ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Նուրիջանյան Հովհաննես Քաջավանի

ԳԾԱՅՆԱՑՎՈՂ ԾԱԾԿՈՒՅԹՆԵՐԻ ԲԱՐԴՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա.01.09 «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

Ս Ե Ղ Մ Ա Գ Ի Ր

Երևան 2010

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Нуриджанян Оганес Каджаванович

О СЛОЖНОСТИ ЛИНЕАРИЗИРУЕМЫХ ПОКРЫТИЙ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 “Математическая кибернетика и математическая логика”

Ереван 2010

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում:

Գիտական ղեկավար՝	ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր	Ա.Ա. Ալեքսանյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր	Լ.Հ. Ասլանյան
	ֆիզ.մաթ. գիտ. թեկնածու	Վ.Պ. Գաբրիելյան
Առաջատար կազմակերպություն՝	ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտ	

Պաշտպանությունը կայանալու է 2010թ. հունիսի 7-ին ժամը 16^{00}-ին ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 044 «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ Երևանի պետական համալսարանի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքվել է 2010թ. մայիսի 6-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար՝
ֆիզ.մաթ. գիտ. թեկնածու Վ.Ժ. Դումանյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете.

Научный руководитель:	доктор физ.-мат. наук	А.А. Алексанян
Официальные опоненты:	доктор физ.-мат. наук	Л.А. Асланян
	кандидат физ.-мат. наук	В.П. Габриелян
Ведущая организация:	Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА	

Защита диссертации состоится 7-го июня 2010 г. в 16^{00} часов на заседании специализированного совета ВАК 044 “Математическая кибернетика и математическая логика” при ЕГУ по адресу: 0025 г. Ереван, ул. Алека Манукяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 6-го мая 2010г.

Ученый секретарь специализированного совета,
кандидат физ.-мат. наук В.Ж. Думанян

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲՆՈՒԹԱԳԻՐԸ

Թեմայի արդիականությունը: Դիսկրետ մաթեմատիկայի և մաթեմատիկական կիբեռնետիկայի հիմնական դասական մոդելային օբյեկտներից են բուլյան ֆունկցիաների դիզյունկտիվ նորմալ ձևերը, որոնք լայնորեն կիրառվում են գիտության և տեխնիկայի բազմաթիվ ոլորտներում: Դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տեսությունը բուռն զարգացում ապրեց անցած դարի 50-60 թվականներին և մասամբ էլ 70-ականների սկզբին: Ստացվեցին մի շարք նուրբ և փայլուն արդյունքներ, որոնց մեջ առանձնահատուկ արժանի են հիշատակման Ս.Յաբլոնսկու, Յու.Ժուրավլյովի, Ա.Սապոժենկոյի, Վ.Գլագոլևի, Յու.Լ.Վասիլևի, Ռ.Նիգմատուլինի, Լ.Ասլանյանի աշխատանքները: Ավելի ուշ շրջանում հիշատակման են արժանի Ա.Անդրեևի և Ա.Կորշունովի աշխատանքները, որոնցում գտնվել էր կարճագույն դիզյունկտիվ նորմալ ձևի ասիմպտոտիկ արժեքը համարյա բոլոր բուլյան ֆունկցիաների համար: Սակայն այդ մաթեմատիկական արդյունքները չհաջողվեց լայնորեն օգտագործել կիրառական էքստրեմալ խնդիրների լուծման նպատակով: Դա պայմանավորված էր էական դժվարությունների հաղթահարման հետ, որոնք ոչ թե սկզբնական բովանդակալից կիրառական խնդրի, այլ դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի մոդելին հատուկ, հանրահաշվորեն «աղքատ», լեզվի միջոցով խնդրի նկարագրման արդյունք էին:

Այնուամենայնիվ, մինչ այժմ էլ ինտեգրալ սխեմաների նախագծման և անսարքությունների հայտնաբերման բոլոր կիրառական մեթոդները հիմնված են տրամաբանական ֆունկցիաների նախնական հնարավորին պարզ դիզյունկտիվ նորմալ ձևերով իրականացման վրա: Գործնականում անվերջ է դիսկրետ էքստրեմալ խնդիրների բազմությունը, որոնք հանգեցվում են ոչ գծային բուլյան հավասարումների համակարգերի լուծմանը: Վերը նշված խնդիրների լուծմանն էր ուղղված դիզյունկտիվ նորմալ ձևերով տրամաբանական ֆունկցիաների ներկայացման հիմնական կիրառությունը: Դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տեսության այդպիսի «ճգնաժամային» վիճակը, որը պայմանավորված էր սկզբնական բովանդակալից խնդրի լուծման համար ընտրված մաթեմատիկական մոդելի ոչ բավարար ադեկվատությամբ, պահանջում էր էապես նոր մոդելի ընտրություն միաժամանակ առանց մաթեմատիկական ապարատի էական բարդացման:

