

ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ԺԱՄԱԿՈՉՅԱՆ ՔՆԱՐԻԿ ԱՐԱՐԱՏԻ

ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՇԱՐՔԵՐԻ ԵՎ ՎԵՐՁԱՎՈՐ ՏԱՐՐԵՐԻ
ՄԵԹՈԴՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ՄԻԿՐՈՊՈԼՅԱՐ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ
ԲԱՐԱԿ ՀԵԾԱՆՆԵՐԻ ԵՎ ՍԱԼԵՐԻ ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ
ՍՈՂԵԼՆԵՐՈՒՄ

Ա 02.04 «Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա»
մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների
թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ 2019

01.02.04 - “

-

”

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ մեխանիկայի ինստիտուտում:


Գիտական ղեկավար՝ ՀՀ ԳԱԱ թղթ.-անդամ, ֆ.մ.գ.դ., պրոֆ. Ս. Ն. Սարգսյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս, ֆ.մ.գ.դ.,
պրոֆ. Գ. Ե. Բաղդասարյան
ֆ.մ.գ.թ., պրոֆ. Մ. Վ. Բելուբեկյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Երևանի պետական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2019թ. *դեկտեմբերի 6-ին*, ժամը 14⁰⁰-ին
ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում գործող Մեխանիկայի- 047
մասնագիտական խորհրդի նիստում
(հասցեն՝ 0019 ք. Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող., 24/2) avsah@mechins.sci.am

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի
գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է՝ *հոկտեմբերի 25-ին* 2019թ.

Մասնագիտական խորհրդի գիտական
քարտուղար, ֆ.մ.գ.դ.  Ա.Վ.Սահակյան



: - . ,

:

:

06- 2019 . 14⁰⁰
047
(: 0019 . , . 24/2) avsah@mechins.sci.am

25- *октябрь* 2019 .

,  . . .

- Միկրոպոլար առաձգականության տեղափոխությունների և պտույտների անկախ դաշտերով և կաշկանդված պտույտներով բարակ ձողերի կիրառական մոդելների ստատիկայի և դինամիկայի խնդիրների լուծման համար մշակվել է վերջավոր տարրերի մեթոդի կիրառման տարբերակներ:

- Միկրոպոլար առաձգականության տեղափոխությունների և պտույտների անկախ դաշտերով և կաշկանդված պտույտներով բարակ սալերի կիրառական մոդելների ստատիկայի և դինամիկայի խնդիրների լուծման համար մշակվել է վերջավոր տարրերի մեթոդի կիրառման տարբերակներ:

- Տեղափոխությունների և պտույտների անկախ դաշտերով և կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար առաձգական բարակ ձողերի և սալերի ստատիկայի և ազատ տատանումների կիրառական եզրային խնդիրների լուծման վերջավոր տարրերի մեթոդի մշակված տարբերակների կիրառման արդյունքում թվային անալիզի հիման վրա հաստատվել են նյութի միկրոպոլյարության հաշվառման արդյունավետ հատկությունները դասական դեպքի հետ համեմատած:

CONCLUSION

In the dissertation work on the basis of mathematical models of elastic thin beams, plates and shells, constructed by S. H. Sargsyan, the method of power series for construction of applied models of micropolar thin bodies and the finite element method (FEM) for studying specific boundary-value problems of statics and dynamics are developed. Particularly the following results are obtained:

- On the basis of the power series method applied models of bending deformation of thin beams are constructed with independent fields of displacements-rotations and constrained rotations for the problems of statics and dynamics, it is established that these models coincide with the corresponding applied models, constructed on the basis of asymptotically justified hypotheses method.

- On the basis of the power series method applied models of the plane stress state and bending deformation of thin plates are constructed with independent fields of displacements-rotations and constrained rotations for the problems of statics and dynamics, it is established that these models coincide with the corresponding applied models, constructed on the basis of asymptotically justified hypothesis method.

- A variant of the application of the finite element method for solving static and dynamic problems of the applied models of micropolar thin beams with independent fields of displacements-rotations and with constrained rotation has been developed.

- A variant of the application of the finite element method for solving static and dynamic problems of the applied models of micropolar thin plates with independent fields of displacements-rotations and with constrained rotation has been developed.

- As a result of the application of the developed variants of the finite element method for solving applied boundary value problems of statics and free vibrations of micropolar thin beams and plates with independent fields of displacements-rotations and with constrained rotation, effective properties of the micropolarity of the material are established in comparison with the classical case.

(Cosserat) (Cosserat E., Cosserat F. Theorie des corps deformables. Paris: Hermann eflis. 1909. 226 p.)

() ,
 ()
 ()
 ()
 :)
 ,)
 ,
 :) ,)
 ,)
 ,
 , E. Reissner, ()
 A. L. Cauchy,
 , R. Kienzler
 K.O. Fridrichs, A. E. Green,
 ,)

... (...)
 ... J. L. Ericksen and C. Truesdell, H. Altenbach and V. Eremeyev, A. E. Green and P. M. Naghdi, M. B. Rubin

10. ...
 // ... 2018. 118. 2. 125-133.
11. ... // IX
- 1-6 ... 2018. 175-179.
12. ...
 // ... 2018. 1. 46-54.
13. ...
 // ... 2018. 71. 2. C. 69-82.
14. ... // VI
 " ... 1-6 ... 2019. 160-164.

