ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ռաֆայելյան Լևոն Ռոբերտի

ՃՇԳՐԻՏ ՀԱՆԳՈՒՅՑՆԵՐԻ ԿՈՆՍՏՐՈՒԿՑԻԱՆԵՐ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԿՈՐԵՐԻ ՎՐԱ

Ա.01.07 "Հաշվողական մաթեմատիկա" մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան – 2012

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Рафаелян Левон Робертович

КОНСТРУКЦИИ КОРРЕКТНЫХ УЗЛОВ НА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.07 "Вычислительная математика"

Ереван – 2012

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Հ. Ա. Հակոբյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Մ. Գ. Գրիգորյան
ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Ա. Տ. Ափոզյան
Առաջատար կազմակերպություն՝ ՀԳԱԱ Մաթեմատիկայի ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կայանալու է 2012 թ. հունիսի 6-ին, ժ. 15^{30}-ին ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 044 "Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն" մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2012 թ. մայիսի 4-ին:

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու՝ Վ. Ժ. Դումանյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском гасударственном университете

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук А. А. Акопян
Официальные опоненты: доктор физ.-мат. наук М. Г. Григорян
кандидат физ.-мат. наук А. Т. Апозян

Ведущая организация: Институт математики НАН Армении

Защита состоится 6-го июня 2012 г. в 15^{30} часов на заседании действующего в Ереванском государственном университете специализированного совета ВАК 044 "Математическая кибернетика и математическая логика", по адресу: Ереван 0025, ул. А. Манукяна, 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 4-го мая 2012 г.

Ученый секретарь специализированного совета.
кандидат физ.-мат. наук В. Ж. Думанян

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲՆՈՒԹԱԳԻՐԸ

Թեմայի արդիականությունը. Թվային մեթոդներում հաճախ անհրաժեշտ է լինում բարդ ֆունկցիաները մոտարկել ավելի պարզերով: Այդ խնդրի լուծման լայն տարածում գտած մեթոդներից է բազմանդամային միջարկումը կամ ինտերպոլացիան: Բազմանդամներով կամ այլ ֆունկցիաներով միջարկումը կիրառական մաթեմատիկայի պատմականորեն համեմատաբար վաղ առաջացած մեթոդներից է: *Ինտերպոլացիա* տերմինը ներմուծվել է Ուոլիսի կողմից դեռևս 17-րդ դարի կեսերին:

Ներկայումս բազմանդամային միջարկումը մոտարկումների տեսության և հաշվողական մաթեմատիկայի կարևորագույն բաժիններից մեկն է: Այն լայնորեն կիրառվում է բազմաթիվ մաթեմատիկական խնդիրներում:

Միաչափ բազմանդամային միջարկման խնդրի սպառիչ լուծումներ են տվել դեռևս Լագրանժը և Նյուտոնը: Մի քանի փոփոխականի բազմանդամային միջարկումը համեմատաբար նոր թեմա է և սկիզբ է առել 19-րդ դարի երկրորդ կեսերից՝ Վ. Բորչարդի և Լ. Կրոնեկերի աշխատանքներով:

Բազմաչափ բազմանդամային միջարկման խնդրով հիմնավորապես սկսել են զբաղվել շատ ավելի ուշ՝ վերջին չորս-հինգ տասնամյակների ընթացքում: Այս շրջանում մաթեմատիկայի շատ այլ բաժիններում ևս հետազոտությունների հիմնական ուղղությունը մի փոփոխականի ֆունկցիաների դեպքից տեղափոխվեց մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների դեպք:

Ըստ էության՝ մի քանի փոփոխականի բազմանդամային միջարկման առաջին կարևոր արդյունքները ստացել են Բերզոլարին, Ռադոնը, ինչպես նաև Չանգը և Յաոն: Ներկայումս բազմաչափ բազմանդամային միջարկման տեսության մեջ կան շատ չլուծված հիմնական խնդիրներ: Մասնավորապես՝ լուծված չէ դեռևս 1982 թ.-ին Գասքայի և Մաեզթուի կողմից առաջադրված վարկածը:

Միաչափ շատ կիրառական խնդիրների, ինչպես օրինակ՝ թվային ինտեգրման, ոչ գծային հավասարումների համակարգերի և դիֆերենցիալ հավասարումների մոտավոր լուծման մեջ առանցքային դեր է կատարում բազմանդամային միջարկումը: Մի քանի փոփոխականի համապատասխան խնդիրներում սկզբնապես կիրառվել է միաչափ միջարկումների թենզորական արտադրյալով ընդհանրացումը, որը, չնայած պարզությանը, ունի մի էական թերություն: Այն է՝ թենզորական արտադրյալի բազմանդամային տարածությունը և ցանցը ինվարիանտ չեն գծային ձևափոխությունների նկատմամբ: Այս հանգամանքն անհրաժեշտ է դարձնում նշված խնդիրներում ըստ էության մի քանի փոփոխականի միջարկման կիրառությունը:

Նշենք նաև, որ բազմաչափ բազմանդամային միջարկման խնդիրը սերտորեն առնչվում է հանրահաշվական երկրաչափության հետ, քանի որ դրա լուծելիությունը հանգում է այն հարցին, թե արդյոք գոյություն ունի որոշակի կարգի հանրահաշվական կոր կամ մակերևույթ, որն անցնում է միջարկման բոլոր հանգույցներով:

Ատենախոսական աշխատանքի նպատակը և խնդիրները. Մի քանի փոփոխականի բազմանդամային միջարկման համար հանգույցների ճշգրիտ բազմությունների ուսումնասիրությունը, դրանց կառուցումը կամայական հարթ հանրահաշվական կորերի վրա, ինչպես նաև՝ Գասքա-Մաեզթուի վարկածի և ընդհանրացված վարկածի հետազոտությունը:

Հետազոտման օբյեկտը. Մի քանի փոփոխականի բազմանդամային տարածություններ, միջարկման ճշգրիտ բազմություններ, երկրաչափական բնութագրությամբ բազմություններ, հարթ հանրահաշվական կորեր, մաքսիմալ կորեր:

Հետազոտման մեթոդները. Օգտագործվել են բազմաչափ բազմանդամային միջարկման տեսության մեթոդները: Օգտագործվել են նաև պրոյեկտիվ երկրաչափության և հանրահաշվական երկրաչափության որոշ մեթոդներ:

Գիտական նորույթը. Սահմանվել և բնութագրվել են մաքսիմալ կորերը: Տրվել է Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիայի ընդհանրացումը կամայական հարթ հանրահաշվական կորերի դեպքի համար: Ընդհանրացվել է Չանգ-Յաոյի երկրաչափական բնութագիրը և բնական ցանցը՝ օգտագործելով կամայական հարթ հանրահաշվական կորեր: Տրվել է ընդհանրացված GC բազմությունների մի դասի նկարագրությունը: Առաջադրվել է մի վարկած մաքսիմալ կորերի վերաբերյալ, որը մասնավոր դեպքում համընկնում է Գասքա-Մաեզթուի վարկածի հետ: Ապացուցվել է առաջադրված վարկածը Π_3 բազմանդամային տարածության համար: Ցույց է տրվել, որ գոյություն ունեն ճիշտ երկու մաքսիմալ կորերով ընդհանրացված GC բազմություններ:

Կիրառական նշանակությունը. Ատենախոսության մեջ ստացված արդյունքներն ունեն ինչպես տեսական, այնպես էլ՝ կիրառական նշանակություն: Վերը նշված արդյունքները վերաբերում են միջարկումների տեսության պրակտիկայում հաճախ կիրառվող սխեմաներից մեկին՝ երկրաչափական բնութագրով ցանցերին և դրանց ընդհանրացմանը: Դրանք կարող են կիրառվել բոլոր այն խնդիրներում, որոնց լուծման մեջ օգտագործվում է բազմաչափ բազմանդամային միջարկումը:

Պաշտպանությանը ներկայացվում են հետևյալ դրույթները.