Կիրառական խնդիրներ լուծելիս, Յու.Ժուրավլյովը նկատել էր, որ հավանաբար այդպիսի մոդել կարելի կլիներ ստեղծել դիտարկելով գծային ֆունկցիաների արտադրյալները, որպես n-չափանի միավոր խորանարդի գագաթների բազմության ինտերվալների (ենթախորանարդների) ընդհանրացում: 1987-1990 դա կատարվեց Յու.Ժուրավլյովի աշակերտ Ա.Ալեքսանյանի աշխատանքներում, որոնցում կառուցվեց գծայնացվող դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տեսությունը՝ սովորական դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տեսության բնական ընդհանրացումը և հիմնավորվեց դրա ադեկվատությունը: Նոր տեսության մեջ տրամաբանական ֆունկցիաները ներկայացվում էին ոչ թե n-չափանի միավոր խորանարդի գագաթների բազմության ինտերվալների ծածկույթով այլ F_2^n վերջավոր դաշտի գծային ենթատարածությունների հարակից դասերի ծածկույթով՝ գծայնացվող ծածկույթով: Գրանցվեց բուլյան ֆունկցիաների մինիմիզացման խնդրի նոր և էական առաջընթաց, որը սկզբունքորեն անհնար էր սովորական դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տեսության ներքո: Օրինակ, քառակուսային բազմանդամներով ներկայացվող բուլյան ֆունկցիաների կարճագույն գծայնացվող ծածկույթները հաջողվեց դուրս գրել բացահայտ բանաձևային տեսքով: Ա.Ալեքսանյանի աշխատանքները հիմնադրեցին բուլյան ֆունկցիաների հետազոտման նոր «անալիտիկ» ուղղություն:

Շատ արագ պարզվեց, որ գծայնացվող ծածկույթների գաղափարը հնարավոր է կիրառել վերջավոր դաշտերում տրված բազմանդամների (ակնհայտորեն նաև ենթաբազմությունների) համար: Բուլյան ֆունկցիաների համար ստացված հիմնական արդյունքները հաջողվեց տարածել վերջավոր դաշտերում սահմանված ֆունկցիաների համար Ա.Ալեքսանյանի, Վ. Գաբրիելյանի և այլոց աշխատանքներում:

Բուլյան ֆունկցիաների ներկայացումը դիզյունկտիվ նորմալ ձևերով էապես տարբերվում էր տրամաբանական տարրերով սխեմաների ներկայացումից, քանի որ ամենաբարդ ֆունկցիայի դիզյունկտիվ նորմալ ձևի երկարությունը էապես մեծ է «համարյա բոլոր» ֆունկցիաների բարդությունից, մինչդեռ սխեմաների դեպքում ամենաբարդ և «համարյա բոլոր» ֆունկցիաների բարդությունները միևնույն կարգի են: Գծայնացվող դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի դեպքում ամենաբարդ ֆունկցիայի կառուցումը դյուրին չէ՝ սա բաց խնդիր է: Անհայտ է մնում նաև արդյո՞ք ամենաբարդ ֆունկցիայի բարդությունը գծայնացվող դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի դասում տարբերվում է «համարյա բոլոր» ֆունկցիաների բարդությունից: Ա.Ալեքսանյանի և Վ.Գաբրիելյանի աշխատանքներում ստացվել են գնահատականներ «համարյա բոլոր» ֆունկցիաների կարճագույն գծայնացվող ծածկույթների բարդության համար բուլյան ֆունկցիաների և վերջավոր դաշտերում տրված ֆունկցիաների համար: Այդ գնահատականներից ստացվում է «համարյա բոլոր» ֆունկցիաների կարճագույն գծայնացվող ծածկույթների բարդության լոգարիթմի ասիմպտոտիկ արժեքը: Սակայն դեռևս հայտնի չէ այդ բարդության ասիմտոտիկ արժեքը: Այդ առումով արդիական է վերը նշված գնահատականների լավացման խնդիրը:

Կարճագույն դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի կառուցման դասական մեթոդները հիմնվում են այսպես կոչվող «փակուղային» ծածկույթների բազմության կառուցման ու դրանում կարճագույն ծածկույթի փնտրման վրա: Փակուղային ծածկույթները դրանք այն ծածկույթներն են, որոնցից հնարավոր չէ որևէ անդամ հեռացնել առանց ծածկույթ լինելու հատկությունը խախտելու: Բուլյան ֆունկցիաների գծայնացվող ծածկույթների դեպքում պարզվել է, որ այդ ճանապարհը ավելի քիչ իրագործելի է, քան դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի դեպքում, քանի որ փակուղային ծածկույթների թիվն արտահայտվում է «եռաստիճան» բանաձևով ու գործնականում փակուղային ծածկույթների բազմությունը անհասանելի է: Մեծ հավանականությամբ սա ճիշտ է նաև վերջավոր դաշտերում սահմանված ֆունկցիաների դեպքում և այս հարցի վերջնական պարզումը կարևոր քայլ է գծայնացվող ծածկույթների հետազոտման ուղղությամբ:

Մեկ այլ կարևոր խնդիր է վերջավոր դաշտերում մասնակի կամ «թույլ» որոշված ֆունկցիաների (ենթաբազմությունների) ներկայացումը համեմատաբար «պարզ» գծայնացվող ծածկույթների միջոցով: Բուլյան ֆունկցիաների դեպքի համար մշակված մեթոդների տարածումը վերջավոր դաշտերում հնարավորություն կընձեռի գծայնացվող ծածկույթներով ֆունկցիաների իրացման կիրառությունը ոչ գծային հավասարումների համակարգերի և մի շարք այլ դիսկրետ խնդիրների լուծման համար:

Աշխատանքի նպատակը: Ատենախոսության հիմնական նպատակն է փորձել ճշտել վերջավոր դաշտերում տրված «համարյա բոլոր» ենթաբազմությունների կարճագույն գծայնացվող ծածկույթի երկարության համար հայտնի գնահատականները, գնահատել «փակուղային» ծածկույթների քանակը «վատագույն» դեպքի համար, ինչպես նաև հետազոտել վերջավոր դաշտերում մասնակի կամ «թույլ» որոշված ֆունկցիաների (ենթաբազմությունների) համար «պարզ» գծայնացվող ծածկույթների կառուցման հնարավորությունը:

Հետազոտման օբյեկտը: Աշխատանքի հետազոտման օբյեկտը վերջավոր դաշտերի ենթաբազմությունների գծայնացվող ծածկույթներն են:

Հետազոտման մեթոդները: Աշխատանքում օգտագործված են դիսկրետ մաթեմատիկայի, հանրահաշվի և հավանականությունների տեսության մեթոդները:

Արդյունքների գիտական նորույթը: Աշխատանքի հիմնական արդյունքներն են.

- Ստացված է վերջավոր դաշտի «համարյա բոլոր» ենթաբազմությունների կարճագույն գծայնացվող ծածկույթի երկարության նոր վերին գնահատական, որն էականորեն լավացնում է մինչ այժմ հայտնի վերին գնահատականը:
- Ստացված են «փակուղային» գծայնացվող ծածկույթների քանակի վերին և ստորին գնահատականները վատագույն դեպքի համար (Շենոնի ֆունկցիան), ինչն ապացուցում է, որ կարճագույն գծայնացվող ծածկույթի որոնումը փակուղային գծայնացվող ծածկույթների բազմության մեջ նպատակահարմար չէ:
- Կառուցված է վերջավոր դաշտի ենթաբազմության օրինակ, որի համար կարճագույն գծայնացվող ծածկույթը կարելի է կառուցել անալիտիկորեն բացահայտ տեսքով, մինչդեռ այդ ենթաբազմության «փակուղային» ծածկույթների քանակն արտահայտվում է եռաստիճան էքսպոնենցիալ բանաձևով:
- Մասնակի «թույլ» որոշված ենթաբազմությունների համար տրված է մեթոդ «փոքր» բարդության գծայնացվող ծածկույթների կառուցման համար:

Ատենախոսության բոլոր արդյունքները նոր են և ստացված են հեղինակի կողմից առաջին անգամ:

Ստացված արդյունքների կիրառական նշանակությունը: Աշխատանքի արդյունքներն ու մեթոդները կարելի է կիրառել վերջավոր դաշտերում ոչ գծային հավասարումների համակարգերի հետազոտման համար, վերջավոր դաշտերում սահմանված ֆունկցիաների «հարմար» ներկայացման կառուցման համար, ինչպես նաև դիսկրետ մաթեմատիկայի և մաթեմատիկական կիբեռնետիկայի այլ խնդիրների հետազոտման ժամանակ:

Ստացված արդյունքների ապրոբացիան: Ատենախոսությունում ստացված արդյունքները զեկուցվել են ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի ընդհանուր սեմինարում և ԵՊՀ դիսկրետ մաթեմատիկայի և տեսական ինֆորմատիկայի ամբիոնի սեմինարում:

Հրատարակությունները: Աշխատանքի թեմայով հրատարակվել է երեք աշխատանք, որոնց ցուցակը բերված է սեղմագրի վերջում:

Ատենախոսության կառուցվածքը և ծավալը: Աշխատանքը բաղկացած է ցանկից, ներածությունից, երեք գլուխներից, եզրակացությունից և օգտագործված գրականության ցանկից: Աշխատանքի ծավալն է 74 էջ՝ ներառյալ 17 անվանում պարունակող օգտագործված գրականության ցանկը:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ներածության մեջ հիմնավորված է ատենախոսության հրատապությունը և հակիրճ ներկայացված է ատենախոսության ամեն մի գլխի պարունակությունը:

Առաջին գլխում ստացված է գծային տարածության համարյա բոլոր ենթաբազմությունների համար կարճագույն գծայնացվող ծածկույթի բարդության էապես ավելի լավ վերին գնահատական, քան մինչ այդ եղած արդյունքն էր.

