

ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտ

ԱՍԱՏՈՒՐ ԺՈՐԱՅԻ ԽՈՒՐՇՈՒԴՅԱՆ

**ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԲՆՈՒԹԱԳՐԻՉՆԵՐՈՎ ԴԵՖՈՐՄԱՅՎՈՂ ՆԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ  
ԿԱՌՈՒՅՎԱԾՔԻ ՕՊՏԻՄԱԿԱՅՈՒՄԸ ԵՎ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՂԵԿԱՎԱՐՈՒՄԸ**

Ա.02.04 – “Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա” մասնագիտությամբ  
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի  
գիտական ասպիրանտի հայցման արտենախոսության

**ՍԵՂՄԱԳԻՐ**

ԵՐԵՎԱՆ - 2015

---

Институт механики НАН РА

ХУРШУДЯН АСАТУР ЖОРАЕВИЧ

**ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ И УПРАВЛЕНИЕ  
КОЛЕБАНИЯМИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ С  
ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук по специальности  
01.02.04 – “Механика деформируемого твердого тела”

ЕРЕВАН - 2015

Արենախոսության թեման հասարակվել է Երևանի պետական համալսարանում:

Գիտական ղեկավար՝

Ֆիզ-մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ  
Ս. Ն. Զիլավյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝

Կելին. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր  
Լ. Ա. Մովսիսյան

Ֆիզ-մաթ. գիտ. թեկնածու, պրոֆեսոր  
Մ. Վ. Բելուբեկյան

Առաջադար կազմակերպություն՝

Նայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարան

Պաշտպանությունը կկայանա 2015 թ. դեկտեմբերի 11-ին՝ ժ. 14<sup>00</sup>-ին ՆՏ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում գործող ԲՈՆ-ի «Մեխանիկայի»-047 մասնագիտական խորհրդի նիստում:

Նասցեն՝ 0019, ք. Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24/2, avsayh@mechins.sci.am:

Արենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՆՏ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի գրադարանում: Մեղմագիրն առաքված է 2015թ. նոյեմբերի 10-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար,

Ֆիզ-մաթ. գիտ. դոկտոր



Ա. Վ. Սահակյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете.

Научный руководитель:

кандидат физ-мат. наук, доцент  
С. А. Джилавян

Официальные оппоненты:

доктор техн. наук, профессор  
Л. А. Мовсисян

кандидат физ-мат. наук, профессор  
М. В. Белубекийн

Ведущая организация:

Национальный Политехнический Университет Армении

Защита состоится 11-ого декабря 2015 г. в 14<sup>00</sup> на заседании специализированного совета ВАК «Механика»-047, действующего в Институте механики НАН РА.

Адрес: 0019, г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24/2, avsayh@mechins.sci.am.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА.

Автореферат разослан 10-го ноября 2015г.

Ученый секретарь специализированного совета,

доктор физ-мат. наук



А. В. Саакян

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Основной целью изучения конкретной системы управления является ее конструирование и эксплуатация на практике. Теория оптимизации физико-механических свойств и параметров конструктивных элементов – пластин, балок и стержней, получила значительное развитие в связи с важнейшими задачами улучшения характеристик и условий правильного функционирования конструкции в целом. Этим обусловлена необходимость проведения интенсивных исследований в области теории оптимизации и управления, а также необходимость разработки эффективных методов решения конкретных задач. При этом важны не только реализуемость, но и закон требуемого управления. Ответ на вопрос о реализуемости предлагаемых управлений дает свойство точной или приближенной управляемости управляемой системы, т.е. существование управления, гарантирующего точное или приближенное выполнение заданных условий за определенное время. Сложность исследования управляемости конкретной системы обусловлена разными факторами: проверка управляемости системы с нестационарными коэффициентами намного сложнее, чем для соответствующей системы со стационарными коэффициентами. Искомые управления, существование которых установлено, могут быть определены как точными, так и приближенными (численными) методами. Исследованию управляемости систем, оптимального проектирования посвящены труды Н. Н. Красовского, А. Г. Бутковского, Ж.–Л. Льюиса, Э. Зуаза, Н. В. Баничука и т.д.

Методы точного решения, в основном, трудно применимы для довольно общих моделей управляемых объектов (в частности, для билинейных систем, систем с переменными коэффициентами, систем, содержащих сингулярные функции, рассматриваемых на неограниченных областях и т.д.). Среди точных методов решения задач управления особую роль играет метод финитного управления А. Г. Бутковского, предоставляющий систему необходимых и достаточных условий для точной управляемости рассматриваемой системы и возможность нахождения явного решения.

Благодаря возможностям вычислительной техники, для решения задач управления и оптимизации более часто применяются методы численного анализа. Численное решение довольно сложных задач, не разрешимых аналитически, является твердой основой для конструирования моделируемой системы на практике.

На основе разработанных численных методов оптимального управления созданы программные обеспечения (software) для моделирования, симуляции и проверки на надежность конкретных систем управления. Одна из проблем применения таких методов теории программного обеспечения является тот факт, что для достижения большей точности требуются огромные вычислительные объемы. Для снижения этих объемов разрабатываются новые приближенные методы с улучшенной сходимостью.

Актуальность исследований в области оптимизации структуры сплошных сред продиктована также необходимостью дальнейшего развития общей теории меха-

ники деформируемого твердого тела, включающей в себя вопросы построения математических моделей и разработки аналитических, численных методов решения практических задач.

### **Цель диссертационной работы:**

- расширение классов задач управления для систем с распределенными параметрами разрешаемых в замкнутом виде, в том числе для систем, состояние которых все еще важно после окончания процесса управления, а также систем, допускающих обобщенное решение,
- разработка методов с легко реализуемыми вычислительными схемами для приближенного решения задач управления билинейными системами, имеющих широкое применение в механике деформируемого твердого тела,
- построение замкнутых решений конкретных (одномерных и двумерных) задач оптимального управления и оптимизации структуры конструкций,
- получение критериев управляемости рассмотренных систем.

**Методы исследования.** В работе используются методы теории обобщенных функций и их преобразования Фурье, метод Бубнова–Галеркина, обобщенный метод финитного управления Бутковского и численные методы решения задач нелинейного программирования.

**Обоснованность и достоверность.** Решение всех задачи сопровождается численными расчетами, выполненными по программе Wolfram Mathematica 10.1. На основании полученных замкнутых решений, по программе Comsol Multiphysics 5.0 проделан эксперимент для задачи об оптимальном распределении материала. Результаты, полученные таким путем, в рамках соответствующих допущений являются правдоподобными и наблюдаются на практике. Достоверность научных положений и выводов сформулированных в диссертации определена использованием фундаментального аппарата математической теории упругости и строгим математическим обоснованием всех этапов исследования.

**Практическая и теоретическая ценность.** Разработанные в диссертационной работе методы аналитического и численного решения, основанные на методах математической физики, требуют определенных математических конструкций и обоснований. Поэтому они представляют интерес с теоретической точки зрения. Используя эти методы, в диссертации решены задачи оптимального управления и оптимизации, возникающие в разных областях механики деформируемого твердого тела, чем и обосновывается ее практическая ценность. Результаты могут быть использованы при проектировании элементов конструкций типа пластин, балок, стержней, надежно функционирующих при разнообразных физических воздействиях, при рассмотрении других краевых задач, встречающихся в различных областях математической физики и механики сплошной среды.

**Научная новизна.** Основные результаты диссертационной работы, полученные в работах [1–11], являются новыми. В частности,

- предложены способы получения условий точной и приближенной управляемости деформируемых систем с переменными параметрами в виде интегральных ограничений типа равенств и явного представления решения задач граничного и распределенного управлений, а также управления коэффициентом, указаны пути их численной реализации,
- построены численные алгоритмы решения задач об оптимизации распределения материала под упругими деформируемыми системами, сводимые к задачам нелинейного программирования,
- динамические задачи оптимизации структуры неоднородных деформируемых систем сведены к задаче нелинейного программирования.