- Մաքսիմալ կորերի սահմանումը և բնութագրումը:
- Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիայի ընդհանրացումը կամայական հարթ հանրահաշվական կորերի դեպքի համար:
- Չանգ-Յաոյի երկրաչափական բնութագրի պայմանի և բնական ցանցի ընդհանրացումը կամայական հարթ հանրահաշվական կորերի դեպքի համար:
- Ընդհանրացված GC բազմությունների մի դասի բնութագրումը:
- Մաքսիմալ կորերի վերաբերյալ վարկածի առաջադրումը:
- Առաջադրված վարկածի ապացույցը Π_3 բազմանդամային տարածության համար:
- Ճիշտ երկու մաքսիմալ կորերով ընդհանրացված GC բազմությունների գոյությունը:

Ստացված արդյունքների ապրոբացիան. Ատենախոսության արդյունքները զեկուցվել են ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի Թվային անալիզի և մաթեմատիկական մոդելավորման ամբիոնի սեմինարներում, ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի ընդհանուր սեմինարում և Հարմոնիկ անալիզ և մոտարկումներ, V, 2011 միջազգային կոնֆերանսում:

Հրատարակությունները. Ատենախոսության հիմնական արդյունքները տպագրված են չորս գիտական հոդվածներում և միջազգային կոնֆերանսի մեկ սեղմագրում:

Ատենախոսության կառուցվածքը և ծավալը. Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից, երեք գլխից, ամփոփումից և գրականության ցանկից, որը ներառում է 30 աշխատանք: Ատենախոսության ծավալը 90 էջ է:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Աշխատանքի առաջին գլուխը նվիրված է բազմաչափ բազմանդամային միջարկման և նրա հիմնական խնդրի ներկայացմանը: *Պարագրաֆ 1.1*-ում ներկայացված է մի փոփոխականի բազմանդամների համար Լագրանժի միջարկման խնդիրը: Հեշտ է պարզել, որ համապատասխան քանակի հանգույցների դեպքում միջարկման խնդիրն ունի միակ լուծում: Ներկայացված են խնդրի լուծման Լագրանժի և Նյուտոնի բանաձևերը:

Պարագրաֆ 1.2-ում ներկայացված է Լագրանժի բազմաչափ միջարկման խնդիրը:

Նշանակենք՝

$$\bar{x}^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d,$$

որտեղ

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d :$$

$\prod_n^d = \prod_n(\mathbb{R}^d)$-ով նշանակենք $\leq n$ գումարային աստիճանով d փոփոխականի հանրահաշվական բազմանդամների տարածությունը, որի չափողականության համար ունենք.

$$N := \dim \prod_n^d = \binom{n+d}{d} : \tag{1.2.1}$$

Հետագա շարադրանքում $\mathbb{X} = \{\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(s)}\} \subset \mathbb{R}^d$ կետերի բազմությունը կանվանենք միջարկման հանգույցների բազմություն:

Լագրանժի բազմաչափ միջարկման խնդիրը հետևյալն է. *տրված են $\mathbb{X} = \{\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(s)}\} \subset \mathbb{R}^d$ հանգույցների բազմությունը և կամայական $\{c_1, c_2, \ldots, c_s\}$ իրական արժեքների բազմություն: Պահանջվում է գտնել $p \in \prod_n^d$ բազմանդամ՝ այնպիսին, որ*

$$p(\bar{x}^{(k)}) = c_k, \quad k = 1,2,\ldots,s : \tag{1.2.2}$$

Որոնելի $p \in \prod_n^d$ բազմանդամը կավանենք միջարկիչ բազմանդամ, իսկ (1.2.2) պայմանները՝ միջարկման պայմաններ:

Սահմանում 1.2.1. $\left(\prod_n^d, \mathbb{X}\right)$ *միջարկման խնդիրը կանվանենք ճշգրիտ, եթե ցանկացած $\{c_1, c_2, \ldots, c_s\}$ արժեքների բազմության համար գոյություն ունի միակ $p \in \prod_n^d$ բազմանդամ, որը բավարարում է (1.2.2) պայմաններին: Այդ դեպքում $\mathbb{X}$ միջարկման հանգույցների բազմությունը կանվանենք $\prod_n^d -$ ճշգրիտ:*

Նկատենք, որ միջարկման պայմանները համարժեք են N անհայտով s գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի: Միջարկման խնդրի ճշգրտությունը նշանակում է, որ այդ համակարգն ունի միակ լուծում աջ կողմի կամայական $\{c_1, c_2, \ldots, c_s\}$ արժեքների համար: Այստեղից կունենանք ճշգրտության անհրաժեշտ պայմանը՝

$$s = N : \tag{1.2.4}$$

Այսուհետև՝ միջարկման խնդրի ճշգրտությունը դիտարկելիս միշտ կենթադրենք, որ այս պայմանը տեղի ունի:

Վերոնշյալ գծային համակարգից ստանում ենք հետևյալ պնդումը:

Պնդում 1.2.1. $\left(\prod_n^d, \mathbb{X}\right)$ *միջարկման խնդիրը կլինի ճշգրիտ այն և միայն այն դեպքում, երբ*

$$p \in \prod_n^d \quad \text{և} \quad p(\bar{x}^{(j)}) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,N \quad \Rightarrow \quad p = 0 :$$

Ինչպես նաև՝ տեղի ունի հետևյալը.

Պնդում 1.2.2. $\left(\prod_n^d, \mathbb{X}\right)$ *միջարկման խնդիրը կլինի ոչ ճշգրիտ այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի զրոյացնող բազմանդամ՝*

$$\exists p^\circ \in \prod_n^d, \quad p^\circ \neq 0, \quad \text{այնպիսին, որ } p^\circ(\bar{x}^{(j)}) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,N:$$

Ամեն մի $p \in \prod_n^d$, $\deg p = n \geq 1$ ոչ հաստատուն բազմանդամի համապատասխանում է $p(\bar{x}) = 0$ հավասարումով տրվող $\leq n$-րդ կարգի հանրահաշվական հիպերմակերևույթ:

Այժմ՝ *Պնդում 1.2.2*-ից ստանում ենք բազմաչափ միջարկման ճշգրտության երկրաչափական մեկնաբանությունը:

Պնդում 1.2.3. $\left(\prod_n^d, \mathbb{X}\right)$ *միջարկման խնդիրը կլինի ոչ ճշգրիտ այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի $\leq n$-րդ կարգի հանրահաշվական հիպերմակերևույթ, որն անցնում է $\mathbb{X}$ բազմության բոլոր հանգույցներով:*

Նշենք, որ ցանկացած $s < N$ հանգույցների համար գոյություն ունի $\leq n$-րդ կարգի հիպերմակերևույթ, որն անցնում է այդ բոլոր հանգույցներով:

Սահմանում 1.2.2. $p \in \prod_n^d$ *բազմանդամը կանվանենք $A := \bar{x}^{(k)} \in \mathbb{X}$ հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամ $\prod_n^d$ տարածության համար, եթե*

$$p(\bar{x}^{(j)}) = \delta_{jk}, \quad 1 \leq j,k \leq N, \tag{1.2.5}$$

որտեղ δ_{jk}-ն Կրոնեկերի նշանն է:

Այսուհետև՝ $A := \bar{x}^{(k)} \in \mathbb{X}$ հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամը կնշանակենք $p_A^* := p_k^*$-ով:

Սահմանում 1.2.3. *Կասենք, որ $\mathbb{X}$ բազմությունը $\prod_n^d$-անկախ է, եթե $\mathbb{X}$-ի բոլոր հանգույցների ֆունդամենտալ բազմանդամները գոյություն ունեն: Հակառակ դեպքում՝ կասենք, որ $\mathbb{X}$-ը $\prod_n^d$-կախված է:*

Տեղի ունի հետևյալ հայտնի պնդումը:

Պնդում 1.2.4. *Որպեսզի $\left(\prod_n^d, \mathbb{X}\right)$ միջարկման խնդիրը, որտեղ $\#\mathbb{X} = N$, լինի ճշգրիտ անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\mathbb{X}$-ը լինի $\prod_n^d$-անկախ:*

Պարագրաֆ 1.3-ում ցույց ենք տալիս, որ ցանկացած $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^d$ վերջավոր բազմության հանգույցներն ինչքան ասես փոքր չափով տեղաշարժելով այն կարելի է դարձնել անկախ հանգույցների բազմություն, այլ կերպ ասած, ցանկացած $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^d$ վերջավոր բազմություն կարելի է մոտարկել անկախ հանգույցների բազմություններով: Մասնավորապես՝ երբ $\#\mathbb{X} = \dim\Pi_n^d$, $\mathbb{X}$ բազմությունը կարելի է մոտարկել հանգույցների ճշգրիտ բազմություններով:

Դիցուք՝ $\varepsilon > 0$ և $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^d$: $\bar{x}_0$ կենտրոնով և ε շառավղով բաց գունդը նշանակենք $B(\bar{x}_0, \varepsilon)$-ով.

$$B(\bar{x}_0, \varepsilon) := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^d : ||\bar{x}_0 - \bar{x}|| < \varepsilon\} :$$

Նախ ապացուցում ենք հետևյալ պնդումը.