Դիցուք F_q-ն q էլեմենտ պարունակող վերջավոր դաշտն է, իսկ F_q^n-ը նրա վրա կառուցված n–չափանի գծային տարածությունն է.

$$F_q^n = \{(\alpha_1,...,\alpha_n) \mid \alpha_i \in F_q, i = 1,2,...,n\}$$

Սահմանում 1.1: Դիցուք L-ը F_q^n-ի գծային ենթատարածություն է և $\alpha \in F_q^n$: $\alpha + L = \{\alpha + x \mid x \in L\}$ բազմությունը կոչվում է L գծային ենթատարածության հարակից դաս, որի չափողականությունը սահմանվում է որպես L գծային ենթատարածության չափողականություն:

Սահմանում 1.2: Եթե $H_1, H_2,..., H_s$ հարակից դասեր են, որոնք ընկած են N-ի մեջ, ընդ որում՝ $H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_s = N$, ապա կասենք որ $\{H_1, H_2,..., H_s\}$-ը հանդիսանում է N-ի ***գծայնացվող ծածկույթ***: Ծածկույթին պատկանող հարակից դասերի քանակը՝ այսինքն s-ը, կոչվում է ծածկույթի երկարություն կամ բարդություն: N-ի մինիմալ հնարավոր երկարության գծայնացվող ծածկույթը կոչվում է ***կարճագույն ծածկույթ***: N ենթաբազմության կարճագույն ծածկույթի երկարությունը նշանակվում է $\ell(N)$-ով:

Այնուհետև տրվում է գրադիենտ հաջորդականության գաղափարի սահմանումը և նրա հետ կապված մի կարևոր արդյունք.

Դիցուք $T=\left(t_{i,j}\right)$ բուլյան մատրից է $a_1,...,a_r$ տողերով և $b_1,...,b_m$ սյուներով :

Սահմանում 1.3: Կասենք, որ a_j սյունը ծածկում է b_i տողը, եթե $t_{i,j}=1$:

Սահմանում 1.4: Սյուների $a_1,a_2,...,a_k$ հաջորդականությունը կոչվում է գրադիենտ, եթե $\forall i=1,2,...,k$, a_i սյունը ծածկում է մաքսիմալ թվով տողեր, որոնք ծածկված չեն $a_1,a_2,...,a_{i-1}$ սյուների միջոցով: k թիվը կանվանենք $a_1,a_2,...,a_k$ գրադիենտ հաջորդականության երկարություն:

Դիցուք $p(T)$-ն T մատրիցի տողերի քանակն է, իսկ $q(T)$-ն՝ սյուներինը: $L_\delta(T)$-ով ($\delta\ge 0$) նշանակենք այն փոքրագույն k թիվը, որ ցանկացած k երկարությամբ գրադիենտ հաջորդականության համար չծածկված տողերի մասը չի գերազանցում $e^{-\delta}$-ն:

Լեմմա 1.5[1]: Եթե գոյություն ունի T-ի այնպիսի $\tilde{T}$ ենթամատրիցա, որ $\tilde{T}$-ի յուրաքանչյուր տող ծածկվում է ոչ պակաս քան $\chi q(\tilde{T})$ հատ սյուներով ($\chi>0$), և $p(\tilde{T})\ge(1-\varepsilon)p(T)$ ($\varepsilon\in(0,1)$), ապա

$$L_\delta(T)\le\frac{\delta}{\chi}+1+\varepsilon p(T):$$

Սահմանում 1.6: Դիցուք F_q^n-ի այն ենթաբազմությունների քանակը, որոնց համար տեղի ունի որևէ Π հատկություն հավասար է π_n-ի: Եթե տեղի ունի $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi_n}{2^{q^n}}=1$, ապա կասենք, որ Π հատկությունը տեղի ունի F_q^n-ի համարյա բոլոր ենթաբազմությունների համար:

---

[1] Андреев, А., Об одной модификации градиентного алгоритма, Вестник Московского Университета, Москва, 1985, N3, стр. 29-35.

