381 0.47624
			-2.63331 0.98213	-2.63266 0.98213	-0.89730 0.47623	-0.81382 0.47626
100	78.932		-4.36512 0.98213	-4.36512 0.98213	-1.39460 0.74280	-1.39460 0.79280
110	86.786		-4.79807 0.98213	-4.79688 0.98213	-1.53344 0.87194	-1.53471 0.87194
118	93.070	0.22096	-5.14316 0.98213	-5.14330 0.98213	-1.64535 0.93525	-1.64474 0.93525
119	93.855	0.24845	-5.15903 0.98213	-5.15889 0.98213	-1.64893 0.94821	-1.64985 0.94821
120	94.640	0.34413	-5.22987 0.98213	-5.22973 0.98213	-1.67178 0.95108	-1.67148 0.95108
125	98.567	0.50885	-5.41980 0.98213	-5.41860 0.98213	-1.73218 0.99569	-1.73248 0.99569
130	102.49	0.64818	-5.66383 0.98213	-5.66258 0.98213	-1.80999 1.03022	-1.80968 1.03022



Таблица 2.2.2

$m$	$\theta_m$	$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$	$\eta_1 = \eta_2 = 0, \eta_3 = \eta$	$\eta_1 = \eta_2 = \eta, \eta_3 = 0$	$\eta_2 = \eta_3 = \eta, \eta_1 = 0$
		$k_1 \chi_0 / m_* \quad \eta_m$	$k_1 \chi_0 / m_* \quad \eta_m$	$k_1 \chi_0 / m_* \quad \eta_m$	$k_1 \chi_0 / m_* \quad \eta_m$
1	1.1820	-0.04005 0.01440 b	-0.04003 0.01441 b		-0.0400 0.01441 b
2	1.9627	-0.08072 0.01704 b	-0.08068 0.01705 b	-0.20599 0.96480 e	-0.08067 0.01705 b
3	2.7478	-0.08562 0.03008 b	-0.08563 0.03008 b	-0.18292 0.97006 e	-0.08561 0.03008 b
5	4.3179	-0.11187 0.04594 b	-0.11190 0.04594 b	-0.24273 0.97933 e	-0.11186 0.04594 b
9	7.4582	-0.15806 0.07762 b	-0.15813 0.07762 b	-0.40082 0.98188 e	-0.15805 0.07762 b
				-0.39699 0.98223 e	
10	8.2432	-0.17653 0.08049 b	-0.17662 0.08049 b	-0.47026 0.98202 e	-0.17653 0.08049 b
				-0.46870 0.98214 e	
11	9.0283	-0.18061 0.09345 b	-0.18070 0.09345 b	-0.48549 0.98205 e	-0.18061 0.09345 b
		-0.05134 0.09348 b	-0.04735 0.09348 b	-0.48415 0.98215 e	
15	12.169	-0.22674 0.12510 b	-0.22669 0.12510 b	-0.65749 0.98212 e	-0.22674 0.12506 b
		-0.18055 0.12512 b	-0.18036 0.12512 b	-0.65731 0.98213 e	
20	16.094	-0.29564 0.15962 b	-0.29585 0.15962 b	-0.90119 0.98213 e	-0.29564 0.15962 b
		-0.27828 0.15963 b	-0.27816 0.15963 b	-0.90119 0.98213 e	-0.27828 0.15963 b
29	23.159	-0.40427 0.23586 b	-0.40567 0.23586 b	-1.26287 0.98213 e	-0.40427 0.23586 b
		-0.40112 0.23596 b	-0.39841 0.23605 b	-1.26287 0.98213 e	-0.40112 0.23587 b
30	23945	-0.42763 0.23873 b	-0.42773 0.23873 b	-1.33372 0.98213 e	-0.42673 0.23873 b
		-0.42471 0.23873 b	-0.42472 0.23873 b	-1.33372 0.98213 e	-0.42371 0.23873 b
60	47.497	-0.84078 0.47605 b	-0.84133 0.47605 b	-2.63163 0.98213 e	-0.84108 0.47605 b
100	78.899	-1.39488 0.79247 b	-1.39449 0.79247 b	-4.36233 0.98213 e	-1.39396 0.79247 b
110	86.750	-1.53267 0.87158 b	-1.53413 0.87158 b	-4.79501 0.98213 e	-1.53084 0.87158 b
118	93.031	-26.1475 0.22096 n		-26.1475 0.22096 n	-26.8117 0.22042 t
		-1.64326 0.93486 b	-1.64350 0.93486 b	-5.14113 0.98213 e	-1.64301 0.93486 b
119	93.816	-26.0537 0.24845 n		-26.0537 0.24845 n	-26.8991 0.24784 t
		-1.64864 0.94781 b	-1.64889 0.94781 b	-5.15685 0.98213 e	-1.64833 0.94781 b
120	94.601	-25.6224 0.34413 n		-25.6224 0.34413 n	-27.2933 0.34327 t
		-1.67058 0.95068 b	-1.73083 0.99527 b	-5.22755 0.98213 e	-1.67058 0.95068 b
125	98.526	-24.3993 0.50885 n		-24.3993 0.50885 n	-28.3476 0.50746 t
		-5.41649 0.98213 e		-5.41648 0.98213 e	
		-1.73679 0.99527 b	-1.73083 0.99527 b		-1.73026 0.99527 b
130	102.45	-22.6137 0.64818 n		-22.6137 0.64818 n	-29.7167 0.64623 t
		-5.66037 0.98213 e	-1.81044 1.02978 b	-5.66037 0.98213 e	-1.81018 1.02978 b

Таблица 2.2.3

$m$	$\theta_m$	$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$	$\eta_1 = \eta_2 = 0, \eta_3 = \eta$	$\eta_1 = \eta_2 = \eta, \eta_3 = 0$	$\eta_2 = \eta_3 = \eta, \eta_1 = 0$
		$k_1 \chi_0 / m_* \quad \eta_m$	$k_1 \chi_0 / m_* \quad \eta_m$	$k_1 \chi_0 / m_* \quad \eta_m$	$k_1 \chi_0 / m_* \quad \eta_m$
1	1.1820	-0.06179 0.01439 b	-0.06176 0.01440 b		-0.06176 0.01439 b
2	1.9627	-0.13154 0.01699 b	-0.13156 0.01699 b	-0.30165 0.91681 e	-0.13154 0.01699 b
3	2.7478	-0.13984 0.03004 b	-0.14085 0.03005 b	-0.26798 0.93408 e	-0.14079 0.03004 b
4	3.5328	-0.17865 0.03290 b	-0.17872 0.03290 b	-0.32326 0.95756 e	-0.17865 0.03290 b
5	4.3179	-0.18550 0.04590 b	-0.18565 0.04590 b	-0.33339 0.96054 e	-0.18499 0.04590 b
9	7.4582	-0.25093 0.07757 b	-0.25130 0.07757 b	-0.47736 0.97417 e	-0.25093 0.07757 b
10	8.2432	-0.27390 0.08044 b	-0.27427 0.08044 b	-0.53645 0.97652 e	-0.27389 0.08044 b
				-0.29979 0.99274 e	
15	12.169	-0.32940 0.12506 b	-0.33021 0.12506 b	-0.69793 0.97983 e	-0.32937 0.12506 b
				-0.59271 0.98540 e	
20	16.094	-0.39558 0.15958 b	-0.39669 0.15958 b	-0.91916 0.98140 e	-0.39553 0.15958 b
				-0.87964 0.98298 e	
30	23.945	-0.50768 0.23870 b	-0.50952 0.23870 b	-1.33697 0.98204 e	-0.50760 0.23870 b
				-1.33032 0.98222 e	
60	47.497	-0.86065 0.47605 b	-0.86104 0.47605 b	-2.63163 0.98213 e	-0.84108 0.47605 b
		-0.81164 0.47606 b	-0.81329 0.47606 b	-2.63163 0.98213 e	-0.81164 0.47606 b
100	78.899	-1.39396 0.79247 b	-1.39663 0.79247 b	-4.36233 0.98213 e	-1.39396 0.79247 b
		-1.39090 0.79247 b	-1.39173 0.79247 b	-4.36233 0.98213 e	-1.39090 0.79247 b
110	86.750	-1.53390 0.87158 b	-1.53413 0.87158 b	-4.79501 0.98213 e	-1.53359 0.87158 b
			-1.53107 0.87158 b	-4.79501 0.98213 e	-1.53359 0.87158 b
118	93.031	-26.1475 0.22096 n		-26.1475 0.22096 n	-26.8117 0.22042 t
		-1.64326 0.93486 b	-1.64350 0.93486 b	-5.14115 0.98213 e	-1.64387 0.93486 b
119	93.816	-26.0537 0.24845 n		-26.0537 0.24845 n	-26.8991 0.24784 t
		-1.64864 0.94781 b	-1.64889 0.94781 b	-5.15688 0.98213 e	-1.64864 0.94781 b
120	94.601	-25.6224 0.34413 n		-25.6224 0.34413 n	-27.2933 0.34327 t
		-1.67058 0.95068 b	-1.67082 0.95068 b	-5.22769 0.98213 e	-1.67058 0.95068 b
125	98.526	-24.3993 0.50885 n		-24.3993 0.50885 n	-28.3476 0.50746 t
		-5.41649 0.98213 e		-5.41648 0.98213 e	
		-1.73061 0.99528 b	-1.73083 0.99527 b		-1.73181 0.99575 b
130	102.45	-22.6137 0.64818 n		-22.6137 0.64818 n	-29.7167 0.64623 t
		-5.66037 0.98213 e	-1.81044 1.02979 b	-5.66037 0.98213 e	-1.81018 1.02978 b

### **ГЛАВА 3. КОЛЕБАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ОДИНАКОВЫХ НЕЗАМКНУТЫХ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК СО СВОБОДНЫМИ И СВОБОДНЫМ И ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННЫМ ГРАНИЧНЫМИ ОБРАЗУЮЩИМИ**

В этой главе получены дисперсионные уравнения для нахождения собственных частот возможных типов гармонических колебаний для тонкостенной упругой конструкции оболочечного типа составленной из одинаковых ортотропных незамкнутых круговых бесконечных цилиндрических оболочек со свободными граничными образующими и оболочечной конструкции составленной из ортотропных одинаковых незамкнутых круговых конечных цилиндрических оболочек со свободными граничными образующими при наличии шарнирного закрепления Навье на граничных направляющих. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичных задач для ортотропной пластинчатой тонкостенной конструкции (в частности, для аналогичных задач пластины–полосы и прямоугольной пластины) соответственно. Доказывается также асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и задач на собственные значения для тонкостенных упругих конструкций оболочечного типа составленных из счетного числа одинаковых ортотропных незамкнутых круговых бесконечных цилиндрических оболочек со свободной граничной образующей и тонкостенной упругой конструкции оболочечного типа составленной из одинаковых ортотропных незамкнутых круговых конечных цилиндрических оболочек со свободной граничной образующей при наличии шарнирного закрепления Навье на боковых направляющих. Численным методом показана эффективность полученных асимптотических формул (§ 3.1 [ 80]).

Численным исследованием показана достоверность применимости приближенного (асимптотического) метода для изучения локализованных колебаний конструкций оболочечного типа (§3.2 [145]).

Здесь получены также дисперсионные уравнения для нахождения собственных частот возможных типов колебаний для тонкостенной упругой конструкции оболочечного типа составленной из одинаковых ортотропных незамкнутых круговых бесконечных цилиндрических оболочек со свободным и жестко защемленным граничными

образующими и оболочечной конструкции составленной из ортотропных одинаковых незамкнутых круговых конечных цилиндрических оболочек со свободным и жестко заземленным граничными образующими при наличии шарнирного закрепления Навье на граничных направляющих. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичных задач для ортотропной пластинчатой тонкостенной конструкции (в частности, для аналогичных задач пластины–полосы и прямоугольной пластины) соответственно. Доказывается также асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и задач на собственные значения для тонкостенных упругих конструкций оболочечного типа составленных из счетного числа одинаковых ортотропных незамкнутых круговых бесконечных цилиндрических оболочек со свободным граничным образующим и тонкостенной упругой конструкции оболочечного типа составленной из одинаковых ортотропных незамкнутых круговых конечных цилиндрических оболочек со свободным граничным образующим при наличии шарнирного закрепления Навье на боковых направляющих.

Отметим, что из дисперсионных и характеристических уравнений полученные в главе III можно получить дисперсионные и характеристические уравнения для аналогичных задач тонкостенных упругих конструкций изготовленных из изотропного материала, если использовать соотношения 1.2.34 и 1.2.35.

### **§3.1. Колебания тонкостенной упругой конструкции из одинаковых незамкнутых ортотропных цилиндрических оболочек со свободными граничными образующими**

**3.1.1. Основные уравнения и постановка краевых задач.** Предполагается, что образующие ортогональны краям тонкостенной оболочечной конструкции. На срединной поверхности оболочечной конструкции вводятся криволинейные координаты  $(\alpha, \beta)$  ( $-\infty < \alpha < \infty$ : если составляющие цилиндрические оболочки бесконечны,  $0 \leq \alpha \leq l$ : если цилиндрические оболочки имеют длину  $l$ ),  $\beta$  ( $0 \leq \beta \leq \beta_0$ ) является длиной дуги направляющей кривой (Рис. 3.1 и 3.2). Обозначим через  $s$  длину одной арки составляющей цилиндрической оболочки срединной поверхности. В частности,

при  $\beta_0 = s$ , имеем цилиндрическую оболочку открытого профиля. В этом случае  $0 < s < 2\pi R$ , где  $R$  - радиус окружности цилиндрической оболочки срединной поверхности. Поставленная задача решается прямым применением уравнения классической теории цилиндрических оболочек.

Предположим, что направляющая кривая тонкостенной упругой конструкции оболочечного типа составленной из одинаковых незамкнутых круговых цилиндрических оболочек представляет соединенные одинаковые дуги окружностей, который является графиком некоторой кусочно-гладкой функции в плоскости перпендикулярной к образующим конструкции (Рис. 3.1, 3.2).

Заметим, что фактически рассматриваются цилиндрические оболочки, направляющие срединной поверхности которых представляют собой непрерывную незамкнутую кусочно-гладкую кривую являющейся графиком некоторой функции. На линиях раздела цилиндрических оболочек кривизна направляющей кривой срединной поверхности имеет устранимые особенности.

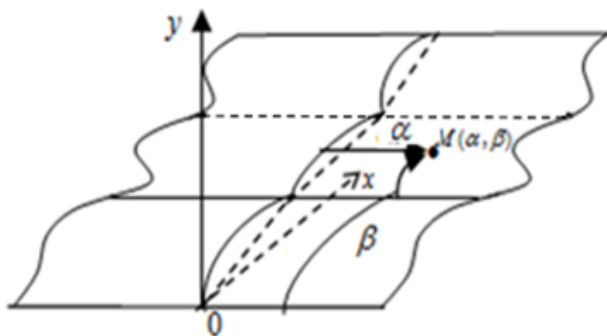


Рис. 3.1

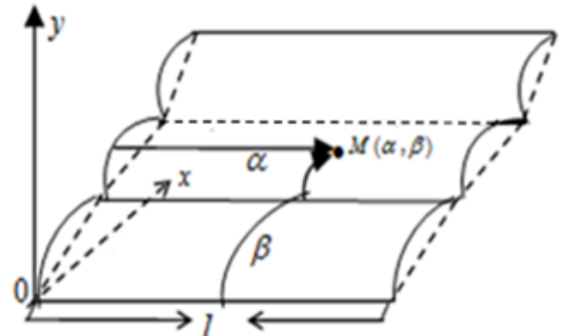


Рис. 3.2

$$R_{(\beta)}^{-1} = \begin{cases} R^{-1}, & \text{если } ns < \beta < (n+1)s, n = 0, 1, 2, \dots, N \\ \text{неопределено,} & \text{если } \beta = ns, n = 0, 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

и

$$\lim_{\beta \rightarrow ns - 0} R^{-1}(\beta) = \lim_{\beta \rightarrow ns + 0} R^{-1}(\beta) = R^{-1}$$

где  $R$  радиус составляющей цилиндрической оболочки срединной поверхности.

Механические гипотезы на которые основывается классическая теория цилиндрических оболочек нарушены. Следовательно с точки зрения механики в

окрестностях точки сингулярности уравнения классической теории не применимы. Для нахождения точных решений используя уравнения классической теории цилиндрических оболочек необходимо на линиях перехода составляющих цилиндрических оболочек использовать сопрягающие условия. Однако, это трудная задача даже для конструкций, составленных из двух одинаковых цилиндрических оболочек, которые не имеют общего нормального сечения. Для таких конструкций вопрос существования единственного решения для простых краевых задач остается открытым [46].

Строгое использование системы уравнений соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек связано с введением промежуточных сопрягающих элементов, обеспечивающих непрерывность перемещений вектора точки срединной поверхности. Однако выполнение таких строгих сопряжений связано с произволом при задании вида сопрягающего элемента, что существенно усложняет расчеты, особенно при исследовании конструкций, состоящих из большого числа цилиндрических оболочек (см. [57], стр. 56). Исходя из этого, здесь, вместо введения сопрягающих элементов, кривизна направляющей кривой цилиндрической оболочки заменяется соответствующим рядом Фурье с периодом  $2s$  и применяются динамические уравнения классической теории ортотропных цилиндрических оболочек [14].

Заметим, что сумма  $s(\beta)$  ряда Фурье функции  $R^{-1}(\beta)$  имеет вид

$$s(\beta) = R^{-1}, \quad -\infty < \beta < \infty$$

которая является наилучшей аппроксимацией функции  $R^{-1}(\beta)$  в смысле средне-квадратичного отклонения. Следовательно, согласно применяемому приближенному методу (асимптотический метод), полагаем

$$R^{-1}(\beta) = s(\beta) = R^{-1}, \quad 0 \leq \beta \leq \beta_0$$

Итак, в качестве исходных уравнений, описывающих колебания тонкостенной конструкции вышеуказанного типа, используются уравнения, которые соответствуют классической теории ортотропных цилиндрических оболочек и записаны в выбранных криволинейных координатах  $\alpha, \beta$  [14]

$$\begin{aligned}
& -B_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha^2} - B_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \beta^2} - (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha} = \lambda u_1, \\
& -(B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha \partial \beta} - B_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} - B_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} + B_{22} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u_3}{R} \right) - \frac{\mu^4}{R} \left( 4B_{66} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left( \frac{u_2}{R} \right) + \right. \\
& \left. + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left( \frac{u_2}{R} \right) \right) - \frac{\mu^4}{R} \left( B_{22} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta^3} + (B_{12} + 4B_{66}) \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta \partial \alpha^2} \right) = \lambda u_2, \quad (3.1.1) \\
& \mu^4 \left( B_{11} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^4} + 2(B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + B_{22} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \beta^4} \right) + \mu^4 \left( B_{22} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \left( \frac{u_2}{R} \right) + \right. \\
& \left. + (B_{12} + 4B_{66}) \frac{\partial^3}{\partial \beta \partial \alpha^2} \left( \frac{u_2}{R} \right) \right) - \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} - \frac{B_{22}}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \frac{B_{22}}{R^2} u_3 = \lambda u_3.
\end{aligned}$$

Здесь  $u_1, u_2, u_3$  – проекции вектора смещений, соответственно в направлениях  $\alpha, \beta$  и нормали к поверхности оболочки,  $R^{-1} = R^{-1}(\beta)$  – кривизна направляющей кривой срединной поверхности,  $\mu^4 = h^2/12$  ( $h$  – толщина оболочки).  $\lambda = \omega^2 \rho$ , где  $\omega$  – угловая частота собственных колебаний,  $\rho$  – плотность материала.  $B_{ij}$  – коэффициенты упругости.