Պնդում 1.3.1. *Դիցուք տրված է Π_n^d-անկախ հանգույցների $\mathcal{X} = \{\bar{x}_i \in \mathbb{R}^d : i = 1, 2, \ldots, s\}$ բազմությունը: Եթե $s < N$, ապա կամայական $\varepsilon > 0$ և $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ կետի համար գոյություն ունի $\bar{x}' \in B(\bar{x}_0, \varepsilon)$ կետ այնպես, որ $\mathcal{X} \cup \{\bar{x}'\}$ բազմությունը Π_n^d-անկախ է:*

Այնուհետև ապացուցում ենք հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 1.3.1. *Դիցուք տրված է $\mathbb{X}_s = \{\bar{x}_i \in \mathbb{R}^d : i = 1, 2, ..., s\}$, $s \le N$, բազմությունը: Կամայական ε-ի համար, $\varepsilon > 0$, գոյություն ունի Π_n^d-անկախ $\mathbb{Y}_s = \{\bar{y}_i \in \mathbb{R}^d : i = 1, 2, ..., s\}$ բազմություն այնպես, որ $\|\bar{x}_i - \bar{y}_i\| < \varepsilon$, $i = 1, 2, ..., s$.*

Թեորեմ 1.3.1-ից անմիջապես ստանում ենք հետևյալը.

Հետևանք 1.3.1. *Դիցուք տրված է $\mathbb{X} = \{\bar{x}_i \in \mathbb{R}^d : i = 1, 2, ..., N\}$ բազմությունը: Կամայական ε-ի համար, $\varepsilon > 0$, գոյություն ունի Π_n^d-ճշգրիտ $\mathbb{Y} = \{\bar{y}_i \in \mathbb{R}^d : i = 1, 2, ..., N\}$ բազմություն այնպես, որ $\|\bar{x}_i - \bar{y}_i\| < \varepsilon$, $i = 1, 2, ..., N$:*

Պարագրաֆ 1.4-ում ներկայացվում են ճշգրիտ բազմությունների որոշ հայտնի կոնստրուկցիաներ:

Բազմաչափ միջարկման տեսության մեջ ամենավաղ կիրառվող եղանակը թենզորական արտադրյալով միջարկումն է: Չնայած այդ կոնստրուկցիայի և ստացվող միջարկման բանաձևերի պարզությանը, այն իրենից ներկայացնում է միջարկման ճշգրիտ կոնստրուկցիաների խիստ մասնավոր դեպք:

Այնուհետև նկարագրվում է հայտնի Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիան:

Ճշգրիտ հանգույցների բազմության հաջորդ հայտնի կոնստրուկցիան նկարագրելու համար նախ սահմանենք Չանգի և Յաոյի կողմից ներմուծված երկրաչափական բնութագրի (GC_n) պայմանը[1]:

Սահմանում 1.4.3. *Կասենք, որ $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^d$, $\#\mathbb{X} = N = \binom{n+d}{d}$ հանգույցների բազմությունը բավարարում է GC_n երկրաչափական բնութագրին, կամ կարճ ասած՝ GC_n-բազմություն է, եթե ցանկացած $A \in \mathbb{X}$ հանգույցի համար գոյություն ունեն (ամենաշատը) n հիպերհարթություններ՝ $h_1^A, h_2^A, \ldots, h_n^A$ այնպիսին, որ՝*

$$\mathbb{X} \setminus \{A\} \subset h_1^A \bigcup h_2^A \bigcup \cdots \bigcup h_n^A, \quad \text{բայց} \quad A \notin h_1^A \bigcup h_2^A \bigcup \cdots \bigcup h_n^A :$$

Այս դեպքում կասենք, որ $A \in \mathbb{X}$ հանգույցն օգտագործում է $h_1^A, h_2^A, \ldots, h_n^A$ հիպերհարթությունները:

Պնդում 1.2.4-ից հետևում է, որ ցանկացած GC_n-բազմություն $\prod_n^d -$ճշգրիտ է: Ինչպես նաև՝ ըստ *Պնդում 1.2.3*-ի կամայական GC_n-բազմության հանգույցները չեն կարող պատկանել n հատ հիպերհարթությունների:

Սահմանում 1.4.4. *Կասենք, որ իրարից տարբեր $h_1, h_2, \ldots, h_q$, $q > d$ հիպերհարթությունները $\mathbb{R}^d$-ում գտնվում են ընդհանուր դրության մեջ, եթե դրանցից ցանկացած d հատը հատվում են, և ոչ մի $d+1$ հատը մի կետով չեն անցնում:*

Այժմ՝ նկարագրենք հայտնի Չանգ-Յաոյի բնական ցանցը:

Սահմանում 1.4.5. *Կասենք, որ $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^d$, $\#\mathbb{X} = N = \binom{n+d}{d}$ հանգույցների բազմությունը հանդիսանում է բնական ցանց, եթե գոյություն ունեն ընդհանուր դրության մեջ գտնվող $n+d$ հիպերհարթություններ՝ $h_1, h_2, \ldots, h_{n+d}$ այնպիսին, որ դրանց բոլոր հնարավոր d հատ հիպերհարթությունների հատման կետերը կազմում են $\mathbb{X}$ բազմության հանգույցները:*

---

[1] K. C. Chung, T. H. Yao, On lattices admitting unique Lagrange representations, - *SIAM J. Numer. Anal.*, 14 (1977), 735-753.

Նշենք, որ Չանգ-Յաոյի բնական ցանցը բավարարում է GC_n պայմանին:

Նյուտոնի ցանց: Նյուտոնի ցանցը հանդիսանում է GC_n պայմանին բավարարող մեկ այլ ցանցի օրինակ: Որպես միջարկման հանգույցերի բազմություն վերցվում է՝

$$\mathbb{X} = \left\{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d : \quad |\alpha| \le n\right\}$$

մուլտիինդեքսների բազմությունը կամ այդ բազմության՝ աֆինական ձևափոխությամբ ստացված պատկերը:

Այնուհետև նկարագրվում է նաև Նյուտոնի ընդհանրացված ցանցը, որը նույնպես բավարարում է GC_n պայմանին:

Սահմանում 1.5.1. *$\prod_n^2$-ճշգրիտ $\mathbb{X}$ հանգույցների բազմության $n+1$ հանգույցով անցնող ուղիղը կանվանենք մաքսիմալ ուղիղ:*

Պարագրաֆ 1.5-ում ներկայացնում ենք մաքսիմալ ուղիղների վերաբերյալ որոշ հայտնի արդյունքներ, որոնք մենք ընդհանրացնում ենք ատենախոսության մեջ:

Մաքսիմալ ուղիղները կարևոր դեր են կատարում GC-բազմությունների բնութագրման համար:

Աշխատանքի երկրորդ գլուխը նվիրված է մաքսիմալ կորերի սահմանմանն ու բնութագրմանը և որոշ հայտնի ճշգրիտ բազմությունների ընդհանրացմանը կամայական հարթ հանրահաշվական կորերի դեպքի համար:

Պարագրաֆ 2.1-ում սահմանվում են մաքսիմալ կորերը և ապացուցվում են դրանց որոշ հատկություններ:

Պարզության համար նշանակենք Π_n-ով երկու փոփոխականի ≤n աստիճանի բազմանդամների տարածությունը:

Դիտարկենք (Π_n, X_s) միջարկման խնդիրը $X_s = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^s \subset \mathbb{R}^2$ հանգույցների բազմության և Π_n-ի համար: Հիշենք, որ եթե կամայական $c_1, \dots, c_s$–ի համար գոյություն ունի միակ $p \in \Pi_n$ բազմանդամ այնպես, որ

$$p(x_i, y_i) = c_i, \ i = 1, \dots, s, \tag{2.1.1}$$

ապա միջարկման խնդիրը և ինչպես նաև X_s միջարկման հանգույցների բազմությունն անվանում ենք ճշգրիտ (տես՝ *Սահմանում 1.2.1*): Ինչպես արդեն նշել ենք՝ ճշգրտության անհրաժեշտ պայման է հանդիսանում հետևյալը.