Մինչ այժմ F_q^n-ի համարյա բոլոր ենթաբազմությունների կարճագույն գծայնացվող ծածկույթի երկարության՝ $\ell(N)$-ի համար ստացվել էին հետևյալ արդյունքները[2].

$$c_2 \frac{q^n}{n \ln n} \le \ell(N) \le c_1 \frac{q^n}{n} \ln n$$

Օգտվելով Անդրեևի[1] կողմից առաջարկված մեթոդի գաղափարներից, այս աշխատանքում ստացվել է վերին սահմանի նոր՝ էապես ավելի լավ գնահատական. $\ell(N) \le const \frac{q^n}{n}$ ։

$F(n)$-ի (F_q^n-ի բոլոր ենթաբազմությունների բազմության) վրա սահմանված է հավանականության այնպիսի բաշխում, որ բոլոր $\tilde{x} \in F_q^n$ համար հետևյալ

$$\xi_{\tilde{x}}(N) = \begin{cases} 1; & \tilde{x} \in N \\ 0; & \tilde{x} \notin N \end{cases}$$

պատահական մեծությունները անկախ են և հավասարաչափ բաշխված , ընդ որում՝ $\mathrm{P}(\xi_{\tilde{x}} = 1) = 2^{-\lambda}$, $\lambda > 0$ ։

Դիցուք $N \subseteq F_q^n$ և $N = \{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, ..., \tilde{\alpha}_s\}$, որտեղ $s \ge 1$։ Իսկ N-ին պատկանող բոլոր հարակից դասերն են՝ $H_1, H_2, ..., H_p$։ N ենթաբազմությանը համապատասխանեցնենք $T_N = (t_{i,j})_{s \times p}$ բուլյան մատրիցա հետևյալ կերպ. եթե $\tilde{\alpha}_i \in H_j,\ \ 1 \le i \le s,\ \ 1 \le j \le p$, ապա $t_{i,j} = 1$ հակառակ դեպքում $t_{i,j} = 0$։

Լեմմա 1.7: Եթե $\lambda \ge 1$ և $\delta \in (0,1)$, ապա

$$M\varphi_+\left(L_\delta(N) - q^{2+\delta} \lambda\delta \frac{q^n 2^{-\lambda}}{n} \right) \le \frac{q^n}{n \log_q^2 n},$$

[2] Габриелян В., О метрических характеристиках, связанных с покрытиями подмножеств конечных полей смежными классами линейных подпространств, Институт проблем информатики и автоматизации, Препринт НАН РА 04-0602, Ереван, 2004 .

որտեղ $\varphi_{+}(x)=\dfrac{x+|x|}{2}$, $L_{\delta}(T_N)=L_{\delta}(N)$:

Այնուհետև փոփոխականների $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ բազմությունը տրոհում ենք $X=X^1\cup X^2\cup...\cup X^k\cup Y$ չհատվող ենթաբազմությունների. $|X^i|=m;\quad i=1,...,k;\quad k=[\log_q n];\quad m=\left[\dfrac{n}{\log_q n}\right]$:

Դիցուք υ_{δ} օպերատոր է, որը յուրաքանչյուր $N\subseteq F_q^n$ ենթաբազմության համապատասխանության մեջ է դնում հարակից դասերի այնպիսի բազմություն, որոնք ինչ-որ հերթականությամբ կազմում են գրադիենտ հաջորդականություն, ընդ որում այդ հաջորդականությամբ չծածկված կետերի մասը չի գերազանցում $e^{-\delta}$-ն, իսկ այդ հաջորդականության վերջին անդամի հեռացումը խախտում է այդ առնչությունը:

Յուրաքանչյուր $N\subseteq F_q^n$ ենթաբազմության համապատասխանեցնենք $N_0.,N_1,...,N_k$ ենթաբազմությունների հաջորդականություն հետևյալ կերպ.

1) $N_0=N$

2) Դիցուք կառուցված են N_{i-1}, $i\le k$ ենթաբազմությունները, իսկ N_{i-1}^j $j=1,...,q^{n-m}$ բազմությունները N_{i-1}-ի ենթաբազմություններն են կախված միայն X^i-ի մեջ մտնող փոփոխականներից: $\upsilon_{\delta}^i(N)=\upsilon_{\delta}(N_{i-1}^1)\cup...\cup\upsilon_{\delta}(N_{i-1}^{q^{n-m}})$: N_i-ն կառուցվում է հետևյալ կերպ. $\tilde{x}\in N_i \Leftrightarrow \tilde{x}\notin \upsilon_{\delta}^i(N)$ և $\tilde{x}\in N_{i-1}$:

N_k-ի ամենաբարդ գրադիենտ հաջորդականությունը նշանակենք $\upsilon^k(N)$-ով: Իսկ $L_{\upsilon,\delta}(N)$-ով նշանակենք՝ $L_{\upsilon,\delta}(N)=\sum_{i=1}^{k}|\upsilon_{\delta}^i(N)|+|\upsilon^k(N)|$:

Այս կառուցումից և Լեմմա 1.7-ից օգտվելով ստանում ենք.