Обозначим  $k = 2\pi n_0/l$ ,  $n_0 \in N$ , если конструкция составлена из одинаковых ортотропных незамкнутых круговых бесконечных цилиндрических оболочек, где  $l$  произвольное положительное число или  $k = \pi/l$ , если составляющие цилиндрической оболочки имеют длину  $l$  и  $R^{-1} = kr_0/2$ , где  $r_0$  безразмерный параметр. Рассматриваются следующие граничные условия:

$$\left. \frac{B_{12}}{B_{22}} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \right|_{\beta=0, \beta_0} = \left. \frac{B_{12}}{B_{22}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u_2}{R} \right) \right|_{\beta=0, \beta_0} = 0, \quad (3.1.2)$$

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_1}{\partial \beta} \right|_{\beta=0, \beta_0} = \left. \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta^3} + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta \partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left( \frac{u_2}{R} \right) + \frac{4B_{66}}{B_{22}} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left( \frac{u_2}{R} \right) \right|_{\beta=0, \beta_0} = 0,$$

$$u_i(\alpha + 2\pi/k, \beta) = u_i(\alpha, \beta), \quad i = \overline{1, 3}. \quad (3.1.3)$$

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left( \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \right) \right|_{\alpha=0,l} = u_2|_{\alpha=0,l} = u_3|_{\alpha=0,l} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u_2}{R} \right) \right) \Big|_{\alpha=0,l} = 0. \quad (3.1.4)$$

Граничные условия (3.1.2)-(3.1.3) соответствуют конструкции оболочечного типа составленной из ортотропных одинаковых незамкнутых круговых бесконечных цилиндрических оболочек: соотношения (3.1.2) выражают условия свободного края при  $\beta=0$ ,  $\beta=\beta_0$ , а соотношения (3.1.3) условиями волнообразности колебания, где  $k=2\pi n_0/l$ ,  $n_0 \in N$ ,  $l>0$  (Рис. 3.1). Граничные условия (3.1.2), (3.1.4) соответствуют конструкции оболочечного типа составленной из ортотропных одинаковых незамкнутых круговых конечных цилиндрических оболочек: соотношения (3.1.4) являются условиями шарнирного закрепления по граничным направляющим  $\alpha=0$  и  $\alpha=l$ , где  $k=\pi/l$  (Рис. 3.2).

Можно доказать, что задачи (3.1.1)-(3.1.3); (3.1.1)-(3.1.2),(3.1.4) самосопряженные и имеют неотрицательный дискретный спектр с предельной точкой на  $+\infty$  [59, стр. 362].

**3.1.2. Вывод и анализ характеристических уравнений.** В первом, втором и третьем уравнениях системы (3.1.1) (при постоянной кривизне,  $R^{-1}$ ), спектральный параметр  $\lambda$  формально заменим на  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  соответственно. Для последующих вычислений целесообразно систему уравнений (3.1.1) (с вышеуказанными изменениями) свести к системе уравнений [76]

$$\begin{aligned} \left( \Gamma + \frac{\mu^4}{R^2} DG \right) u_1 &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( Au_3 + \mu^4 \frac{B_{22}(B_{12} + B_{66})}{B_{11}B_{66}} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} Lu_3 + \frac{\mu^4}{R^2} \frac{B_{12}B_{22}}{B_{11}B_{66}} Du_3 \right), \\ \left( \Gamma + \frac{\mu^4}{R^2} DG \right) u_2 &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \beta} (Bu_3 - \mu^4 LGu_3) \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

$$\begin{aligned} \Gamma \Omega u_3 + \frac{1}{R^2} \left\{ \left( \Gamma - B \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{B_{12}}{B_{22}} A \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) u_3 + \mu^4 \left( DG\Omega + 2LB \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) u_3 + \right. \\ \left. + \frac{\mu^4}{R^2} \left( DB + \frac{B_{12}}{B_{11}} D \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) u_3 - \mu^8 L^2 G \frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} \right\} = 0, \end{aligned}$$

где операторы  $\Gamma, \Omega, A, B, G, D, L$  имеют вид



$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{B_{22}}{B_{11}} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} + \\
&+ \left( \frac{\lambda_1}{B_{11}} + \frac{\lambda_2}{B_{66}} \right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \left( \frac{\lambda_1 B_{22}}{B_{11}B_{66}} + \frac{\lambda_2}{B_{11}} \right) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{B_{11}B_{66}}, \\
\Omega &= \mu^4 \left( \frac{B_{11}}{B_{22}} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \frac{2(B_{12} + 2B_{66})}{B_{22}} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \right) - \frac{\lambda_3}{B_{22}}, \\
A &= \frac{B_{12}}{B_{11}} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{B_{22}}{B_{11}} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \frac{\lambda_2}{B_{66}}, \quad D = \frac{4B_{66}}{B_{22}} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \\
B &= \frac{B_{22}}{B_{11}} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{22}}{B_{11}} \frac{\lambda_1}{B_{66}}, \\
G &= \frac{B_{22}}{B_{66}} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{22}}{B_{11}} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{B_{22}}{B_{11}} \frac{\lambda_1}{B_{66}}, \quad L = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}.
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Первое уравнение системы (3.1.5) получается из системы уравнений, (3.1.1). Для этой цели одно уравнение получается дифференцируя первое уравнение системы (3.1.1) два раза по  $\alpha$ . Другое уравнение получается дифференцируя первое уравнение системы (3.1.1) два раза по  $\beta$ . Третье уравнение получается, если второе уравнение системы (3.1.1) продифференцировать один раз по  $\alpha$  и один раз по  $\beta$ . Используя эту систему уравнений и первые два уравнения системы (3.1.1), исключив  $u_2$ , получим первое уравнение системы (3.1.5). Аналогичным образом получим второе уравнение системы (3.1.5). Для этой цели продифференцируем второе уравнение системы (3.1.1) сначала два раза по  $\alpha$ , а затем независимо два раза по  $\beta$ , первое же уравнение продифференцируем один раз по  $\alpha$  и один раз по  $\beta$ . Используя эти уравнения, а также второе уравнение системы (3.1.1), исключив  $u_1$ , получим второе уравнение системы (3.1.5). Чтобы получить третье уравнение системы (3.1.5) исключаем  $u_1$  и  $u_2$  из третьего уравнения системы (3.1.1), используя первые два уравнения системы (3.1.5).

Решение системы (3.1.1) ищем в виде

$$(u_1, u_2, u_3) = (u_{cn} \cos kn\alpha, v_{sn} \sin kn\alpha, \sin kn\alpha) \exp(k\chi\beta), \quad n = \overline{1, +\infty}, \quad (3.1.7)$$

где  $n$  – волновое число,  $u_{cn}, v_{sn}, \chi$  – неопределенные константы. При этом условия (3.1.3) и (3.1.4) выполняются автоматически и поставленные задачи решаются аналогичным образом, придавая параметру  $k$  разные значения. Подставляя (3.1.7) в (3.1.5) получим

$$(c_n + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_n d_n) u_{cn} = \frac{r_0 n}{2} \left\{ a_n + a^2 \frac{B_{22}(B_{12} + B_{66})}{B_{11} B_{66}} \chi^2 l_n + \frac{r_0^2}{4} a^2 \frac{B_{22} B_{12}}{B_{11} B_{66}} d_n \right\}, \quad (3.1.8)$$

$$(c_n + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_n d_n) v_{sn} = \frac{r_0 \chi}{2} \left\{ b_n - a^2 g_n l_n \right\}, \quad (3.1.9)$$

$$R_{nn} c_n + \frac{r_0^2}{4} \left\{ c_n - b_n \chi^2 + \frac{B_{12}}{B_{22}} n^2 a_n + a^2 (R_{nn} g_n d_n + 2\chi^2 l_n b_n) + \right. \\ \left. + \frac{r_0^2}{4} a^2 d_n (b_n - \frac{B_{12}}{B_{11}} n^2) - a^4 \chi^2 g_n l_n^2 \right\} = 0, \quad (3.1.10)$$

$$c_n = \frac{B_{22}}{B_{11}} \chi^4 - \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}} n^2 \chi^2 + \left( \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_1^2 + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_2^2 \right) \chi^2 + \\ + \left( n^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_1^2 \right) (n^2 - \eta_2^2), \quad a_n = - \left( \frac{B_{22}}{B_{11}} \chi^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} n^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_2^2 \right),$$

$$b_n = \frac{B_{22}}{B_{11}} \chi^2 - \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}} n^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_1^2, \quad l_n = \chi^2 - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} n^2, \quad (3.1.11)$$

$$g_n = \frac{B_{22}}{B_{11}} \chi^2 - \frac{B_{22}}{B_{66}} n^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_1^2, \quad d_m = \chi^2 - \frac{4B_{66}}{B_{11}} n^2, \quad a^2 = \mu^4 k^2,$$

$$R_{nn} = a^2 \left( \chi^4 - \frac{2(B_{12} + 2B_{66})n^2}{B_{22}} \chi^2 + \frac{B_{11}}{B_{22}} n^4 \right) - \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta_3^2, \quad \eta_i^2 = \frac{\lambda_i}{B_{66} k^2}, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Предположим, что  $\chi_j, j = \overline{1, 4}$  являются попарно различными нулями уравнения (3.1.10) с неположительными действительными частями, тогда  $\chi_5 = -\chi_1, \chi_6 = -\chi_2, \chi_7 = -\chi_3, \chi_8 = -\chi_4$  также являются попарно различными нулями уравнения (3.1.10).

Пусть  $(u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{(j)})$ ,  $j = \overline{1,8}$  нетривиальные решения вида (3.1.7) системы (3.1.1) при  $\chi = \chi_j, j = \overline{1,8}$  соответственно. Представляя решение задач (3.1.1)-(3.1.3) и (3.1.1)-(3.1.2), (3.1.4) в виде  $u_i = \sum_{j=1}^8 w_j u_i^{(j)}$ ,  $i = \overline{1,3}$  и учитывая граничные условия (3.1.2), получим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^8 \frac{M_{ij}^{(n)} w_j}{c_n^{(j)} + 0.25a^2 r_0^2 g_n^{(j)} d_n^{(j)}} = 0, \quad i = \overline{1,8}, \quad (3.1.12)$$

$$M_{1j}^{(n)} = \frac{B_{12}}{B_{22}} n^2 a_n^{(j)} + \chi_j^2 b_n^{(j)} - c_n^{(j)} - \frac{r_0^2}{4} a^2 d_n^{(j)} (b_n^{(j)} - \frac{B_{12}}{B_{11}} n^2) - a^2 \chi_j^2 l_n^{(j)} b_n^{(j)},$$

$$M_{2j}^{(n)} = -\chi_j \left\{ a_n^{(j)} + b_n^{(j)} + a^2 l_n^{(j)} \left( \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} \chi_j^2 + \frac{B_{22}}{B_{66}} n^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_1^2 \right) + a^2 \frac{r_0^2}{4} \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} d_n^{(j)} \right\},$$

$$M_{3j}^{(n)} = \left( \chi_j^2 - \frac{B_{12}}{B_{22}} n^2 \right) c_n^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} \left( \chi_j^2 b_n^{(j)} + \frac{4B_{12} B_{66}}{B_{22}^2} a^2 n^4 g_n^{(j)} \right), \quad z_j = k \chi_j \beta_0, \quad (3.1.13)$$

$$M_{4j}^{(n)} = \chi_j \left\{ l_n^{(j)} c_n^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} b_n^{(j)} d_n^{(j)} \right\}, \quad M_{ij}^{(n)} = M_{i-4j}^{(n)} \exp(z_j), \quad i = \overline{5,8}, \quad j = \overline{1,8}.$$

Здесь индекс  $j$  означает, что соответствующая функция взята при  $\chi = \chi_j, j = \overline{1,8}$ . Чтобы система (3.1.12) имела нетривиальное решение необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{Det} \left\| M_{ij}^{(n)} \right\|_{i,j=1}^8 = 0. \quad (3.1.14)$$

Численный анализ уравнения (3.1.14) показывает, что значение определителя  $\text{Det} \left\| M_{ij}^{(n)} \right\|_{i,j=1}^8$  обнуляется или становится малым числом, когда любые два  $\chi$  – корни уравнения (3.1.10) становятся близкими друг к другу. Это сильно усложняет расчеты и может привести к появлению ложных решений. Оказывается, что множитель, обнуляющий определитель, можно выделить. Для этого введем обозначения:

$$x_j = \chi_j / n, \quad j = \overline{1,8}; \quad \eta_{in} = \eta_i / n, \quad i = \overline{1,3}; \quad \varepsilon_n = r_0 / (2n),$$

$$[z_i z_j] = kn \beta_0 ((\exp(z_i) - \exp(z_j)) / (z_i - z_j)), \quad [z_i z_j z_k] = kn \beta_0 (([z_i z_j] - [z_i z_k]) / (z_j - z_k)),$$

$$[z_1 z_2 z_3 z_4] = kn\beta_0 (([z_1 z_2 z_3] - [z_1 z_2 z_4]) / (z_3 - z_4)), \sigma_1 = \sigma_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$

$$\sigma_2 = \sigma_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4,$$

$$\sigma_3 = \sigma_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4, \quad (3.1.15)$$

$$\sigma_4 = \sigma_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 x_4, \bar{\sigma}_k = \sigma_k(x_1, x_2, x_3, 0), \bar{\bar{\sigma}}_k = \sigma_k(x_1, x_2, 0, 0), k = \bar{1}, \bar{4}.$$

При этом  $\bar{\sigma}_4 = \bar{\bar{\sigma}}_4 = \bar{\bar{\sigma}}_3 = 0$ . Пусть  $f_m, m = \bar{1}, \bar{6}$  является симметрическим

многочленом  $m$ -ой степени от переменных  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Известно, что этот

многочлен выражается через элементарные симметрические многочлены единст-

венным образом [93]. Обозначая:

$$f_m = f_m(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4), \bar{f}_m = f_m(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3, 0), \bar{\bar{f}}_m = f_m(\bar{\bar{\sigma}}_1, \bar{\bar{\sigma}}_2, 0, 0), m = \bar{1}, \bar{6},$$

$$f_1 = \sigma_1, f_2 = \sigma_1^2 - \sigma_2, f_3 = \sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3, f_4 = \sigma_1^4 - 3\sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_3 - \sigma_4, \quad (3.1.16)$$

$$\bar{f}_5 = \bar{\sigma}_1^5 - 4\bar{\sigma}_1^3\bar{\sigma}_2 + 3\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2^2 + 3\bar{\sigma}_1^2\bar{\sigma}_3 - 2\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3, \bar{\bar{f}}_6 = \bar{\bar{\sigma}}_1^6 - 5\bar{\bar{\sigma}}_1^4\bar{\bar{\sigma}}_2 + 6\bar{\bar{\sigma}}_1^2\bar{\bar{\sigma}}_2^2 - \bar{\bar{\sigma}}_2^3.$$

и выполняя элементарные действия над столбцами определителя (3.1.14), получим

$$\text{Det} \left\| M_{ij}^{(n)} \right\|_{i,j=1}^8 = n^{40} K^2 \exp(-z_1 - z_2 - z_3 - z_4) \text{Det} \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^8, \quad (3.1.17)$$

$$K = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4),$$

$$m_{11} = Hx_1^6 + d_1x_1^4 + d_2x_1^2 + d_3, m_{12} = H\bar{f}_5 + d_1\bar{f}_3 + d_2\bar{f}_1, m_{13} = H\bar{f}_4 + d_1\bar{f}_2 + d_2,$$

$$m_{14} = Hf_3 + d_1f_1; m_{21} = Tx_1^5 + d_4x_1^3 + d_5x_1, m_{22} = T\bar{f}_4 + d_4\bar{f}_2 + d_5, m_{23} = T\bar{f}_3 + d_4\bar{f}_1,$$

$$m_{24} = Tf_2 + d_4; m_{31} = Fx_1^6 + d_6x_1^4 + d_7x_1^2 + d_8, m_{32} = F\bar{f}_5 + d_6\bar{f}_3 + d_7\bar{f}_1,$$

$$m_{33} = F\bar{f}_4 + d_6\bar{f}_2 + d_7, m_{34} = Ff_3 + d_6f_1; m_{41} = Fx_1^7 + d_9x_1^5 + d_{10}x_1^3 + d_{11}x_1,$$

$$m_{42} = F\bar{f}_6 + d_9\bar{f}_4 + d_{10}\bar{f}_2 + d_{11}, m_{43} = F\bar{f}_5 + d_9\bar{f}_3 + d_{10}\bar{f}_1, m_{44} = Ff_4 + d_9f_2 + d_{10};$$

$$m_{i5} = (-1)^{i+1} m_{i1} \exp(z_1),$$

$$m_{i8} = (-1)^{i+1} (m_{i4} \exp(z_4) + m_{i3} [z_3 z_4] + m_{i2} [z_2 z_3 z_4] + m_{i1} [z_1 z_2 z_3 z_4]),$$

$$m_{i6} = (-1)^{i+1} (m_{i2} \exp(z_2) + m_{i1} [z_1 z_2]),$$

$$m_{i7} = (-1)^{i+1} (m_{i3} \exp(z_3) + m_{i2} [z_2 z_3] + m_{i1} [z_1 z_2 z_3]);$$

$$m_{ij} = m_{i-4j+4}, m_{ij+4} = m_{i-4j}, i = \overline{5,8}, j = \overline{1,4};$$

$$H = -a^2 n^2 \frac{B_{22}}{B_{11}}, T = -a^2 n^2 \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}}, F = \frac{B_{22}}{B_{11}};$$

$$d_1 = a^2 n^2 \left( \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 + 4B_{66}^2}{B_{11} B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 - \varepsilon_n^2 \frac{B_{22}}{B_{11}} \right), d_2 = -\frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2n}^2 -$$

$$-a^2 n^2 \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \left( \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right) + \quad (3.1.18)$$

$$a^2 n^2 \varepsilon_n^2 \left( \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 + 4B_{66}^2}{B_{11} B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right),$$

$$d_3 = -(1 - \eta_{2n}^2 + 4a^2 n^2 \varepsilon_n^2) \left( \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11} B_{22}} - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right), d_4 = a^2 n^2 \left( \frac{B_{12}^2 - B_{11} B_{22} + 4B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}} +$$

$$+ \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 - \varepsilon_n^2 \frac{B_{22} B_{12}}{B_{11} B_{66}} \right), d_5 = 4a^2 n^2 \varepsilon_n^2 \frac{B_{12}}{B_{11}} - \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_{2n}^2 + a^2 n^2 \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \left( \frac{B_{22}}{B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right) +$$

$$+ \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11} B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2, d_6 = \frac{B_{22}}{B_{11}} \varepsilon_n^2 - \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}} + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2n}^2,$$

$$d_7 = (1 - \eta_{2n}^2) \left( 1 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right) + \frac{B_{12}}{B_{22}} \left( \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2n}^2 \right) +$$

$$+ \varepsilon_n^2 \left( 4a^2 n^2 \frac{B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{22}} - \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}} + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right), d_8 = -\frac{B_{12}}{B_{22}} \left( 1 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right) (1 - \eta_{2n}^2 + 4a^2 n^2$$

$$\begin{aligned}
d_9 &= \frac{B_{22}}{B_{11}} \varepsilon_n^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66} + 4B_{66}^2}{B_{11}B_{66}} + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2n}^2, d_{10} = (1 - \eta_{2n}^2) \left(1 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1n}^2\right) + \\
&+ \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2n}^2 \right) - \\
&- \varepsilon_n^2 \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66} + 4B_{66}^2}{B_{11}B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right) \\
d_{11} &= 4\varepsilon_n^2 \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{22}} - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right) - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} (1 - \eta_{2n}^2) \left(1 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1n}^2\right).
\end{aligned}$$

Уравнение (3.1.14) эквивалентно уравнению

$$\text{Det} \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^8 = 0. \quad (3.1.19)$$

где  $m_{ij}$  даны формулами из (3.1.18).