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ատենախոսական այս աշխատանքում հիմք ընդունելով Ս. Շ. Սարգսյանի կողմից կառուցված միկրոպոլյար առաձգական բարակ ձողերի, սալերի և թաղանթների մաթեմատիկական մոդելները, կիրառվել է աստիճանային շարքերի մեթոդը միկրոպոլյար բարակ մարմինների կիրառական մոդելների կառուցման համար, և մշակվել վերջավոր տարրերի մեթոդը ստատիկայի և դինամիկայի կոնկրետ եզրային խնդիրների ուսումնասիրման համար: Մասնավորապես ստացվել են հետևյալ արդյունքները.

- Միկրոպոլյար առաձգականության տեղափոխությունների և պտույտների անկախ դաշտերով տեսությամբ և կաշկանդված պտույտներով տեսությամբ աստիճանային շարքերի մեթոդի հիման վրա կառուցվել են բարակ ձողերի ծոման դեֆորմացիայի կիրառական մոդելները (ինչպես ստատիկայի, այնպես էլ դինամիկայի համար), հաստատվել է, որ այդ մոդելները համընկնում են Ս. Շ. Սարգսյանի կողմից ասիմպտոտիկ հիմնավորում ունեցող վարկածների հիման վրա կառուցված համապատասխան կիրառական մոդելների հետ:
- Միկրոպոլյար առաձգականության տեղափոխությունների և պտույտների անկախ դաշտերով տեսությամբ և կաշկանդված պտույտներով տեսությամբ աստիճանային շարքերի մեթոդի հիման վրա կառուցվել են բարակ սալերի հարթ լարվածային վիճակի և ծոման դեֆորմացիայի կիրառական մոդելները (ինչպես ստատիկայի, այնպես էլ դինամիկայի համար), հաստատվել է, որ այդ մոդելները համընկնում են ասիմպտոտիկ հիմնավորում ունեցող վարկածների հիման վրա կառուցված միկրոպոլյար սալերի համապատասխան կիրառական մոդելների հետ:

1. //
2. //
3. //
4. //
5. Sargsyan S. H., Zhamakochyan K. A. Finite Element Method for Solving Boundary Value Problems of Bending of Micropolar Elastic Thin Bars//Proceedings of the XLII Summer School-Conference Advanced Problems in Mechanics. St.-Petersburg, Russia. June 30-July 5, 2014. P.427-434.
6. // XVII
7. //
8. //
9. Sargsyan S. H., Zhamakochyan K. A. Applied theory of micropolar elastic thin plates with constrained rotation and the finite element method//Journal of Materials Physics and Mechanics. 2018. Vol. 35. 1. P. 145-154.

- 2nd International Conference. Optimization and Analysis of Structures (OAS 2013) (Tartu, Estonia, August 25-27, 2013);
- 70- (, 1-4 , 2013);
- XLII International Summer School-Conference. "Advanced Problems in Mechanics" (APM 2014). (St.-Petersburg, Russia, June 30-July 5, 2014);
- XX « » (, , 17-21 , 2014);
- VIII " (- , 22-26 , 2014);
- XVII " (- - , 14-17 , 2014);
- V " (, 02-07 , 2017);
- XLVI International Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics". (APM 2018) (St.-Petersburg, Russia. June 25- June 30, 2018);
- IX " (, 1-6 , 2018);
- « » (10 , 2019);
- (26 , 2019). 14 ,

$$(36), \quad \bar{J} = 9 \cdot 10^{-7}.$$

10.

\bar{S}

$\bar{x} = \bar{v}$	$\bar{S} \times 10^3$			$\bar{S} \times 10^3$		
		4	16		4	16
$7.84 \cdot 10^{-8}$	124	112	122	124	112	122
$7.84 \cdot 10^{-6}$	146	133	143	-	-	-
$7.84 \cdot 10^{-5}$	275	255	268	-	-	-

$$\bar{x} = \bar{v},$$

1

§1.1

$$\frac{\partial \dagger_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \dagger_{31}}{\partial x_3} = 0 \left(\dots \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} \right), \quad \frac{\partial \dagger_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \dagger_{33}}{\partial x_3} = 0 \left(\dots \frac{\partial^2 V_3}{\partial t^2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sim_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sim_{32}}{\partial x_3} - (\dagger_{13} - \dagger_{31}) = 0 \left(J \frac{\partial^2 \bar{S}_2}{\partial t^2} \right)$$

$$\dagger_{11} = \frac{E}{1-\epsilon^2} (x_{11} + \epsilon x_{33}), \quad \dagger_{33} = \frac{E}{1-\epsilon^2} (x_{33} + \epsilon x_{11}), \quad \dagger_{13} = (\sim + r)x_{13} + (\sim - r)x_{31}, \quad (2)$$

$$\dagger_{31} = (\sim - r)x_{13} + (\sim + r)x_{31}, \quad \sim_{12} = B t_{12}, \quad \sim_{32} = B t_{32}.$$

$$x_{11} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1}, \quad x_{33} = \frac{\partial V_3}{\partial x_3}, \quad x_{13} = \frac{\partial V_3}{\partial x_1} + \bar{S}_2, \quad x_{31} = \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \bar{S}_2, \quad t_{12} = \frac{\partial \bar{S}_2}{\partial x_1}, \quad t_{32} = \frac{\partial \bar{S}_2}{\partial x_3}. \quad (3)$$