**Апробация работы.** Основные результаты докладывались на международных научных конференциях, коллоквиумах, летних и зимних школах:

- Международная научная конференция, посвященная 105-летию Стефана Банаха, Львов, Украина, 2012,
- III международная научная конференция, посвященная 100-летию Н. Х. Арутюняна, Цахкадзор, Армения, 2012,
- международная летняя школа “Геометрия, механика и управление”, Мадрид, Испания, 2013,
- международная зимняя школа “Математика и ее приложения в естественных науках”, Лейпциг, Германия, 2013,
- всероссийское совещание “Проблемы управления”, Москва, Россия, 2014,
- серия коллоквиумов “CeNoS” (Center for Nonlinear Sciences), Мюнстер, Германия, 2014–2015,
- международная летняя школа SIAM “Симуляция, оптимизация и идентификация в механике сплошных сред”, Линц, Австрия, 2014,
- международная научная конференция SIAM “Теория управления и ее приложения”, Париж, Франция, 2015,
- IV международная научная конференция “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, Цахкадзор, Армения, 2015,

а также на научных семинарах Ереванского госуниверситета, Института механики НАН Армении (2011–2015 г.), Института вычислительной и прикладной математики при университете Мюнстера (Мюнстер, Германия, 2014–2015 г.).

Диссертационная работа в целом представлена и обсуждена на семинаре кафедры механики Ереванского госуниверситета и на общем семинаре Института механики НАН РА.

**Публикации.** В основу диссертации положены 11 работ, список которых приводится в конце автореферата.

**Структура и объем работы.** Работа состоит из введения, трех глав, включая 40 фигур и 10 таблиц, списка литературы из 124 наименований, заключения и изложена на 134 страницах.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обосновывается потребность изучения затронутых в диссертационной работе вопросов, приводится краткий обзор актуального состояния исследований, проводимых по этой тематике. Кратко описываются результаты исследований, напрямую связанные с настоящей диссертацией.

**В первой главе** излагаются основы теории распределений и их преобразования Фурье. Приводятся определения основных распределений, использованных в работе и ключевые соотношения между ними. Описывается метод финитного управления Бутковского для общего линейного одномерного уравнения в частных производных со стационарными коэффициентами, подчиненного линейным граничным условиям, которое обобщается для более общих систем. Для точной управляемости системы получается счетная система линейных интегральных ограничений на искомую функцию. Приводится решение этих ограничений в  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , а также необходимые и достаточные условия его существования. Из-за частой применяемости, в отдельности приводятся  $L^1$ ,  $L^2$  и  $L^\infty$ -оптимальные решения урезанной (конечномерной) системы интегральных ограничений.

Обобщенным методом Бутковского рассматривается задача о граничном управлении термоупругими колебаниями упругого бесконечного слоя постоянной толщины  $h$ . Слой находится во внешней поле температуры и подвергается воздействию равномерно распределенных сжимающих граничных напряжений интенсивности  $\sigma_0$ . Термо-напряженное состояние слоя описывается системой уравнений [1]

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = \alpha^2 \left[ \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} \right], \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = (1 + \varepsilon) \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \sigma_x}{\partial t}, \quad x \in [0, 1], \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Безразмерные величины  $\alpha$  и  $\varepsilon$  характеризуют отношение времен распространения упругой волны и температуры в слое, и взаимодействие полей деформаций и температуры, соответственно.

Граничные условия записываются в виде

$$\sigma_x = -\sigma_0 u_{b1}(t), \quad \frac{\partial \Theta}{\partial x} \mp \text{Bi}(\Theta - \Theta_0 u_{b2}(t)) = 0, \quad x = 0; 1, \quad t \in [-\pi, \pi],$$

Здесь  $0 < \sigma_0, \Theta_0 = const$ ,  $Vi$ – число Био. Начальное состояние слоя считая известным, требуется определить граничные функции  $u_{b1}$  и  $u_{b2}$ , обеспечивающие заданное конечное состояние слоя за фиксированное время. Определение искомым функций сведено к счетной системе линейных интегральных ограничений.

**Во второй главе** обобщенным методом Бутковского решаются задачи граничного и распределенного управлений для [2–5]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ N(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] - \rho(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, t) + u_d(t)v(x), \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \quad (1)$$

$$\alpha_0 w(0, t) + \beta_0 \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = u_b^0(t), \quad \alpha_1 w(1, t) + \beta_1 \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=1} = u_b^1(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2)$$

Уравнение (1), в частности, описывает малые продольные колебания неоднородного стержня плотности  $\rho$ ,  $N$ – модуль упругости стержня, вызванные воздействием  $f$  и управляемые воздействием  $u_d v$ ,  $v \geq 0$ ,  $\text{supp } v \neq \emptyset$  ( $\text{supp}$  обозначает носитель функции). Предполагается, что  $0 < \rho \in C_p[0, 1]$ ,  $0 \leq N \in C_p^1[0, 1]$ ,  $u_b^0, u_b^1 \in L^2[0, T]$ .

Задано начальное состояние системы–  $\{w_0, w_0^1\}$ , и требуется найти допустимые управления  $u$ , обеспечивающие в заданный момент времени  $t = T$  состояние  $\{w_T, w_T^1\}$ . Предполагается, что  $w_0, w_T \in W^{1,2}[0, 1]$ ,  $w_0^1, w_T^1 \in W^{1,1}[0, 1]$ .

Решение задачи определяется из уравнения

$$\begin{vmatrix} \bar{u}_{b1}^0(z) & [\alpha_0 - i\beta_0 \lambda'(0, z)] \exp[-i\lambda(0, z)] \\ \bar{u}_{b1}^1(z) & [\alpha_1 - i\beta_1 \lambda'(1, z)] \exp[-i\lambda(1, z)] \end{vmatrix} = 0, \quad z \in \mathbb{C},$$

в комплексных корнях уравнения

$$\begin{vmatrix} [\alpha_0 + i\beta_0 \lambda'(0, z)] \exp[i\lambda(0, z)] & [\alpha_0 - i\beta_0 \lambda'(0, z)] \exp[-i\lambda(0, z)] \\ [\alpha_1 + i\beta_1 \lambda'(1, z)] \exp[i\lambda(1, z)] & [\alpha_1 - i\beta_1 \lambda'(1, z)] \exp[-i\lambda(1, z)] \end{vmatrix} = 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Здесь  $\bar{\eta}(\sigma)$  обозначает обобщенное преобразование по Фурье распределения  $\eta$ ,

$$\bar{u}_{b1}^1(\sigma) = \bar{u}_{b1}^0(\sigma) - \alpha_1 \Lambda(1, \sigma, \bar{u}_{d1}(\sigma)) - \beta_1 \Lambda'_x(1, \sigma, \bar{u}_{d1}(\sigma)), \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

$$\Lambda(x, \sigma, \bar{u}_{d1}(\sigma)) = \mathcal{R}[\bar{f}_1](\sigma) + \bar{u}_{d1}(\sigma) \mathcal{R}[v](\sigma) - \mathcal{R}[\bar{W}](\sigma),$$

$$W(\xi, t) = \rho(\xi) [w_0^1(\xi) \delta(t) - w_T^1(\xi) \delta(t - T) + w_0(\xi) \delta'(t) - w_T(\xi) \delta'(t - T)],$$

$$\mathcal{R}[\eta](\sigma) = \int_0^x \eta(\xi) \mathcal{K}(x, \xi, \sigma) d\xi, \quad \mathcal{K}(x, \xi, \sigma) = \frac{\sin[\lambda(x, \sigma) - \lambda(\xi, \sigma)]}{\lambda'(\xi, \sigma)}.$$

$\lambda = \lambda(x, \sigma)$  определяется решением дифференциального уравнения Риккати

$$N \frac{\partial \nu}{\partial x} + \nu^2 + \sigma^2 N \rho = 0: \quad i\lambda(x, \sigma) = \int_0^x \frac{\nu(\xi, \sigma)}{N(\xi)} d\xi, \quad (x, \sigma) \in [0, 1] \times \mathbb{R}.$$

Получено замкнутое решение в частном случае, когда  $f = 0$ ,  $u_b^0 = u_b^1 = 0$ ,  $\alpha_0 =$

$\alpha_1 = 1, \beta_0 = \beta_1 = 0, N(x) = N_0 \exp[x], \rho(x) = \rho_0 \exp[-x], N_0, \rho_0 > 0$ . Искомой является функция  $u_d \in \mathcal{U}_1 = \{u \in L^1[0, T]; \text{supp } u = [0, T]\}$ . Вычисления дали  $\sigma_k = 2\pi k [1 + N_0 \exp[-1]]^{-1}, \zeta_k = 0$ . Получено, что функция распределенного управления определяется из системы

$$\bar{u}_{d1}(\sigma_k) = - [\mathcal{R}[\rho w_0^1](\sigma_k) - i\sigma_k \mathcal{R}[\rho w_0](\sigma_k)] [\mathcal{R}[v](\sigma_k)]^{-1} \Big|_{x=1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Рассматривается задача граничного управления для (1) в  $\mathbb{R}^+ \times (0, T)$  при [5]

$$u_d = 0, \quad w(0, t) = u_b(t), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} w(x, t) = m(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Тогда, функция управления  $u_{b1} \in \mathcal{U}_1$  для (1), (3) определяется из системы

$$\bar{u}_{b1}(z_k) = \bar{m}_1(z_k) + (-1)^k \Lambda(0, z_k), \quad \Lambda(x, \sigma) = \int_x^\infty [\bar{f}_1(\xi, \sigma) - \bar{W}(\xi, \sigma)] \mathcal{K}(x, \xi, \sigma) d\xi,$$

в комплексных корнях уравнения  $\lambda(0, z_k) = \pi k, k \in \mathbb{N}$ .