$$s = N := N_n = dim\Pi_n = \binom{n+2}{2}:$$

Պարզ է, որ ֆունդամենտալ բազմանդամները միջարկիչ են: Հետևաբար՝ դրանք որոշվում են միակ ձևով, եթե (Π_n, X) միջարկման խնդիրը ճշգրիտ է:

Մենք օգտագործում ենք նույն նշանակումը p հանրահաշվական կորի և $p \in \Pi_n$ բազմանդամի համար, որտեղ $p(x, y) = 0$-ն p կորի հավասարումն է: Ուղիղները և դրանց համապատասխանող առաջին աստիճանի բազմանդամները սովորաբար կնշանակենք l-ով:

Սահմանում 2.1.1. *Դիցուք, X բազմությունը Π_n-ճշգրիտ է: Կասենք, որ $A \in X$ հանգույցը օգտագործում է p հանրահաշվական կորը, եթե p-ն $p^*_{A,X}$ ֆունդամենտալ բազմանդամի արտադրիչ է:*

Քանի որ ֆունդամենտալ բազմանդամներն անկախ են, ապա ստանում ենք, որ $s \le N$, եթե X_s-ը Π_n-անկախ է:

X_s բազմության Π_n-անկախությունը նշանակում է, որ (2.1.1) միջարկման խնդիրն ունի լուծում, որը միակը չէ, եթե $s < N$:

$p \in \Pi_n$ բազմանդամի և g հանրահաշվական կորի համար նշանակենք $p|_g$-ով p-ի սահմանափակումը g-ի վրա:

Հետագայում հարմար է օգտագործել հետևյալ սահմանումը:

Սահմանում 2.1.2. (***$\mathcal{A}$ պայման***) *Կասենք, որ $g_1, \ldots, g_m$ հանրահաշվական կորերը բավարարում են $\mathcal{A}$ պայմանին, եթե յուրաքանչյուր g_i կոր, $1 \le i \le m$, չունի պատիկ կոմպոնենտներ, և յուրաքանչյուր g_j և g_k կորերի զույգ, $j \neq k$, $1 \le j, k \le m$, չունեն ընդհանուր կոմպոնենտ, այլ կերպ ասած՝ եթե $g_1, \ldots, g_m$ կորերի արտադրյալը չունի պատիկ կոմպոնենտներ:*

Համաձայն հետևյալ հայտնի պնդման Π_n-ճշգրիտ X բազմության մաքսիմալ ուղիղն օգտագործվում է X-ի բոլոր՝ այդ ուղղից դուրս գտնվող հանգույցների կողմից:

Պնդում 2.1.8. *Դիցուք, l-ը ուղիղ է և $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n+1} \subset l$: Այդ դեպքում՝*

$$p \in \Pi_n,\ p(x_i, y_i) = 0,\ i = 1, \ldots, n+1 \Rightarrow p|_l = 0 \ \text{և}\ p = l r_{n-1},\ \text{որտեղ}\ r_{n-1} \in \Pi_{n-1}:$$

Կատարենք հետևյալ նշանակումը՝

$$d(n,k) := \binom{n+2}{2} - \binom{n+2-k}{2} = \frac{k(2n+3-k)}{2}:$$

Այնուհետև ապացուցում ենք Պնդում 2.1.8-ի ընդհանրացումը:

Պնդում 2.1.9. Դիցուք, *q-ն $k \le n$ աստիճանի հանրահաշվական կոր է, $p \in \Pi_n$, և X-ը Π_n-անկախ հանգույցների բազմություն է այնպես, որ $X = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{s} \subset q$: Այդ դեպքում՝ $s \le d(n,k)$: Ավելին՝ $s = d(n,k)$ այն և միայն այն դեպքում, երբ*

$$p(x_i, y_i) = 0,\ i = 1, \ldots, s \Rightarrow p|_q = 0 \ \text{և}\ p = q r_{n-k},\ \text{որտեղ}\ r_{n-k} \in \Pi_{n-k}: \qquad (2.1.3)$$

Դիտողություն 2.1.1. *Դժվար չէ նկատել, որ Պնդում 2.1.9-ում նշված q կորը, որը պարունակում է $d(n,k)$ հատ Π_n-անկախ հանգույցներ, չի կարող ունենալ պատիկ կոմպոնենտներ:*

Քանի որ ճշգրիտ բազմության կամայական ենթաբազմություն անկախ է, ապա Պնդում 2.1.9-ից անմիջապես ստանում ենք հետևյալ պնդումը:

Պնդում 2.1.10. Դիցուք, *X-ը Π_n-ճշգրիտ բազմություն է, և q-ն $k \le n$ աստիճանի հանրահաշվական կոր է: Այդ դեպքում, ամենաշատը $d(n,k)$ կետեր X-ից կարող են ընկած լինել q-ի վրա:*

Այստեղից գալիս ենք հետևյալ սահմանմանը՝

Սահմանում 2.1.3. *Դիցուք X-ը Π_n-ճշգրիտ բազմություն է: Այդ դեպքում՝ $k \le n$ աստիճանի հանրահաշվական կորը կանվանենք մաքսիմալ, եթե այն պարունակում է $d(n,k)$ կետեր X բազմությունից:*

Հետևյալ պնդումը տալիս է մաքսիմալ կորերի բնութագիր:

Պնդում 2.1.11. Դիցուք՝ *X-ը Π_n-ճշգրիտ բազմություն է: Այդ դեպքում՝ q հանրահաշվական կորը մաքսիմալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն օգտագործվում է $X \setminus q$ բազմության բոլոր հանգույցների կողմից:*

Դիտողություն 2.1.2. *Քանի որ $d(n,n) = N - 1$, ապա Պնդում 2.1.11-ից ստանում ենք, որ X բազմության յուրաքանչյուր ֆունդամենտալ բազմանդամ մաքսիմալ կոր է:*

Այնուհետև բերում ենք վերածվող մաքսիմալ կորի օրինակ, որի կոմպոնենտները մաքսիմալ չեն: Ինչպես նաև՝ ապացուցում ենք Π_n-ճշգրիտ բազմության մաքսիմալ կորերի որոշ հատկություններ:

Պնդում 2.1.12. *Դիցուք, X-ը Π_n-ճշգրիտ բազմություն է, և $g_1, \ldots, g_m$ հանրահաշվական կորերը X բազմության մաքսիմալներ են, որոնք բավարարում են վերը նշված $\mathcal{A}$ պայմանին: Նշանակենք $\sigma_i = deg(g_i)$, $1 \le i \le m$: Այդ դեպքում՝*

1. *$Y_i := X \setminus g_i$ բազմությունը $\Pi_{n-\sigma_i}$-ճշգրիտ է, $1 \le i \le m$:*

2. *Կամայական* g_i *և* g_j *մաքսիմալներ հատվում են* X *բազմության* $\sigma_i\sigma_j$ *հանգույցներում, այսինքն՝* $\#Z = \sigma_i\sigma_j$, *որտեղ* $Z := g_i \cap g_j \cap X$, $1 \le i \ne j \le m$, *պայմանով, որ* $\sigma_i + \sigma_j \le n + 2$*:*
3. *Յուրաքանչյուր մաքսիմալ կոր* g_j *հանդիսանում է մաքսիմալ* $Y_i := X \setminus g_i$ *բազմության համար,* $1 \le i \ne j \le m$, *պայմանով, որ* $\sigma_i + \sigma_j \le n$*:*
4. *Կամայական իրարից տարբեր երեք մաքսիմալներ* g_i, g_j, g_k, *ունեն դատարկ հատում,* $1 \le i, j, k \le m$, *պայմանով, որ* $\sigma_i + \sigma_j + \sigma_k \le n + 2$*:*

Պարագրաֆ 2.2-ում ներկայացնում ենք Բերզոլարի - Ռադոնի կոնստրուկցիայի ընդհանրացումը կամայական հանրահաշվական կորերի համար:

Դիցուք, X-ը $N = \binom{n+2}{2}$ հանգույցների բազմություն է: Հանրահաշվական կորերի $g_1, \dots, g_m$ հաջորդականության համար կատարենք հետևյալ նշանակումները.

$$\sigma_i := deg(g_i), \qquad i = 1, \dots, m,$$
$$n_1 := n, \qquad n_i := n - \sigma_1 - \dots - \sigma_{i-1}, \qquad i = 2, \dots, m,$$
$$\nu_j := d(n_j, \sigma_j), \qquad j = 1, \dots, m:$$