$$\dagger_{11}, \dagger_{33}, \dagger_{31}, \dagger_{13} \quad ; \quad \sim_{12}, \sim_{32} \quad ; \quad x_{11}, x_{33}, x_{13}, x_{31} \quad ; \quad t_{12}, t_{32} \quad ; \quad V_1, V_3, \bar{S}_2 \quad ; \quad x_2; E, \epsilon, r, B \quad ; \quad \dots \quad ; \quad J \quad ; \quad x_3 = \pm h$$

$$\dagger_{31} = \pm p_1^\pm, \quad \dagger_{33} = \pm p_3^\pm, \quad \sim_{32} = \pm m_2^\pm, \quad x_3 = \pm h. \quad (4)$$

$$(x_1 = 0, x_1 = a),$$

$$t = 0.$$

§1.1

$$(\quad) (1).$$

\tilde{p}_3 .

7.

\bar{r}

\bar{r}	$\bar{w}_{\max} \times 10^3$			$\bar{w}_{\max} \times 10^3$			$\frac{\bar{w}_{\max}}{\bar{w}_{\max}}$
		1	2		1	2	
$0.15 \cdot 10^{-5}$	12.04	12.25	12.04	12.4	12.6	12.4	0.971
$0.15 \cdot 10^{-3}$	9.60	9.84	9.60	-	-	-	0.774
$0.15 \cdot 10^{-1}$	9.48	9.63	9.48	-	-	-	0.764

7,

8.

\bar{s}

\bar{r}

\bar{r}	$\bar{s} \times 10^3$			$\bar{s} \times 10^3$		
		1	2		1	2
$0.15 \cdot 10^{-6}$	32.03	32.08	32.03	31.90	32.00	31.90
$0.15 \cdot 10^{-4}$	34.44	34.49	34.44	-	-	-
$0.15 \cdot 10^{-1}$	36.56	36.61	36.56	-	-	-

$\bar{J} = 9 \cdot 10^{-7}$

\bar{r} ,

\bar{s}

§3.3

§3.4

$\tilde{p}_3 = const.$

(36).

9.

$\bar{x} = \bar{v}$

$\bar{x} = \bar{v}$	$\bar{w}_{\max} \times 10^3$			$\bar{w}_{\max} \times 10^3$		
		4	16		4	16
$7.84 \cdot 10^{-9}$	0.858	0.729	0.810	0.858	0.729	0.809
$7.84 \cdot 10^{-6}$	0.615	0.512	0.580	-	-	-
$7.84 \cdot 10^{-5}$	0.173	0.139	0.165	-	-	-

$$\dagger_{11} = \frac{E}{1-\epsilon^2} (x_{11} + \epsilon x_{33}), \dagger_{33} = \frac{E}{1-\epsilon^2} (x_{33} + \epsilon x_{11}), \dagger_{13} + \dagger_{31} = 2\tilde{x}_{13}, \sim_{12} = Bt_{12}, \sim_{32} = Bt_{32}, \quad (5)$$

$$(E, \epsilon, \sim = \frac{E}{2(1+\epsilon)}, B \dots)$$

$$x_{11} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1}, x_{33} = \frac{\partial V_3}{\partial x_3}, \tilde{x}_{13} = \frac{\partial V_3}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_3}, \tilde{s}_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right), t_{12} = \frac{\partial \tilde{s}_2}{\partial x_1}, t_{32} = \frac{\partial \tilde{s}_2}{\partial x_3}. \quad (6)$$

$(2h \ll a)$,

§1.2

V_1, V_3, \tilde{s}_2

x_3 :

$$V_1 = \sum_{n=0}^{\infty} V_{1,n} x_3^n, V_3 = \sum_{n=0}^{\infty} V_{3,n} x_3^n, \tilde{s}_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{s}_{2,n} x_3^n. \quad (7)$$

$$V_{1,n}, V_{3,n}, \tilde{s}_{2,n} \dots x_1 ($$

$$t \dots (1)-(4)$$

$$(7)$$

$$(1)-(3)$$

$$(4),$$

$$(\sim - r) \frac{dV_{3,0}}{dx_1} + (\sim + r) V_{1,1} - 2r \tilde{s}_{2,0} - \frac{h^2}{3} E \frac{d^2 V_{1,1}}{dx_1^2} - \epsilon \frac{h^2}{3} \frac{d}{dx_1} \frac{p_3^+ + p_3^-}{2h} =$$

$$= \frac{p_1^+ - p_1^-}{2} \left(- \dots \frac{h^2}{3} \frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial t^2} \right)$$

(8)

$$(\sim + r) \frac{d^2 V_{3,0}}{dx_1^2} + (\sim - r) \frac{dV_{1,1}}{dx_1} + 2r \frac{d^2 \tilde{s}_{2,0}}{dx_1^2} = - \frac{p_3^+ + p_3^-}{2h} \left(+ \dots \frac{\partial^2 V_{3,0}}{\partial t^2} \right)$$

$$B \frac{d^2 \tilde{s}_{2,0}}{dx_1^2} + 2r V_{1,1} - 2r \frac{dV_{3,0}}{dx_1} - 4r \tilde{s}_{2,0} = - \frac{m_2^+ + m_2^-}{2h} \left(+ J \frac{\partial^2 \tilde{s}_{2,0}}{\partial t^2} \right)$$