Учитывая возможные соотношения между  $\lambda_1, \lambda_2$  и  $\lambda_3$ , уравнение (3.1.19) определяет частоты соответствующих типов колебаний.

**Замечание 1.** При  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$  уравнение (3.1.10) является характеристическим уравнением для системы (3.1.1), а уравнение (3.1.19) при  $k = 2\pi n_0 / l$ ,  $n_0 \in N$  является дисперсионным уравнением задачи (3.1.1)-(3.1.3), а при  $k = \pi / l$ , дисперсионным уравнением задачи (3.1.1)-(3.1.2),(3.1.4) соответственно.

**3.1.3. Асимптотика дисперсионного уравнения (3.1.19) при  $R^{-1} \rightarrow 0$ .** В этом пункте при использовании предыдущих формул будем предполагать, что  $\eta_{1n} = \eta_{2n} = \eta_{3n} = \eta_n = \eta / n$ . С учетом этого заметим, что при  $r_0 \rightarrow 0$  уравнение (3.1.10) преобразуется в совокупность уравнений

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{B_{22}}{B_{11}} \chi^4 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} n^2 \chi^2 + \frac{B_{22} + B_{66}}{B_{11}} \eta^2 \chi^2 + \\
&+ \left( n^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta^2 \right) (n^2 - \eta^2) = 0, \quad (3.1.20)
\end{aligned}$$

$$R_{nn} = a^2 \left( \chi^4 - \frac{2(B_{12} + 2B_{66})n^2}{B_{22}} \chi^2 + \frac{B_{11}}{B_{22}} n^4 \right) - \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta^2 = 0 \quad (3.1.21)$$

Предельный переход  $r_0 \rightarrow 0$  здесь понимается в том смысле, что фиксируя хорду арки в оболочечной конструкции с радиусом  $R$ , переходим к цилиндрической оболочке радиуса  $R'$  кратному  $R:R' = mR$ , и к пределу  $r'_0 = r_0/m \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ .

Уравнения (3.1.20), (3.1.21) являются характеристическими уравнениями для уравнений планарных и изгибных колебаний пластины соответственно.  $\chi/n$ - корни уравнений (3.1.20) и (3.1.21) с неположительными действительными частями, обозначим через  $y_1, y_2$  и  $y_3, y_4$  соответственно.

Разделим обе части уравнения (3.1.10) на  $a^2 n^8 B_{22}/B_{11}$  и запишем в следующем виде

$$(x^2 - y_1^2)(x^2 - y_2^2)(x^2 - y_3^2)(x^2 - y_4^2) + \varepsilon_n^2 P_n(x^2) + \varepsilon_n^4 \bar{d}_n \frac{B_{11}}{B_{22}} \left( \bar{b}_n - \frac{B_{12}}{B_{11}} \right) = 0, \quad (3.1.22)$$

$$P_n(x^2) = \frac{B_{22}}{B_{66}} A^2 \left\{ \frac{B_{22}}{B_{11}} (x^2 - y_1^2)(x^2 - y_2^2) - \bar{b}_n x^2 + \frac{B_{12}}{B_{22}} \bar{a}_n - \right. \\ \left. - a^4 n^4 x^2 \bar{g}_n \bar{l}_n^2 + a^4 n^4 (x^2 - y_3^2)(x^2 - y_4^2) \bar{g}_n \bar{d}_n + 2a^2 n^2 x^2 \bar{b}_n \bar{l}_n \right\}, \quad (3.1.23)$$

$$A^2 = \frac{B_{66}}{B_{22} a^2 n^2},$$

$$\bar{a}_n = - \left( \frac{B_{22}}{B_{11}} x^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} - \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_n^2 \right),$$

$$\bar{b}_n = \frac{B_{22}}{B_{11}} \chi^2 - \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}} + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_n^2,$$

$$\bar{l}_n = x^2 - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}}, \quad \bar{d}_n = x^2 - \frac{4B_{66}}{B_{22}},$$

$$\bar{g}_n = \frac{B_{22}}{B_{11}} x^2 - \frac{B_{22}}{B_{66}} + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_n^2, \quad x = \frac{\chi}{n}$$

Заметим, что при

$$\varepsilon_n \ll 1, \quad y_i \neq y_j, \quad i \neq j \quad (3.1.24)$$

$x^2$  - корни уравнения (3.1.22) можно представить в виде [62]

$$x_i^2 = y_i^2 + \alpha_i^{(n)} \varepsilon_n^2 + \beta_i^{(n)} \varepsilon_n^4 + \dots, \quad i = \overline{1,4} \quad (3.1.25)$$

$$\alpha_i^{(n)} = P_n(y_i^2) / (\prod_{j=1, j \neq i}^4 (y_j^2 - y_i^2)), \quad i = \overline{1,4}. \quad (3.1.26)$$

При условии (3.1.24), используя (3.1.13), (3.1.25) и тот факт, что

$$M_{31}^{(n)} / n^6 = M_{32}^{(n)} / n^6 = M_{41}^{(n)} / n^7 = M_{42}^{(n)} / n^7 = O(\varepsilon_n^2) \quad (3.1.27)$$

уравнение (3.1.19) приводится к виду

$$\text{Det} \| m_{ij} \|_{i,j=1}^8 = \left( \frac{B_{22}}{B_{11}} \right)^4 N^2(\eta_n) \{ \bar{F}_0(\eta_n) \bar{E}_0(\eta_n) K_{30}^2(\eta_n) + O(\varepsilon_n^2) \} = 0, \quad (3.1.28)$$

$$N(\eta_n) = (y_1 + y_3)(y_2 + y_3)(y_1 + y_4)(y_2 + y_4).$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_0(\eta_n) &= K_{10}^2(\eta_n)(1 + \exp(2(z_3 + z_4))) + 8m_{33}m_{44}m_{34}m_{43} \exp(z_3 + z_4) - \\ &- 4m_{33}m_{43}(m_{33}m_{44} + m_{34}m_{43})(\exp(z_4) - \exp(z_3))[z_3 z_4] - \\ &- (m_{33}m_{44} + m_{34}m_{43})^2 (\exp(2z_3) + \exp(2z_4)) - 4m_{33}^2 m_{43}^2 [z_3 z_4]^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_0(\eta_n) &= K_{20}^2(\eta_n)(1 + \exp(2(z_1 + z_2))) + \frac{8B_{22}^2 m_{11} m_{22} m_{12} m_{21}}{(B_{12} + B_{66})^2} \exp(z_1 + z_2) - \\ &- \frac{4B_{22}^2 [m_{11} m_{21} (m_{11} m_{22} + m_{21} m_{12})]}{(B_{12} + B_{66})^2} (\exp(z_2) - \exp(z_1)) [z_1 z_2] - \\ &- \frac{B_{22}^2 (m_{11} m_{22} + m_{12} m_{21})^2}{(B_{12} + B_{66})^2} (\exp(2z_1) + \exp(2z_2)) - \frac{4B_{22}^2 m_{11}^2 m_{21}^2}{(B_{12} + B_{66})^2} [z_1 z_2]^2, \end{aligned}$$

$$m_{11} = y_1^2 + \frac{B_{12}}{B_{22}} (1 - \eta_n^2), \quad m_{12} = m_{34} = y_1 + y_2, \quad m_{21} = y_1^3 + \left( \frac{B_{12}}{B_{22}} + \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta_n^2 \right) y_1,$$

$$m_{22} = y_1 y_2 + \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{12} B_{66}}{B_{22} B_{66}} - \eta_n^2, \quad m_{33} = y_3^2 - \frac{B_{12}}{B_{22}}, \quad m_{44} = y_3 y_4 + \frac{B_{12}}{B_{22}}, \quad (3.1.29)$$

$$m_{43} = y_3^2 - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} y_3, \quad K_{10}(\eta_n) = y_3^2 y_4^2 + 4 \frac{B_{66}}{B_{22}} y_3 y_4 - \left( \frac{B_{12}}{B_{22}} \right)^2,$$



$$\begin{aligned}
K_{20}(\eta_n) &= (1-\eta_n^2) \left( \frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}{B_{22}B_{66}} - \eta_n^2 \right) - \eta_n^2 y_1 y_2, \quad K_{30}(\eta_n) = N_1(\eta_n) + a^2 n^2 N_2(\eta_n) + a^4 n^4 N_3(\eta_n), \\
N_1(\eta_n) &= \frac{B_{66}(B_{12}+B_{22})}{B_{11}^2} \eta_n^2 - \frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}{B_{11}^2}, \quad N_2(\eta_n) = \left( \frac{B_{22}B_{12}+B_{12}B_{66}+B_{22}B_{66}}{B_{11}^2} \eta_n^2 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{B_{11}B_{22}B_{12}+B_{11}B_{22}B_{66}-B_{12}^3-3B_{12}^2B_{66}-4B_{12}B_{66}^2}{B_{66}B_{11}^2} \right) \left( \frac{B_{22}+B_{66}}{B_{22}} \eta_n^2 - \frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2-2B_{12}B_{66}}{B_{22}B_{66}} \right) - \\
&\quad - 2 \left( 1 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_n^2 \right) \left( \frac{2B_{12}+4B_{66}}{B_{11}} - \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_n^2 \right), \quad N_3(\eta_n) = -\frac{B_{22}(B_{12}+B_{66})}{B_{11}B_{66}} \left( 1 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_n^2 \right) X \\
&\quad X \left\{ (1-\eta_n^2) \left( \frac{B_{11}}{B_{22}} - \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta_n^2 \right) - \frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{22}} \left( \frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2-2B_{12}B_{66}}{B_{22}B_{66}} - \frac{B_{22}+B_{66}}{B_{22}} \eta_n^2 \right) + \left( \frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{22}} \right)^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Из (3.1.28) следует, что при  $r_0/(2n) \rightarrow 0$  уравнения (3.1.19) распадаются на уравнения

$$\bar{E}_0(\eta_n) = 0, \quad (3.1.30)$$

$$\bar{F}_0(\eta_n) = 0, \quad (3.1.31)$$

$$K_{30}(\eta_n) = 0. \quad (3.1.32)$$

Уравнения (3.1.30), (3.1.31) являются дисперсионными уравнениями планарных и изгибных колебаний аналогичной задачи для ортотропной пластины-полосы со свободными краями ( $k = 2\pi n_0/l$ ) или прямоугольной пластины со свободными противоположными сторонами, когда остальные стороны шарнирно закреплены ( $k = \pi/l$ ).

Если  $Y_1, Y_2$  и  $Y_3, Y_4$  являются  $\chi/n$  – корнями уравнений (3.1.20) и (3.1.21) с отрицательными действительными частями соответственно, то при  $n\beta_0 \rightarrow \infty$  уравнение (3.1.19) преобразуется в уравнение

$$Det \|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 = \left( \frac{B_{22}}{B_{11}} \right)^4 N^2(\eta_n) K_{10}^2(\eta_n) K_{20}^2(\eta_n) K_{30}^2(\eta_n) + O(\varepsilon_n^2) + \sum_{j=1}^4 O(\exp(z_j)) = 0. \quad (3.1.33)$$

Из (3.1.33) следует, что при  $r_0/(2n) \rightarrow 0$  и  $n\beta_0 \rightarrow \infty$  дисперсионное уравнение (3.1.19) распадается в уравнения

$$K_{10}(\eta_n) = y_3^2 y_4^2 + 4 \frac{B_{66}}{B_{22}} y_3 y_4 - \left( \frac{B_{12}}{B_{22}} \right)^2 = 0, \quad (3.1.34)$$

$$K_{20}(\eta_n) = (1 - \eta_n^2) \left( \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{22} B_{66}} - \eta_n^2 \right) - \eta_n^2 y_1 y_2 = 0, \quad (3.1.35)$$

$$K_{30}(\eta_n) = N_1(\eta_n) + a^2 n^2 N_2(\eta_n) + a^4 n^4 N_3(\eta_n) = 0, \quad (3.1.36)$$

Уравнения (3.1.34) и (3.1.35) являются дисперсионными уравнениями изгибных и планарных колебаний полубесконечной ортотропной пластины со свободным краем ( $k = 2\pi n_0/l$ ) или полубесконечной ортотропной пластины-полосы, со свободным торцом при наличии шарнирного закрепления на боковых краях ( $k = \pi/l$ ) соответственно [69]. Уравнение (3.1.36) является следствием того, что используется система уравнений соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек. Следовательно, при малых  $\varepsilon_n$  и больших  $n\beta_0$  приближенными значениями корней уравнения (3.1.19) являются корни уравнения (3.1.34)-(3.1.36).

**3.1.4. Асимптотика дисперсионного уравнения (3.1.19) при  $\beta_0 \rightarrow \infty$ .** В этом пункте при использовании предыдущих формул будем предполагать, что  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$  и  $\chi_4$  (корни уравнения (3.1.10)) имеют отрицательные действительные части. Тогда уравнение (3.1.19) можно привести к виду

$$Det \|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 = \left( Det \|m_{ij}\|_{i,j=1}^4 \right)^2 + \sum_{j=1}^4 O(\exp(k\chi_j\beta_0)) = 0. \quad (3.1.37)$$

Из (3.1.37) следует, что при  $\beta_0 \rightarrow \infty$  уравнение (3.1.19) преобразуется в уравнение

$$Det \|m_{ij}\|_{i,j=1}^4 = 0 \quad (3.1.38)$$

Уравнение (3.1.38), при  $n \in N$ , определяет частоты всевозможных локализованных собственных колебаний у свободной граничной образующей оболочечной конструкции составленной из счетного числа одинаковых открытых ортотропных бесконечных цилиндрических оболочек ( $k = 2\pi n_0/l$ ) или частоты всевозможных локализованных собственных колебаний у свободной граничной образующей оболочечной конструкции составленной из счетного числа одинаковых ортотропных

незамкнутых конечных цилиндрических оболочек ( $k = \pi/l$ ) при наличии шарнирного закрепления Навье на боковых краях. Заметим, что при  $r_0/(2n) \rightarrow 0$  имеем

$$Det \|m_{ij}\|_{i,j=1}^4 = \left( \frac{B_{22}}{B_{11}} \right)^2 N(\eta_n) K_{10}(\eta_n) K_{20}(\eta_n) K_{30}(\eta_n) + O(\varepsilon_n^2), \quad (3.1.39)$$

Учитывая формулы (3.1.37) и (3.1.39) еще раз убеждаемся в справедливости асимптотической формулы (3.1.33).

**3.1.5. Численные исследования.** В таблице 3.1.1 приведены приближенные значения некоторых  $\eta_n$ -корней уравнения (3.1.36) и уравнения (3.1.30), (3.1.31) с соответствующими коэффициентами затухания при  $\beta_0 = 5s$  и  $\beta_0 = s$ . Для безразмерной характеристики частот (корни уравнения (3.1.35)) локализованных волн у свободного края полубесконечной пластины изготовленной из стеклопластика с механическими параметрами (1.2.33) имеем  $\eta_n \approx 0.98676$ .

В таблице 3.1.1 характеристики коэффициентов затухания планарных и изгибных колебаний принимаются следующие величины

$$\begin{aligned} k\chi_0/n &= \max \{ k \operatorname{Re} \chi_1/n, \quad k \operatorname{Re} \chi_2/n \} \\ k\chi_0/n &= \max \{ k \operatorname{Re} \chi_3/n, \quad k \operatorname{Re} \chi_4/n \} \end{aligned} \quad (3.1.40)$$

Численный анализ показывает, что у свободных граничных образующих пластинчатой тонкостенной конструкции, могут появляться локализованные колебания. При  $n\beta_0 \rightarrow \infty$  частоты локализованных волн у свободных краев пластинчатой тонкостенной конструкции составленной из бесконечных одинаковых пластин–полос и локализованных колебаний у свободных краев пластинчатой тонкостенной конструкции составленной из одинаковых прямоугольных пластин при наличии шарнирного закрепления боковых краев стремятся к частотам аналогичных задач для полубесконечной пластины и полубесконечной пластины–полосы соответственно.

В таблицах 3.1.2-3.1.3 приведены некоторые безразмерные характеристики собственных значений  $\eta/n$  и характеристики коэффициентов затухания соответствующих форм  $k\chi_0/n$ , для тонкостенных конструкций оболочечного типа изготовленных из стеклопластика с механическими параметрами (1.2.33) и геометрическими параметрами:  $R = 40$ ;  $r_0 = 0.1274$ ,  $k = \pi/l$ ,  $l = 2s$ ,  $h = 1/50$ ,  $s = 4.00167$

при  $\beta_0 = 5s$  и  $\beta_0 = s$ , соответственно. Отметим, что модули упругости  $E_1$  и  $E_2$  соответствуют направлениям вдоль образующей и направляющей соответственно. В качестве характеристики коэффициентов затухания, приведены значения следующих величин

$$k\chi_0/n = \max\{k \operatorname{Re} \chi_1/n, k \operatorname{Re} \chi_2/n, k \operatorname{Re} \chi_3/n, k \operatorname{Re} \chi_4/n\}. \quad (3.1.41)$$

**Замечание 2.** Чтобы различить типы колебаний, в таблицах между характеристиками коэффициентов затухания и собственными частотами, условимся отмечать буквой "b" – преимущественно изгибный тип колебаний, "e" – преимущественно планарный тип колебаний и "t" – преимущественно крутильный тип колебаний.

**Замечание 3.** Корням уравнения (3.1.36) соответствуют незатухающие планарные колебания оболочечной конструкции. Существует зона волновых чисел:  $10 \leq n \leq 37$ , где уравнения (3.1.36) не имеют действительных  $\eta_n$  – корней.

В таблицах 3.1.2-3.1.3 первые колонки соответствуют задаче (3.1.1)-(3.1.2),(3.1.4). Вторые колонки – преимущественно изгибному типу колебаний, третьи – преимущественно планарному типу, а четвертые – преимущественно изгибно-крутильному типу. Отметим, что первые частоты собственных колебаний локализованных у свободного края тонкостенной конструкции оболочечного типа, где присутствует нормальная компонента силы инерции, являются частотами колебаний преимущественно изгибного типа. При  $\eta_0/n \rightarrow 0$  собственные колебания для задач (3.1.1)-(3.1.3), (3.1.1)-(3.1.2), (3.1.4) расчлняются на квазипоперечные и квазитангенциальные колебания. При этом частоты этих задач стремятся к частотам аналогичных задач для пластины-полосы и прямоугольной пластины соответственно. При увеличении  $n$  колебания квазипоперечного типа становятся незатухающими. Безразмерные характеристики  $\eta_n$  собственной частоты квазитангенциальных колебаний стремятся к корню уравнения Рэлея (3.1.35). При  $n\beta_0 \rightarrow \infty$  частоты волн локализованных у свободных граничных образующей тонкостенной конструкции оболочечного типа составленной из одинаковых ортотропных незамкнутых бесконечных цилиндрических оболочек ( $k = 2\pi n_0/l$ ) и частоты колебаний локализованных у свободных граничных образующей тонкостенной конструкции оболочечного типа составленной из одинаковых ортотропных незамкнутых конечных цилиндри-

ческих оболочек ( $k = \pi/l$ ) при наличии шарнирного закрепления Навье на граничных направляющих стремятся к частотам волн тонкостенной конструкции оболочечного типа составленной из счетного числа одинаковых ортотропных незамкнутых бесконечных цилиндрических оболочек или частотам колебаний локализованных у свободной образующей оболочечной конструкции, составленной из счетного числа одинаковых ортотропных незамкнутых конечных цилиндрических оболочек при наличии шарнирного закрепления Навье на боковых краях соответственно.