Լեմմա 1.8: Դիցուք $\lambda\ge 1$; $\delta\ge 1-\ln 2$, այդ դեպքում

$$M\varphi_+\left(L_{v,\delta}-\frac{q^3e^2}{2q^{\ln 2}}\frac{q^n}{n}2^{-\lambda}\frac{\lambda\ln 2+1}{\ln 2}\right)\le\frac{q^n}{n\log_q n}:$$

Եվ վերջապես Լեմմա 1.8-ում փոխարինելով λ-ն 1-ով և կիրառելով Չեբիշևի անհավասարությունը ապացուցվում է այս գլխի հիմնական թեորեմը.

Թեորեմ 1.9: Համարյա բոլոր ենթաբազմությունների համար

$$\ell(N)\le\frac{q^{3-\ln 2}e^2(\ln 2+1)}{2\ln 2}\cdot\frac{q^n}{n}:$$

Երկրորդ գլխում ուսումնասիրված է այսպես կոչված «փակուղային» գծայնացվող ծածկույթները և գծային տարածության ենթաբազմությունների համար տրված է դրանց քանակի վերին և ստորին գնահատականները.

Սահմանում 2.1: H հարակից դասը կոչվում է մաքսիմալ հարակից դաս N ենփաբազմության համար, եթե $H\subseteq N$ և ցանկացած $H'\supset H$ հարակից դասի համար $H'\not\subset N$:

Սահմանում 2.2: N-ի գծայնացվող ծածկույթ հանդիսացող $D=\{H_1,H_2,...,H_m\}$ բազմությունը կոչվում է փակուղային գծայնացվող ծածկույթ, եթե H_i հանդիսանում է մաքսիմալ հարակից դաս N-ի համար $(i=1,...,m)$ և ցանկացած $D'\subset D$ բազմություն չի հանդիսանում ծածկույթ N-ի համար:

Դիցուք $t(N)$-ը N-ի բոլոր իրարից տարբեր փակուղային գծայնացվող ծածկույթների քանակն է: Կատարենք հետևյալ նշանակումը.

$$t(n)=\max_{N\subseteq F_q^n}t(N)$$

$t(n)$-ի ստորին գնահատական տալու համար դիտարկված է ենթաբազմության օրինակ, որի փակուղային գծայնացվող ծածկույթների քանակը հաշվվում է եռաստիճան բանաձևով.

Դիցուք $N_0\subseteq F_q^{2n}$-ն հետևյալ հավասարման լուծումների բազմությունն է

$$x_1x_2+...+x_{2n-1}x_{2n}=b$$

որտեղ $b\in F_q$ և $b\neq 0$: Ցույց է տրված, որ N_0-ն կարելի է նկարագրել որպես գծային հավասարումների համակարգերի լուծումների միավորում՝ հետևյալ տեսքի.

$$\begin{cases} x_2 = \alpha_1 \\ \ldots \\ x_{2n} = \alpha_n \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{2i-1} = b \quad (b \neq 0) \end{cases}$$

բոլոր $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F_q^n$, $\widetilde{\alpha} \neq (0, \ldots, 0)$ վեկտորների համար:

Այնուհետև ապացուցվում է, որ N_0 ենթաբազմության մաքսիմալ հարակից դասերի չափողականությունը հավասար է $n-1$, որոնք կառուցվում են հետևյալ մեթոդով.

1) Ընտրվում է որևէ $(n-1-p)$ չափանի $L = \{B_1, \ldots, B_{q^{n-1-p}}\}$ հարակից դաս F_q^{2n} / B-ում, այնպես, որ $B \notin L$, որտեղ B-ն այն $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_{2n})$ վեկտորների գծային ենթատարածությունն է, որ $x_{2i} = 0$ ($i = 1, \ldots, n$) և $0 \leq p \leq n-1$:
2) Եթե $\{B_1, \ldots, B_{n-p}\}$ բազիս է L-ում, ապա յուրաքանչյուր $i = 1, \ldots, n-p$ համար ընտրում ենք C_i հարակից դաս $N_0 \cap B_i$-ում՝ ըստ p-չափանի D գծային ենթատարածության, որը միարժեքորեն որոշվում է L-ի միջոցով:
3) $C = \bigcup_{j=1}^{q^{n-1-p}} C_j$ հանդիսանում է $(n-1)$ չափանի հարակից դաս N_0-ում, որտեղ $C_1, C_2, \ldots, C_{q^{n-1-p}}$ ենթաբազմությունները բոլոր $\lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_{n-p} C_{n-p}$ տեսքի հարակից դասերն են, այնպես, որ $\sum_{i=1}^{n-p} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \in F_q$, $i = 1, \ldots, n-p$:

Հաշվի առնելով այս կառուցման մեթոդը, N_0-ի փակուղային գծայնացվող ծածկույթների քանակի համար ստացվում է հետևյալ գնահատականը.

Լեմմա 2.3: $t(N_0) \geq q^{(n-1)^2 n q^{n-1}}$

Եվ այս գլխի վերջում ստացված է $t(n)$-ի վերին և ստորին գնահատականները.