(8),

$V_{3,0} = w, V_{1,1} = \mathbb{E}_1, \mathbb{S}_{2,0} = \Omega_2$, где $w -$, $\mathbb{E}_1 -$, $\Omega_2 -$

§1.3

$$4 \sim h \left(\frac{dV_{1,1}}{dx_1} + \frac{d^2V_{3,0}}{dx_1^2} \right) + Bh \left(\frac{d^3V_{1,1}}{dx_1^3} - \frac{d^4V_{3,0}}{dx_1^4} \right) = -2(p_3^+ + p_3^-) - \frac{d}{dx_1} (m_2^+ + m_2^-) \left(+ 2Jh \frac{d}{dx_1} \frac{\partial^2 \mathbb{S}_{2,0}}{\partial t^2} + 4 \dots h \frac{\partial^2 V_{3,0}}{\partial t^2} \right) \quad (9)$$

$$4 \sim \left(\frac{dV_{3,0}}{dx_1} + V_{1,1} \right) - B \left(\frac{d^2V_{1,1}}{dx_1^2} - \frac{d^3V_{3,0}}{dx_1^3} \right) - \frac{4Eh^2}{3} \frac{d^2V_{1,1}}{dx_1^2} - \epsilon \frac{2h}{3} \frac{d}{dx_1} (p_3^+ + p_3^-) =$$

$$= 2(p_1^+ - p_1^-) + \frac{1}{h} (m_2^+ + m_2^-) \left(-2J \frac{\partial^2 \mathbb{S}_{2,0}}{\partial t^2} - \frac{4 \dots h^2}{3} \frac{d^2V_{1,1}}{dt^2} \right) \quad \mathbb{S}_{2,0} = \frac{1}{2} \left(V_{1,1} - \frac{dV_{3,0}}{dx_1} \right)$$

2011. 111. 2. 121-128.
 $V_{3,0} = w, V_{1,1} = \mathbb{E}_1$.

§1.4

$$2h, \quad \left(\dots \right):$$

$$\dagger_{ji,j} = 0 \left(\dots \frac{\partial^2 V_j}{\partial t^2} \right) \sim_{ji,j} + v_{ijk} \dagger_{jk} = 0 \left(J \frac{\partial^2 \mathbb{S}_j}{\partial t^2} \right) \quad (10)$$

$$\dagger_{ji} - \dots, v_{ijk} - \dots$$

$$x_{ji} = V_{i,j} - v_{kji} \mathbb{S}_k, \quad t_{ij} = \mathbb{S}_{i,j}, \quad (11)$$

$$x_{ji} - \dots, t_{ij} - \dots, V_i - \dots, \mathbb{S}_i - \dots$$

$$\bar{w}(\langle_1, \langle_2, \dagger) = \left(r_1 + r_2 \langle_1 + r_3 \langle_2 + r_4 \langle_1^2 + r_5 \langle_2^2 + r_6 \langle_1 \langle_2 + r_7 \langle_1^2 \langle_2 + r_8 \langle_1 \langle_2^2 + r_9 \langle_1^3 + r_{10} \langle_2^3 + r_{11} \langle_1^3 \langle_2 + r_{12} \langle_1 \langle_2^3 \right) \sin \mathbb{S} \dagger, \quad (34)$$

$$(26), \quad M$$

§3.2

$$w = 0, \frac{\partial \mathbb{E}_i}{\partial x_i} = 0, \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_j} = 0, \Omega_i = 0, \mathbb{E}_j = 0, \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0 \quad x_i = 0; a, \quad (i, j = 1, 2, i \neq j). \quad (35)$$

$$\bar{w} = 0.357; \bar{x} = \bar{v} = 7.84 \cdot 10^{-6}; \bar{s} = 3.92 \cdot 10^{-4}; \epsilon = 0.3; \Delta = 1/100; \tilde{p}_3^* = 1.63 \cdot 10^{-5}. \quad (36)$$

5.

\bar{r}	$\bar{w}_{\max} \times 10^3$				$\bar{w}_{\max} \times 10^3$			
		4	16	36		4	16	36
$0.15 \cdot 10^{-6}$	0.857	0.728	0.809	0.850	0.858	0.729	0.809	0.851
$0.15 \cdot 10^{-3}$	0.680	0.586	0.669	0.680	-	-	-	-
$0.15 \cdot 10^{-1}$	0.616	0.514	0.585	0.615	-	-	-	-

2.

$$(36), \quad \bar{J} = 9 \cdot 10^{-7}.$$

6.

\bar{r}	$\mathbb{S} \times 10^3$			$\mathbb{S} \times 10^3$		
		4	16		4	16
$0.15 \cdot 10^{-5}$	124	112	122	124	112	122
$0.15 \cdot 10^{-3}$	139	125	135	-	-	-
$0.15 \cdot 10^{-1}$	146	133	143	-	-	-

3.

$$(L_{12} = 0, w = 0, M_{11} = 0 \quad r =),$$

4.