Таблица 3.1.1

n	$\bar{E}_0(\eta_n)=0, \beta_0=s$	$\bar{F}_0(\eta_n)=0, \beta_0=5s$	$\bar{F}_0(\eta_n)=0, \beta_0=s$	$\bar{E}_0(\eta_n)=0, \beta_0=5s$	$K_{30}(\eta_n)=0$
	$k\chi_0/n \quad \eta/n$	$k\chi_0/n \quad \eta/n$	$k\chi_0/n \quad \eta/n$	$k\chi_0/n \quad \eta/n$	$\eta/n=0$
1	-0.0778 0.94366	-0.0378 0.00822	-0.0680 0.00819	-0.0530 0.97432	3.2114
	-0.0149 0.99799			-0.0200 0.99641	
2	-0.0670 0.95852	-0.0278 0.01646	-0.0558 0.01641	-0.0447 0.98182	3.2093
	-0.0159 0.99771			-0.0281 0.99285	
3	-0.0605 0.96630	-0.0234 0.02470	-0.0473 0.02464	-0.0413 0.98448	3.2057
	-0.0171 0.99735			-0.0337 0.98968	
4	-0.0562 0.97110	-0.0209 0.03294	-0.0417 0.03288	-0.0397 0.98567	3.2003
	-0.0185 0.99692			-0.0363 0.98806	
5	-0.0530 0.97432	-0.0192 0.04118	-0.0378 0.04112	-0.0389 0.98624	3.1924
	-0.0199 0.99641			-0.0373 0.98734	
9	-0.0457 0.98092	-0.0160 0.07413	-0.0291 0.07407	-0.0382 0.98673	2.7088
	-0.0265 0.99363	-0.0109 0.07417		-0.0381 0.98678	
10	-0.0447 0.98182	-0.0157 0.08236	-0.0278 0.08230	-0.0382 0.98674	-
	-0.0281 0.99285	-0.0121 0.08237		-0.0381 0.98677	
20	-0.0397 0.98567	-0.0143 0.16474	-0.0209 0.16469	-0.0382 0.98676	-
	-0.0363 0.98806	-0.0145 0.16474		-0.0382 0.98676	
110	-0.0382 0.98676	-0.0144 0.90605	-0.0144 0.90605	-0.0382 0.98676	3.3658
	-0.0382 0.98676	-0.0144 0.90605	-0.0144 0.90606	-0.0382 0.98676	
120	-0.0382 0.98676	-0.0144 0.98842	-0.0144 0.98842	-0.0382 0.98676	3.3651
	-0.0382 0.98676	-0.0144 0.98842	-0.0144 0.98842	-0.0382 0.98676	
130	-0.0382 0.98676	-0.0144 1.07079	-0.0144 1.07079	-0.0382 0.98676	3.3645
	-0.0382 0.98676	-0.0144 1.07079	-0.0144 1.07079	-0.0382 0.98676	

Таблица 3.1.2

n	$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$	$\eta_1 = \eta_2 = 0, \eta_3 = \eta$	$\eta_1 = \eta_2 = \eta, \eta_3 = 0$	$\eta_2 = \eta_3 = \eta, \eta_1 = 0$
	$k\chi_0/n$ $\eta/n$	$k\chi_0/n$ $\eta/n$	$k\chi_0/n$ $\eta/n$	$k\chi_0/n$ $\eta/n$
1	-0.4047 b 0.01677	-0.4048 b 0.01678	-0.4009 e 0.68968	-0.4047 b 0.01677
	-0.4047 b 0.01678	-0.4047 b 0.01679	-0.4009 e 0.68983	-0.4047 b 0.01678
2	-0.2773 b 0.02213	-0.2773 b 0.02213	-0.3672 e 0.89948	-0.2773 b 0.02213
	-0.2773 b 0.02213	-0.2773 b 0.02214	-0.3672 e 0.89948	-0.2773 b 0.02213
3	-0.2199 b 0.02872	-0.2200 b 0.02872	-0.1204 e 0.96233	-0.2199 b 0.02872
	-0.2199 b 0.02872	-0.2200 b 0.02872	-0.1203 e 0.96257	-0.2199 b 0.02872
4	-0.1871 b 0.03588	-0.1872 b 0.03589	-0.0649 e 0.97792	-0.1871 b 0.03588
	-0.1871 b 0.03588	-0.1872 b 0.03589	-0.0634 e 0.97896	-0.1871 b 0.03588
5	-0.1664 b 0.04336	-0.1665 b 0.04337	-0.0496 e 0.98277	-0.1664 b 0.04336
	-0.1664 b 0.04336	-0.1665 b 0.04337	-0.0481 e 0.98380	-0.1664 b 0.04336
9	-0.0629 b 0.07482	-0.0628 b 0.07482	-0.0392 e 0.98637	-0.0629 b 0.07482
	-0.0629 b 0.07482	-0.0628 b 0.07482	-0.0391 e 0.98647	-0.0629 b 0.07482
10	-0.0462 b 0.08289	-0.0461 b 0.08289	-0.0389 e 0.98651	-0.0462 b 0.08289
	-0.0462 b 0.08289	-0.0461 b 0.08289	-0.0388 e 0.98656	-0.0462 b 0.08289
20	-0.0165 b 0.16475	-0.0165 b 0.16475	-0.0382 e 0.98672	-0.0165 b 0.16475
	-0.0165 b 0.16475	-0.0165 b 0.16475	-0.0382 e 0.98672	-0.0165 b 0.16475
110	-0.0144 b 0.90568	-0.0144 b 0.90568	-0.0382 e 0.98676	-0.0144 b 0.90568
	-0.0144 b 0.90568	-0.0144 b 0.90568	-0.0382 e 0.98676	-0.0144 b 0.90568
120	-0.0382 e 0.98676	--	-0.0382 e 0.98676	-0.0207 t 0.98771
	-0.0382 e 0.98676	--	-0.0382 e 0.98676	-0.0207 t 0.98771
	-0.0144 b 0.98802	-0.0144 b 0.98801	--	-0.0144 b 0.98802
	-0.0144 b 0.98802	-0.0144 b 0.98801	--	-0.0144 b 0.98802
130	-0.0382 e 0.98676	-0.0144 b 1.07034	-0.0382 e 0.98676	-0.0366 t 0.98772
	-0.0382 e 0.98676	-0.0144 b 1.07034	-0.0382 e 0.98676	-0.0366 t 0.98772

Таблица 3.1.3

n	$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$	$\eta_1 = \eta_2 = 0, \eta_3 = \eta$	$\eta_1 = \eta_2 = \eta, \eta_3 = 0$	$\eta_2 = \eta_3 = \eta, \eta_1 = 0$
	$k\chi_0/n$ $\eta/n$	$k\chi_0/n$ $\eta/n$	$k\chi_0/n$ $\eta/n$	$k\chi_0/n$ $\eta/n$
1	-0.4273 b 0.01400	-0.4273 b 0.01400	--	-0.4273 b 0.01400
	-0.4002 b 0.01728	-0.4002 b 0.01728	--	-0.4002 b 0.01728
2	-0.2914 b 0.02085	-0.2914 b 0.02085	-0.3699 e 0.91898	-0.2914 b 0.02085
	-0.2585 b 0.02368	-0.2585 b 0.02368		-0.2585 b 0.02368
3	-0.2288 b 0.02812	-0.2288 b 0.02812	-0.1647 e 0.93009	-0.2288 b 0.02812
	-0.2082 b 0.02949	-0.2082 b 0.02949		-0.2082 b 0.02949
4	-0.1920 b 0.03562	-0.1921 b 0.03562	-0.0987 e 0.94855	-0.1920 b 0.03562
	-0.1813 b 0.03619	-0.1814 b 0.03619		-0.1813 b 0.03619
5	-0.1678 b 0.04330	-0.1678 b 0.04331	-0.0764 e 0.95867	-0.1678 b 0.04330
	-0.1651 b 0.04342	-0.1652 b 0.04342		-0.1651 b 0.04342
9	-0.0750 b 0.07469	-0.0748 b 0.07469	-0.0529 e 0.97506	-0.0750 b 0.07469
	-0.0223 b 0.07509	-0.0219 b 0.07509		-0.0223 b 0.07509
10	-0.0576 b 0.08277	-0.0575 b 0.08277	-0.0507 e 0.97696	-0.0576 b 0.08277
	-0.0576 b 0.08277	-0.0575 b 0.08277		-0.0003 b 0.08309
20	-0.0227 b 0.16469	-0.0227 b 0.16469	-0.0411 e 0.98459	-0.0227 b 0.16469
	-0.0227 b 0.16469	-0.0227 b 0.16469	-0.0332 e 0.99025	-0.0006 b 0.16481
110	-0.0144 b 0.90567	-0.0144 b 0.90567	-0.0382 e 0.98676	-0.0144 b 0.90567
	-0.0144 b 0.90567	-0.0144 b 0.90567	-0.0382 e 0.98676	-0.0144 b 0.90567
120	-0.0382 e 0.98676	--	-0.0382 e 0.98676	-0.0207 t 0.98771
	-0.0382 e 0.98676	--	-0.0382 e 0.98676	-0.0207 t 0.98771
	-0.0144 b 0.98801	-0.0144 b 0.98801	--	-0.0144 b 0.98802
	-0.0144 b 0.98801	-0.0144 b 0.98801	--	-0.0144 b 0.98802
130	-0.0382 e 0.98676	-0.0144 b 1.07034	-0.0382 e 0.98676	-0.0366 t 0.98772
	-0.0382 e 0.98676	-0.0144 b 1.07034	-0.0382 e 0.98676	-0.0366 t 0.98772



Колебания преимущественно изгибно-крутильного типа ( $\eta_2 = \eta_3 = \eta, \eta_1 = 0$ ), при достаточно больших  $n$ , расчлняются на квазипоперечные и преимущественно крутильные типы колебаний. При дальнейшем увеличении  $n$  колебания квазипоперечного типа становятся незатухающими (в таблицах, параметры для незатухающих колебаний не приводятся).

Численный анализ показывает, что первые частоты являются частотами колебаний преимущественно квазипоперечного типа. Процесс затухания зависит от типа колебаний, от геометрических и физических параметров конструкции: колебания квазипоперечного типа в основном затухают медленнее, чем остальные типы колебаний. Асимптотические формулы (3.1.28) и (3.1.33) дисперсионного уравнения (3.1.19) являются хорошим ориентиром для нахождения собственных частот задач (3.1.1)-(3.1.3) и (3.1.1)-(3.1.2),(3.1.4).

### **§ 3.2. Локализованные колебания тонкостенной упругой конструкции из незамкнутых цилиндрических оболочек со свободным и жестко зашумленным граничными образующими**

**3.2.1. Основные уравнения и постановка краевых задач.** Рассматриваются собственные колебания тонкостенной упругой конструкции оболочечного типа составленной из одинаковых незамкнутых круговых бесконечных цилиндрических оболочек со свободным и жестко зашумленным граничными образующими и тонкостенной конструкции оболочечного типа составленной из одинаковых ортотропных круговых конечных цилиндрических оболочек со свободным и жестко зашумленным граничными образующими при наличии шарнирного закрепления Навье на граничных направляющих.

Предполагается, что образующие ортогональны краям оболочечной конструкции. Обозначим через  $s$  длину одной арки цилиндрической оболочки срединной поверхности. Введем на срединной поверхности тонкостенной конструкции криволинейные координаты  $(\alpha, \beta)$  ( $-\infty < \alpha < \infty$ : если составляющие цилиндрические оболочки бесконечны,  $0 \leq \alpha \leq l$ : если цилиндрические оболочки имеют длину  $l$ ),  $\beta$  ( $0 \leq \beta \leq \beta_0$ ), является длиной дуги направляющей кривой (Рис. 3.3 и 3.4). Обозначим

через  $s$  длину арки составляющей цилиндрической оболочки срединной поверхности. В частности, при  $\beta_0 = s$  получается круговая цилиндрическая оболочка открытого профиля. В этом случае  $0 < s < 2\pi R$ , где  $R$  - радиус окружности цилиндрической оболочки срединной поверхности.

Поставленная задача решается прямым применением уравнения классической теории цилиндрических оболочек.

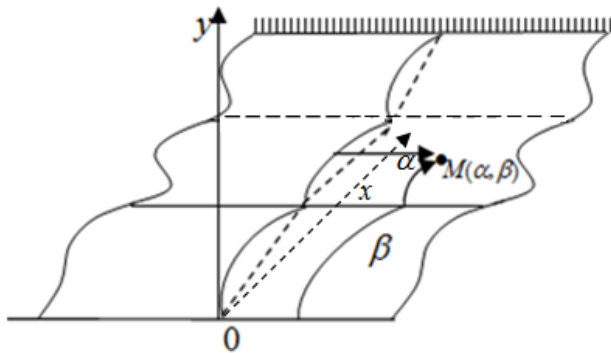


Рис.3.3

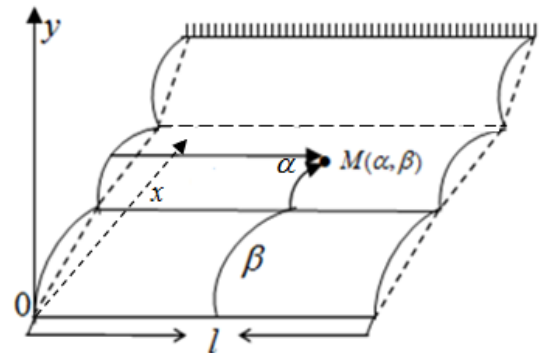


Рис.3.4

Заметим, что здесь, как в §3.1, фактически рассматриваются цилиндрические оболочки направляющие срединной поверхности которых представляют собой непрерывную незамкнутую кусочно-гладкую кривую являющейся графиком некоторой функции. На линиях раздела цилиндрических оболочек кривизна направляющей кривой срединной поверхности имеет устранимые особенности.

$$R_{(\beta)}^{-1} = \begin{cases} R^{-1}, & \text{если } ns < \beta < (n+1)s, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \\ \text{неопределено}, & \text{если } \beta = ns, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

и

$$\lim_{\beta \rightarrow ns - 0} R^{-1}(\beta) = \lim_{\beta \rightarrow ns + 0} R^{-1}(\beta) = R^{-1},$$

где  $R$  радиус составляющей цилиндрической оболочки срединной поверхности.

Заметим, что сумма  $s(\beta)$  ряда Фурье функции  $R^{-1}(\beta)$  имеет вид

$$s(\beta) = R^{-1}, \quad -\infty < \beta < \infty$$

которая является наилучшей аппроксимацией функции  $R^{-1}(\beta)$  в смысле средне-квадратичного отклонения. Формально, период ряда Фурье можно взять  $ns$ ,

$n = 1, 2, \dots, N$  и  $s(\beta)$  не меняется. Следовательно, согласно применяемому приближенному методу (асимптотический метод) полагаем

$$R^{-1}(\beta) = s(\beta) = R^{-1}, \quad 0 \leq \beta \leq \beta_0$$

и в качестве исходных уравнений, описывающих колебания тонкостенной конструкции вышеуказанного типа, используются уравнения (3.1.1), которые соответствуют классической теории ортотропных цилиндрических оболочек и записаны в выбранных криволинейных координатах  $\alpha, \beta$  (Рис. 3.3, 3.4).

Обозначим  $k = 2\pi n_0 / l$ ,  $n_0 \in N$ , если конструкция составлена из одинаковых ортотропных незамкнутых круговых бесконечных цилиндрических оболочек, где  $l$  произвольное положительное число или  $k = \pi / l$ , если составляющие цилиндрической оболочки имеют длину  $l$  и  $R^{-1} = kr_0 / 2$ , где  $r_0$  безразмерный параметр.

Рассматриваются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \frac{B_{12}}{B_{22}} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \Big|_{\beta=0} = 0, \quad \frac{B_{12}}{B_{22}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u_2}{R} \right) \Big|_{\beta=0} = 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_1}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} = 0, \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

$$\frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta^3} + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta \partial \alpha^2} + \left( \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left( \frac{u_2}{R} \right) + \frac{4B_{66}}{B_{22}} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left( \frac{u_2}{R} \right) \right) \Big|_{\beta=0} = 0$$

$$u_1 \Big|_{\beta=\beta_0} = u_2 \Big|_{\beta=\beta_0} = u_3 \Big|_{\beta=\beta_0} = \frac{\partial u_3}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_0} = 0 \quad (3.2.2)$$

$$u_i(\alpha + 2\pi / k, \beta) = u_i(\alpha, \beta), \quad i = \overline{1, 3} \quad (3.2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left( \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \right) \Big|_{\alpha=0, l} = u_2 \Big|_{\alpha=0, l} = u_3 \Big|_{\alpha=0, l} = \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u_2}{R} \right) \right) \Big|_{\alpha=0, l} = 0 \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Граничные условия (3.2.1)-(3.2.3) соответствуют конструкции оболочечного типа из одинаковых ортотропных незамкнутых круговых бесконечных цилиндрических оболочек: соотношения (3.2.1) выражают условия свободного края при  $\beta = 0$ , соотношения (3.2.2) условия жесткого защемления при  $\beta = \beta_0$ , а условия (3.2.3) условиями волнообразности колебания, где  $k = 2\pi n_0 / l$ ,  $n_0 \in N$  (Рис. 3.3). Граничные условия (3.2.1), (3.2.2), (3.2.4) соответствуют конструкции оболочечного типа из ортотропных одинаковых незамкнутых круговых конечных цилиндрических оболочек: соотношения (3.2.4) являются условиями шарнирного закрепления по граничным направляющим  $\alpha = 0$  и  $\alpha = l$ , где  $k = \pi / l$  (Рис. 3.4).

Можно доказать, что задачи (3.1.1), (3.2.1)-(3.2.3); (3.1.1), (3.2.1)-(3.2.3), (3.2.4) самосопряженные и имеют неотрицательный дискретный спектр с предельной точкой на  $+\infty$  [59, стр. 362].

**3.2.2. Вывод и анализ характеристических уравнений.** В первом, втором и третьем уравнениях системы (3.1.1) (при постоянной кривизне  $R^{-1}$ ), спектральный параметр  $\lambda$  формально заменяется на  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  соответственно. Для последующих вычислений целесообразно систему уравнений (3.2.1) (с вышеуказанными изменениями) свести к системе уравнений (3.1.5) (см. параграф 3.1)

Решение системы (3.1.1) ищем в виде (3.1.7). При этом условия (3.2.3) и (3.2.4) выполняются автоматически, и поставленные задачи решаются одинаковым образом, придавая параметру  $k$  разные значения. Подставляя (3.1.7) в (3.1.5), получим характеристическое уравнение (3.1.10).

Уравнение (3.1.10) является алгебраическим уравнением четвертой степени относительно  $\chi^2$ . Предположим, что  $\chi_j, j = \overline{1,4}$  является попарно различными нулями уравнения (3.1.10) с неположительными действительными частями, тогда  $\chi_5 = -\chi_1, \chi_6 = -\chi_2, \chi_7 = -\chi_3, \chi_8 = -\chi_4$ , также являются попарно различными нулями уравнения (3.1.10).