Թեորեմ 2.4: $q^{\left(\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil -1\right)^2 \left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil q^{\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil -1}} \leq t(n) \leq q^{q^n \frac{(n+1)^2}{4}(1+\varepsilon_n)}$, որտեղ $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$:

Երրորդ գլխում ուսումնասիրված են մասնակի (կամ թույլ) որոշված ենթաբազմությունների գծայնացվող ծածկույթները և տրված է «փոքր» քանակի տարրերի վրա որոշված համարյա բոլոր ենթաբազմությունների գծայնացվող ծածկույթների վերին գնահատականը:

Սահմանում 3.1: Կասենք, որ N ենթաբազմությունը մասնակի (կամ թույլ) է որոշված F_q^n-ում, եթե այն տրված է $\{N_0, N_1\}$, $N_0 \cap N_1 = \varnothing$, F_q^n-ի ենթաբազմությունների զույգի տեսքով, այնպես, որ $N_1 \subseteq N$ և $N_0 \subseteq F_q^n \setminus N$:

Սահմանում 3.2: $D = \{H_1, H_2, ..., H_m\}$ հարակից դասերի բազմությունը կոչվում է $N = \{N_0, N_1\}$ մասնակի որոշված ենթաբազմության գծայնացվող ծածկույթ, եթե $N_1 \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} H_i$ և $N_0 \cap H_i = \varnothing$, ($i = 1,...,m$): Ծածկույթին պատկանող հարակից դասերի քանակը՝ այսինքն m-ը, կոչվում է ծածկույթի երկարություն: Մինիմալ հնարավոր երկարություն ունեցող գծայնացվող ծածկույթը կոչվում է *կարճագույն ծածկույթ*:

Ցույց է տրված, որ $N = \{N_0, N_1\}$ մասնակի որոշված ենթաբազմության կարճագույն գծայնացվող ծածկույթի երկարությունը ավելին չէ քան $F_q^n \setminus N_0$ «լրիվ» որոշված ենթաբազմության կարճագույն գծայնացվող ծածկույթի երկարությունը, այսինքն մասնակի որոշված ենթաբազմության կարճագույն գծայնացվող ծածկույթի բարդությունը գտնելու խնդիրը, բերվում է լրիվ որոշված ենթաբազմությունների կարճագույն գծայնացվող ծածկույթի բարդությունը գտնելու խնդրին:

Սահմանում 3.3: Կասենք, որ N-ը որոշված է «փոքր» քանակի տարրերի վրա, եթե $|N_0 \cup N_1| = o(q^n)$:

$F_k(n)$-ով նշանակենք բոլոր այն $N \subseteq F_q^n$ ենթաբազմությունների բազմությունը, որոնց համար $\left|F_q^n \setminus N\right| = k$ ($k = 0,1,...,q^n$): «Փոքր» քանակի տարրերի վրա որոշված ենթաբազմության դեպքում՝ $k = o(q^n)$: Քանի որ գծայնացվող ծածկույթի երկարությունը ինվարիանտ է F_q^n-ում լրիվ աֆինական ձևափոխությունների խմբի նկատմամբ, ապա կարելի է ենթադրել, որ $0 \in F_q^n \setminus N$: $L(N,k,r)$-ով նշանակված է այն N ենթաբազմության կարճագույն գծայնացվող ծածկույթի երկարությունը, որը պատկանում է $F_k(n)$-ին, $0 \in F_q^n \setminus N$ և $F_q^n \setminus N$-ի վեկտորների մատրիցի ռանգը հավասար է r-ի:

Դիցուք $L(n,k,r) = \max L(N,k,r)$: Ապացուցված է հետևյալ առնչությունը.

Լեմմա 3.4: $L(n,k,r) \le (q-1)(n-r) + q^{r-1} + k(q-2)$:

Սահմանում 3.5: Դիցուք $m \le n+1$: Կասենք $\{\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^m\} \subseteq F_q^n$ վեկտորները գտնվում են ընդհանուր կարգավիճակում, եթե $\lambda_1\alpha^1 + ... + \lambda_m\alpha^m = 0$ և $\lambda_1 + ... + \lambda_m = 0$ պայմաններից հետևում է, որ $\lambda_1 = ... = \lambda_m = 0$, որտեղ $\lambda_i \in F_q$, $i = 1,...,m$:

Լեմմա 3.6: Դիցուք $k \le n+1$ և $N \in F_k(n)$ ենթաբազմության համար $F_q^n \setminus N$-ի էլեմենտները գտնվում են ընդհանուր կարգավիճակում, այդ դեպքում՝

$$L(N,k,r) \le (q-1)(n-k+1) + (q-2)(k-1) + \frac{(k-1)(k-2)}{2}$$

Լեմմա 3.7: Դիցուք $m \cdot k = o\left(q^{n/2}\right)$, $m = o(q^{n-k})$ և $k \le n$, ապա համարյա բոլոր $m \cdot k$ հատ իրարից տարբեր տողեր և n հատ սյուներ պարունակող մատրիցները, որոնց տողերը F_q^n-ի վեկտորներ են, պարունակում են m հատ հաջորդական տողերի խմբեր, որոնցից յուրաքանչյուրը հանդիսանում է ընդհանուր կարգավիճակում գտնվող k հատ վեկտորների հավաքածու:

Եվ վերջում, օգտվելով վերջին երկու լեմմաներից ապացուցված է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 3.8: Համարյա բոլոր $N \subseteq F_q^n$ ենթաբազմությունների համար, այնպիսին, որ $\left|F_q^n \setminus N\right| = k$, որտեղ $k \le n - \varphi(n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n) = +\infty$ և $\varphi(n) = o(n)$, կարելի է կառուցել գծայնացվող ծածկույթ, որի երկարությունը չի գերազանցում $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + n(2q-3) - q + 2$ մեծությունը:

Հիմնական դրույթներն ու եզրահանգումները

Աշխատանքում ուսումնասիրված է վերջավոր դաշտերում ենթաբազմությունների գծայնացվող ծածկույթների բարդությունները: Աշխատանքի հիմնական արդյունքներն են՝

1. Ստացված է վերջավոր դաշտի «համարյա բոլոր» ենթաբազմությունների կարճագույն գծայնացվող ծածկույթի երկարության նոր վերին գնահատական, որն էականորեն լավացնում է մինչ այժմ հայտնի վերին գնահատականը:
2. Ստացված են «փակուղային» գծայնացվող ծածկույթների քանակի վերին և ստորին գնահատականները վատագույն դեպքի համար (Շեննոնի ֆունկցիան), ինչն ապացուցում է, որ կարճագույն գծայնացվող ծածկույթի որոնումը փակուղային գծայնացվող ծածկույթների բազմության մեջ նպատակահարմար չէ:
3. Կառուցված է վերջավոր դաշտի ենթաբազմության օրինակ, որի համար կարճագույն գծայնացվող ծածկույթը կարելի է կառուցել անալիտիկորեն բացահայտ տեսքով, մինչդեռ այդ ենթաբազմության «փակուղային» ծածկույթների քանակն արտահայտվում է եռաստիճան էքսպոնենցիալ բանաձևով:
4. Մասնակի «թույլ» որոշված ենթաբազմությունների համար տրված է մեթոդ «փոքր» բարդության գծայնացվող ծածկույթների կառուցման համար:

Ատենախոսության թեմայի շրջանակներում հրատարակված աշխատությունների ցանկը

1. H.K. Nurijanyan, *On the Length of the Shortest Linearised Covering for "Almost All" Subsets in a Finite Field*, Reports of NAS of Armenia, vol. 110, no.1, 2010, pp. 30-34
2. H.K. Nurijanyan, *An Upper Bound for the Complexity of Linearised Coverings in a Finite Field*, Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences, vol. 2(222), 2010, pp. 41-48
3. H.K. Nurijanyan, *On the Number of Irreducible Linearised Coverings for Subsets in Finite Fields*, Mathematical Problems of Computer Science, Transactions of IPIA NAS RA, vol. 33, 2010, pp. 66-72

Нуриджанян Оганес Каджаванович

О сложности линеаризируемых покрытий

Резюме

Диссертационная работа посвящена изучению сложности линеаризируемых покрытий подмножеств в конечном поле. Минимальное значение сложности линеаризируемого покрытия определяется как минимальное количество систем линейных над конечным полем уравнений, таких, что объединение решений этих уравнений образовывает точное покрытие для данного подмножества.

Одним из классических методов построения кратчайшего линеаризируемого покрытия основано в построении так называемых “тупиковых” покрытий и нахождения в них кратчайшего покрытия.

Еще одной важной задачей в изучении линеаризируемых покрытий является представление “слабо” частично-определенных подмножеств с помощью более “простых” линеаризируемых покрытий.

В работе получены следующие основные результаты:

1. Получена новая верхняя оценка сложности линеаризируемого покрытия для “почти всех” подмножеств конечного поля, которая существенно улучшает ранее известную оценку.
2. Получены верхние и нижние оценки количества “тупиковых” линеаризируемых покрытий подмножеств в конечном поле и тем самым показано, что поиск кратчайшего линеаризируемого покрытия в множестве “тупиковых” покрытий нецелесообразен.
3. Построен пример подмножества, для которого кратчайшее линеаризируемое покрытие имеет простой аналитический вид, в то время как количество “тупиковых” покрытий выражается “трехэтажной” экспоненциальной формулой.
4. Для “слабо” частично-определенных подмножеств конечного поля предложен метод построения линеаризируемого покрытия, имеющего небольшую сложность.

Hovhannes Nurijanyan

On the Complexity of Linearised Coverings