Явное решение получено в случае, когда  $m = 0, w_0(x) = H\delta(x - \xi_0), w_0^1(x) = v_0\delta(x - \xi_0), 0 < H, v_0 = \text{const}$ . Требуется обеспечить равновесие системы за время

$$T = 2 \int_0^\infty \frac{dx}{N(x)}.$$

Разрешающее управление при  $T = 2\pi$  имеет вид

$$u^o(t) = \sum_{j=1}^J u_j^o \delta(t - t_j^o), \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$\sum_{j=1}^J u_j^o \cos(\pi k t_j^o) = \frac{v_0}{2(\pi k)^2} \sin[\pi k \exp[-\xi_0]] \text{sign}[\cos[\pi k \exp[-\xi_0]]],$$

$$\sum_{j=1}^J u_j^o \sin(\pi k t_j^o) = -\frac{H}{2\pi k} \sin[\pi k \exp[-\xi_0]] \text{sign}[\cos[\pi k \exp[-\xi_0]]], \quad k \in \{1; N\},$$

$$\text{sign } u_j^o = \text{sign } h^o(t_j^o), \quad h^o(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{v_0 \cos(\pi k t) + \pi k H \sin(\pi k t)}{v_0^2 + (\pi k H)^2}.$$

Результаты проведенных вычислений при  $\xi_0 = 1$  и разных значениях параметров  $v_0$  и  $H$  приведены в Табл. 1. К примеру, когда  $v_0 = 1$  и  $H = 0.1$ , то

$$u^o(t) = 9.05\delta(t - 0.2) - 1.32\delta(t - 1.) - 1.28\delta(t - 1.79) - 6.45\delta(t - 3.37).$$

Аналогичным образом получены решения задач о граничном и распределенном управлении с постоянным запаздыванием  $0 < 2\tau < T$  для уравнения (1) в



$v_0$	$H$	$u_j^o$	$t_j^o$
1	0.1	$u_1^o = 9.05, u_2^o = -1.32,$ $u_3^o = -1.28, u_4^o = -6.45$	$t_1^o = 0.2, t_2^o = 1.,$ $t_3^o = 1.79, t_4^o = 3.37$
10	1	$u_1^o = -1.53, u_2^o = 1.21,$ $u_3^o = 1.38, u_4^o = -1.4$	$t_1^o = 0.16, t_2^o = 0.94,$ $t_3^o = 2.13, t_4^o = 3.43$

Таблица 1: Управляющие импульсы и моменты при  $N = 30, J = 4$ .

$(0, 1) \times (0, T)$ , соответственно при [2, 3]

$$u_d = 0, \quad w(0, t) \equiv 0, \quad w(1, t) = u_b(t - \tau), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

$$u_d = u_d(t - \tau), \quad w(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=1} = u_b(t), \quad t \in [0, T]. \quad (5)$$

Функция граничного управления  $u_b \in \mathcal{U}_2 = \{u \in L^2[0, T]; \text{supp } u \subseteq [0, T]\}$  для (1), (4) определяется из

$$\bar{u}_{b1}(z_k) = \Lambda(1, z_k, 0) \exp[-iz_k \tau],$$

в комплексных корнях уравнений  $\lambda(1, z_k) - \lambda(0, z_k) = \pi k, k \in \mathbb{N}$ .

Функция  $u_d \in \mathcal{U}_1$  для (1), (5) определяется из системы

$$\bar{u}_d(z_k) = [\bar{u}_b^1(z_k) + \lambda' \mathcal{R}' [\overline{W}] (z_k)|_{x=1}] [\lambda' \mathcal{R}' [v] (z_k)|_{x=1}]^{-1} \exp[-iz_k \tau],$$

в комплексных корнях уравнений  $2[\lambda(1, z_k) - \lambda(0, z_k)] = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{N}$ .

Указываются некоторые функции неоднородности системы, для которых можно построить замкнутое решение.

Рассматривается также задача управления распространением электромагнитной волны в диспергирующей среде посредством либо входящего сигнала, либо волнового фильтра расположенного в среде [6]. Задача математически сформулирована в виде линейного интегро-дифференциального уравнения (все переменные и функции безразмерны)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \mathcal{K}(t - \tau) w d\tau + u_d(t) v(x), \quad (x, t) \in (0, 1) \times (-\vartheta, \vartheta), \quad (6)$$

$$w(0, t) = u_b^0(t), \quad w(1, t) = u_b^1(t), \quad t \in [-\vartheta, \vartheta], \quad \epsilon > 0, \quad \vartheta > 0. \quad (7)$$

Предполагается, что  $\mathcal{K} \in L^1[-\vartheta, \vartheta], u_b^0, u_b^1 \in L^2[-\vartheta, \vartheta], v \geq 0, \text{supp } v \neq \emptyset$ .

Заданы состояния  $\{w_{-\vartheta}, w_{-\vartheta}^1\}$  при  $t = -\vartheta$  и  $\{w_{\vartheta}, w_{\vartheta}^1\}$  при  $t = \vartheta$ , искомыми являются функции  $u_b^0$  либо  $u_d$ . Получено, что функции  $u_{b1}^0 \in \mathcal{U}_2$  и  $u_{d1} \in \mathcal{U}_1$

определяются из систем

$$\bar{u}_{b1}^0(z_k) = (-1)^k [\bar{u}_{b1}^1(z_k) - \Lambda(1, z_k, \bar{u}_{d1}(z_k))],$$

$$\bar{u}_{d1}(z_k) = [(\bar{u}_{b1}^1(z_k) - (-1)^k \bar{u}_{b1}^0(z_k)) i\pi k - \mathcal{R}[\overline{W}](z_k)|_{x=1}] [\mathcal{R}[v](z_k)|_{x=1}]^{-1},$$

соответственно, при комплексных корнях уравнений  $\chi(z_k) = i\pi k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Здесь

$$\Lambda(x, \sigma, \bar{u}_{d1}(\sigma)) = \frac{1}{\chi(\sigma)} \int_0^x [\bar{u}_{d1}(\sigma)v(\xi) + \overline{W}(\xi, \sigma)] \sinh[\chi(\sigma)(x - \xi)] d\xi,$$

$$\chi(\sigma) = i|\sigma| \sqrt{1 + \epsilon \overline{\mathcal{K}}_1(\sigma)}, \quad W(x, t) = \begin{cases} -W_+(x, t), & t \in [-\vartheta, 0), \\ W_0(x), & t = 0, \\ W_-(x, t), & t \in (0, \vartheta], \end{cases}$$

$$W_{\pm}(x, t) = [\delta(t \pm \vartheta) + \epsilon \mathcal{K}_1(t \pm \vartheta)] w_{\pm\vartheta}^1(x) + \mathcal{D}[\delta(t \pm \vartheta) - \epsilon \mathcal{K}_1(t \pm \vartheta)] w_{\pm\vartheta}(x),$$

$$W_0(x) = \epsilon [\mathcal{K}_1(-\vartheta) w_{-\vartheta}^1(x) - \mathcal{K}'_1(-\vartheta) w_{-\vartheta}(x) - \mathcal{K}_1(\vartheta) w_{\vartheta}^1(x) + \mathcal{K}'_1(\vartheta) w_{\vartheta}(x)].$$