Թեորեմ 2.2.1. *Դիցուք՝* X *բազմությունը բավարարում է հետևյալ հատկությանը. գոյություն ունեն* $\mathcal{A}$ *պայմանին բավարարող* $g_1, \dots, g_m$ *հանրահաշվական կորեր այնպես, որ*

$$\sum_{i=1}^{m} \sigma_i = n + 1$$

և

$X -$ *ի* ν_s *հատ* $\Pi_{n_s} -$ *անկախ հանգույցներ գտնվում են* $g_s \setminus \cup_{i=1}^{s-1} g_i -$ *ում,* $s = 1, \dots, m$:
Այդ դեպքում X*-ը* Π_n*-ճշգրիտ է:*

Նշված պայմաններին բավարարող X, $\#X = N$, բազմությունը կանվանենք B-R* բազմություն:

Պարագրաֆ 2.3-ում ներկայացնում ենք Չանգի և Յաոյի կողմից ներմուծված երկրաչափական բնութագրի (GC) պայմանի ընդհանրացումը կամայական հանրահաշվական կորերի համար:

Սահմանում 2.3.1. *Կասենք, որ հանգույցների* X, $\#X = N$, *բազմությունը բավարարում է երկրաչափական բնութագրին* Π_n *տարածության համար, կամ կրճատ՝* GC_n *պայմանին, եթե յուրաքանչյուր ֆիքսված հանգույցի համար գոյություն ունեն ոչ ավելի քան* n *ուղիղներ, որոնք պարունակում են* X*-ի բոլոր հանգույցները՝ բացի այդ հանգույցից:*

Սահմանում 2.3.2. *Կասենք, որ ճշգրիտ հանգույցների* X, $\#X = N$, *բազմությունը բավարարում է ընդհանրացված երկրաչափական բնութագրին* Π_n *տարածության համար, կամ կրճատ՝* GC_n^* *պայմանին, եթե* X*-ի յուրաքանչյուր հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամը վերածելի է:*

Պարագրաֆ 2.4-ում ներկայացնում ենք Չանգ - Յաոյի բնական ցանցի (NL_n) ընդհանրացումը կամայական հարթ հանրահաշվական կորերի համար:

Հանրահաշվական կորերի $g_1, \dots, g_m$ հաջորդականության համար կատարենք հետևյալ նշանակումը.

$$\sigma_i := deg(g_i), \; 1 \le i \le m:$$

Սահմանում 2.4.1. ($\mathcal{B}$ ***պայման***) *Կասենք, որ* $g_1, \dots, g_m$ *հանրահաշվական կորերը բավարարում են* $\mathcal{B}$ *պայմանին, եթե դրանք բավարարում են* $\mathcal{A}$ *պայմանին և*

1. Կամայական g_i *և* g_j *կորեր հատվում են* $\sigma_i\sigma_j$ *տարբեր հանգույցներում, որտեղ* $i \ne j$, $1 \le i, j \le m$, *2. Կամայական իրարից տարբեր i, j, k ինդեքսների համար $g_i \cap g_j \cap g_k = \emptyset$, որտեղ $1 \le i, j, k \le m$:*

Դիտարկենք $g_1, \dots, g_m$, $m > 2$, հանրահաշվական կորերը, որոնք բավարարում են $\mathcal{B}$ պայմանին և թող $\sum_{i=1}^{m} \sigma_i = n + 2$: $g_1, \dots, g_m$ կորերի հատման հանգույցները պայմանականորեն կանվանենք սև: Ավելացնենք $\binom{\sigma_i}{2}$ սպիտակ $\Pi_{\sigma_i - 2}$-ճշգրիտ հանգույց g_i կորի վրա, $i = 1, \dots, m$, որոնք տարբեր են սև հանգույցներից: Բոլոր սև և սպիտակ հանգույցների բազմությունը նշանակենք $G := G(g_1, \dots, g_m)$-ով: Այդ G բազմությունը կանվանենք n-րդ աստիճանի ընդհանրացված բնական ցանց:

Թեորեմ 2.4.1. *Դիցուք՝ $g_1, \dots, g_m$, $m > 2$, հանրահաշվական կորերը բավարարում են $\mathcal{B}$ պայմանին և $\sum_{i=1}^{m} \sigma_i = n + 2$: Այդ դեպքում՝ $G := G(g_1, \dots, g_m)$ բազմությունը բավարարում է GC_n^* պայմանին: Ավելին՝ Π_n-ճշգրիտ բազմությունն ունի $g_1', \dots, g_m'$, $m > 2$, մաքսիմալ կորեր, որոնք բավարարում են $\mathcal{A}$ պայմանին և որոնց գումարային աստիճանը $n + 2$ է, այն և միայն այն դեպքում, երբ այն n-րդ աստիճանի ընդհանրացված բնական ցանց է:*

n-րդ աստիճանի ընդհանրացված բնական ցանցի Π_n-անկախությունից ստանում ենք հետևյալ արդյունքը:

Հետևանք 2.4.1. *Ընդհանրացված բնական ցանցն ունի ընդհանրացված Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիա:*

Աշխատանքի երրորդ գլխում առաջադրում ենք մի վարկած մաքսիմալ կորերի վերաբերյալ, որը մասնավոր դեպքում համընկնում է Գասքա-Մաեզթուի վարկածի հետ և ապացուցում ենք այդ վարկածը Π_3 բազմանդամային տարածության համար: Մենք նաև ցույց ենք տալիս, որ գոյություն ունեն ընդհանրացված GC պայմանին բավարարող բազմություններ, որոնք ունեն ընդհամենը երկու մաքսիմալ կորեր, որոնք ուղիղներ են:

Պարագրաֆ 3.1-ում ներկայացվում է հայտնի Գասքա-Մաեզթուի վարկածը:

Դեռևս 1982 թ.-ին Գասքան և Մաեզթուն առաջադրեցին հետևյալ վարկածը, որը հայտնի է որպես GC_n *-վարկած* կամ GM *-վարկած*:

GM -վարկած.[2] (*Գասքա, Մաեզթու*) *Եթե $\mathbb{X}$ հանգույցների բազմությունը $\mathbb{R}^2$-ում բավարարում է GC_n երկրաչափական բնութագրին, ապա գոյություն ունի ուղիղ, որն անցնում է $\mathbb{X}$ բազմության $n+1$ հանգույցով, կամ այլ կերպ ասած՝ գոյություն ունի մաքսիմալ ուղիղ:*

Նշենք, որ մինչև այժմ GM *-վարկածն* ապացուցված է միայն $n \le 4$ աստիճանի բազմանդամների համար:

Իրականում GM *-վարկածը* պնդում է, որ կամայական GC_n-բազմություն հանդիսանում է $\mathbb{R}^2$-ում Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիայի մասնավոր դեպք, այսինքն՝ գոյություն ունեն $n+1$ ուղիղներ՝ $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n$ այնպիսին, որ $\ell_i \setminus (\ell_0 \cup \ell_1 \cup \dots \cup \ell_{i-1})$-ը պարունակում է ճիշտ $n+1-i$ հանգույց:

Քարնիսերը և Գասքան GM *-վարկածի* վերաբերյալ ապացուցում են հետևյալը՝

Թեորեմ 3.1.1.[3] (Քարնիսեր և Գասքա) *Եթե GM -վարկածը ճիշտ է, ապա գոյություն ունեն առնվազն երեք մաքսիմալ ուղիղներ:*

[2] M. Gasca, J. I. Maeztu, On Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^n$, - *Numer. Math.*, 39 (1982), 1-14.

[3] J. M. Carnicer and M. Gasca, On Chung and Yao's geometric characterization for bivariate polynomial interpolation, - *Curve and Surface Design: Saint-Malo 2002 (Tom Lyche, Marie- Laurence Mazure, and Larry L. Schumaker Eds.)* (2003), 11-30.