Пусть  $(u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{(j)}), j = \overline{1,8}$  нетривиальные решения вида (3.1.7) системы (3.1.1) при  $\chi = \chi_j, j = \overline{1,8}$  соответственно. Представляя решения задач (3.1.1), (3.2.1)-(3.2.3) и (3.1.1), (3.2.1)-(3.2.2), (3.2.4) в виде

$$u_i = \sum_{j=1}^8 w_j u_i^{(j)}, \quad i = \overline{1,3} \quad (3.2.5)$$

и учитывая граничные условия (3.2.1), (3.2.2), получается система уравнений

$$\sum_{j=1}^8 \frac{M_{ij}^{(n)} w_j}{c_n^{(j)} + a^2 \frac{r_0^2}{4} g_n^{(j)} d_n^{(j)}} = 0, \quad i = \overline{1,8} \quad (3.2.6)$$

$$\begin{aligned} M_{1j}^{(n)} &= -\frac{B_{12}}{B_{22}} n^2 a_n^{(j)} + \chi_j^2 b_n^{(j)} - c_n^{(j)} - \frac{r_0^2}{4} a^2 d_n^{(j)} \left( b_n^{(j)} - \frac{B_{12}}{B_{11}} n^2 \right) - a^2 \chi_j^2 l_n^{(j)} b_n^{(j)} \\ M_{2j}^{(n)} &= -\chi_j \left\{ a_n^{(j)} + b_n^{(j)} + a^2 l_n^{(j)} \left( \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} \chi_j^2 + \frac{B_{22}}{B_{66}} n^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_1^2 \right) + a^2 \frac{r_0^2}{4} \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} d_n^{(j)} \right\} \\ M_{3j}^{(n)} &= \left( \chi_j^2 - \frac{B_{12}}{B_{22}} n^2 \right) c_n^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} \left( \chi_j^2 b_n^{(j)} + \frac{4 B_{12} B_{66}}{B_{22}^2} a^2 n^4 g_n^{(j)} \right), \quad M_{4j}^{(n)} = \chi_j \left\{ l_n^{(j)} c_n^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} b_n^{(j)} d_n^{(j)} \right\} \\ M_{5j}^{(n)} &= \left\{ a_n^{(j)} + a^2 \frac{B_{22} (B_{12} + B_{66})}{B_{11} B_{66}} \chi_j^2 l_n^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} d_n^{(j)} \right\} \exp(z_j) \\ M_{6j}^{(n)} &= \chi_j \left( b_n^{(j)} - a^2 g_n^{(j)} l_n^{(j)} \right) \exp(z_j), \quad M_{7j}^{(n)} = \left( c_n^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_n^{(j)} d_n^{(j)} \right) \exp(z_j) \\ M_{8j}^{(n)} &= \chi_j \left( c_n^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_n^{(j)} d_n^{(j)} \right) \exp(z_j), \quad z_j = k \chi_j \beta_0; \quad j = \overline{1,8} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Здесь индекс  $(j)$  означает, что соответствующая функция взята при  $\chi = \chi_j$ . Чтобы система (3.2.6) имела нетривиальное решение необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{Det} \left\| M_{ij}^{(n)} \right\|_{i,j=1}^8 = 0 \quad (3.2.8)$$

Численный анализ уравнения (3.2.8) показывает, что значение определителя  $\text{Det} \left\| M_{ij}^{(n)} \right\|_{i,j=1}^8$  обнуляется или становится малым числом, когда любые два  $\chi$ -корня уравнения (3.1.10) становятся близкими друг к другу. Это сильно усложняет расчеты и может привести к появлению ложных решений. Оказывается, что множитель, обнуляющий определитель, можно выделить. Для этого введем

обозначения (3.1.15), (3.1.16) и выполнив элементарные действия над столбцами определителя, получим

$$\text{Det} \left\| M_{ij}^{(n)} \right\|_{i,j=1}^8 = n^{34} K^2 \exp(-z_1 - z_2 - z_3 - z_4) \text{Det} \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^8, \quad (3.2.9)$$

$$K = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4),$$

$$m_{11} = -a^2 n^2 \frac{B_{22}}{B_{11}} x_1^6 + d_1 x_1^4 + d_2 x_1^2 + d_3, \quad m_{12} = -a^2 n^2 \frac{B_{22}}{B_{11}} \bar{f}_5 + d_1 \bar{f}_3 + d_2 \bar{f}_1,$$

$$m_{13} = -a^2 n^2 \frac{B_{22}}{B_{11}} \bar{f}_4 + d_1 \bar{f}_2 + d_2, \quad m_{14} = -a^2 n^2 \frac{B_{22}}{B_{11}} f_3 + d_1 f_1;$$

$$m_{15} = m_{11} \exp(z_1), \quad m_{18} = m_{14} \exp(z_4) + m_{13}[z_3 z_4] + m_{12}[z_2 z_3 z_4] + m_{11}[z_1 z_2 z_3 z_4],$$

$$m_{16} = m_{12} \exp(z_2) + m_{11}[z_1 z_2], \quad m_{17} = m_{13} \exp(z_3) + m_{12}[z_2 z_3] + m_{11}[z_1 z_2 z_3];$$

$$m_{21} = -a^2 n^2 \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} x_1^5 + d_4 x_1^3 + d_5 x_1, \quad m_{22} = -a^2 n^2 \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} \bar{f}_4 + d_4 \bar{f}_2 + d_5,$$

$$m_{23} = -a^2 n^2 \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} \bar{f}_3 + d_4 \bar{f}_1, \quad m_{24} = -a^2 n^2 \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} f_2 + d_4 ;$$

$$m_{25} = -m_{21} \exp(z_1), \quad m_{28} = -m_{24} \exp(z_4) - m_{23}[z_3 z_4] - m_{22}[z_2 z_3 z_4] - m_{21}[z_1 z_2 z_3 z_4],$$

$$m_{26} = -m_{22} \exp(z_2) - m_{21}[z_1 z_2], \quad m_{27} = -m_{23} \exp(z_3) - m_{22}[z_2 z_3] - m_{21}[z_1 z_2 z_3];$$

$$m_{31} = \frac{B_{22}}{B_{11}} x_1^6 + d_6 x_1^4 + d_7 x_1^2 + d_8, \quad m_{32} = \frac{B_{22}}{B_{11}} \bar{f}_5 + d_6 \bar{f}_3 + d_7 \bar{f}_1,$$

$$m_{33} = \frac{B_{22}}{B_{11}} \bar{f}_4 + d_6 \bar{f}_2 + d_7, \quad m_{34} = \frac{B_{22}}{B_{11}} f_3 + d_6 f_1; \quad (3.2.10)$$

$$m_{35} = m_{31} \exp(z_1), \quad m_{38} = m_{34} \exp(z_4) + m_{33}[z_3 z_4] + m_{32}[z_2 z_3 z_4] + m_{31}[z_1 z_2 z_3 z_4],$$

$$m_{36} = m_{32} \exp(z_2) + m_{31}[z_1 z_2], \quad m_{37} = m_{33} \exp(z_3) + m_{32}[z_2 z_3] + m_{31}[z_1 z_2 z_3];$$

$$m_{41} = \frac{B_{22}}{B_{11}} x_1^7 + d_9 x_1^5 + d_{10} x_1^3 + d_{11} x_1, \quad m_{42} = \frac{B_{22}}{B_{11}} \bar{f}_6 + d_9 \bar{f}_4 + d_{10} \bar{f}_2 + d_{11},$$

$$m_{43} = \frac{B_{22}}{B_{11}} \bar{f}_5 + d_9 \bar{f}_3 + d_{10} \bar{f}_1, \quad m_{44} = \frac{B_{22}}{B_{11}} f_4 + d_9 f_2 + d_{10};$$

$$m_{45} = -m_{41} \exp(z_1), \quad m_{48} = -m_{44} \exp(z_4) - m_{43}[z_3 z_4] - m_{42}[z_2 z_3 z_4] - m_{41}[z_1 z_2 z_3 z_4],$$

$$m_{46} = -m_{42} \exp(z_2) - m_{41}[z_1 z_2], \quad m_{47} = -m_{43} \exp(z_3) - m_{42}[z_2 z_3] - m_{41}[z_1 z_2 z_3];$$

$$n_{51} = a^2 n^2 \frac{B_{22}(B_{12} + B_{66})}{B_{11} B_{66}} x_1^4 + g_1 x_1^2 + g_2, \quad n_{52} = a^2 n^2 \frac{B_{22}(B_{12} + B_{66})}{B_{11} B_{66}} \bar{f}_3 + g_1 \bar{f}_1,$$

$$n_{53} = a^2 n^2 \frac{B_{22}(B_{12} + B_{66})}{B_{11} B_{66}} \bar{f}_2 + g_1, \quad n_{54} = a^2 n^2 \frac{B_{22}(B_{12} + B_{66})}{B_{11} B_{66}} f_1;$$

$$m_{51} = n_{51} \exp(z_1), \quad m_{54} = n_{54} \exp(z_4) + n_{53}[z_3 z_4] + n_{52}[z_2 z_3 z_4] + n_{51}[z_1 z_2 z_3 z_4],$$

$$m_{52} = n_{52} \exp(z_2) + n_{51}[z_1 z_2], \quad m_{53} = n_{53} \exp(z_3) + n_{52}[z_2 z_3] + n_{51}[z_1 z_2 z_3],$$

$$m_{55} = n_{51}, \quad m_{56} = n_{52}, \quad m_{57} = n_{53}, \quad m_{58} = n_{54};$$

$$n_{61} = -a^2 n^2 \frac{B_{22}}{B_{11}} x_1^5 + g_3 x_1^3 + g_4 x_1, \quad n_{62} = -a^2 n^2 \frac{B_{22}}{B_{11}} \bar{f}_4 + g_3 \bar{f}_2 + g_4,$$

$$n_{63} = -a^2 n^2 \frac{B_{22}}{B_{11}} \bar{f}_3 + g_3 \bar{f}_1, \quad n_{64} = -a^2 n^2 \frac{B_{22}}{B_{11}} f_2 + g_3;$$

$$m_{61} = n_{61} \exp(z_1), \quad m_{64} = n_{64} \exp(z_4) + n_{63}[z_3 z_4] + n_{62}[z_2 z_3 z_4] + n_{61}[z_1 z_2 z_3 z_4],$$

$$m_{62} = n_{62} \exp(z_2) + n_{61}[z_1 z_2], \quad m_{63} = n_{63} \exp(z_3) + n_{62}[z_2 z_3] + n_{61}[z_1 z_2 z_3];$$

$$m_{65} = -n_{61}, \quad m_{66} = -n_{62}, \quad m_{67} = -n_{63}, \quad m_{68} = -n_{64};$$

$$n_{71} = \frac{B_{22}}{B_{11}} \delta_m x_1^4 + g_5 x_1^2 + g_6, \quad n_{72} = \frac{B_{22}}{B_{11}} \delta_m \bar{f}_3 + g_5 \bar{f}_1, \quad n_{73} = \frac{B_{22}}{B_{11}} \delta_m \bar{f}_2 + g_5,$$

$$n_{74} = \frac{B_{22}}{B_{11}} \delta_m f_1; \quad \delta_n = 1 + a^2 n^2 \varepsilon_n^2;$$

$$m_{71} = n_{71} \exp(z_1), \quad m_{74} = n_{74} \exp(z_4) + n_{73}[z_3 z_4] + n_{72}[z_2 z_3 z_4] + n_{71}[z_1 z_2 z_3 z_4],$$

$$m_{72} = n_{72} \exp(z_2) + n_{71}[z_1 z_2], \quad m_{73} = n_{73} \exp(z_3) + n_{72}[z_2 z_3] + n_{71}[z_1 z_2 z_3],$$

$$m_{75} = n_{71}, \quad m_{76} = n_{72}, \quad m_{77} = n_{73}, \quad m_{78} = n_{74};$$

$$n_{81} = \frac{B_{22}}{B_{11}} \delta_n x_1^5 + g_5 x_1^3 + g_6 x_1, \quad n_{82} = \frac{B_{22}}{B_{11}} \delta_n \bar{f}_4 + g_5 \bar{f}_2 + g_6,$$

$$n_{83} = \frac{B_{22}}{B_{11}} \delta_n \bar{f}_3 + g_5 \bar{f}_1, \quad n_{84} = \frac{B_{22}}{B_{11}} \delta_n f_2 + g_5,$$

$$m_{81} = n_{81} \exp(z_1), \quad m_{84} = n_{84} \exp(z_4) + n_{83}[z_3 z_4] + n_{82}[z_2 z_3 z_4] + n_{81}[z_1 z_2 z_3 z_4],$$

$$m_{82} = n_{82} \exp(z_2) + n_{81}[z_1 z_2], \quad m_{83} = n_{83} \exp(z_3) + n_{82}[z_2 z_3] + n_{81}[z_1 z_2 z_3],$$

$$m_{85} = n_{81}, \quad m_{86} = n_{82}, \quad m_{87} = n_{83}, \quad m_{88} = n_{84};$$

$$d_1 = a^2 n^2 \left( \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 + 4B_{66}^2}{B_{11} B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 - \varepsilon_n^2 \frac{B_{22}}{B_{11}} \right),$$

$$d_2 = -\frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2n}^2 - a^2 n^2 \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \left( \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right) +$$

$$+ a^2 n^2 \varepsilon_n^2 \left( \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 + 4B_{66}^2}{B_{11} B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right),$$

$$d_3 = -(1 - \eta_{2n}^2 + 4a^2 n^2 \varepsilon_n^2) \left( \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11} B_{22}} - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right),$$

$$d_4 = a^2 n^2 \left( \frac{B_{12}^2 - B_{11} B_{22} + 4B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}} + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 - \varepsilon_n^2 \frac{B_{22} B_{12}}{B_{11} B_{66}} \right),$$



$$d_5 = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}}\eta_{2n}^2 + a^2n^2 \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \left( \frac{B_{22}}{B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 \right) + 4a^2n^2\varepsilon_n^2 \frac{B_{12}}{B_{11}},$$

$$d_6 = \frac{B_{22}}{B_{11}}\varepsilon_n^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} + \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 + \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_{2n}^2,$$

$$d_7 = (1 - \eta_{2n}^2) \left( 1 - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 \right) + \frac{B_{12}}{B_{22}} \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_{2n}^2 \right) + \varepsilon_n^2 \left( 4a^2n^2 \frac{B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{22}} - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} + \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 \right),$$

$$d_8 = -\frac{B_{12}}{B_{22}} \left( 1 - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 \right) (1 - \eta_{2n}^2 + 4a^2n^2\varepsilon_n^2),$$

$$d_9 = \frac{B_{22}}{B_{11}}\varepsilon_n^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66} + 4B_{66}^2}{B_{11}B_{66}} + \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 + \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_{2n}^2,$$

$$d_{10} = (1 - \eta_{2n}^2) \left( 1 - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 \right) + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_{2n}^2 \right) - \varepsilon_n^2 \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66} + 4B_{66}^2}{B_{11}B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 \right),$$

$$d_{11} = 4\varepsilon_n^2 \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{22}} - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 \right) - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} (1 - \eta_{2n}^2) \left( 1 - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 \right),$$

$$g_1 = a^2n^2\varepsilon_n^2 \frac{B_{12}B_{22}}{B_{11}B_{66}} - a^2n^2 \frac{(B_{12} + B_{66})(B_{12} + 4B_{66})}{B_{11}B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}},$$

$$g_2 = -\frac{B_{12}}{B_{11}} (1 - \eta_{2n}^2 + 4a^2n^2\varepsilon_n^2),$$

$$g_3 = \frac{B_{12}}{B_{11}} + a^2 n^2 \left( \frac{B_{12}B_{66} + 4B_{66}^2 + B_{11}B_{22}}{B_{11}B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right),$$

$$g_4 = a^2 n^2 \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \left( \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 - \frac{B_{22}}{B_{66}} \right) + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}},$$

$$g_5 = \frac{B_{22}}{B_{11}} \left( 1 + 4a^2 n^2 \varepsilon_n^2 \right) \eta_{1n}^2 + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2n}^2 - a^2 n^2 \varepsilon_n^2 \frac{B_{11}B_{22} + 4B_{66}^2}{B_{11}B_{66}} -$$

$$- \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}},$$

$$g_6 = \left( 1 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right) \left( 1 - \eta_{2n}^2 \right) - 4a^2 n^2 \varepsilon_n^2 \frac{B_{66}}{B_{22}} \left( \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 - \frac{B_{22}}{B_{66}} \right),$$

Уравнение (3.2.8) эквивалентно уравнению

$$\text{Det} \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^8 = 0 \quad (3.2.11)$$

где  $m_{ij}$  даны формулами из (3.2.10).

Учитывая возможные соотношения между  $\lambda_1, \lambda_2$  и  $\lambda_3$ , уравнение (3.2.11) определяет частоты соответствующих типов колебаний.

**Замечание 1.** При  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$  уравнение (3.1.10) является характеристическим уравнением для системы (3.1.1), а уравнение (3.2.11) является дисперсионным уравнением задачи (3.1.1), (3.2.1)-(3.2.3) при  $k = 2\pi n_0 / l$ ,  $n_0 \in N$ , а при  $k = \pi / l$ , дисперсионным уравнением задачи (3.1.1), (3.2.1)-(3.2.2), (3.2.4) соответственно.

**3.2.3. Асимптотика дисперсионного уравнения (3.2.11) при  $R^{-1} \rightarrow 0$ .** В этом пункте, при использовании предыдущих формул, предполагается, что  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$ ,  $\eta_n = \eta / n$ . С учетом этого заметим, что при  $r_0 \rightarrow 0$  уравнение (3.1.10) преобразуется в совокупность уравнений (3.1.20) и (3.1.21).

$\chi / n$  – корни уравнений (3.1.20) и (3.1.21) с неположительными действительными частями, обозначим через  $y_1, y_2$  и  $y_3, y_4$  соответственно.

При условии (3.1.24), используя (3.1.25) и тот факт, что

$$\begin{aligned} M_{31}^{(n)} / n^6 &= M_{32}^{(n)} / n^6 = M_{41}^{(n)} / n^7 = M_{42}^{(n)} / n^7 = M_{71}^{(n)} / n^4 = \\ &= M_{72}^{(n)} / n^4 = M_{81}^{(n)} / n^5 = M_{82}^{(n)} / n^5 = O(\varepsilon_n^2) \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

уравнение (3.2.8) можно привести к виду

$$\text{Det} \left\| M_{ij}^{(n)} \right\|_{i,j=1}^8 = n^{34} \exp(-z_1 - z_2 - z_3 - z_4) \frac{B_{22}^5}{B_{11}^4 B_{66}} \left\{ [(y_3^2 - y_1^2)(y_3^2 - y_2^2)]^2 \times \right. \quad (3.2.13)$$

$$\left. \times [(y_4^2 - y_1^2)(y_4^2 - y_2^2)]^2 P_0(\eta_n) B_0(\eta_n) K_{30}^2(\eta_n) + O(\varepsilon_n^2) \right\} = 0,$$

$$P_0(\eta_n) = -(y_2 - y_1)^2 K_{20}(\eta_n) Q_0(\eta_n) (1 + \exp(2(z_1 + z_2))) +$$

$$+ 4y_1 y_2 R_0(\eta_n) \exp(z_1 + z_2) + (y_1 + y_2)^2 \tilde{K}_{20}(\eta_n) \tilde{Q}_0(\eta_n) (\exp(2z_1) + \exp(2z_2)),$$

$$B_0(\eta_n) = -(y_4 - y_3)^2 K_{10}(\eta_n) (1 + \exp(2(z_3 + z_4))) + 4y_3 y_4 S_0(\eta_n) \exp(z_3 + z_4) +$$

$$+ (y_3 + y_4)^2 \tilde{K}_{10}(\eta_n) (\exp(2z_3) + \exp(2z_4)), \quad z_i = y_i k n \beta_0,$$

$$K_{20}(\eta_n) = (1 - \eta_n^2) \left( \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{22} B_{66}} - \eta_n^2 \right) - \eta_n^2 y_1 y_2,$$

$$\tilde{K}_{20}(\eta_n) = (1 - \eta_n^2) \left( \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{22} B_{66}} - \eta_n^2 \right) + \eta_n^2 y_1 y_2, \quad (3.2.14)$$

$$K_{10}(\eta_n) = y_3^2 y_4^2 + 4 \frac{B_{66}}{B_{22}} y_3 y_4 - \left( \frac{B_{12}}{B_{22}} \right)^2, \quad \tilde{K}_{10}(\eta_n) = y_3^2 y_4^2 - 4 \frac{B_{66}}{B_{22}} y_3 y_4 - \left( \frac{B_{12}}{B_{22}} \right)^2,$$

$$Q_0(\eta_n) = \frac{B_{66}}{B_{22}} (1 - \eta_n^2) + y_1 y_2, \quad \tilde{Q}_0(\eta_n) = \frac{B_{66}}{B_{22}} (1 - \eta_n^2) - y_1 y_2,$$

$$R_0(\eta_n) = 2 \frac{B_{12} + B_{66}}{B_{22}} (1 - \eta_n^2) \left( \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{22} B_{66}} - \frac{B_{12} + B_{22}}{B_{22}} \eta_n^2 \right),$$

$$S_0(\eta_n) = 2 \left( \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - 4 B_{12} B_{66}}{B_{22}^2} - \frac{B_{66}}{B_{22}} \frac{\eta_n^2}{a^2 n^2} \right)$$

а  $K_{30}(\eta_n)$  совпадает с (3.1.29).