В частности, рассмотрена задача граничного  $L^2$ -управления для (6), (7) при  $u_b^1(t) = \cos(2t)$ ,  $w_{-\pi}(x) = -\cos(\pi x)$ ,  $w_{-\pi}^1(x) = \sin(\pi x)$ ,  $w_{\pi}(x) = \cos(2\pi x)$ ,  $w_{\pi}^1(x) = \sin(2\pi x)$ ,  $\mathcal{K}_1(t) = \mathcal{A}_{[-\pi, \pi]}[\exp[-a|t|]]$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$  (дисперсионная модель Дебе). В этом случае  $1 + \epsilon \overline{\mathcal{K}}_1(\sigma) > 0$  при  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $a > 0$ . Тогда  $\sigma_k = \left[ \sqrt{\gamma_k^2 + a^2(\pi k)^2} + \gamma_k \right]^{\frac{1}{2}}$ ,  $\varsigma_k = \left[ \sqrt{\gamma_k^2 + a^2(\pi k)^2} - \gamma_k \right]^{\frac{1}{2}}$ ,  $2\gamma_k = (\pi k)^2 - a(a + 2\epsilon)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Для больших  $k$ ,  $\sigma_k = \mathcal{O}(k)$  и не зависят от параметра  $a$ , тогда как  $\varsigma_k \rightarrow a$ . Более того,  $\mathcal{M}_{pk} = \mathcal{O}(k^{-3})$ ,  $p \in \{1; 2\}$ , при  $k \rightarrow \infty$ . Разрешающее управление представлено на Рис. 1, при  $N = 80$  и  $a = 0.25; 0.5; 1; 2$ . Видно, что при увеличении параметра  $a$ , абсолютная величина функции управления растёт.

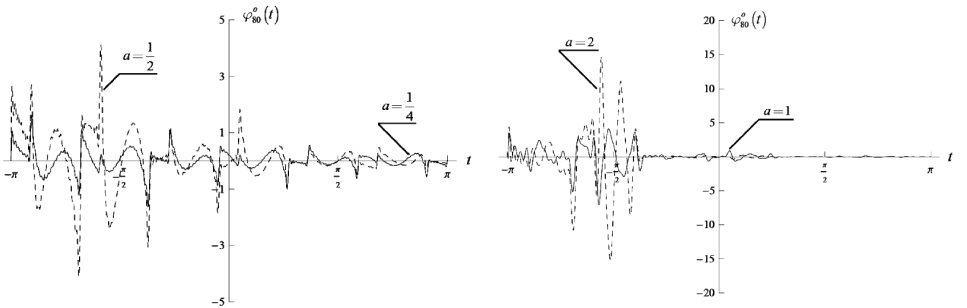


Рис. 1: Функция управления при  $N = 80$ ,  $a = 0.25$ ,  $a = 0.5$ ,  $a = 1$  и  $a = 2$ .

Явное решение получено также в случае  $u_b^0(t) = \cos t$ ,  $u_b^1(t) = \sin(2t)$ ,  $w_{-\pi}(x) = (x-1) \cos(\pi x)$ ,  $w_{-\pi}^1(x) = -2x \cos(\pi x)$ ,  $w_{\pi}(x) = (x-1) \cos(2\pi x)$ ,  $w_{\pi}^1(x) = 2x \cos(2\pi x)$ ,  $v(x) = \delta(x - x_0)$ ,  $\mathcal{K}_1(t) = -\mathcal{A}_{[-\pi, \pi]}[b|t|^{-1}]$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $b > 0$ . Поскольку  $\overline{\mathcal{K}}_1(\sigma) =$

$2b(\gamma + \ln |\sigma|)$ , где  $\gamma$  – постоянная Эйлера, существуют значения параметра  $b$ , для которых  $1 + \epsilon \bar{\mathcal{K}}_1(\sigma) > 0$ . Тогда  $\sigma_k = \beta_k W^{-\frac{1}{2}} (\beta_k^2 \cdot \exp [\frac{1}{b\epsilon} + 2\gamma])$ ,  $\beta_k^2 = \frac{(\pi k)^2}{b\epsilon}$ ,  $\varsigma_k = 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , где  $W$  – функция Ламберта, т.е.  $z_k \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Более того,  $z_k = O(k)$  и  $\mathcal{M}_{pk} = O(k^{-3})$ ,  $p \in \{1; 2\}$ , при  $k \rightarrow \infty$ . Разрешающая функция управления изображена на Рис. 2 при  $N = 80$  и  $x_0 = 0.685$ .

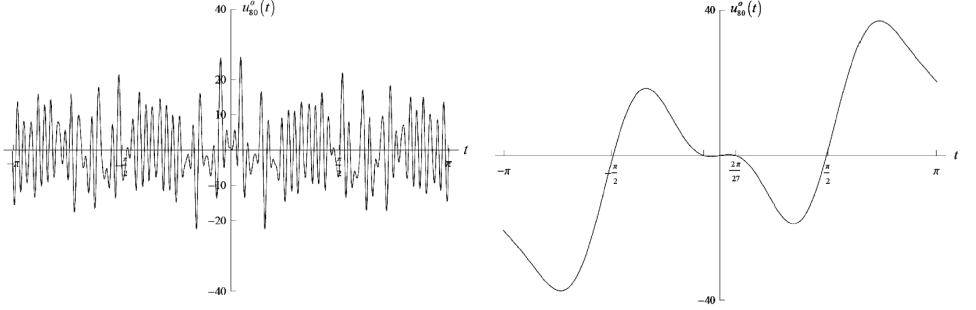


Рис. 2: Функция управления при  $N = 80$ ,  $b = 0.1$  (слева) и  $b = 20$  (справа).

Выявлено, что при увеличении параметра  $b$ , абсолютная величина и частота управления убывают, абсолютная величина функции управления не чувствительна по отношению к точке  $x_0$ , кроме сингулярных случаев  $x_0 \rightarrow 0+$  и  $x_0 \rightarrow 1-$ , когда  $\bar{u}_{d1}(z_k) \rightarrow \infty$  для всех  $k$ .

**В третьей главе** предлагаются два подхода исследования билинейных систем управления – математических моделей задач оптимизации конструкций, структуры и топологии [9]. Первый подход основан на методе Бубнова–Геллеркина [7] и применим как при решении статических, так и динамических задач, а второй – на представлении функции состояния через векторную и скалярную волновые потенциалы [11] и применим при решении динамических задач. Решение задачи в обоих случаях сводится к задаче нелинейного программирования.

В частности, решена задача об оптимальном распределении вязкоупругого материала под шарнирно-опертой, упругой балкой длины  $2l$ , подверженной воздействию сосредоточенной силы  $P_*$ , движущейся по верхней поверхности балки с постоянной скоростью  $v_*$  [8]. Задача заключается в определении оптимального закона распределения, обеспечивающего гашение колебаний балки в заданный момент времени  $2l/v_* < T \leq T_0$  ( $T_0$  – время гашения колебаний балки при  $u \equiv 1$ ). На основе линейной теории упругости и модели вязкоупругого тела Кэльвина–Фойгта, математическая постановка задачи записывается в виде

$$EJ \frac{\partial^4 w_*}{\partial x^4} + u(x_*) \left[ \alpha_*^2 \frac{\partial w_*}{\partial t_*} + \beta_*^2 w_* \right] + \rho S \frac{\partial^2 w_*}{\partial t_*^2} = P_* \mathcal{A}_{[0, \tau_*]} [\delta(x_* + l - v_* t_*)], \quad (8)$$

$$w_*(\pm l, t_*) = \left. \frac{\partial^2 w_*}{\partial x_*^2} \right|_{x_* = \pm l} = 0, \quad t_* \in [0, T]. \quad (9)$$

Здесь  $E$ – модуль упругости,  $\rho$ – плотность,  $J$ – момент инерции,  $S$ – площадь поперечного сечения балки,  $\tau_* = 2l/v_*$ – момент отделения силы от балки,  $u$ – искомая безразмерная функция распределения.