\bar{S}

\bar{B}	$\bar{S} \times 10^3$			$\bar{S} \times 10^3$		
		2	4		2	4
$0.15 \cdot 10^{-8}$	56.95	57.33	56.96	56.94	57.33	56.96
$0.15 \cdot 10^{-4}$	69.05	69.52	69.07	-	-	-
$0.15 \cdot 10^{-3}$	135.96	136.73	135.99	-	-	-

§3.1

$$W_0 = \frac{Eh^3}{3(1-\nu^2)} [K_{11}^2 + K_{22}^2] + \frac{2h^3 E \nu}{3(1-\nu^2)} K_{11} K_{22} + \frac{h^3}{3} (\sim + r) [K_{21}^2 + K_{12}^2] + \frac{2h^3}{3} (\sim - r) K_{12} K_{21} +$$

$$+ h(\sim + r) [\Gamma_{31}^2 + \Gamma_{13}^2 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{23}^2] + 2h(\sim - r) [\Gamma_{13} \Gamma_{31} + \Gamma_{23} \Gamma_{32}] + h(2\chi + s) [k_{11}^2 + k_{22}^2 + k_{33}^2] +$$

$$+ 2hs [k_{11} k_{22} + k_{11} k_{33} + k_{22} k_{33}] + h(\chi + \nu) [k_{21}^2 + k_{12}^2] + 2h(\chi - \nu) k_{12} k_{21} + \frac{h^3}{3} \frac{4\chi \nu}{\chi + \nu} (l_{13}^2 + l_{23}^2)$$

$$\bar{w}(\langle_1, \langle_2) = \Gamma_1 + \Gamma_2 \langle_1 + \Gamma_3 \langle_2 + \Gamma_4 \langle_1^2 + \Gamma_5 \langle_2^2 + \Gamma_6 \langle_1 \langle_2 + \Gamma_7 \langle_1^2 \langle_2 + \Gamma_8 \langle_1 \langle_2^2 + \Gamma_9 \langle_1^3 +$$

$$\Gamma_{10} \langle_2^3 + \Gamma_{11} \langle_1^3 \langle_2 + \Gamma_{12} \langle_1 \langle_2^3, \quad \langle_1 = \frac{x_1}{a}, \quad \langle_2 = \frac{x_2}{b}, \quad (33)$$

$\bar{E}_1, \bar{E}_2, \Omega_1, \Omega_2, \bar{z}$ - \bar{w} , $\Gamma_{13}(\bar{E}_1)$ $\Gamma_{72}(\bar{z})$. Дальнейшие изучения осуществлены в безразмерных величинах.

$$(23), \quad K \quad 72 \times 72 ($$

; P -

$$t_{ij} = \} u_{ij} x_{kk} + (\sim + r) x_{ij} + (\sim - r) x_{ji}, \quad \sim_{ij} = s u_{ij} t_{kk} + (\chi + \nu) t_{ij} + (\chi - \nu) t_{ji}, \quad (12)$$

$$E, \epsilon, r, s, \chi, \nu \{, \sim - \}$$

$$x_3 = \pm h$$

$$t_{3k} = \pm p_k^\pm, \quad \sim_{3k} = \pm m_k^\pm, \quad k = 1, 2, 3. \quad (13)$$

§1.4

()-(10).

$$x_{ii} = \frac{\partial V_i}{\partial x_i}, \quad x_{33} = \frac{\partial V_3}{\partial x_3}, \quad \tilde{x}_{12} = \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_2}, \quad \tilde{x}_{13} = \frac{\partial V_3}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_3}, \quad \tilde{x}_{23} = \frac{\partial V_3}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_3}, \quad (14)$$

$$t_{ii} = \frac{\partial \check{S}_i}{\partial x_i}, \quad t_{33} = \frac{\partial \check{S}_3}{\partial x_3}, \quad t_{i3} = \frac{\partial \check{S}_3}{\partial x_i}, \quad t_{3i} = \frac{\partial \check{S}_i}{\partial x_3}, \quad t_{ij} = \frac{\partial \check{S}_j}{\partial x_i}, \quad (i=1,2)$$

$$\left(\check{S} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V} \right),$$

§1.5

$$V_i = \sum_{n=0}^{\infty} V_{i,n} x_3^n, \quad \check{S}_i = \sum_{n=0}^{\infty} \check{S}_{i,n} x_3^n, \quad i = 1, 2, 3. \quad (15)$$

$V_{i,n}, \check{S}_{i,n},$ x_1, x_2 (t).

x_3 (-) - () () .

$$: V_{1,0}, V_{2,0}, \check{S}_{3,0}:$$

$$(\sim + r) \frac{\partial^2 V_{i,0}}{\partial x_j^2} + (\sim - r) \frac{\partial^2 V_{j,0}}{\partial x_i \partial x_2} + (-1)^j 2r \frac{\partial \check{S}_{3,0}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{1 - \epsilon^2} \left(\frac{\partial V_{i,0}}{\partial x_i} + \epsilon \frac{\partial V_{j,0}}{\partial x_j} \right) +$$

$$+ \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p_3^+ - p_3^-}{2} \right) = -\frac{p_i^+ + p_i^-}{2h} \left(+ \dots \frac{\partial^2 V_{i,0}}{\partial t^2} \right) \quad (i, j=1,2, \quad i \neq j) \quad (16)$$

$$\frac{4xv}{x+v} \Delta^2 \tilde{S}_{3,0} + 2r \left[\frac{\partial V_{2,0}}{\partial x_1} - \frac{\partial V_{1,0}}{\partial x_2} - 2\tilde{S}_3 \right] + \frac{x-v}{x+v} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{m_1^+ - m_1^-}{2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{m_2^+ - m_2^-}{2} \right] =$$

$$= -\frac{m_3^+ + m_3^-}{2h} \left(+ J \frac{\partial^2 \tilde{S}_{3,0}}{\partial t^2} \right)$$