Учитывая (3.2.9), (3.1.25) и соотношения

$$P_0(\eta_n) = -(y_2 - y_1)^2 \bar{P}_0(\eta_n), \quad B_0(\eta_n) = -(y_4 - y_3)^2 \bar{B}_0(\eta_n), \quad (3.2.15)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_0(\eta_n) = & K_{20}(\eta_n) Q_0(\eta_n) (1 + \exp(2(z_1 + z_2))) - \frac{4B_{22}(r_{11}r_{21} + r_{22}r_{41}y_1)r_{12}}{B_{12} + B_{66}} \exp(z_1 + z_2) + \\ & + \frac{2B_{22}[r_{11}r_{21}(y_1r_{42} + r_{41}) + r_{41}y_1(r_{11}r_{22} + r_{21}r_{12})]}{B_{12} + B_{66}} (\exp(z_2) - \exp(z_1))[z_1z_2] + \end{aligned}$$

$$+ \frac{B_{22}(r_{11}r_{22} + r_{12}r_{21})(y_1r_{42} + r_{41})}{B_{12} + B_{66}} (\exp(2z_1) + \exp(2z_2)) + \frac{4B_{22}r_{11}r_{21}r_{41}y_1}{B_{12} + B_{66}} [z_1z_2]^2,$$

$$r_{11} = y_1^2 + \frac{B_{12}}{B_{22}}(1 - \eta_n^2), \quad r_{12} = r_{42} = y_1 + y_2, \quad r_{21} = y_1^3 + \left( \frac{B_{12}}{B_{22}} + \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta_n^2 \right) y_1,$$

$$r_{22} = y_1y_2 + \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{22}B_{66}} - \eta_n^2, \quad r_{41} = y_1^2 - \frac{B_{66}}{B_{22}}(1 - \eta_n^2). \quad (3.2.16)$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_0(\eta_n) = & K_{10}(\eta_n) (1 + \exp(2(z_3 + z_4))) + 4(y_3^2 + y_3y_4) \left( y_3y_4 + \frac{B_{12}}{B_{22}} \right) \exp(z_3 + z_4) - \\ & - \left[ \left( y_3^2 - \frac{B_{12}}{B_{22}} \right) \left( y_3y_4 + \frac{B_{12}}{B_{22}} \right) + (y_3^2 + y_3y_4) \left( y_3^2 - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \right) \right] (\exp(2z_3) + \exp(2z_4)) - \\ & - 4y_3 \left[ \left( y_3^2 - \frac{B_{12}}{B_{22}} \right) \left( y_3^2 - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \right) + \left( y_3y_4 + \frac{B_{12}}{B_{22}} \right) \left( y_3^2 - \frac{B_{12} + 2B_{66}}{B_{22}} \right) \right] (\exp(z_4) - \\ & - \exp(z_3))[z_3z_4] - 4y_3^2 \left( y_3^2 - \frac{B_{12}}{B_{22}} \right) \left( y_3^2 - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \right) [z_3z_4]^2 \end{aligned}$$

уравнение (3.2.11) приводится к виду

$$Det \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^8 = \frac{B_{22}^5}{B_{11}^4 B_{66}} N^2(\eta_n) \left\{ K_{30}^2(\eta_n) \bar{B}_0(\eta_n) \bar{P}_0(\eta_n) + O(\varepsilon_n^2) \right\} = 0, \quad (3.2.17)$$

$$N(\eta_n) = (y_1 + y_3)(y_2 + y_3)(y_1 + y_4)(y_2 + y_4). \quad (3.2.18)$$

Из (3.2.17) следует, что при  $r_0/(2n) \rightarrow 0$  уравнение (3.2.11) распадается на уравнения

$$\bar{B}_0(\eta_n) = 0, \quad (3.2.19)$$

$$\bar{P}_0(\eta_n) = 0, \quad (3.2.20)$$

$$K_{30}(\eta_n) = 0. \quad (3.2.21)$$

Уравнения (3.2.19), (3.2.20) являются дисперсионными уравнениями изгибных и планарных колебаний аналогичной задачи для ортотропной пластины-полосы со свободным и жестко защемленным краями (при  $k = 2\pi n_0/l$ ) или прямоугольной пластины со свободным и жестко защемленным противоположными сторонами, когда остальные стороны шарнирно закреплены (при  $k = \pi/l$ ).

Если  $y_1, y_2$  и  $y_3, y_4$  являются корнями уравнений (3.1.20) и (3.1.21) с отрицательными действительными частями соответственно, то при  $n\beta_0 \rightarrow \infty$  уравнения (3.2.19), (3.2.20) преобразуются в уравнения

$$K_{10}(\eta_n) = 0, \quad K_{20}(\eta_n) = 0, \quad Q_0(\eta_n) = 0. \quad (3.2.22)$$

а уравнение (3.2.17) преобразуется в уравнение

$$\begin{aligned} \text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 &= \frac{B_{22}^5}{B_{11}^4 B_{66}} N^2(\eta_n) K_{10}(\eta_n) K_{20}(\eta_n) Q_0(\eta_n) K_{30}^2(\eta_n) + \\ &+ O(\varepsilon_n^2) + \sum_{j=1}^4 O(\exp(z_j)) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

Из (3.2.23) следует, что при  $r_0/(2n) \rightarrow 0$  и  $n\beta_0 \rightarrow \infty$  дисперсионное уравнение (3.2.11) распадается на уравнение

$$K_{10}(\eta_n) = y_3^2 y_4^2 + 4 \frac{B_{66}}{B_{22}} y_3 y_4 - \left( \frac{B_{12}}{B_{22}} \right)^2 = 0, \quad (3.2.24)$$

$$K_{20}(\eta_n) = (1 - \eta_n^2) \left( \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{22} B_{66}} - \eta_n^2 \right) - \eta_n^2 y_1 y_2 = 0,$$

$$Q_0(\eta_n) = \frac{B_{66}}{B_{22}} (1 - \eta_n^2) + y_1 y_2 = 0 \quad (3.2.25)$$

$$K_{30}(\eta_n) = N_1(\eta_n) + a^2 n^2 N_2(\eta_n) + a^4 n^4 N_3(\eta_n) = 0, \quad (3.2.26)$$

Уравнения (3.2.24) являются дисперсионными уравнениями изгибных и планарных колебаний полубесконечной ортотропной пластины со свободным краем (при  $k = 2\pi n_0/l$ ) или полубесконечной ортотропной пластины-полосы, со свободным торцом при наличии шарнирного закрепления на боковых краях (при  $k = \pi/l$ ) соответственно [70]. Уравнение (3.2.25) появляется из-за того, что оболочечная конструкция жестко закреплена на одном краю, а уравнение (3.2.26) является следствием того, что используется система уравнений соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек (ср. [76]). Следовательно, при малых  $\varepsilon_n$  и больших  $n\beta_0$  приближенными значениями корней уравнения (3.2.11) являются корни уравнения (3.2.24)-(3.2.26).

**3.2.4. Асимптотика дисперсионного уравнения (3.2.11) при  $\beta_0 \rightarrow \infty$ .** В этом пункте при использовании предыдущих формул будем предполагать, что  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$  и  $\chi_4$  (корни уравнения (3.1.10)) имеют отрицательные действительные части. Тогда уравнение (3.2.11) можно привести к виду

$$\text{Det} \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^8 = \text{Det} \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^4 \cdot \text{Det} \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=5}^8 + \sum_{j=1}^4 O(\exp(k\chi_j\beta_0)) = 0. \quad (3.2.27)$$

Из (3.2.27) следует, что при  $\beta_0 \rightarrow \infty$  уравнение (3.2.11) распадается на уравнения

$$\text{Det} \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^4 = 0 \quad (3.2.28)$$

$$\text{Det} \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=5}^8 = 0 \quad (3.2.29)$$

Уравнение (3.2.28), при  $n \in N$ , определяет частоты всевозможных локализованных собственных колебаний у свободной образующей оболочечной конструкции составленной из счетного числа одинаковых ортотропных незамкнутых бесконечных цилиндрических оболочек ( $k = 2\pi n_0/l$ ) или частоты всевозможных локализованных собственных колебаний у свободной образующей оболочечной конструкции составленной из счетного числа одинаковых ортотропных незамкнутых конечных цилиндрических оболочек ( $k = \pi/l$ ) при наличии шарнирного закрепления Навье на боковых краях [70]. Заметим, что при  $r_0/(2n) \rightarrow 0$  имеем

$$\text{Det}\|m_{ij}\|_{i,j=1}^4 = \frac{B_{22}^2}{B_{11}^2} N(\eta_n) K_{10}(\eta_n) K_{20}(\eta_n) K_{30}(\eta_n) + O(\varepsilon_n^2), \quad (3.2.30)$$

$$\text{Det}\|m_{ij}\|_{i,j=5}^8 = \frac{B_{22}^3}{B_{11}^2 B_{66}} N(\eta_n) Q_0(\eta_n) K_{30}(\eta_n) + O(\varepsilon_n^2). \quad (3.2.31)$$

Учитывая формулы (3.2.27), (3.2.30) и (3.2.31), еще раз убеждаемся в справедливости асимптотической формулы (3.2.23).

### 3.2.5. Численные исследования.

В таблице 3.2.1 приведены приближенные значения некоторых  $\eta_n$  - корней первого уравнения из (3.2.24), (3.2.26) и уравнения (3.2.19), (3.2.20) с коэффициентами затухания соответствующих форм  $k\chi_0/n$ , для тонкостенных пластинчатых конструкций изготовленных из стеклопластика с механическими параметрами (1.2.33) и геометрическими параметрами: ширина –  $s$ , длина –  $l = 2s$ ,  $s = 4$ ,  $k = \pi/l$ ,  $h = 1/50$  при  $\beta_0 = 5s$  и  $\beta_0 = s$  соответственно. Заметим, что корни уравнения (3.2.20) при  $\beta_0 = 5s$  мало отличаются от корней уравнения Рэлея: второе уравнение из (3.2.24), поэтому не приводится. Для безразмерной характеристики частот (корни второго уравнения (3.2.24)) локализованных волн у свободного края полубесконечной пластины с параметрами (1.2.33) имеем  $\eta_n \approx 0.9868$ . Численный анализ показывает, что у свободной образующей пластинчатой конструкции, когда противолежащая граничная образующая жестко закреплена, могут появляться локализованные колебания.

При  $n\beta_0 \rightarrow \infty$  частоты локализованных волн у свободного края пластинчатой конструкции составленной из бесконечных одинаковых пластин–полос и локализованных колебаний у свободной образующей пластинчатой конструкции составленной из одинаковых прямоугольных пластин при наличии шарнирного закрепления боковых краев стремятся к частотам аналогичных задач для полубесконечной пластины и полубесконечной пластины–полосы соответственно.

В таблице 3.2.1 характеристики коэффициентов затухания планарных и изгибных колебаний принимаются величины (3.1.40).

Таблица 3.2.1

n	$K_{10}(\eta_m) =$	$\bar{B}_0(\eta_m) = 0, \beta_0 = 5s$		$\bar{B}_0(\eta_m) = 0, \beta_0 = s$		$\bar{P}_0(\eta_m) = 0, \beta_0 = s$		$K_{30}(\eta_m) = 0$
	$\eta/n$	$k\chi_0/n$	$\eta/n$	$k\chi_0/n$	$\eta/n$	$k\chi_0/n$	$\eta/n$	$\eta/n$
1	0.0082	0.+iq	0.0088	0.+iq	0.0116	-0.6160	0.9865	3.2114
2	0.0165	0.+iq	0.0165	0.+iq	0.0176	-0.6160	0.9866	3.2093
3	0.0247	0.+iq	0.0247	0.+iq	0.0253	-0.6113	0.9867	3.2057
8	0.0659	-0.0141	0.0659	0.+iq	0.0660	-0.6110	0.9868	2.2596, 3.1367
9	0.0741	-0.0142	0.0741	0.+iq	0.0742	-0.6110	0.9868	2.7088, 3.0773
10	0.0823	-0.0143	0.0823	0.+iq	0.0824	-0.6110	0.9868	-
20	0.1647	-0.0144	0.1647	-0.0082	0.1647	-0.6110	0.9868	-
110	0.9057	-0.0144	0.9057	-0.0144	0.9057	-0.6110	0.9868	3.3658, 3.6218
120	0.9880	-0.0144	0.9880	-0.0144	0.9080	-0.6110	0.9868	3.3651, 3.6235
130	1.0703	-0.0144	1.0703	-0.0144	1.0703	-0.6110	0.9868	3.3645, 3.6251

В таблице 3.2.2 приведены некоторые безразмерные характеристики собственных значений  $\eta/n$  и характеристики коэффициентов затухания соответствующих форм  $k\chi_0/n$ , для тонкостенной монолитной конструкции оболочечного типа из стеклопластика с механическими параметрами (1.2.31) при

$$R = 40; h = 1/50; r_0 = 0.1274; s = 4.00167; l = 2s; \\ k = \pi/l; \beta_0 = 5s, \beta_0 = s \quad (3.2.32)$$

Модули упругости  $E_1$  и  $E_2$  соответствуют направлениям вдоль образующей и направляющей. В качестве характеристики коэффициентов затухания приведены значения величин (3.1.41).

В таблице 3.2.2 случай  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$  соответствует задаче (3.1.1), (3.2.1)-(3.2.2), (3.2.4), а случай  $\eta_1 = \eta_2 = 0, \eta_3 = \eta$  соответствует задаче (3.1.1), (3.2.1)-(3.2.2), (3.2.4), в которой отсутствуют тангенциальные компоненты силы инерции, т.е. имеется преимущественно изгибный тип колебаний. Аналогично, случай  $\eta_1 = \eta_2 = \eta, \eta_3 = 0$



соответствует преимущественно планарному типу, а  $\eta_2 = \eta_3 = \eta$ ,  $\eta_1 = 0$  – преимущественно изгибно-крутильному типу.

Здесь же между характеристиками коэффициентов затухания и собственными частотами указан тип колебаний:  $b$  – преимущественно изгибный,  $e$  – преимущественно планарный,  $t$  – преимущественно крутильный тип колебаний.

Первые частоты собственных колебаний, локализованных у свободного края монолитной конструкции оболочечного типа, где присутствует нормальная компонента силы инерции, являются частотами колебаний преимущественно изгибного типа.

Вычисления показывают, что рядом с первыми частотами колебаний квазипоперечного типа существуют частоты незатухающих колебаний квазитангенциального типа. С увеличением  $n$  эти колебания становятся колебаниями рэлеевского типа.

При  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  собственные колебания для задач (3.1.1), (3.2.1)-(3.2.3); (3.1.1), (3.2.1)-(3.2.2), (3.2.4) расчлняются на квазипоперечные и квазитангенциальные колебания. При этом частоты этих задач стремятся к частотам аналогичных задач для пластины-полосы и прямоугольной пластины соответственно. При увеличении  $n$  колебания квазипоперечного типа становятся незатухающими. Безразмерные характеристики  $\eta_n$  собственной частоты квазитангенциальных колебаний стремятся к корню уравнения Рэля ( $K_{20}(\eta_n) = 0$ ).

При  $n\beta_0 \rightarrow \infty$  частоты волн, локализованных у свободной образующей монолитной конструкции оболочечного типа из одинаковых ортотропных незамкнутых бесконечных цилиндрических оболочек ( $k = 2\pi n_0 / l$ ), и частоты колебаний, локализованных у свободной образующей тонкостенной конструкции оболочечного типа из одинаковых ортотропных незамкнутых конечных цилиндрических оболочек ( $k = \pi / l$ ) при наличии шарнирного закрепления Навье на граничных направляющих, стремятся к частотам волн монолитной конструкции оболочечного типа из счетного числа одинаковых ортотропных незамкнутых бесконечных цилиндрических оболочек ( $k = 2\pi n_0 / l$ ) и частотам колебаний, локализованных у свободной образующей монолитной конструкции оболочечного типа из счетного числа одина-

ковых ортотропных незамкнутых конечных цилиндрических оболочек ( $k = \pi/l$ ) при наличии шарнирного закрепления Навье на боковых краях, соответственно.

В зависимости от параметра  $a^2 n^2$  при наличии продольных и крутильных компонент силы инерции могут появляться новые типы незатухающих колебаний, обусловленные корнями уравнения  $K_{30}(\eta_n) = 0$  [70].

Колебания преимущественно изгибно-крутильного типа ( $\eta_2 = \eta_3 = \eta$ ,  $\eta_1 = 0$ ), при достаточно больших  $n$ , расчленяются на квазипоперечные и преимущественно крутильные типы колебаний. При дальнейшем увеличении  $n$  колебания квазипоперечного типа становятся незатухающими (в таблицах параметры для незатухающих колебаний не приводятся или коэффициенты затухания написаны в виде  $(0. + iq)$ ).

Численный анализ показывает, что процесс затухания зависит от типа колебаний и от геометрических и физических параметров конструкции: колебания квазипоперечного типа в основном затухают медленнее, чем остальные типы колебаний.

Аналогичные расчеты для цилиндрических оболочек с теми же механическими (1.2.33) и геометрическими параметрами как в (3.2.32), при  $\beta_0 = s$  выявили различия в первых частотах и соответствующих коэффициентах затуханий по сравнению с данными при  $\beta_0 = 5s$ . Оказалось, что затухания в конструкции оболочечного типа при  $\beta_0 = 5s$  происходят медленнее, чем в цилиндрических оболочках при  $\beta_0 = s$ . С увеличением  $n$ , частоты и коэффициенты затухания для  $\beta_0 = s$  стремятся к соответствующим значениям при  $\beta_0 = 5s$ .

Для проверки достоверности результатов, полученных приближенным методом рассмотренным в данном параграфе, в таблице 3.2.3 приведены характеристики собственных частот  $\eta/n$  конструкции оболочечного типа с сопрягающими элементами с параметрами (1.2.33) и (3.2.32), и кривизнами срединной поверхности (Рис.3.5)

$$R^{-1}(\beta) = \begin{cases} -r^{-1}, & \beta \in (\beta_i, \beta_{i+1}) \\ R^{-1}, & \beta \notin (\beta_i, \beta_{i+1}) \end{cases}, \quad i = 1, 3, 5, 7; \quad R = 40; \quad r = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{10} \quad (3.2.33)$$

рассчитанные методом прогонки с ортогонализацией [131].

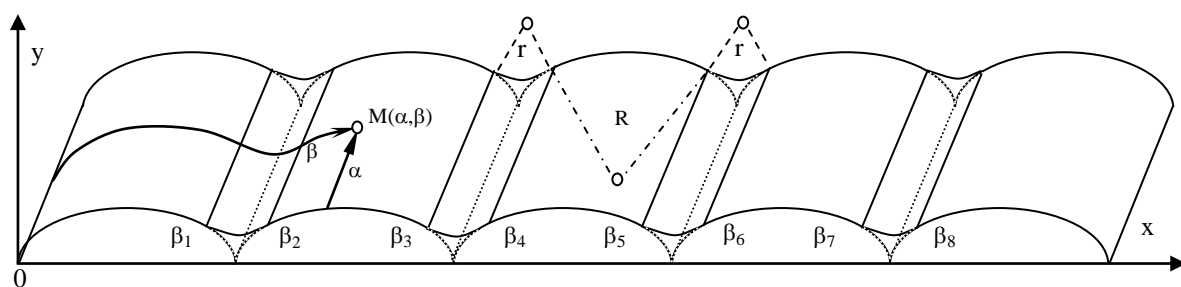


Рис.3.5

Анализ результатов, приведенных в таблицах 3.2.2 и 3.2.3, показывает, что значения характеристик собственных частот конструкции оболочечного типа (Рис.3.4) и конструкции оболочечного типа с сопрягающими элементами (Рис. 3.5) хорошо согласуются при радиусах сопрягающих элементов стремящихся к нулю ( $r \rightarrow 0$ ).