Начальное состояние балки считается известным и задача заключается в определении допустимой функции  $u^o \in \mathcal{U}_1$ , обеспечивающей конечное равновесное состояние, минимизируя при этом функционал

$$\kappa_1[u] = \int_{-l}^l u(x) dx, \quad (10)$$

$$u \in \mathcal{U}_1 = \left\{ u \in \mathfrak{D}, \int_{-l}^{x_*} u(\xi) d\xi \in L^1[-l, l]; 0 \leq u \leq 1, \text{supp } u \subseteq [-l, l] \right\},$$

описывающий массу используемого материала. Показано, что

$$u^o(x_*) = \sum_{j=1}^J \delta(x_* - x_j^o), \quad x_* \in (-l, l),$$

соответствующая дискретному рапределению материала под балкой (точечные гасители), а  $x_j^o \in (-l, l)$  характеризуют точки наличия материала.

На основе полученных результатов проведен виртуальный эксперимент с целью выявления основных зависимостей между функцией  $u$  и остальными параметрами системы (8)–(10).

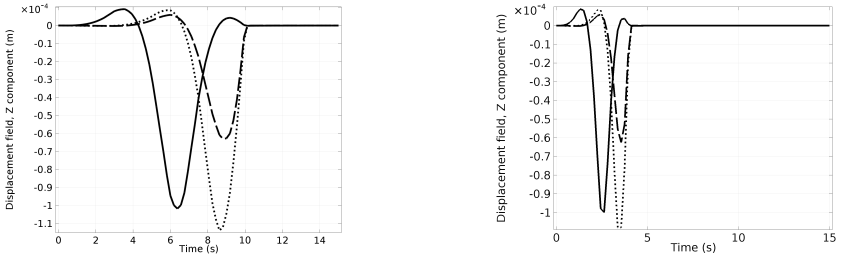


Рис. 3: Перемещения точек  $\xi_1 = 0.65$  м (сплошная линия),  $\xi_2 = 0.875$  м (точечный пунктир) и  $\xi_3 = 0.95$  м (штриховой пунктир) в случае  $v_* = 0.1$  м/с (слева) и  $v_* = 0.25$  м/с (справа) для равноудаленных гасителей:  $x_1 = 0.25$  м,  $x_2 = 0.5$  м и  $x_3 = 0.75$  м (расстояние от левого конца).

До начала эксперимента балка длины 1 м (ширина и толщина прямоугольного поперечного сечения равны 1/50 м и 1/100 м, соответственно) изготовленная из Steel AISI 4340 ( $\rho = 7850$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 0.28$ ,  $E = 1.9 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>) лежит на трех равноудаленных вязкоупругих гасителях:  $x_1 = 0.25$  м,  $x_2 = 0.5$  м и  $x_3 = 0.75$

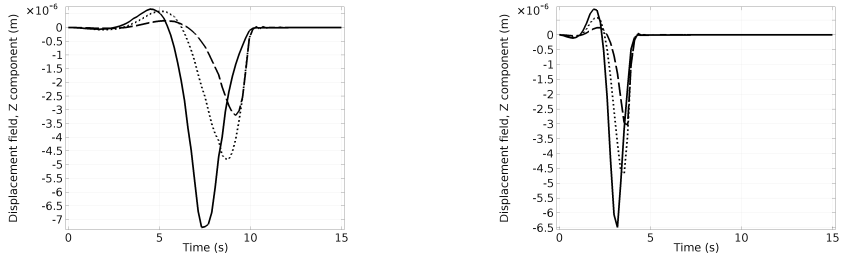


Рис. 4: Перемещения точек  $\xi_1 = 0.65$  м (сплошная линия),  $\xi_2 = 0.875$  м (точечный пунктир) и  $\xi_3 = 0.95$  м (штриховой пунктир) в случае  $v_* = 0.1$  м/с (слева) и  $v_* = 0.25$  м/с (справа) для гасителей с оптимизированными положениями:  $x_1 = 0.35$  м,  $x_2 = 0.65$  м и  $x_3 = 0.85$  м (расстояние от левого конца).

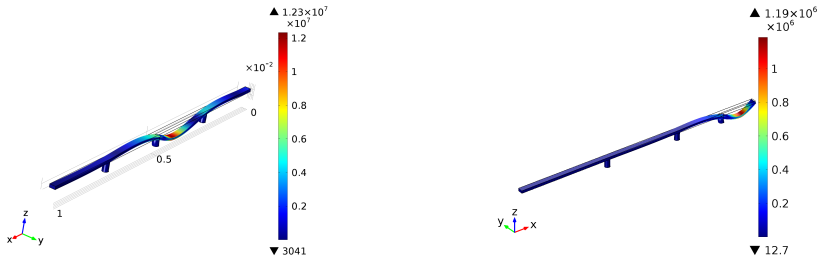


Рис. 5: Напряжение балки при  $t = 4.3125$  с,  $v_* = 0.1$  м/с в случае равноудаленных гасителей (слева) и при  $t = 3.75$  с,  $v_* = 0.25$  м/с в случае оптимального распределения гасителей:  $x_1 = 0.35$  м,  $x_2 = 0.65$  м и  $x_3 = 0.85$  м (слева).

м и находится в равновесии. Модуль сдвига гасителей равен  $6.16 \cdot 10^7$  Н/м<sup>2</sup>, а объемный модуль–  $4 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>. Нормальная сила  $P_*$  начинает двигаться с левого конца балки с постоянной скоростью. Тот же самый эксперимент проводился для оптимизированных положений гасителей.

На Рис. 3 изображены перемещения точек  $\xi_1 = 0.65$  м,  $\xi_2 = 0.875$  м и  $\xi_3 = 0.95$  м балки при  $P_* = 10^5$  Н для  $v_* = 0.1$  м/с ( $\tau_* = 10$  с) и  $v_* = 0.25$  м/с ( $\tau_* = 4$  с). Параметры демпфера таковы: модуль сдвига равен  $6.16 \cdot 10^7$  Н/м<sup>2</sup> а объемный модуль–  $4 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>. На Рис. 4 изображены перемещения тех же точек для тех же самых параметров, оптимизированы лишь положения демпферов. Для выбранных параметров оказалось, что  $x_1 = 0.35$  м,  $x_2 = 0.65$  м и  $x_3 = 0.85$  м. На Рис. 5 представлено напряженное состояние стержня для равноудаленных (слева) и оптимизированных (справа) положений гасителей. Первая отличительная черта оптимизированных положений гасителей от равноудаленных– уменьшение абсолютной величины перемещения почти на 100, и напряжений– почти на 10. Наблюдается уменьшение минимального значения напряжений в балке. Эксперимент, в частности, показал, что остаточные напряжения в балке после отделения

подвижной силы со временем убывают быстрее при оптимизированных, чем при равноудаленных положений гасителей. Было выявлено, что максимальное по абсолютной величине значение прогиба балки возрастает по мере возрастания  $P_*$  и убывает по мере возрастания  $v_*$ .

Тот же алгоритм применяется для решения двумерных билинейных систем. Шарнирно опертая упругая изотропная прямоугольная пластинка малой постоянной толщины  $2h$ , длины  $2l_1$ , ширины  $2l_2$ , в конечном промежутке времени подвергается воздействию нормальной силы  $P_*$ ,двигающейся по верхней поверхности пластинки с постоянной скоростью  $v_*$  [10]. Пластинка лежит на упругом однопараметрическом основании с коэффициентом Винклера  $\alpha_*^2$  и управляемым законом распределения  $u$ . Требуется определить оптимальный закон распределения основания, при котором в заданный момент времени  $2l_1/v_* < T \leq T_0$  пластинка будет находиться в состоянии покоя ( $T_0$  – соответствующее время при  $u \equiv 1$ , а выполнение конечных условий обеспечивается приближенно). Относительно пластинки принимая допущения Кирхгоффа, задачу математически можно записать в виде следующей начально-краевой задачи относительно вертикального перемещения срединной плоскости пластинки:

$$D\Delta\Delta w_* + \alpha_*^2 u w_* + 2\rho h \frac{\partial^2 w_*}{\partial t_*^2} = P_* \mathcal{A}_{[0, \tau_*]}[\delta(x_* + l_1 - v_* t_*)] r_*(y_*), \quad (11)$$

$$(x_*, y_*, t_*) \in (-l_1, l_1) \times (-l_2, l_2) \times (0, T),$$

$$w_*(\pm l_1, y_*, t_*) = \frac{\partial^2 w_*}{\partial x_*^2} \Big|_{x_* = \pm l_1} = 0, \quad w_*(x_*, \pm l_2, t_*) = \frac{\partial^2 w_*}{\partial y_*^2} \Big|_{y_* = \pm l_2} = 0. \quad (12)$$