Պարագրաֆ 3.2-ում GC_n^* պայմանին բավարարող բազմությունների համար առաջադրում ենք Գասքա-Մաեզթուի վարկածի ընդհանրացումը:

Վարկած 3.2.1. *Դիցուք՝* $\mathbb{X}$*-ը* Π_n*-ճշգրիտ բազմություն է, որի բոլոր ֆունդամենտալ բազմանդամները վերածելի են, այսինքն՝ այն բավարարում է* GC_n^* *պայմանին: Այդ դեպքում՝* $\mathbb{X}$*-ի համար գոյություն ունի որևէ* $k,\ 1 \le k \le n-1$*, աստիճանի մաքսիմալ կոր:*

Այնուհետև ցույց ենք տալիս, որ եթե այս վարկածը ճիշտ է, ապա կամայական GC_n^* բազմություն հանդիսանում է B-R * բազմություն Π_n-ի համար:

Վերջում ներկայացնենք *Վարկած 3.2.1*-ի հետևյալ տարբերակը.

Վարկած 3.2.2. *Դիցուք,* $\mathbb{X}$*-ը* Π_n*-ճշգրիտ բազմություն է, որի բոլոր ֆունդամենտալ բազմանդամները հանդիսանում են* $\le m$ *աստիճանի արտադրիչների արտադրյալ, որտեղ* $1 \le m \le n-1$*: Այդ դեպքում՝* $\mathbb{X}$*-ի համար գոյություն ունի որևէ* $k,\ 1 \le k \le m$*, աստիճանի մաքսիմալ կոր:*

Ակնհայտ է, որ այս վարկածը համընկնում է Գասքա-Մաեզթուի վարկածի հետ, երբ $m = 1$, ինչպես նաև համընկնում է *Վարկած 3.2.1*-ի հետ, երբ $m = n - 1$:

Պարագրաֆ 3.3-ում ապացուցում ենք ընդհանրացված վարկածը $n = 3$ դեպքում:

Հետևյալ թեորեմը պնդում է, որ *Վարկած 3.2.1*-ը ճիշտ է $n = 3$, կամ, որ նույնն է՝ *Վարկած 3.2.2*-ը՝ $n = 3,\ m = 2$ դեպքում:

Թեորեմ 3.3.1. *Դիցուք,* $\mathcal{Q} = \{Q_0, \dots, Q_9\}$*-ն* Π_3*-ճշգրիտ հանգույցների բազմություն է, որի բոլոր ֆունդամենտալ բազմանդամները վերածելի են: Այդ դեպքում՝* $\mathcal{Q}$*-ի համար գոյություն ունի* ≤ 2 *աստիճանի մաքսիմալ կոր, այսինքն՝ մաքսիմալ ուղիղ կամ չվերածվող կոնիկ:*

Նկատենք, որ այստեղ մաքսիմալ ուղիղն անցնում է 4, իսկ մաքսիմալ չվերածվող կոնիկը՝ 7 հանգույցներով:

Նկատենք, որ $n = 3$ դեպքում ֆունդամենտալ բազմանդամների վերածելիությունը նշանակում է, որ յուրաքանչյուր հանգույց օգտագործում է կամ 3 ուղիղ, կամ մեկ ուղիղ և մեկ չվերածվող կոնիկ:

Հետևյալ լեմման պնդում է, որ եթե մաքսիմալ կոր գոյություն չունի, ապա բոլոր օգտագործվող ուղիղներն ու չվերածվող կոնիկներն իրարից տարբեր են:

Լեմմա 3.3.1. *Դիցուք,* $\mathcal{Q}$*-ն* Π_3*-ճշգրիտ բազմություն է, որի 2 հանգույցներ օգտագործում են միևնույն* ≤ 2 *աստիճանի հանրահաշվական կորը: Այդ դեպքում՝* $\mathcal{Q}$*-ն ունի* ≤ 2 *աստիճանի մաքսիմալ կոր:*

Հետևյալ լեմմաները օգտագործում ենք *Թեորեմ 3.3.1*-ի ապացուցման ժամանակ:

Լեմմա 3.3.2. *Դիցուք,* $\mathcal{Q}$*-ն* Π_3*-ճշգրիտ բազմություն է: Ենթադրենք, որ* $A \in \mathcal{Q}$ *հանգույցն օգտագործում է* l_1 *ուղիղը, որն անցնում է* 3 *հանգույցներով, և գոյություն ունի* l_2 *ուղիղ, որն անցնում է* 3 *այլ հանգույցներով: Այդ դեպքում,* $\mathcal{Q}$*-ի մնացած* 3 *հանգույցները գտնվում են մի ուղղի վրա, որը կնշանակենք* l_3*-ով, և* A*-ն օգտագործում է* l_2 *և* l_3 *ուղիղները նույնպես:*

Լեմմա 3.3.3. *Դիցուք,* $\mathcal{Q}$*-ն* Π_3*-ճշգրիտ բազմություն է, որի բոլոր ֆունդամենտալ բազմանդամները վերածելի են: Ենթադրենք, որ* $\mathcal{Q}$*-ն չունի մաքսիմալ ուղիղ և չվերածվող կոնիկ: Այդ դեպքում, յուրաքանչյուր օգտագործվող ուղիղ պարունակում է ճիշտ* 3 *հանգույց:*

Թեորեմ 3.3.1-ի ապացույցի ընթացքի վերաբերյալ: Ենթադրում ենք հակառակը՝ $\mathcal{Q}$-ն չունի մաքսիմալ ուղիղ և չվերածվող կոնիկ: Այդ դեպքում, համաձայն Լեմմա 3.3.3-ի՝ յուրաքանչյուր հանգույց օգտագործում է ճիշտ 3 հանգույցով անցնող ուղիղ:

Լեմմա 3.3.1-ից ստանում ենք, որ գոյություն ունեն 10 իրարից տարբեր օգտագործվող ուղիղներ, և հետևաբար գոյություն ունեն 30 հանգույցներ, որոնք պատկանում են այդ ուղիղներին: Այսպիսով՝ ստանում ենք, որ միջինում $\mathcal{Q}$-ի մեկ հանգույցը գտնվում է 3 օգտագործվող ուղիղների վրա: Այլ կերպ ասած, $\mathcal{Q}$ բազմության յուրաքանչյուր հանգույց հանդիսանում է երեք օգտագործվող ուղիղների հատման կետ:

Այսպիսով, հնարավոր է երկու դեպք.

i) Գոյություն ունի $\mathcal{Q}$ բազմության հանգույց, որը հանդիսանում է 4 օգտագործվող ուղիղների հատման կետ,

ii) $\mathcal{Q}$ բազմության յուրաքանչյուր հանգույց հանդիսանում է ճիշտ 3 օգտագործվող ուղիղների հատման կետ:

Վերջին դեպքում գոյություն ունեն ճիշտ 10 օգտագործվող ուղիղներ, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է ճիշտ 3 հանգույց, և յուրաքանչյուր հանգույցով անցնում են ճիշտ 3 օգտագործվող ուղիղներ: Այլ կերպ ասած, այս դեպքը հանդիսանում է 10_3 կոնֆիգուրացիա:

Այնուհետև *Թեորեմ 3.3.1*-ը ապացուցում ենք այս երկու դեպքերում:

Պարագրաֆ 3.4-ում ցույց ենք տալիս, որ գոյություն ունեն երկու մաքսիմալով ընդհանրացված GC բազմություններ:

Թեորեմ 3.1.1-ից ունենք, որ եթե GM*-վարկածը* ճիշտ է, ապա գոյություն ունեն առնվազն երեք մաքսիմալ ուղիղներ: Նշենք, որ մաքսիմալ ուղիղների նվազագույն քանակը՝ 3-ը ստացվում է Նյուտոնի հայտնի $\mathcal{N}$ ցանցի համար, որը GC_n բազմություն է.

$$\mathcal{N} = \{(i,j): i+j \le n, \quad i,j \in Z_+\}:$$

Հաջորդ օրինակը ցույց է տալիս, որ *Թեորեմ 3.1.1*-ը ճիշտ չէ ընդհանրացված GC բազմությունների դեպքում:

Օրինակ 3.4.1. *Դիտարկենք l_1 և l_2 ուղիղները, որոնք հատվում են A հանգույցում: Յուրաքանչյուր l_i ուղղի վրա վերցնենք A-ից տարբեր երեք հանգույց. $A_1^{(i)},\ A_2^{(i)},\ A_3^{(i)},\ i=1,2$: Այնուհետև՝ վերցնենք մի ուղղի չպատկանող 3 հանգույց՝ $A_j,\ j=1,2,3,$ մեկական համապատասխանաբար $l_j' := A_j^{(1)} + A_j^{(2)},\ j=1,2,3,$ ուղիղների վրա, պայմանով, որ դրանք չեն հանդիսանում դիտարկվող ուղիղների հատման կետեր:*