2015. . 178-201.

$$V_{1,0} = V_1, V_{2,0} = V_2, \tilde{S}_{3,0} = \Omega_3.$$

$V_{1,1}, V_{2,1}, V_{3,0}, \tilde{S}_{1,0}, \tilde{S}_{2,0}, \tilde{S}_{3,1}$):

$$(-+r)\Delta^2 V_{3,0} + (-r) \left[\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1} + \frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_2} \right] + 2r \left[\frac{\partial \tilde{S}_{2,0}}{\partial x_1} - \frac{\partial \tilde{S}_{1,0}}{\partial x_2} \right] = -\frac{p_3^+ + p_3^-}{2h} \left(+ \dots \frac{\partial^2 V_{3,0}}{\partial t^2} \right)$$

$$- \frac{h^2}{3} \left[(-+r) \frac{\partial^2 V_{i,1}}{\partial x_2^2} + (-r) \frac{\partial^2 V_{j,1}}{\partial x_1 \partial x_2} + (-1)^j 2r \frac{\partial \tilde{S}_{3,1}}{\partial x_j} + \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{p_3^+ + p_3^-}{2h} \right] +$$

$$+ (-+r)V_{i,1} + (-r) \frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_i} - 2r\tilde{S}_{j,0} - \frac{Eh^2}{3(1-\epsilon^2)} \left(\frac{\partial^2 V_{i,1}}{\partial x_1^2} + \epsilon \frac{\partial^2 V_{j,1}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = \frac{p_i^+ - p_i^-}{2} \left(-\frac{h^2}{3} \frac{\partial^2 V_{i,1}}{\partial t^2} \right)$$

$$(s+2x) \frac{\partial^2 \tilde{S}_{i,0}}{\partial x_i^2} + (x+v) \frac{\partial^2 \tilde{S}_{i,0}}{\partial x_j^2} + (s+x-v) \frac{\partial^2 \tilde{S}_{j,0}}{\partial x_1 \partial x_2} + s \frac{\partial \tilde{S}_{3,1}}{\partial x_i} -$$

$$- 4r\tilde{S}_{1,0} + (-1)^j 2r \left[\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_j} - V_{j,1} \right] = -\frac{m_i^+ + m_i^-}{2h} \left(+ J \frac{\partial^2 \tilde{S}_{i,0}}{\partial t^2} \right)$$

$$s \left(\frac{\partial \tilde{S}_{1,0}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{S}_{2,0}}{\partial x_2} \right) - \frac{h^2}{3} \left[\frac{4xv}{x+v} \Delta^2 \tilde{S}_{3,1} + \frac{x-v}{x+v} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{m_1^+ + m_1^-}{2h} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{m_2^+ + m_2^-}{2h} \right) \right] +$$

$$+ 2r \left(\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_1} - \frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_2} - 2\tilde{S}_{3,1} \right) \left] + (s+2x)\tilde{S}_{3,1} = \frac{m_3^+ - m_3^-}{2} \left(-J \frac{h^2}{3} \frac{\partial^2 \tilde{S}_{3,1}}{\partial t^2} \right) \quad (17)$$

2.

\tilde{S}

\bar{r}

\bar{r}	$\tilde{S} \times 10^3$			$\tilde{S} \times 10^3$		
		2	4		2	4
$0.15 \cdot 10^{-6}$	56.99	57.38	57.01	56.94	57.33	56.96
$0.15 \cdot 10^{-4}$	60.57	60.94	60.59	-	-	-
$0.15 \cdot 10^{-1}$	69.02	69.48	69.04	-	-	-

§2.3

§2.4

1.

$2\tilde{p}_3$.

(27).

$$w=0, \mathbb{E}_1=0, \Omega_2=0, \quad x_1=0;$$

$$N_{13}=0, M_{11}=0, L_{12}=0, \quad x_1=a.$$

(30).

(31)

3.

\bar{B}

(1).

\bar{B}	$\bar{w}_{\max} \times 10^3$			$\bar{w}_{\max} \times 10^3$			$\frac{\bar{w}_{\max}}{\bar{w}_{\max}}$
		2	4		2	4	
$0.15 \cdot 10^{-8}$	6.388	6.389	6.388	6.388	6.389	6.388	1
$0.15 \cdot 10^{-4}$	4.344	4.345	4.344	-	-	-	0.680
$0.15 \cdot 10^{-3}$	1.120	1.121	1.120	-	-	-	0.175

1).

2.

$$(30), \quad \bar{J} = 9 \cdot 10^{-7}.$$

$$([K] - \mathfrak{S}^2[M]) \cdot \{u\} = 0, \quad (26)$$

K -
12×12() .

§2.2.