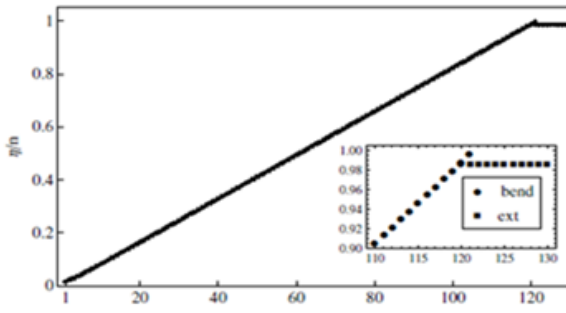
На графике 1(а). показана зависимость безразмерной характеристики собственной частоты от волнового числа  $n$ . Подрисунок показывает зависимость разделения изгибных и планарных волн. На графике 2(а) показана зависимость безразмерной характеристики собственной частоты изгибно-крутильных колебаний. Подрисунок показывает разделение изгибных и крутильных волн. На графиках 1(б) и 2(б) показаны разности между безразмерными характеристиками собственных частот полученные асимптотическим методом и методом прогонки  $\Delta\eta/n = (\eta_{\text{прогонки}} - \eta_{\text{асимпт}})/n$ , для  $n \in [1, 10]$ . При  $n > 3$   $\Delta\eta/n \rightarrow 0$  для всех значений  $r$ . Даже при  $r=0.1$  значение  $\Delta\eta/n < 10^{-6}$  для всех  $n$ . Это подтверждает достоверность применимости приближенного (асимптотического) метода для изучения локализованных колебаний конструкции оболочечного типа.

Таблица 3.2.2

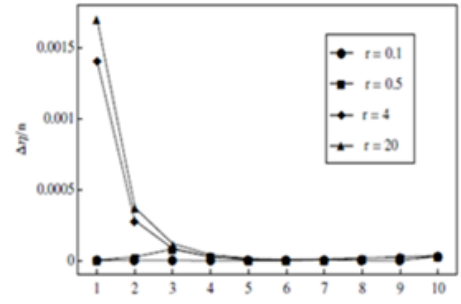
$\beta_0$	m	$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$	$\eta_1 = \eta_2 = 0, \eta_3 = \eta$	$\eta_1 = \eta_2 = \eta, \eta_3 = 0$	$\eta_2 = \eta_3 = \eta, \eta_1 = 0$
		$k\chi_0/m \quad \eta/m$	$k\chi_0/m \quad \eta/m$	$k\chi_0/m \quad \eta/m$	$k\chi_0/m \quad \eta/m$
	1	-0.4047 b 0.01678	-0.4047 b 0.01678	--	-0.4047 b 0.01678
	2	-0.2773 b 0.02213	-0.2773 b 0.02214	--	-0.2773 b 0.02213
	3	-0.2199 b 0.02872	-0.2199 b 0.02872	-0.1202 e 0.98100	-0.2199 b 0.02872
	8	-0.0974 b 0.06680	-0.0971 b 0.06681	-0.0398 e 0.98622	-0.0974 b 0.06681
	9	-0.0629 b 0.07482	-0.0628 b 0.07482	-0.0392 e 0.98642	-0.0629 b 0.07482
5s	10	-0.0462 b 0.08289	-0.0461 b 0.08289	-0.0388 e 0.98654	-0.0462 b 0.08289
	20	-0.0165 b 0.16475	-0.0165 b 0.16475	-0.0382 e 0.98674	-0.0165 b 0.16475
	110	-0.0144 b 0.90568	-0.0144 b 0.90568	-0.0382 e 0.98676	-0.0144 b 0.90568
	120	-0.0382 e 0.98675	--	-0.0382 e 0.98676	-0.0366 t 0.98771
		-0.0144 b 0.98801	-0.0144 b 0.98801	--	-0.0145 b 0.98802
	130	-0.0382 e 0.98676	-0.0144 b 1.07035	-0.0382 e 0.98676	-0.0366 t 0.98772
	1	-0.3853 b 0.01880	-0.3853 b 0.01880	--	-0.3853 b 0.01880
	2	-0.2717 b 0.02261	-0.2717 b 0.02261	-0.3683 e 0.9098	-0.2717 b 0.02261
	3	-0.2179 b 0.02885	-0.2180 b 0.02885	-0.0688 e 0.98763	-0.2179 b 0.02885
	8	-0.0955 b 0.06682	-0.0952 b 0.06682	-0.0288 e 0.99281	-0.0955 b 0.06682
	9	-0.0602 b 0.07484	-0.0600 b 0.07484	-0.0320 e 0.99097	-0.0602 b 0.07484
s	10	-0.0423 b 0.08292	-0.0422 b 0.08292	-0.0340 e 0.98971	-0.0423 b 0.08292
	20	-0.0124 b 0.16477	-0.0165 b 0.16477	-0.0380 e 0.98687	-0.0124 b 0.16477
	110	-0.0144 b 0.90568	-0.0144 b 0.90578	-0.0382 e 0.98676	-0.0144 b 0.90568
	120	-0.0382 e 0.98675	--	-0.0382 e 0.98676	-0.0207 t 0.98771
		-0.0144 b 0.98801	-0.0144 b 0.98801	--	-0.0141 b 0.98802
	130	-0.0382 e 0.98676	-0.0144 b 1.07035	-0.0382 e 0.98676	-0.0366 t 0.98772

Таблица 3.2.3

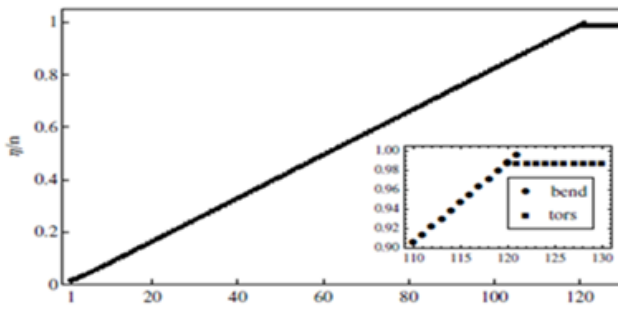
r	m	$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$	$\eta_1 = \eta_2 = 0, \eta_3 =$	$\eta_1 = \eta_2 = \eta, \eta_3 = 0$	$\eta_2 = \eta_3 = \eta, \eta_1 = 0$
		$\eta/m$	$\eta/m$	$\eta/m$	$\eta/m$
$\frac{1}{2}$	1	b 0.01817	b 0.01817	e 0.71714	b 0.01817
	2	b 0.02241	b 0.02241	e 0.90099	b 0.02241
	3	b 0.02880	b 0.02881	e 0.96163	b 0.02880
	8	b 0.06682	b 0.06682	e 0.98616	b 0.06682
	9	b 0.07484	b 0.07484	e 0.98639	b 0.07484
	10	b 0.08292	b 0.08292	e 0.98652	b 0.08292
	20	b 0.16477	b 0.16477	e 0.98674	b 0.16477
	110	b 0.90568	b 0.90568	e 0.98676	b 0.90568
	120	e 0.98675	--	e 0.98676	t 0.98771
	130	b 0.98801	b 0.98801	--	b 0.98802
$\frac{1}{10}$	1	b 0.01815	b 0.01699	e 0.71700	b 0.01815
	2	b 0.02241	b 0.02221	e 0.90052	b 0.02241
	3	b 0.02875	b 0.02875	e 0.96245	b 0.02875
	8	b 0.06682	b 0.06682	e 0.98621	b 0.06682
	9	b 0.07482	b 0.07484	e 0.98641	b 0.07482
	10	b 0.08292	b 0.08292	e 0.98653	b 0.08292
	20	b 0.16492	b 0.16477	e 0.98674	b 0.16513
	110	b 0.90568	b 0.90568	e 0.98676	b 0.90568
	120	e 0.98675	--	e 0.98676	t 0.98771
	130	b 0.98801	b 0.98801	--	b 0.98802
	130	e 0.98676	b 1.07035	e 0.98676	t 0.98772



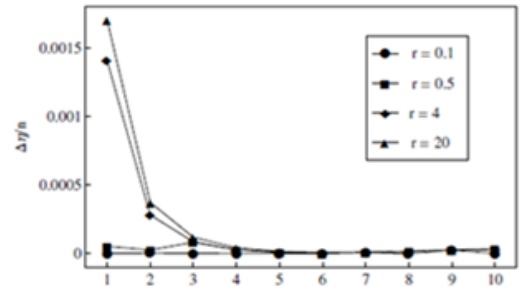
Граф. 1(а)



Граф 1(б)



Граф. 2(а)



Граф 2(б)

## Заключение

При условии собственных колебаний, исходя из системы уравнений динамики соответствующей классической теории ортотропных ЦО рассмотрены задачи:

- Исследованы собственные колебания безмоментной ортотропной ЦО переменной кривизны со свободными торцами и жестко защемленными граничными образующими. Получены дисперсионные уравнения для нахождения собственных частот. В частности получены дисперсионные уравнения для полубесконечной ортотропной безмоментной незамкнутой ЦО переменной кривизны со свободным торцом, когда граничные образующие жестко защемлены. Для круговой ортотропной безмоментной ЦО открытого профиля со свободными торцами и жестко защемленными граничными образующими, найдены дисперсионные и характеристические уравнения для нахождения безразмерной характеристики собственных частот и коэффициентов затухания. Получены дисперсионные и характеристические уравнения прямоугольной ортотропной пластины со свободными и жестко защемленными параллельными сторонами. Получен аналог уравнения Рэлея для полубесконечной ортотропной пластины-полосы со свободным торцом и жестко защемленными смежными краями. Приведены результаты численных исследований.
- Исследован вопрос существования собственных колебаний тонкой упругой ортотропной круговой незамкнутой ЦО со свободными торцами и жестко защемленными граничными образующими (моментная задача). Получены дисперсионные уравнения для нахождения собственных частот возможных типов колебаний. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогичной задачи для прямоугольной пластины. Доказана асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и задачи на собственные значения полубесконечной ортотропной ЦО со свободным торцом при наличии жесткого защемления на граничных образующих. Приведены результаты численных исследований.
- Получены дисперсионные уравнения для нахождения собственных частот возможных типов колебаний для тонкостенной упругой конструкции обо-

лочечного типа составленной из одинаковых ортотропных незамкнутых круговых бесконечных и конечных ЦО со свободными граничными образующими. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичных задач для ортотропной пластинчатой тонкостенной конструкции (в частности, для аналогичных задач пластины–полосы и прямоугольной пластины) соответственно. Доказывается также асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и задач на собственные значения для полубесконечных тонкостенных упругих конструкций оболочечного типа составленных из счетного числа одинаковых ортотропных незамкнутых круговых бесконечных и конечных ЦО со свободной граничной образующей. Численно показана эффективность полученных асимптотических формул.

- Получены дисперсионные уравнения для нахождения собственных частот возможных типов колебаний для тонкостенной упругой конструкции оболочечного типа составленной из одинаковых ортотропных незамкнутых круговых бесконечных и конечных ЦО со свободным и жестко заземленным граничными образующими. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичных задач для ортотропной пластинчатой тонкостенной конструкции (в частности, для аналогичных задач пластины–полосы и прямоугольной пластины) соответственно. Доказывается также асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и задач на собственные значения для полубесконечных тонкостенных упругих конструкций оболочечного типа, составленных из счетного числа одинаковых ортотропных бесконечных и конечных ЦО. Численно показана эффективность полученных асимптотических формул и достоверность применимости приближенного (асимптотического) метода.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Абраамян Б.Л., Саакян А.В. О влиянии толщины упругого волновода и граничных условий на его поверхностях на скорость распространения поверхностной волны. Посвящается 90-летию академика Н.Х. Арутюняна. Изд. "Гитутюн" НАН РА, Сборник научных трудов: Проблемы механики деформируемых тел. Ереван 2003, с. 34-40.
2. Аветисян А.С., Белубекян М.В. Распространение поверхностных волн в пьезоэлектрической среде при наличии внешнего электрического поля. Изд. АН Арм. ССР. Ереван 1987, с. 85–90.
3. Аветисян А.С., Казарян К.Б. Волны в "фонон-фотон" кристаллах и импеданс. В сбор. науч. тр.: "Проблемы механики деформируемого твердого тела" посвящ. 90-летию академика НАН Армении С.А. Амбарцумяна. Ереван. 2012, с. 15-22.
4. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, Физматлит. 1997, 415 с.
5. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван, Изд-во "Гитутюн" НАН РА, 2004, 468с.
6. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок // ПММ, 1986, т. 50, вып. 2, с. 271–278.
7. Агаловян Л. А., Гулгазарян Л.Г. О частотах собственных колебаний и пограничном слое для ортотропной пластины в смешанной краевой задаче // Изв. НАН Армении. Механика, 2001, т. 54, № 23, с. 32–41.
8. Агаловян Л.А., Закарян Т.В. О решении первой динамической пространственной краевой задачи для ортотропной прямоугольной пластинки // Докл. НАН РА, 2009, т. 109, № 4, с. 304–309.
9. Агаловян Л.А., Оганесян Р.Ж. Собственные колебания ортотропных пластин при смешанных краевых условиях на лицевых поверхностях // Изв. НАН Армении. Механика, 2003, т. 56, № 4, с. 18–28.

10. Агаловян Л.А., Саргсян М.З. О собственных колебаниях ортотропных пластин при наличии вязкого сопротивления // Изв. НАН Армении. Механика, 2011, т. 64, № 1, с. 26–36.
11. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. Асимптотический анализ напряженно-деформированного состояния ортотропной полосы // Уч. Записки ЕГУ 1977, № 1, с. 22–30.
12. Агаловян М.Л. Пространственная задача о вынужденных колебаниях пластин с общей анизотропией // В. Сб. “Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести”. Изд. “Гитутюн” НАН РА. Ереван 2006. С. 42-49.
13. Александров Б.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями М.: Наука 1986, 336с.
14. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука 1974, 446 с.
15. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961, 384 с.
16. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987, 360 с.
17. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. К вопросу об изгибных волнах, локализованных вдоль кромки пластинки. Прикладная механика. т. 30, № 2, 1994, с. 61–68.
18. Амбарцумян С.А., Гнуни В.Ц. О вынужденных колебаниях и динамической устойчивости трехслойных ортотропных пластинок // Изв. ОТН АН СССР, Мех. И Маш. 1961, № 3.
19. Асланян А.Г., Лидский В. Б. Распределение собственных частот тонких упругих оболочек. М.: Наука. 1974, 155 с.
20. Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Осесимметричные колебания цилиндрической оболочки в магнитном поле // Изв. АН Арм. ССР, Механика. т. 20, № 5, 1967.
21. Багдасарян Р.А., Белубекян М.В., Казарян К.Б, Волны Рэлея в ортотропной полубесконечной пластине. Доклады НАН Армении, 1991, т.91. №3, с. 245-249.
22. Багдасарян Р.А., Белубекян М.В., Казарян К.Б. Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочке // В сб. Волновые задачи механики. Нижний Новгород. 1992, с. 87–93.
23. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Поверхностные магнитоупругие волны Рэлея. – Механика. Межвуз. сб. науч. тр. Ереван, ЕГУ 1982, вып. 2, с. 31–37.

24. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Изд. ЕГУ, Ереван. 2006, 491 с.
25. Багдасарян Р.А., Казарян К.Б. Изгибные поверхностные волны в ортотропной пластинке // Докл. АН Арм. ССР, 1986 т. 83, № 2, с. 69–72.
26. Багдоев А.Г. Распространение волн в сплошных средах. Изд. АН Арм. ССР, Ереван 1981, с. 308.
27. Багдоев А. Г., Варданян А.В., Варданян С.В., Кукуджанов В.Н. Определение линейных частот колебаний ферромагнитной оболочки // Изв. РАН МТТ, 2007, №5, с. 146 -157.
28. Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А. Нелинейные колебания пластин в продольном магнитном поле // Изв. АН Арм. ССР, Механика. т. 35, № 1, 1982, с. 16–22.
29. Белубекян М.В. Поверхностные волны в упругих средах. В кн. “Проблемы механики деформируемого твердого тела”, посв. 75-летию академика НАН Армении С.А. Амбарцумяна. Ереван. 1997, 208 с.
30. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. Сб. “Проблемы механики тонких деформируемых тел”, посв. 80-летию акад. С.А. Амбарцумяна. Изд-во НАН Армении. Инс. Механики. Ереван. 2002, с.67–88.
31. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Трехмерная задача поверхностных волн Рэлея // Докл. НАН Армении, 2005, т. 105, № 4, с. 362–369.
32. Белубекян М.В., Гулгазарян Г.Р., Саакян А.В. Волны типа Рэлея в полубесконечной круговой замкнутой цилиндрической оболочке // Изв. НАН Армении. Механика, 1997, т. 50, № 3–4, с. 49–55.
33. Белубекян М.В., Енгибарян И.А. Волны локализованные вдоль свободной кромки пластинки с кубической симметрией // Изв. РАН, МТТ, 1996, № 6, с. 139–143.
34. Белубекян М.В., Казарян К.Б. К вопросу существования поверхностных сдвиговых волн в однородном упругом полупространстве // Изв. НАН Армении. Механика, 2000, т. 53, № 1, с. 6–12.
35. Белубекян В.М., Мгерян Д.Э. Пространственная задача распространения поверхностных волн в трансверсально-изотропной упругой среде // Изв. НАН Армении. Механика. т. 59, № 2, 2006, с. 3–9.