Այնուհետև ցույց ենք տալիս, որ նշված 10 հանգույցները կազմում են GC_3^* բազմություն, որն ունի ճիշտ երկու մաքսիմալ կորեր, որոնք են՝ l_1 և l_2 ուղիղները:

Այժմ՝ ընդհանրացնենք վերը նշված օրինակը $n \ge 3$- համար:

Դիտարկենք l_1 և l_2 ուղիղները, որոնք հատվում են A հանգույցում: Յուրաքանչյուր l_i ուղղի վրա վերցնենք A-ից տարբեր համապատասխանաբար $A_1^{(i)},\dots,A_n^{(i)},\ i=1,2$ հանգույցները: Ինչպես նաև՝ դիտարկենք $\mathcal{L}' := \left\{l_i' := A_i^{(1)} + A_i^{(2)},\ i=1,\dots,n\right\}$ ուղիղների բազմությունը:

Այնուհետև՝ օգտագործում ենք Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիան $n-2$ աստիճանի համար: Դիտարկենք հետևյալ $n-1$ ուղիղների բազմությունը. $\mathcal{L}'' := \{l_i'',\ i=1,\dots,n-1\}$, որոնց հատման կետերը չեն պատկանում $\mathcal{L}'$ բազմության ուղիղներին: Ինչպես նաև՝ պահանջում ենք, որ $\mathcal{L}''$ բազմության յուրաքանչյուր ուղիղ հատվում է $\mathcal{L}'$ բազմության յուրաքանչյուր ուղղի հետ, և $\mathcal{L}'$-ի ուղիղների հատման կետերը չեն պատկանում $\mathcal{L}''$-ի ուղիղներին:

Այժմ՝ ընտրենք $(1/2)n(n-1)$ B-R կետերը $\mathcal{L}''$-ի ուղիղների վրա այնպես, որ դրանք հանդիսանան $l_i' \cap l_j'',\ i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,n-1,$ հատման կետեր և ոչ մի l_i' ուղիղ չպարունակի $n-1$ B-R կետեր: Օրինակ՝ եթե n-ը կենտ է, ապա $\mathcal{L}'$ բազմության ուղիղներից յուրաքանչյուրի վրա վերցնենք $(1/2)(n-1)$ B-R կետեր, իսկ եթե n-ը զույգ է, ապա $\mathcal{L}'$ բազմության որևէ $n-1$ ուղիղների վրա վերցնենք $(1/2)n$-ական B-R կետեր: Այսպիսով՝ ոչ մի l_i' ուղիղ մաքսիմալ չէ, քանի որ բացի B-R կետերից այն պարունակում է ընդհամենը 2 այլ կետեր, որոնք պատկանում են l_1 և l_2 ուղիղներին:

Վերջում ապացուցում ենք հետևյալ պնդումը.

Պնդում 3.4.1. *Դիցուք՝* $n \geq 3$*: Այդ դեպքում՝ վերը նկարագրված* $n-1$ *աստիճանի B-R բազմությունը* l_1 *և* l_2 *ուղիղների վրա գտնվող* $2n+1$ *կետերի հետ միասին կազմում է* GC_n^* *բազմության օրինակ, որն ունի ընդհամենը* 2 *մաքսիմալ կոր, որոնք ուղիղներ են:*

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԱՐԴՅՈՒՆՔՆԵՐԸ

Ատենախոսությունում ստացված են հետևյալ հիմնական արդյունքները՝

1. Սահմանվել և բնութագրվել են մաքսիմալ կորերը:
2. Ընդհանրացվել է Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիան կամայական հարթ հանրահաշվական կորերի դեպքի համար:
3. Ընդհանրացվել են Չանգ-Յաոյի երկրաչափական բնութագրի պայմանը և բնական ցանցը կամայական հարթ հանրահաշվական կորերի դեպքի համար:
4. Բնութագրվել է ընդհանրացված GC բազմությունների մի դաս:
5. Առաջադրվել է մի վարկած մաքսիմալ կորերի վերաբերյալ:
6. Առաջադրված վարկածն ապացուցվել է Π_3 բազմանդամային տարածության համար:
7. Ապացուցվել է, որ գոյություն ունեն ճիշտ երկու մաքսիմալ կորերով ընդհանրացված GC բազմություններ:

ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅԱՆ ԹԵՄԱՅԻ ՇՐՋԱՆԱԿՆԵՐՈՒՄ ՀՐԱՏԱՐԱԿԱԾ ԱՇԽԱՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՑԱՆԿԸ

1. G. S. Avagyan, L. R. Rafayelyan, Approximation by poised sets of nodes, - Proceedings of YSU, Physical and Mathematical Sciences, N1 (2012), pp. 60-62.
2. H. A. Hakopian, L. R. Rafayelyan, On a generalized Gasca-Maeztu conjecture, - Mathematics in Higher School, vol. 7, N3 (2011), pp. 22-29.
3. L. Rafayelyan, Poised nodes set constructions on algebraic curves, - East J. on Approx., vol. 17, N3 (2011), pp. 285-298.
4. L. Rafayelyan, On extension of Chang-Yao natural lattice, - International Conference in Harmonic Analysis and Approximations, V, 2011, Abstracts, p. 94.
5. Л. Р. Рафаелян, Обобщения некоторых известных конструкций корректных узлов, - Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 2, 2012, стр. 45-58.

РЕЗЮМЕ

Рафаелян Левон Робертович

КОНСТРУКЦИИ КОРРЕКТНЫХ УЗЛОВ НА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Многомерная полиномиальная интерполяция является одним из основных и фундаментальных предметов в теории приближений и численного анализа. Термин интерполяция введен Джоном Уоллисом в 1655 году. Довольно полное решение задачи одномерной полиномиальной интерполяции был получен Лагранжом и Ньютоном. Задача многомерной полиномиальной интерполяции является гораздо более сложной. В этом случае существование и единственность интерполяционного многочлена Лагранжа зависит от геометрического распределения узлов интерполяции.

Множество узлов X называется корректным, если задача интерполяции является корректной (однозначно разрешаемой) для X.

В диссертации доказывается, что узлы любого конечного множества $X \subset \mathbb{R}^d$ двигая в сколь угодно малой окрестности можно сделать независимыми, другими словами, множество X может быть приближено множествами независимых узлов. В случае $\#X = \binom{n+d}{d}$, множество X может быть приближено множествами корректных узлов.

Обозначим пространство многочленов двух переменных суммарной степени $\leq n$ через Π_n.

Чанг и Яо ввели условие геометрической характеризации (GC), которое гарантирует существование всех фундаментальных многочленов в виде произведения линейных множителей. Скажем, что множество узлов $X, \#X = \binom{n+2}{2}$, удовлетворяет условию геометрической характеризации для Π_n, или кратко GC_n, если для каждого фиксированного узла существуют не более чем n прямых содержащих все узлы X, кроме фиксированного. Множества GC_n являются Π_n-корректными. Мы обобщаем условие геометрической характеризации на случай произвольных плоских алгебраических кривых. Скажем, что множество корректных узлов $X, \#X = \binom{n+2}{2}$, удовлетворяет обобщенному условию геометрической характеризации для Π_n, или кратко GC_n^*, если фундаментальный многочлен каждого узла X является приводимой.

Прямая, содержащая $n+1$ узлов Π_n-корректного множества X называется максимальной. Максимальные прямые играют важную роль в исследовании GC множеств.

Далее, определяются и характеризуются максимальные кривые. Назовем максимальной алгебраическую кривую степени $k \leq n$, если она содержит $(1/2)k(2n-k+3)$ узлов Π_n-корректного множества X. Мы доказываем, что кривая q является максимальной для X тогда и только тогда, когда она используется всеми узлами множества $X \backslash q$. Мы также приводим некоторые основные свойства максимальных кривых.

Известная натуральная сеть Чанга-Яо удовлетворяет условию геометрической характеризации. Она является частным случаем другой известной конструкции корректных узлов, називаемой множеством Берзолари-Радона. Известно, что множество Π_n-корректных узлов X имеет $n+2$ максималные прямые тогда и только тогда, когда оно является натуральной сетью Чанга и Яо. В работе мы обобщаем множество Берзолари-Радона и натуральную сеть на случай произвольных плоских алгебраических кривых. Мы доказываем,

что обобщенная натуральная сеть является частным случаем обобщенной конструкции Берзолари-Радона.