1.

$$w = 0, M_{11} = 0, L_{12} = 0, \quad x_1 = 0, a; \quad (27)$$

$$w = 0, \mathfrak{E}_1 = 0, \Omega_2 = 0, \quad x_1 = 0, a. \quad (28)$$

2.

$$w = 0, \mathfrak{E}_1 = 0, \Omega_2 = 0, \quad x_1 = 0; \quad (29)$$

$$N_{13} = p, M_{11} = 0, L_{12} = 0, \quad x_1 = a.$$

$$\bar{\nu} = 0.357; \bar{B} = 0.15 \cdot 10^{-4}; \epsilon = 0.3; \Delta = 1/100, \tilde{p}_3^* = 1.63 \cdot 10^{-5}. \quad (30)$$

1.

\bar{r}	$\bar{w}_{\max} \times 10^3$			$\bar{w}_{\max} \times 10^3$			$\frac{\bar{w}_{\max}}{\bar{w}_{\max}}$
	2	4	6	2	4	6	
$0.15 \cdot 10^{-6}$	6.376	6.378	6.376	6.388	6.389	6.388	0.998
$0.15 \cdot 10^{-4}$	5.642	5.654	5.642	-	-	-	0.883
$0.15 \cdot 10^{-1}$	4.347	4.349	4.347	-	-	-	0.680

3.

$$(30), \quad \bar{J} = 9 \cdot 10^{-7} \quad (\bar{J} = J / \dots a^2)$$

//
2012. . 53. . 2. . 148-156.

$$V_{3,0} = w, \quad V_{1,1} = \mathfrak{E}_1, \quad V_{2,1} = \mathfrak{E}_2, \quad \mathfrak{S}_{1,0} = \Omega_1, \mathfrak{S}_{2,0} = \Omega_2, \mathfrak{S}_{3,1} = z.$$

§1.6

$$V_i, i=1,2,3$$

$$x_3(31), \quad \mathfrak{S}_i$$

$$V_i \left(\mathfrak{S} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V} \right).$$

x₃

1.

$$V_{1,0}, V_{2,0}:$$

$$2 \frac{\partial^2 V_{i,0}}{\partial x_i^2} + 2 \frac{\partial^2 V_{j,0}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 V_{i,0}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 V_{j,0}}{\partial x_i \partial x_j} +$$

$$+ \frac{x}{2} \left(\frac{\partial^4 V_{j,0}}{\partial x_i^3 \partial x_j} - \frac{\partial^4 V_{i,0}}{\partial x_i^2 \partial x_j^2} + \frac{\partial^4 V_{j,0}}{\partial x_i \partial x_j^3} - \frac{\partial^4 V_{i,0}}{\partial x_j^4} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{p_3^+ - p_3^-}{2} = - \frac{p_i^+ + p_i^-}{2h} +$$

$$+ (-1)^j \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{m_i^+ - m_i^-}{4} + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \frac{m_j^+ - m_j^-}{4} \right) \left((-1)^j \frac{J}{2} \frac{\partial^3 \mathfrak{S}_{3,0}}{\partial t^2 \partial x_j} + \dots \frac{\partial^2 V_{i,0}}{\partial t^2} \right) \quad (i, j=1,2, i \neq j).$$

$$V_{1,1}, V_{2,1}, V_{3,0}$$

$$2h \left(V_{i1} + \frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_i} \right) - h x \left(\frac{\partial^2 V_{i,1}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^3 V_{3,0}}{\partial x_i \partial x_j^2} \right) - \frac{h(x+v)}{2} \left(\frac{\partial^2 V_{i,1}}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^3 V_{3,0}}{\partial x_i^3} \right) +$$

$$+ \frac{h(x-v)}{2} \left(\frac{\partial^2 V_{j,1}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^3 V_{3,0}}{\partial x_i \partial x_j^2} \right) - \frac{2h^3}{3} \frac{E}{1-\epsilon^2} \left(\frac{\partial^2 V_{i,1}}{\partial x_i^2} + \epsilon \frac{\partial^2 V_{j,1}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) -$$

$$- \frac{2h^3}{3} \left(\frac{\partial^2 V_{j,1}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 V_{i,1}}{\partial x_j^2} \right) - \frac{h^3}{3} x \left(\frac{\partial^4 V_{j,1}}{\partial x_i^3 \partial x_j} - \frac{\partial^4 V_{i,1}}{\partial x_i^2 \partial x_j^2} + \frac{\partial^4 V_{j,1}}{\partial x_i \partial x_j^3} - \frac{\partial^4 V_{i,1}}{\partial x_j^4} \right) -$$

$$- \frac{2h^3}{3} \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \frac{p_3^+ + p_3^-}{2h} = h(p_i^+ - p_i^-) + \frac{h^2}{6} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (m_i^+ + m_i^-) + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (m_j^+ + m_j^-) \right)$$

$$+ (-1)^j \frac{m_j^+ + m_j^-}{2} \left(-\frac{2}{3} \dots h^3 \frac{\partial^2 V_{i,1}}{\partial t^2} - (-1)^i \left(J h \frac{\partial^2 \mathfrak{S}_{j,0}}{\partial t^2} + \frac{2}{3} J h^3 \frac{\partial^3 \mathfrak{S}_{3,1}}{\partial t^2 \partial x_j} \right) \right) \quad (i, j=1,2, i \neq j).$$