Здесь  $D$  – жесткость пластинки,  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\rho$  – плотность,  $r_*$  – форма подвижного воздействия,  $\tau_* = 2l_1/v_*$ . Начальное состояние пластинки задано и требуется определить функцию  $u^o \in \mathcal{U}_\infty = \{u \in L^\infty; \text{supp } u \subset [-l_1, l_1] \times [-l_2, l_2], 0 \leq u \leq 1\}$ , обеспечивающую в момент  $T$  нулевое конечное состояние и имеющее минимальную интенсивность в  $\mathcal{U}_\infty$ :

$$\kappa_\infty[u] = \max_{(x_*, y_*) \in [-l_1, l_1] \times [-l_2, l_2]} u(x_*, y_*). \quad (13)$$

Решение задачи (11)–(13) получено в виде

$$u^o(x_*, y_*) = \sum_{j=1}^J [\theta(x_* - x_j^o, y_* - y_j^o) - \theta(x_* - x_{j+1}^o, y_* - y_{j+1}^o)],$$

характеризующем кусочное распределение основания, причем  $x_j^o, y_j^o$  и  $x_{j+1}^o, y_{j+1}^o$  определяют участки наличия материала.

На основе полученных формул проводились вычисления для определения оптимальных параметров основания при (после перехода к безразмерным переменным и величинам)  $w_{01}(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ ,  $\dot{w}_{01}(x, y) = 0$ ,  $r(y) = \delta(y - y_0)$ ,  $y_0 \in$

$(-1, 1)$ . Результаты вычислений– точки переключений функции управления– для нескольких значений параметров задачи приведены в Табл. 2. На Рис. 6 изображен пример оптимального распределения упругого основания под пластинкой, обеспечивающего ее равновесное состояние.

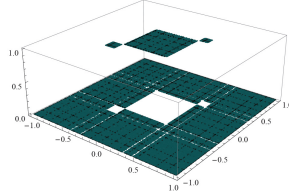


Рис. 6: Пример оптимального распределения основания.

$\alpha^2$	$P$	$\nu$	$y_0$	$x_j^o, y_j^o$
0.05	0.1	0.05	-0.4	$x_1^o = -0.4360, x_2^o = -0.2888,$ $x_3^o = 0.3136, x_4^o = 0.4399,$ $y_1^o = -0.4360, y_2^o = -0.2888,$ $y_3^o = 0.3136, y_4^o = 0.4399$
0.1	0.5	0.1	-0.25	$x_1^o = -0.2776, x_2^o = 0.0706,$ $x_3^o = 0.4388, x_4^o = 0.5237,$ $y_1^o = -0.1503, y_2^o = -0.1494,$ $y_3^o = 0.5020, y_4^o = 0.5192$

Таблица 2: Точки переключения.

Рассмотрена также двумерная задача оптимизации структуры бесконечно длинного неоднородного слоя постоянной толщины  $2h$  [11]. Поверхности слоя свободны от напряжений. Требуется найти закон изменения упругих характеристик слоя по толщине, который обеспечит распространение периодической волны с заданной фазовой скоростью в слое по направлению, перпендикулярном направлению неоднородности. Деформации слоя считая малыми и допустив, что коэффициент Пуассона  $\nu$  слоя постоянен по толщине, математическую формулировку задачи можно записать в виде следующей билинейной системы относительно перемещений слоя:

$$(1 - 2\nu) \frac{\partial}{\partial z_*} \left[ E_*(z_*) \frac{\partial w_{1*}}{\partial z_*} \right] + \frac{\partial}{\partial z_*} \left[ E_*(z_*) \frac{\partial w_{2*}}{\partial z_*} \right] + 2(1 - \nu) E_*(z_*) \frac{\partial^2 w_{1*}}{\partial x_*^2} -$$

$$- 2\nu E'_*(z_*) \frac{\partial w_{2*}}{\partial x_*} = 2(1 + \nu)(1 - 2\nu) \rho_*(z_*) \frac{\partial^2 w_{1*}}{\partial t_*^2},$$

$$2(1-\nu)\frac{\partial}{\partial z_*}\left[E_*(z_*)\frac{\partial w_{2*}}{\partial z_*}\right]+\frac{\partial}{\partial z_*}\left[E_*(z_*)\frac{\partial w_{1*}}{\partial z_*}\right]+(1-2\nu)E_*(z_*)\frac{\partial^2 w_{2*}}{\partial x_*^2}-$$

$$-(1-\nu)E'_*(z_*)\frac{\partial w_{1*}}{\partial x_*}=2(1+\nu)(1-2\nu)\rho_*(z_*)\frac{\partial^2 w_{2*}}{\partial t_*^2}, \quad (14)$$

$$(x_*, z_*, t_*) \in \mathbb{R} \times (-h, h) \times \mathbb{R}^+,$$

$$\left[\frac{E_*(z_*)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\nu\frac{\partial w_{1*}}{\partial x_*}+(1-\nu)\frac{\partial w_{2*}}{\partial z_*}\right)\right]\Bigg|_{z_*=\pm h}=0,$$

$$\left[\frac{E_*(z_*)}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial w_{1*}}{\partial z_*}+\frac{\partial w_{2*}}{\partial x_*}\right)\right]\Bigg|_{z_*=\pm h}=0. \quad (15)$$

Здесь  $w_{1*}$  и  $w_{2*}$  – вертикальные и горизонтальные перемещения.

Предполагая, что модуль упругости и плотность слоя изменяются по толщине по одинаковому закону:  $E_*(z_*) = E_0 u(z_*)$ ,  $\rho_*(z_*) = \rho_0 u(z_*)$ , где  $E_0$  и  $\rho_0$  упругие характеристики некоторого калибровочного слоя, требуется найти допустимую функцию  $u^\circ \in \mathcal{U}_\infty = \{u \in L^\infty[-h, h]; \text{supp } u = [-h, h], 0 < u \leq u_0\}$ , обеспечивающую существование гармонического решения билинейной системы (14), (15) с фазовой скоростью  $c = \sqrt{E_0 \rho_0^{-1}}$ , и минимизирующую в  $\mathcal{U}_\infty$  функционал

$$\kappa_\infty[u] = \sup_{z_* \in [-h, h]} u(z_*). \quad (16)$$

Представив решение системы (14), (15) в терминах векторного и скалярного волновых потенциалов

$$w_{1*} = \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_*} - \frac{\partial \psi_0}{\partial z_*}\right] \exp[ik_*(x_* - ct_*)], \quad w_{2*} = \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial z_*} + \frac{\partial \psi_0}{\partial x_*}\right] \exp[ik_*(x_* - ct_*)],$$

$$\Phi_0(z_*) = [a_1 \cosh(\zeta z_*) + b_1 \sinh(\zeta z_*)], \quad \psi_0(z_*) = [a_2 \cosh(\eta z_*) + b_2 \sinh(\eta z_*)],$$

$\zeta^2 = h^2 k_*^2 (1 - c_\zeta^2)$ ,  $\eta^2 = h^2 k_*^2 (1 - c_\eta^2)$ ,  $c_\zeta = \frac{c}{c_l}$ ,  $c_\eta = \frac{c}{c_t}$ ,  $c_l$  и  $c_t$  – скорости распространения продольной и поперечной волн в слое,  $k_*$  – волновое число,

$$a_1 = a_2 \frac{a_{22} \cosh \eta}{a_{21} \cosh \zeta}, \quad b_1 = b_2 \frac{a_{22} \sinh \eta}{a_{21} \cosh \zeta}, \quad a_2 = -b_2 \frac{a_{21} a_{12}}{a_{11} a_{22}} \tanh \zeta,$$

$a_{11} = (1 + A)\zeta^2 + (1 - A)h^2 k_*^2$ ,  $a_{12} = 2iAhk_*\eta$ ,  $a_{21} = 2ihk_*\zeta$ ,  $a_{22} = \eta^2 + h^2 k_*^2$ ,  $A = 1 - 2\nu$ , решение задачи (14)–(16) получено в виде

$$u^\circ(z_*) = \sum_{j=1}^J u_j^\circ [\theta(z_* - z_j^\circ) - \theta(z_* - z_{j+1}^\circ)], \quad z_* \in [-h, h],$$

причем  $0 < u_j^\circ < 1$ ,  $-h \leq z_j^\circ \leq h$ . Оптимальное решение  $u^\circ$  соответствует кусочно неоднородной структуре слоя:  $z_j^\circ, z_{j+1}^\circ$  определяют толщину, а  $u_j^\circ$ , умноженное на



$E_0$  и  $\rho_0$ - упругие характеристики  $j$ -того составляющего слоя.