36. Беспалова Е.И. К решению стационарных задач теории пологих оболочек обобщенным методом Канторовича-Власова // Прикладная Мех. 2008, 44, № 11, с.99-111.
37. Беспалова Е. И. Решение задач теории упругости методами полных систем // Ж. вычислительной математики и математической физики. 1989, 29, № 9, с. 1346-1353.
38. Беспалова Е.И. Об одном подходе к исследованию свободных колебаний упругих элементов конструкций // Прикл. Мех. 1988. Т. 24. № 1, с. 43-48.
39. Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б. Об особенностях свободных планарных колебаний ортотропных прямоугольных пластин // Механика композитов: в 12-ти томах, Т 11. 2001, с. 118.
40. Бергман Р.М. Исследование свободных колебаний некруговых цилиндрических оболочек // Прикл. Мат. и мех., 1973. Т. 37. Вип. 6, с. 1125-1134.
41. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды.- М.: наука. 1983, 448 с.
42. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. – М.: Наука, 1981, 288 с.
43. Вильде М.Б., Каплунов Ю.Д., Косович Л.Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М.: физматлит. 2010. 280 с.
44. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. – М. – Л.: Гостехиздат. 1949, с. 784.
45. Власов В.З. Новый практический метод расчетов складчатых покрытий и оболочек// Строительная промышленность.- 1932. № 11, с. 21-26.
46. Ворович И.И., Лебедев Л.П. Некоторые вопросы механики сплошной среды и математические проблемы теории тонкостенных конструкций //Прикл. Мех. 2002. Том 38. № 4, с. 3-19.
47. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: физматгиз, 1960, 491с.
48. Галимов К.З., Паймушин В.Н. Теория оболочек сложной геометрии. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1985. 163 с.
49. Геворкян Г.З., Киракосян Р. М. Свободные поперечные колебания прямоугольных ортотропных пластин переменной толщины с учетом поперечных сдвигов и

- инерции вращения. Сборник “Проблемы механики тонких деформируемых тел”. НАН Армении 2002, с. 137–147.
50. Гринченко В.Т. Эффекты локализации волновых движений в упругих волноводах. Прикл. механика 2005, т. 41, № 9, с. 38–45.
51. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. Думка. 1981, 283 с.
52. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Распределение поверхностных волн вдоль полубесконечной упругой пластины // XIII всесоюз. конф. по теории пластин и оболочке, 1983, ч. II, Г–И.
53. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. О резонансе в полубесконечной упругой полосе // Прикл. Мех. 1980. Т. 16, № 2, с. 77-81.
54. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. Об одном подходе к численному исследованию свободных колебаний тонкостенных конструкций // Прикл. Механика. 1982. Т. 18. № 8, с. 40-48.
55. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Некоторые подходы к решению задач теории тонких оболочек с переменными геометрическими и механическими параметрами// Прикл. Механика, 2002. Т 38. № 11, с. 32-68.
56. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Понкратева Н.Д. Расчет некруговых цилиндрических оболочек.- Киев: Наук. Думка, 1977, 104 с.
57. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И., Свободные колебания элементов оболочечных конструкций.- Киев: Наукова Думка, 1986, 170 с.
58. Гольденвейзер А.П., Теория упругих тонких оболочек. – М. : Наука, 1976, 512 с.
59. Гольденвейзер А.П., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек.: Наука. 1979, 383 с.
60. Гондкевич В.С. Собственные колебания пластинок и оболочек, - Киев: Наукова Думка, 1964, 587 с.
61. Гулгазарян Г.Р. О локализованных собственных колебаниях у свободного торца полубесконечной замкнутой круговой цилиндрической оболочки // Изв. РАН МТТ, 2003, № 1, с. 180–192.
62. Гулгазарян Г.Р. О колебаниях полубесконечной ортотропной цилиндрической оболочки открытого профиля // Прикл. механика 2004, т. 40, № 2, с. 100–113.

63. Гулгазарян Г.Р. О спектре безмоментного оператора в теории тонких оболочек вращения // Всесоюзный журнал “Дифференциальные уравнения”. Т. 10, № 1, 1974, с. 41-52.
64. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г. Колебания ортотропной гофрированной цилиндрической оболочки со свободными краями // Межд. журн. Прикл. Механика. Т. 42, № 12, 2006. с. 97-114.
65. Гулгазарян Г.Р. Колебания безмоментной консольной незамкнутой ортотропной цилиндрической оболочки // Изв. АН РФ Механика Твёрдого Тела № 1, 2007, с. 84-99.
66. Гулгазарян Г.Р., Собственные колебания тонкой упругой ортотропной консольной цилиндрической оболочки // Междун. научный журнал “Прикладная механика”, том 44. № 5. 2008, с. 68-91.
67. Гулгазарян Г.Р. О существовании волн типа Рэлея в полубесконечной замкнутой некруговой цилиндрической оболочке. // Изв. НАН Армении. Механика, Т. 52. №2, 1999, с. 22-29.
68. Гулгазарян Г.Р. Волны типа Рэлея в полубесконечной гофрированной цилиндрической оболочке. // Изв. АН РФ, Механика твёрдого тела. № 3, 2001, с.151-158.
69. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г. О колебаниях тонкой упругой ортотропной цилиндрической оболочки со свободными краями // Проблемы прочности и пластичности. Нижний Новгород. Изд-во Нижегород. Ун-та, 2006, Вып. 68, с.115-160.
70. Гулгазарян Г.Р. О волнах, локализованных у образующей полубесконечной ортотропной гофрированной тонкой упругой цилиндрической оболочки.// Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского сер. Мех. выпуск 1(5), 2003, с. 23-31.
71. Гулгазарян Г.Р. Колебания в консольной ортотропной гофрированной безмоментной цилиндрической оболочке // Научно-методический сборник: Математика в Высшей Школе. вып. 3(9), 2004, с. 46-66.
72. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л. Г. Колебания, локализованные у свободного края полубесконечной незамкнутой безмоментной цилиндрической оболочки// Акустичный Весник АН Украина. Т. 2, № 4. 1999, с. 42-48.

73. Гулгазарян Г.Р., Лидский В.Б. Плотность частот свободных колебаний тонкой анизотропной оболочки, составленной из анизотропных слоев. // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. № 3, 1982, с. 171- 174.
74. Гулгазарян Г.Р., Лидский В.Б., Эскин Г.Н. Спектр безмоментной системы в случае тонкой оболочки произвольного очертания // Сибирский математический журнал. Т. 14, № 5, 1973, с. 978-986.
75. Гулгазарян Г.Р., Казарян К.Б. Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой некруговой цилиндрической оболочке. // Изв. НАН Армении. Механика, Т. 50. №1. 1997, с. 27-33.
76. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г., Саакян Р.Д. Колебания тонкой упругой ортотропной круговой цилиндрической оболочки со свободным и шарнирно закрепленным краями // Изв. АН РФ. Прикладная математика и механика. Том 72. Вып. 3. 2008, с. 463-475.
77. Гулгазарян Г.Р., Саакян Р.Д. Колебания безмоментной незамкнутой ортотропной цилиндрической оболочки переменной кривизны с тремя шарнирно закрепленными краями // Изв. НАН Армении. Механика. Т. 60. № 2, 2007, с. 47-58.
78. Гулгазарян Г.Р., Саакян Р.Д. Колебания тонкостенной упругой конструкции из незамкнутых ортотропных цилиндрических оболочек со свободной и шарнирно закрепленной граничными образующими // Проблемы прочности и пластичности. Нижний Новгород. Изд-во Нижегород. Ун-та, 2007, вып. 69, 2007, с. 143-158.
79. Гулгазарян Г.Р., Срапионян Дж.Л. О колебаниях тонкостенной упругой конструкции из незамкнутых цилиндрических оболочек со свободным и жестко защемленным граничными образующими//Сб.: Актуальные проблемы механики сплошной среды, Ереван. 2007, с. 156-158.
80. Гулгазарян Г.Р., Срапионян Дж.Л. Колебания тонкостенной упругой конструкции из незамкнутых ортотропных цилиндрических оболочек со свободными граничными образующими. // Изв. НАН Армении. Механика. Т. 61. № 3, 2008, с.28-40.
81. Гулгазарян Г.Р., Срапионян Дж.Л. Колебания тонкой упругой ортотропной круговой незамкнутой цилиндрической оболочки со свободными торцами и жестко защемленными граничными образующими// Сб.: Актуальные проблемы механики сплошной среды. Том 1, Ереван 2010, с. 219-223.

82. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Р.Г., Хачаян А.А. Колебания ортотропной цилиндрической панели с разными граничными условиями.// Межд. журнал. Прикл. Механика, Т.49, №5, 2013, с.40-61.
83. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Р.Г., Миклашевич И.А., Плетежов А.А. Свободные интерфейсные колебания бесконечной безмоментной цилиндрической оболочки с произвольной гладкой направляющей. Вестник фонда фундаментальных исследований, 2012, № 1. Стр. 59-80.
84. Гулгазарян Г.Р., Хачаян А.А. Колебания безмоментной незамкнутой ортотропной упругой цилиндрической оболочки переменной кривизны со свободным торцом и тремя жестко защемленными краями. Изд. НАН Армении Механика 2011, Том 64, № 1. Стр. 37-49.
85. Гулгазарян Г.Р., Хачаян А.А. Локализованные колебания у свободного торца тонкой упругой ортотропной незамкнутой цилиндрической оболочки с жестко защемленными граничными образующими. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Труды 7-мой международной конференции, Ереван – 2011. Стр.153-159.
86. Гузь А.Н., Заруцкий В.А., Амиро И.Я. и др. Экспериментальные исследования тонкостенных конструкций.- Киев: Наук. Думка, 1984, 240 с.
87. Ермоленко В.М. Влияние параметров ортотропии на спектр в задачах колебаний оболочек // ПМТФ, 1980. № 1, с. 163-170.
88. Ишлинский А.Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин // Докл. АН СССР – 1954-95, №3. С. 477-479.
89. Канторович Л.В. Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла // Изв. АН СССР Отд. Мат. и ест. наук. 1933, № 5, с. 647- 653.
90. Килчевский Н.А. Основы аналитической механики оболочек. К.: Изд-во АН УССР, 1972, 354 с.
91. Киракосян Р.М. Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов. Ереван: Гитутюн. 2000, 122 с.
92. Коненков Ю.К. Об изгибной волне “рэлеевского” типа. // Акуст. Журнал. 1960, т.6, № 1, с. 124 – 126.



93. Костромин В.П., Мяченков В.И. Колебания незамкнутых цилиндрических оболочек переменной кривизны // Прикл. Механика. 1972. Т.8. Вып. 8. С. 113-116.
94. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа, М.-Л.: Гостехиздат, 1952, 695 с.
95. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.- М.: Наука, 1968. 431с.
96. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения.- М.: Изд-во "Мир". 1971, 371 с.
97. Лопатинский Я.Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. // Украинский матем. журн. 1953, Т 5. № 2, с. 123-151.
98. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат. 1955, 492 с.
99. Михасев Г.И. О распространении изгибных волн в некруговой цилиндрической оболочке // Изв. РАН Мех. Тверд. Тела. 1994, № 3, с. 164-172.
100. Михасев Г.И., Тавстик П.Е. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы. Москва, физматлит. 2009, 290с.
101. Муштари Х. М., Терегулов И.Г. К теории оболочек средней толщины // Докл. АН СССР 1959. 128, № 6, с. 1144–1148.
102. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных // М.: "Высшая школа" 1977. 430 с.
103. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970, 512 с.
104. Мовсисян Л.А. К модуляционной устойчивости нелинейных волн в пьезоэлектрической пластинке // Докл. НАН Армении, т. 97, № 2, 1997, с. 76–78.
105. Мовсисян Л.А. Колебание цилиндрической оболочки произвольного сечения. // Изв. АН СССР, Механика, 1968. Т. 21. № 5-6, с. 51-56.
106. Мяченков В.И., Григорев И.В. Расчет оболочечных конструкций на ЭВМ.- М.: Машиностроение, 1981. 216 с.
107. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л. Судпромгиз. 1962. 431с.
108. Пискунов В. Г., Рассказов А. О. Развитие теории слоистых пластин и оболочек // Прикл. мех. 2002, т. 38, № 2, с. 22–56.

109. Петрашень Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1980, 280 с.
110. Прокопов В.Г., Беспалова Е.И., Шеренковский Ю.В. Метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям П.В. Конторовича и общий метод решения многомерных задач теплопереноса // Инж. Физ. Журнал, 1982, 42, № 6, с. 1007 – 1013.
111. Рамская Е.И., Шульга Н.А. Распространение неосесимметричных упругих волн в ортотропном полом цилиндре // Прикл. Механика, 1983. Т 19. № 9. С. 9-13.
112. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М., Изд., "Мир" , 1979, 587 с.
113. Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван: Изд-во Ер. Ун-та, 1976, 536 с.
114. Саркисян С.В., Мурадян Л.Г. О низкочастотных и высокочастотных колебаниях прямоугольной пластинки//В сб.: Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем, 2002, с. 201-204.
115. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван, Изд-во АН Армении, 1992, 235 с.
116. Солонников В.А. О матрицах Грина для эллиптических краевых задач // Труды МИАН, 110 (1970), с. 107-144.
117. Солонников В.А. Об общих краевых задачах для систем эллиптических в смысле А. Дуглиса-Ниренберга// Изв. АН СССР, Математика, 1964. Т28. С. 665-706. Труды Матем. Ин-та АН СССР, 1970. Т 110. № 6, с. 233-297.
118. Срапионян Дж.Л. Изгибные собственные колебания прямоугольной ортотропной пластинки с противоположными свободными и жестко защемленными сторонами// Сборник трудов международной школы-конференции молодых ученых: Механика-2009. 2009, с. 313-315.
119. Срапионян Дж.Л. Колебания безмоментной незамкнутой ортотропной цилиндрической оболочки переменной кривизны со свободными торцами и жестко защемленными граничными образующими // АГПУ имени Х. Абовяна, Ученые записки, № 1(20). 2014. с.86-109.
120. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука. 1979. 560с.

121. Тонкостенные оболочечные конструкции: Теория, эксперимент и проектирования // Под ред. Ю.Ч. Фыни, Э.Э. Секлера, М.: Машиностроение, 1980, 607 с.
122. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Том 1, М.: Физматгиз, 1963, 342 с.
123. Филипов И. Г., Бахрамов Б.М. Волны в упругих однородных и неоднородных средах // Ташкент: Фан. 1978, 151с.
124. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления Т. 3, 1969, М.: Наука, 656 с.
125. Хачаян А.А. Колебания безмоментной незамкнутой ортотропной упругой цилиндрической оболочки со свободным и шарнирно закрепленными торцами и жестко защемленными граничными образующими. Актуальные проблемы механики сплошной среды. Труды 2-ой международной конференции. Ереван – 2010. Т. 2. Стр. 204-207
126. Шульга Н.А. Распространение осесимметричных упругих волн в ортотропном полом цилиндре // Прикл. механика 1974, т. 10, № 9, с. 14–18.
127. Шульга Н.А. Распространение гармонических волн в анизотропных пьезоэлектрических цилиндрах. Однородные пьезокерамические волноводы // Прикл. мех. 2002, т. 38, № 8, с. 46–68.
128. Шульга Н.А., Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л. Распространение неосесимметрических упругих волн в анизотропном полом цилиндре // Прикл. мех. 1986, т. 22, № 8, с. 118–121.
129. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек. ч. 1. Л.: Изд-во ЛГУ, 1962. 272с.
130. I.D. Abrahams, A.N. Norris, On the Existence of Flexural Edge Waves on Submerged Elastic Plates. Proceedings of the Royal Society. A 456 (2000): 1559-1582.
131. Abramov A.A., On Transfer of Boundary Conditions for Systems of Linear Ordinary Differential Equations (A Variant Of Transfer Method). SSSR Compyt. Math. Phys. 1961, 1(3), P. 542 – 544.
132. Ambur DR, Hasanyan D, Librescu L and Qin Z. Diffraction of harmonic flexural waves in a cracked elastic plate carrying electrical current. Proc R Soc Lond 2005; A461: 3542-3560.
133. Andrianov I.V. and Awrejcewicz J. Edge-localized effects in buckling and vibrations of a shell with free in circumferential direction ends. Acta Mechanica 2004; 173: 41-47.

134. Barnett D.M., Lothe J., Gavazza S.D. and Musgrave. M.P.: Considerations of the existence of interfacial (Stoneley) waves in bonded anisotropic half-spaces. Proc. Roy. Soc. Lond., A402, 153-166 (1985).
135. Belubekyan M.V., Ghazaryan K.B. Elastic waves propagation in an elastic layer with cubic anisotropic properties. // Изв. НАН Армении, Механика, 1996, т 49, 4, с. 29-35.
136. Belubekyan M., Ghazaryan K., Marzocca P., Cormier C. Localized Bending Waves in a Rib- Reinforced Elastic Orthotropic Plate, Journal of Applied Mechanics, USA, 2007, Vol. 74. p.169-171.
137. Belubekyan M., Ghazaryan K., Marzocca P., Cormier C. Localized Magneto elastic Bending Vibration of an Electroconductive Elastic Plate, Journal of Applied Mechanics, USA.2007. vol. 74. p. 1071-1076.
138. Danoyan Z., Ghazaryan K., Piliposian G. Surface gap wave propagation in layered electro-magneto-elastic structures. Waves in Random and Complex Media. UK. Vol. 19. No. 3. 2009, p.521-534.
139. Fu Y.B. and Brookes D.W.: Edge waves in asymmetrically laminated plates. J. Mech. Phys. Solids, 54, 1-21 (2006).
140. Gazis D.G. and Mindlin R.D. Extensional vibrations and waves in a circular disk and a semi-infinite plate. J Appl Mech 1960; 27: 541-547.
141. Ghazaryan K., Ghazaryan R., Hachkevich O., Marzocca P. Gap Surface Waves in a System of Two Elastic Superconducting Semi-spaces Separated by a Narrow Gap. Journal of Applied Mechanics, Proceedings of ASME, USA, November 2011, Vol. 78.
142. Graff K. Wave motion in elastic solids, Dover edition. New York: Dover Publications Inc., 1991.
143. Green A. E. Boundary Layer Equations in the Linear Theory of Thin Elastic Shells // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1962. Vol. 269, № 1339, pp. 216 – 228.
144. Green A. E. On the Linear Theory of Thin Elastic Shells // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1962. Vol. 266, № 1325, pp. 143–161.
145. Ghulghazaryan G. R., Ghulghazaryan R. G., Srapionyan Dg. L. Localised vibrations of a thin-walled structure consisted of orthotropic elastic non-closed cylindrical shells with free and rigid-clamped edge generators. ZAMM. Z. Angew. Math. Mech. 93, № 4, pp. 269-283. (2013).
146. Kaplunov J.D., Wilde M.V. Edge and interfacial vibrations in elastic shells of

- revolution. *Journal of Applied Mathematics and Physics*. 51, (2000). pp.29-48.
147. Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu. and Wilde M.V. Free localized vibrations of a semiinfinite cylindrical shell, *J. Acoust. Soc. Am.*, 107, (2000), pp. 1383-1393.
  148. Kaplunov J., Pichugin, AV. and Zernov, V Extensional edge modes in elastic plates and shells. *J Acoust Soc Am* 2008; 125: 621-623.
  149. Krushynska A.A. Flexural edge waves in semi-infinite elastic plates. *J Sound Vibration* 2011; 330: pp.1964-1976.
  150. Meleshko W. Propagation of surface wave along the edge of semi-infinite elastic layer. *Dopovidi Akademii nauk UkrSSR Ser A* 1982; 3: 33-36 (in Russian).
  151. Mkrtchyan H.P. Localized bending waves in an elastic orthotropic plate, *Proceedings Armenian National Academy of Science, Mechanics*. 56 (4), (2003), pp.66-68.
  152. Norris A.N. Flexural edge waves, *Journal of Sound and Vibrations*, 171 (4), (1994) pp.571-573.
  153. Norris A.N and Abrahams I.D. On the existence of flexural edge waves on submerged elastic plates. *Proc R Soc Lond* 2000; A456: pp.1559-1582.
  154. Piliposian G.T., Avetisyan A.S., Ghazaryan K.B. Shear wave propagation in periodic phononic/photonic piezoelectric medium. *International Journal Wave Motion*, Elsevier publisher, v.49 , iss. 1, January, 2012, pp. 125-134.
  155. Piliposian G.T., Belubekyan M.V., Ghazaryan K.B. Localized bending waves in a transversely isotropic plate, *Journal of Sound and Vibration*, 329, 2010, pp. 3596-3605.
  156. Rayleigh J. W. On waves propagated along the plane surface of an elastic Solid. *Proc. Lond. Math. Soc.* 1985/1986, № 253, pp. 4–11.
  157. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME*, 67 (1945), A-69.
  158. Roitberg I., Vassiliev D. and Weidl T., Edge resonance in an elastic semi-strip. *Q J, Mech Appl Math*, 1998; 51: pp.1-13.
  159. Torvik P.J, Reflection of wave trains in semi-infinite plate. *J Acoust Soc Am*, 1967; 41: pp.346-353.
  160. Wilde M.V. and Kaplunov J.D. Resonances of the Rayleigh Waves in an Elastic Semi-Strip, *Acoustical Physics*, (2003), 49 (1): pp.31-35.
  161. Zakharov D.D. Konenkov's waves in anisotropic layered plates. *Acoust Phys*, 2002; 48: pp.171-175.
  162. Zernov V., Pichugin A.V. and Kaplunov J.D., Eigenvalue of a semi-infinite elastic strip. *Proc. Soc. Lond.* 2006; A462: 1255.