$$2-h \left(\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 V_{3,0}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 V_{3,0}}{\partial x_2^2} \right) + h \left(\frac{\partial^3 V_{1,1}}{\partial x_1 \partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^4 V_{3,0}}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 V_{2,1}}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) \quad (19)$$

$$\frac{1}{2} h (\chi + \nu) \left(\frac{\partial^3 V_{1,1}}{\partial x_1^3} - \frac{\partial^4 V_{3,0}}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^3 V_{2,1}}{\partial x_2^3} - \frac{\partial^4 V_{3,0}}{\partial x_2^4} \right) + \frac{1}{2} h (\chi - \nu) \left(2 \frac{\partial^4 V_{3,0}}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - \frac{\partial^3 V_{2,1}}{\partial x_1^2 \partial x_2} - \frac{\partial^3 V_{1,1}}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right) =$$

$$= -(p_3^+ + p_3^-) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} (m_1^+ + m_1^-) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} (m_2^+ + m_2^-) \left\{ + Jh \left(\frac{\partial^3 \mathfrak{S}_{2,0}}{\partial t^2 \partial x_1} - \frac{\partial^3 \mathfrak{S}_{1,0}}{\partial t^2 \partial x_2} \right) + \dots \frac{\partial^2 V_{3,0}}{\partial t^2} \right\}$$

$$\mathfrak{S}_{1,0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_2} - V_{2,1} \right), \mathfrak{S}_{2,0} = \frac{1}{2} \left(V_{1,1} - \frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1} \right), \mathfrak{S}_{3,1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_1} - \frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_2} \right) x_3,$$

(18) (19)

. 2011. . 231-235.

$$V_{3,0} = w, \quad V_{1,1} = \mathfrak{E}_1, \quad V_{2,1} = \mathfrak{E}_2.$$

§2.1

$$U = \int_0^a (W - 2\tilde{p}_1 h \mathfrak{E}_1 - 2\tilde{p}_3 w - 2\tilde{m}_2 \Omega_2) dx_1 - (M_1 \mathfrak{E}_1 + N_{13} w + L_{12} \Omega_2)|_{x_1=a} - (M_1 \mathfrak{E}_1 + N_{13} w + L_{12} \Omega_2)|_{x_1=0} \quad (20)$$

$$W = E \frac{h^3}{3} K_{11}^2 + h(\tilde{\nu} + \Gamma)(\Gamma_{13}^2 + \Gamma_{31}^2) + 2h(\tilde{\nu} - \Gamma)\Gamma_{13}\Gamma_{31} + Bhk_{12}^2 \quad (21)$$

M_{11}, L_{12}

\dagger_{11}

$$\tilde{\nu}_{12}; K_{11}^-; \Gamma_{13}, \Gamma_{31}^-; k_{12}^-; M_{11}; \Gamma_{13}, \Gamma_{31}^-; L_{12}; N_{13}, N_{31}^-$$

$$[0,1]. \quad (0,0) \quad (1,0)$$

$$\bar{w}(w/a) \quad \mathfrak{E}_1$$

$$\bar{w}(0), \bar{w}'(0), \mathfrak{E}_1(0), \mathfrak{E}_1'(0), \Omega_2(0), \Omega_2'(0), \bar{w}'(1), \bar{w}(1), \mathfrak{E}_1(1), \mathfrak{E}_1'(1), \Omega_2(1), \Omega_2'(1), \bar{w}$$

$$\bar{w}(\langle) = r_1 + r_2 \langle + r_3 \langle^2 + r_4 \langle^3, \quad \mathfrak{E}_1(\langle) = r_5 + r_6 \langle + r_7 \langle^2 + r_8 \langle^3,$$

$$\Omega_2(\langle) = r_9 + r_{10} \langle + r_{11} \langle^2 + r_{12} \langle^3. \quad (22)$$

$$u_1, u_2, \dots, u_{12} \quad (20)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial u_k} = 0, (k=1,2,3,\dots,12) \right).$$

$$[K] \cdot \{u\} = \{P\}, \quad (23)$$

$$K \quad 12 \times 12 \quad \{u\}^T = \{u_1, u_2, \dots, u_{12}\}, \quad \{P\}$$

$$\bar{w}, \quad \mathfrak{E}_1$$

$$\bar{w}(\langle, \dagger) = (r_1 + r_2 \langle + r_3 \langle^2 + r_4 \langle^3) \cdot \sin \mathfrak{S} \dagger, \quad \mathfrak{E}_1(\langle, \dagger) = (r_5 + r_6 \langle + r_7 \langle^2 + r_8 \langle^3) \cdot \sin \mathfrak{S} \dagger,$$

$$\Omega_2(\langle, \dagger) = (r_9 + r_{10} \langle + r_{11} \langle^2 + r_{12} \langle^3) \cdot \sin \mathfrak{S} \dagger. \quad (24)$$

$$\tilde{U} = \int_0^a (W + \dots h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \cdot w + \frac{h^3}{3} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_1}{\partial t^2} \cdot \mathfrak{E}_1 + Jh \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2} \cdot \Omega_2) dx_1, \quad (25)$$

$$u_1, u_2, \dots, u_{12}. \quad (25)$$