Скажем, что алгебраические кривые $g_1, \ldots, g_m$ удовлетворяют условию $\mathcal{A}$ если их произведение не имеет кратных компонент. Мы доказываем, что Π_n-корректное множество имеет максимальные кривые $g_1, \ldots, g_m$, $m > 2$, удовлетворяющие условию $\mathcal{A}$ суммарной степени $n + 2$ тогда и только тогда, когда оно является обобщенной натуральной сетью степени n.

Известная гипотеза Гаски-Маэзту [M. Gasca and J. I. Maeztu, On Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^k$, Numer. Math., 39, (1982), 1-14] утверждает, что каждое GC_n множество, т.е., множество узлов, для которых все фундаментальные многочлены являются произведениями линейных множителей, имеет максимальную прямую (прямую проходящую через $n + 1$ узлов). До сих пор это утверждение доказано для полиномиальных пространств суммарной степени $n \leq 4$. В диссертации мы предлагаем следующую обобщенную гипотезу: каждое GC_n^* множество, т.е., множество узлов, для которых все фундаментальные многочлены являются приводимыми, имеет максимальную кривую некоторой степени k, $1 \leq k \leq n - 1$ (кривую проходящую через $(1/2)k(2n - k + 3)$ узлов). Очевидно, что две вышеуказанные гипотезы совпадают, когда $n \leq 2$.

Если гипотеза Гаски-Маэзту верна, то каждое GC множество в то же время является множеством Берзолари-Радона. Подобным образом, обобщенная гипотеза означает, что всякое обобщенное GC множество в то же время является обобщенным множеством Берзолари-Радона.

В диссертации мы доказываем, что обобщенная гипотеза верна в случае $n = 3$, а именно, имеет место следующая

Теорема. *Предположим множество из 10 узлов $\mathcal{Q} = \{Q_0, \ldots, Q_9\}$ является Π_3-корректным и фундаментальные многочлены всех узлов приводимы. Тогда $\mathcal{Q}$ имеет максимальную кривую степени ≤ 2, т.е., максимальную прямую или конику.*

Карнисер и Гаска доказали, что если гипотеза Гаски-Маэзту верна, то существуют по крайней мере три максимальных прямых [J. M. Carnicer and M. Gasca, On Chung and Yao's geometric characterization for bivariate polynomial interpolation, Curve and Surface Design, 2003, pp. 11-30]. Отметим, что указанное минимальное число максимальных прямых достигается для известной сети Ньютона, которая является GC множеством. В диссертации мы доказываем, что существуют обобщенные GC множества ровно с двумя максимальными кривыми, которые являются прямыми.

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

1. Определены и охарактеризованы максимальные кривые.
2. Обобщена конструкция Берзолари-Радона на случай произвольных плоских алгебраических кривых.
3. Обобщены условие геометрической характеризации Чанга-Яо и натуральная сеть на случай произвольных плоских алгебраических кривых.
4. Охарактеризован один класс обобщенных GC множеств.
5. Предложена одна гипотеза о максимальных кривых.
6. Предложенная гипотеза доказана для полиномиального пространства Π_3.
7. Доказано, что существуют обобщенные GC множества ровно с двумя максимальными кривыми.

ABSTRACT

Rafayelyan Levon

CONSTRUCTIONS OF POISED NODES ON ALGEBRAIC CURVES

Multivariate polynomial interpolation is a basic and fundamental subject in Approximation Theory and Numerical Analysis. The term interpolation was introduced by John Wallis in 1655. A rather complete solution of univariate polynomial interpolation problem were obtained by Lagrange and Newton. The multivariate polynomial interpolation problem is much more complicated. In this case the existence and uniqueness of a Lagrange interpolation polynomial depend on the geometrical distribution of the interpolation nodes.

A set of nodes X is called poised if the interpolation problem is poised (unisolvent) for X.

In the thesis we prove that nodes of any finite set $X \subset \mathbb{R}^d$ can be made independent by arbitrarily small perturbation, in other words, the set X can be approximated by sets of independent nodes. In the case of $\#X = \binom{n+d}{d}$, the set X can be approximated by poised sets of nodes.

Let us denote the space of bivariate polynomials of total degree $\leq n$ by Π_n.

Chung and Yao introduced the condition of geometric characterization (GC) which guaranties the existence of all fundamental polynomials of the set as products of linear factors. A set of nodes $X, \#X = \binom{n+2}{2}$, is said to satisfy the condition of geometric characterization for Π_n, or briefly GC_n, if for each fixed node there are not more than n lines containing all the other nodes of X but not the one fixed. We have that the GC_n sets are Π_n-poised. We generalize the condition of geometric characterization to the case of arbitrary plane algebraic curves. We say that a poised set of nodes $X, \#X = \binom{n+2}{2}$, satisfies generalized geometric characterization for Π_n, or briefly GC_n^*, if the fundamental polynomial of each node of X is reducible.

A line containing $n+1$ points of a Π_n-poised set X is called maximal. Maximal lines play an important role in the investigation of GC sets.

Next we define and characterize maximal curves. We call maximal an algebraic curve of degree $k \leq n$, if it contains $(1/2)k(2n-k+3)$ nodes of a Π_n-poised set X. We prove that an algebraic curve q is a maximal curve for X if and only if it is used by any node of the set $X \backslash q$. We also present some basic properties of maximal curves.

The well-known Chung-Yao natural lattice satisfies the condition of geometric characterization. It is a particular case of another well-known construction of poised nodes, called Berzolari-Radon set. It is known that a Π_n-poised set X has n + 2 maximal lines if and only if it is the Chung and Yao natural lattice.

In the thesis we generalize both Berzolari-Radon set and natural lattice to the case of arbitrary plane algebraic curves. We prove that a generalized natural lattice is a particular case of generalized Berzolari-Radon construction.

We say that the algebraic curves $g_1, \ldots, g_m$ satisfy condition $\mathcal{A}$ if their product has no multiple component. We prove that a Π_n-poised set has maximal curves $g_1, \ldots, g_m$, $m > 2$, satisfying the condition $\mathcal{A}$ with sum of degrees equal to $n+2$ if and only if it is a generalized natural lattice of degree n.

The well-known Gasca-Maeztu conjecture [M. Gasca and J. I. Maeztu, On Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^k$, Numer. Math., 39, (1982), 1-14] states that any GC_n set, i.e., set of nodes, all fundamental polynomials of which are products of linear factors, possesses a maximal line (a line passing through $n + 1$ nodes). So far it is proved to be true for polynomial spaces of total degree $n \le 4$. In the thesis we propose the following generalized conjecture: any GC_n^* set, i.e., set of nodes, all fundamental polynomials of which are reducible, possesses a maximal curve of some degree k, $1 \le k \le n - 1$ (a curve passing through $(1/2)k(2n - k + 3)$ nodes). Obviously the two above conjectures coincide in the case of $n \le 2$.

If the Gasca-Maeztu conjecture is true then every GC set is at the same time a Berzolari-Radon set. Similarly, the generalized conjecture means that every generalized GC set is at the same time a generalized Berzolari-Radon set.

In the thesis we prove that the generalized conjecture is true in the case of $n = 3$, namely, we have the following

Theorem. *Suppose that a set of 10 nodes $\mathcal{Q} = \{Q_0, \dots, Q_9\}$ is Π_3-poised and the fundamental polynomial of each node is reducible. Then $\mathcal{Q}$ possesses a maximal curve of degree ≤ 2, i.e., maximal line or conic.*

Carnicer and Gasca proved that if the Gasca-Maeztu conjecture is true, then there exist at least three maximal lines [J. M. Carnicer and M. Gasca, On Chung and Yao's geometric characterization for bivariate polynomial interpolation, Curve and Surface Design, 2003, pp. 11-30]. Note that the mentioned minimal number of maximal lines is attained for the well-known Newton lattice, which is a GC set. In the thesis we prove that there exist generalized GC sets with exactly two maximal curves, which are lines.

The following main results are obtained in the thesis:

1. Maximal curves are defined and characterized.
2. The Berzolari-Radon constraction is generalized for the case of arbitrary plane algebraic curves.
3. The Chung-Yao geometric characterization condition and the natural lattice are generalized for the case of arbitrary plane algebraic curves.
4. A class of generalized GC sets is characterized.
5. A conjecture on maximal curves is proposed.
6. The proposed conjecture is proved for polynomial space Π_3.
7. It is proved that there exist generalized GC sets with exactly two maximal curves.