На основе полученных результатов проводились численные расчеты. Для значений  $c_\eta = 0.75, 0.87, 0.95$  ( $c_\eta^2 = 3c_c^2$ ) были найдены численные значения точек  $hz_j^o$  и факторов  $u_j^o$  ( $u_0 = 1.5$ ), для разных  $k = hk_*$  (Табл. 3).

$c_\eta$	$k$	$u_j^o$	$z_j^o$
0.87	0.1	$u_1^o = 0.32, u_2^o = 1.1, u_3^o = 0.32$	$z_2^o = -0.38, z_3^o = 0.47$
0.75	0.5	$u_1^o = 0.4, u_2^o = 1., u_3^o = 0.4$	$z_2^o = -0.35, z_3^o = 0.2$

Таблица 3: Оптимальные параметры слоя для разных  $c_\eta$  и  $k = hk_*$ .

Изложение диссертации заканчивается кратким заключением результатов и списком использованной литературы.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. предложены способы получения условий точной и приближенной управляемости деформируемых систем с переменными параметрами в виде интегральных ограничений типа равенств и явного представления решения задач граничного и распределенного управлений, а также управления коэффициентом, указаны пути их численной реализации,
2. исследованы задачи граничного и распределенного управления колебаниями одномерной неоднородной конечной и полубесконечной системы, получены замкнутые решения и проведены численные расчеты,
3. исследованы задачи управления распространением электромагнитных волн в диспергирующих средах, привлечены разные дисперсионные модели и проведены численные расчеты,
4. построены численные алгоритмы решения задач об оптимизации распределения материала под упругими деформируемыми системами, эквивалентные задачам нелинейного программирования,
5. исследована оптимизация распределения вязко-упругого материала Кельвина-Фойхта под конечной балкой, изгибающейся подвижной нормальной силой, показано, что минимальным объемом обладает точечное распределение материала (точечный гаситель колебаний, демпфер),
6. исследована оптимизации распределения упругого основания Винклера под прямоугольной упругой пластинкой, изгибающейся подвижной нормальной силой, показано, что минимальной интенсивностью обладает кусочно-постоянное распределение основания,

7. динамические двух- и трехмерные задачи оптимизации структуры неоднородных деформируемых систем сведены к задаче нелинейного программирования,
8. исследована оптимизация структуры поперечно неоднородного бесконечного слоя с целью достижения возможности распространения продольной волны с заданной фазовой скоростью, проведены численные расчеты.

## СПИСОК РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

- [1] Джилаван С. А., Хуршудян Ас. Ж., Оптимальное управление термоупругими напряжениями в упругом бесконечном слое // Сб. тр. межд. конф. “Акт. Пробл. Меж. Деф. Тв. Тела”, Инст. Мех НАН РА, Ереван, 2012, т. 1, сс. 228–232.
- [2] Khurshudyan As. Zh., On optimal boundary control of non-homogeneous string vibrations under impulsive concentrated perturbations with delay in controls // Math. Bulletin T. Shevchenko Sci. Soc., 2013, vol. 10, pp. 203–209.
- [3] Khurshudyan As. Zh., Arakelyan Sh. Kh., Delaying control of non-homogeneous string forced vibrations under mixed boundary conditions // IEEE Proc. on Control and Communications, 2013, vol. 10, pp. 1–5.
- [4] Khurshudyan As. Zh., Generalized control with compact support of wave equation with variable coefficients // Int. J. Dyn. Cont., 2015, DOI: 10.1007/s40435-015-0148-3.
- [5] Khurshudyan As. Zh., Generalized control with compact support for systems with distributed parameters // Arch. Cont. Sci., 2015, vol. 25 (LXI), issue 1, pp. 5–20.
- [6] Khurshudyan As. Zh., On optimal boundary and distributed control of partial integro-differential equations // Arch. Cont. Sci., 2014, vol. 24 (LX), issue 1, pp. 5–25.
- [7] Хуршудян Ас. Ж., Метод Бубнова–Галеркина в задачах управления билинейными системами // Автоматика и Телемеханика, 2015, т. 76, №8, сс. 46–55.
- [8] Хуршудян Ам. Ж., Хуршудян Ас. Ж., Оптимальное распределение вязкоупругих гасителей под упругой конечной балкой при подвижной нагрузке // Известия НАН Армении: Механика, 2014, т. 67, №3, сс. 56–67.
- [9] Khurshudyan As. Zh., On some problems of designs structural and topological optimization // Proc. of Intern. Conf. “Adv. Probl. in Mech.”. St. Petersburg, 2014, pp. 310–320.
- [10] Jilavyan S. H., Khurshudyan As. Zh., Topology optimization for elastic base under rectangular plate subjected to moving load // Arch. Cont. Sci., 2015, vol. 25 (LXI), issue 3, pp. 289–305.
- [11] Саркисян С. В., Джилаван С. А., Хуршудян Ас. Ж., Оптимизация структуры бесконечного неоднородного слоя при распространении периодических волн // Механика Композитных Материалов, 2015, т. 51, №3, сс. 397–406.

**ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԲՆՈՒԹԱԳՐԻՉՆԵՐՈՎ ԴԵՖՈՐՄԱՅՎՈՂ ՆԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ  
ԿԱՌՈՒՅՎԱԾՔԻ ՕԳՏԻՄԱԼԱՅՈՒՄԸ ԵՎ  
ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՂԵԿԱՎԱՐՈՒՄԸ  
ԱՄՓՈՓՈՒՄ**

Արենախոսությունում առաջարկված է բաշխված պարամետրերով համակարգերի համար ղեկավարման խնդիրների բացահայտ լուծման երեք մոտեցում՝ արդյունավետ հաշվարկային սխեմայով: Դրանց միջոցով լուծված է մի քանի խնդիր՝ ղեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկայում հանդիպող մոդելների համար, որոնք մաթեմատիկական ֆիզիկայում և կիրառական այլ ոլորտներում բնութագրում են այլ երևույթներ և պրոգնոզներ: Օգտագործված մաթեմատիկական մոդելները ընդունելի չափով թույլատրելի են, իսկ սրացված լուծումներն իմաստավորված են ընդունած վարկածների շրջանակում:

Մասնավորապես, Բուրկովսկու ընդհանրացված եղանակով հեփագոփվել է անհամասեռ վերջավոր և կիսանավերջ միաչափ համակարգերի փափանմանների, ինչպես նաև դիսպերսվող միջավայրում միաչափ էլեկտրամագնիսական ալիքի փարածման եզրային և բաշխված ճշգրիտ ղեկավարելիությունը, և որոշվել են համապատասխան ղեկավարումները բացահայտ փեսքով: Առաջին փիպի խնդիրների մաթեմատիկական մոդելը համարժեք է փոփոխական գործակիցներով միաչափ ալիքային հավասարմանը համապատասխան փրոյություն, իսկ երկրորդ խնդիրնը՝ մասնական ածանցյալներով ինփերգրոդիֆերենցիալ հավասարման:

Եզրակացություն

- Երկու խնդրում էլ սրացվել է համակարգի ճշգրիտ ղեկավարելիության համար անհրաժեշտ և բավարար պայմանների հաշվելի համակարգը (որոնելի ֆունկցիայի նկատմամբ ողորկ կորիզներով ինփերգրալ հավասարման փիպի սահմանափակումներ):
- Բոլոր խնդիրները լուծվել են բացահայտորեն, որը հնարավորություն է ստեղծել կատարելու ինչպես քանակական, այնպես էլ որակական հեփագոփություն. խնդրի փարբեր րվյալների (փափանվող համակարգի անհամասեռություն, դիսպերսիոն մոդելներ) համար իրականացվել է թվային հեփագոփություն, որի արդյունքը ներկայացվել է աղյուսակների և գրաֆիկների փեսքով:
- առաջին փիպի խնդիրների բացահայտ լուծման համար անհրաժեշտ է փափանվող համակարգի փոփոխական բնութագրիչները պարունակող Աիկափիի հափուկ հավասարման որևէ մասնավոր լուծում, իսկ երկրորդ խնդիրներինը՝ վիճակի հավասարման կորիզի Ֆուրիեի ձևափոխությունը:

Բուրկովսկու ընդհանրացված եղանակը և Բուբնով-Գալյորկինի պրոցեսը հաջորդաբար կիրառվել են բաշխման օպրիմալացման խնդիրներ լուծելու համար, երբ որոնելի ֆունկցիան բացահայտորեն կախված չէ ժամանակը բնութագրող փոփոխականից: Դիփարկված են միաչափ և երկչափ ղեֆորմացվող համակարգեր, որոնց ընդհանուր մաթեմատիկական մոդելը համարժեք է չորրորդ կարգի (համապատասխանաբար միաչափ և երկչափ) երկգծային դիֆերենցիալ հավասարման: Մասնավորապես, օպրիմալացվել են րրված բնութագրիչներով Կելվին-Ֆոյթի առաձգամածուցիկ նյութի բաշխումը շարժվող

բեռի ազդեցությանը ենթարկվող վերջավոր հեծանի փակ (ճշգրիտ ղեկավարելիություն), ինչպես նաև վինկլերյան հիմքի բաշխումը շարժվող բեռի ազդեցությանը ենթարկվող սալի փակ (համարյա ղեկավարելիություն)՝ փրված ժամանակահատվածում այդ համա-կարգերի ծռման փափանդումները մարելու նպատակով:

Եզրակացություն

- Սփացվել է, որ առաձգամածուցիկ միջավայրի կեփային բաշխումն է (ղեմպֆեր) մի-նիմալացնում օգտագործված նյութի հարաբերական զանգվածը, ընդ որում լուծման փոխանցման կեփերով որոշվում են մարիչների դիրքերը և արդյունավետ քանակը.
- պարզվել է, որ առաձգական հիմքի՝ կփոր առ կփոր առկա բաշխումն է մինիմա-լացնում որոնելի ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը, ընդ որում լուծման փոխանցման կեփերով որոշվում է հիմքի առկայության փիրոյթը.
- բացահայտ լուծումների միջոցով երկու խնդիրն էլ հանգեցվել է ոչ գծային ծրագրա-վորման խնդրի և հեփագոփվել որակապես. լուծման փոխանցման կեփերը հաշվվել են թվային եղանակով համակարգերի բնութագրիչների փարբեր արժեքների դեպ-քում. արդյունքները ներկայացվել են աղյուսակների և գրաֆիկների փեսքով:

Օգտագործելով դինամիկական խնդրի լուծման փրոհումը ալիքային վեկփորական և սկալյար փոփենցիալների՝ առաջարկված է կառուցվածքների օպփիմալացման միաչափ, երկչափ և եռաչափ խնդիրների լուծման արդյունավետ հաշվարկային սխեմա ունեցող մոփեցում: Մաթեմափիկական մոդելը ներկայացված է ղեկավարման երկգծային հա-մակարգի միջոցով: Մասնավորապես, օպփիմալացված է լարումներից ազափ եզրեր ունեցող լայնական անհամասեռ շերփի ներքին կառուցվածքը՝ փրված փուլային արա-գությանմբ երկայնական հարմոնիկ ալիքի փարածումն ապահովելու նպատակով: Վամա-կարգի մաթեմափիկական մոդելը համարժեք է մասնական ածանցյալներով երկգծային հավասարումների երկչափ համակարգի: Որոնելի ֆունկցիան ընդգրկված է եզրային պայմանների և վիճակի հավասարման մեջ՝ առաջին կարգի ածանցյալի հեփ:

Եզրակացություն

- Սփացվել է, որ շերփի՝ կփոր առ կփոր (շերփավոր) անհամասեռությունը, մինի-մալացնելով դրա փոփոխական բնութագրիչների մեծագույն արժեքը, ապահովում է ցանկալի պայմանը, ընդ որում լուծման փոխանցման կեփերով որոշվում է ամեն բաղկացուցիչ շերփի հասփությունը, իսկ ինփենսիվությանմբ՝ դրա նյութի բնութա-գրիչները.
- լուծման որոշումը հանգեցվել է ոչ գծային ծրագրավորման խնդրի, որը լուծվել է թվային եղանակով՝ խնդրի փվյալների փարբեր համակցությունների դեպքում, իսկ արդյունքներն ամփոփված են աղյուսակներում:

Առաջարկված մոփեցումներն ու դրանց զանազան համակցություններն այլ հայրնի ճշգրիտ կամ մոփավոր եղանակների հեփ կարող են փրամադրել ավելի հարմար և արդյունավետ մոփեցում՝ ավելի բարդ խնդիրների լուծման համար:

## ASATUR KHURSHUDYAN

# STRUCTURAL OPTIMIZATION AND CONTROL OF VIBRATIONS OF DEFORMABLE SYSTEMS WITH VARIABLE PARAMETERS

## SUMMARY

Three rigorous techniques for explicit solution derivation in control problems for distributed parameter systems having efficient numerical scheme are developed in the dissertation and applied for solving several problems mainly arising in deformable body mechanics, but covers also other processes and phenomena in mathematical physics and engineering. Used mathematical models are precise enough and obtained solutions are reasonable in the sense of hypothesis made.

In particular, Butkovskiy's generalized method is applied to analyse exact controllability and to find explicit controls in problems of boundary and distributed control of one-dimensional oscillations in non-homogeneous bounded and unbounded systems in dimension one and those of control by input signal and signal filter of one-dimensional sound wave propagating in dispersive finite medium. The mathematical model of the first problem is equivalent to one-dimensional wave equation with coordinate dependent coefficients and that of the second problem – to partial integro-differential equation associated with wave equation.

Summarizing

- in both problems countable system of necessary and sufficient conditions (as integral equalities with smooth kernels on unknown function) for exact controllability are derived,
- explicit solutions are obtained in all problems for different input data (non-homogeneity of the system, dispersion models) allowing as qualitative, as well as quantitative analysis which is implemented and results are represented via tables and figures,
- closed form solution in the first type of problems requires a particular solution of special Riccati equation containing the variable parameters of the vibrating system and in those of the second type – in terms of the Fourier transform of the kernel of the state equation.

Butkovskiy's generalized method and the Bubnov–Galerkin procedure are applied in turn in distribution optimization problems when the unknown function does not explicitly depend on time parameter. One- and two-dimensional deformable structures are considered. The general mathematical model is equivalent to bilinear equations (respectively one- and two-dimensional) of fourth order.

In particular, the distribution of Kelvin–Voight visco-elastic material with given parameters under finite beam subjected to moving load is optimised to ensure vanishing of its bending vibrations in required time (exact controllability) and the distribution of Winkler substrate under rectangular plate subjected to moving load is optimised

in order to ensure vanishing of its vibrations in required time (approximate controllability).

Summarizing

- it is obtained that the discrete distribution of visco-elastic material (dampers) minimizes the relative volume of material used, at this the switching points describe the optimal placements and reasonable number of dampers,
- it is derived that the piece-wise existing distribution of elastic base minimizes the maximal value of the unknown function, at this the switching points indicate the existence areas of the base
- on the basis of explicit formulas obtained in both cases the switching points computation is reduced to problem of nonlinear programming which is numerically solved for various combinations of input parameters and the results of implementation are represented via tables and figures.

Applying decomposition of *dynamical* problem solution via vector and scalar potentials an efficient numerical scheme is suggested to deal with complicated bilinear equations and their coupled systems in dimensions one, two and three. In particular, the structure of infinite layer with stress-free boundaries and transverse non-homogeneity is optimised in order to ensure propagation of harmonic wave with specified phase speed in longitudinal direction. The problem is mathematically formulated as a two-dimensional system of bilinear partial differential equations containing the control function and its first derivative subjected to boundary conditions also containing the control function.

Summarizing

- it is obtained that the piece-wise (layered) non-homogeneity of the layer minimizes its maximal intensity, at that the switching points indicate the thickness of each mono-layer, and the intensity of the controls– its material characteristics,
- the computations of those parameters is reduced to problem of nonlinear programming which is solved numerically for various combinations of input parameters and the results of implementation are presented via tables.

Suggested approaches and their various combinations with other well-known rigorous or numerical methods can provide a better tool for investigating more complicated problems.

