

**ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ
ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ**

ՄՈՂԱՄՄԱԴ ԴԱՐՅԱԴԱՐ

**ԲԱԶՄԱՇԵՐՏ ՍԱԼԵՐԻ ԵՎ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ,
ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԵՎ ՕՊՏԻՄԱԼ
ՆԱԽԱԳԾՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ**

ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ա.02.04.-«Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա» մասնագիտությամբ տեխնիկական
գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման

Գիտական ղեկավար՝
տեխ. գիտ. դոկտոր, պրոֆ.
Լ. Ա. Մովսիսյան

Երևան-2019

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ..... 4

ԳԼՈՒԽ ԱՌԱՋԻՆ

ՍԱԼԵՐԻ ԶԱՆԳՎԱԾՆԵՐԻ ՆՎԱԶԵՑՄԱՆ ՕՊՏԻՄԱԼ ՆԱԽԱԳԾՄԱՆ

ԽՆԴԻՐՆԵՐ.....11

1.1. Ուղղանկյուն սալի կայունության խնդիր.....11

1.2. Բազմաշերտ առաձգամածուցիկ սալի կայունության մասին.....13

1.3. Ընդլայնական սահքերի հաշվառում.....16

1.4. Անիզոտրոպ անհամասեռ սալերի օպտիմալ նախագծման խնդիրներ.....19

ԳԼՈՒԽ ԵՐԿՐՈՐԴ

ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԶԱՆԳՎԱԾՆԵՐԻ ՆՎԱԶԵՑՄԱՆ ՕՊՏԻՄԱԼ ՆԱԽԱԳԾՄԱՆ

ԽՆԴԻՐՆԵՐ..... 31

2.1. Գլանային թաղանթների կայունության ուսումնասիրումը.....32

2.2. Անիզոտրոպ գլանային թաղանթների օպտիմալ նախագծումը.....35

2.3. Կենտրոնացված ուժի ազդեցությամբ ծովող շրջանային կտրվածքով ձողի ամենամեծ ձկվածքը հնարավորին չափ փոքրացնելու խնդիր.....46

2.4. Օրթոտրոպ պտտման թաղանթների օպտիմալ նախագծումը.....49

2.5. Գլանային երկչափ թաղանթների օպտիմալացումը.....59

ԳԼՈՒԽ ԵՐՐՈՐԴ

ՍԱԼԵՐԻ ՆԱԽԱԳԾՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ.....72

3.1. Սալի ազատ տատանումները..... 73

3.2. Շերտավոր սալի կայունության խնդիրը..... 74

3.3. Սալի տատանման խնդիրը ընդլայնական սահքերի հաշվառումով..... 79

3.4. Ուղղանկյուն սալի կայունությունը ընդլայնական սահքերի հաշվառումով.....83

3.5. Սալի դինամիկական կայունությունը.....85

3.6. Սալի ծռման խնդիրը 87

ԳԼՈՒԽ ԶՈՐՐՈՐԴ

ԲԱԶՄԱՇԵՐՏ ՍԱԼԵՐԻ ՀԱՐԿԱԴՐԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ԵՎ

ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ.....	90
4.1. Բազմաշերտ անհիգոտորոպ սալերի մասին.....	90
4.2. Բազմաշերտ կոմպոզիցիոն սալի ծոման տատանումները.....	98
4.3. Կոմպոզիցիոն շերտերից կազմած շերտավոր սալի կայունությունը.....	107
4.4. Բազմաշերտ կոմպոզիտային սալերի հարկադրական տատանումների կառավարում.....	115
ԵԶՐԱԿԱՅՈՒԹՅՈՒՆ.....	123
ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ	125

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Մինչև անցյալ դարի կեսերը անիզոտրոպ նյութերից դեֆորմացվող համակարգերի մեխանիկային ուշադրությունը բավականին սառն էր, կիրառական ասպարեզը՝ նեղ: Սակայն, երբ ստեղծվեցին նոր արհեստական կոմպոզիտներ, էապես փոխվեց մթնոլորտը: Բանը նրանումն է, որ կոմպոզիտներից, հատկապես թելերով ստացվող կոմպոզիտներից, կիրառության տվյալ ասպարեզի համար կարելի է ստանալ լավագույն հատկություններով օբյեկտ:

Բացի այդ, լայն թափով զարգանում է օպտիմալ նախագծման տեսությունը: Ինչով կարելի է բացատրել դա: Առկա են որոշ հանգամանքների ձևականորեն բաժանվող և մեկ մեկու վրա փոխազդող երկու համակարգեր: Առաջին. ժամանակակից թռչող և լողացող սարքերից (ինքնաթիռներ, տիեզերանավեր, նավեր, սուզանավեր, տարբեր բնույթի կառույցներից՝ ռեակտորներ, բարձրահարկ շենքեր, կամուրջներ և այլն) պահանջվում է հնարավորին չափ փոքր կշիռ, ֆիզիկամեխանիկական ծայրահեղ պայմաններում աշխատելու կարողություն: Այսօրվա հասարակական արտադրությունը պետք է հաշվի առնի բազմաթիվ հարցեր, որոնք ըստ էության ձևակերպվում են որպես օպտիմալ նախագծման խնդիրներ և առնչվում են այնպիսի կարևոր հարցադրումների, ինչպիսիք են բնության պահպանումը, մարդկային հասարակության հարաճուն կենսապայմանների բավարարումը և այլն:

Ահավասիկ, հանգամանքների համակարգ, որոնք առաջ են քաշում օպտիմալ նախագծման նորանոր խնդիրներ, պահանջում նախկինում հետազոտված խնդիրների լուծման ճշգրտության մեծացում:

Օպտիմալ նախագծման տեսության զարգացմանը նպաստող հանգամանքների մյուս համակարգը հետևյալն է. օպտիմալ նախագծման խնդիրների, վերջիններիս լուծման գոյության, միարժեքության և բազմաթիվ այլ հարցերի մաթեմատիկական հետազոտությունները կապված են մեծ թվով դժվարությունների հետ: Այդ դժվարություններից որոշ մասի հաղթահարումը հնարավոր է դարձել միայն մաթեմատիկայի արդի մակարդակի ընձեռած հնարավորությունների շնորհիվ:

Ժամանակակից վարիացիոն հաշվի տեսությունը, համակարգերի ղեկավարման տեսությունը, ֆունկցիոնալ անալիզի տեսությունը և ամենակարևորը՝ հաշվողական միջոցները (տեսությունը և ժամանակակից տեխնիկան), հնարավորություն են տալիս հետազոտել օպտիմալ նախագծման տեսության բազմաթիվ հարցեր՝ դրանով իսկ ստեղծելով արգասաբեր միջավայր այդ տեսության զարգացման համար: Ասվածն անվերապահորեն վերաբերում է նաև ժամանակակից դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկային՝ առաջին հերթին թաղանթների և սալերի տեսությանը, ոչ առաձգական (պլաստիկական, մածուցիկ) դեֆորմացիաների տեսություններին, նրանց զարգացման տեսությանը: Օպտիմալ նախագծման տեսությունը փոխադարձաբար իր ազդեցությունն է թողնում վերը թվարկած ոլորտներում: Այդ տեսության շատ խնդիրներ ու հարցեր խթանում են համակարգերի ղեկավարման տեսության, վարիացիոն հաշվի և մաթեմատիկայի ու մեխանիկայի բազմաթիվ այլ ճյուղերի զարգացումը: Կարելի է ասել, որ օպտիմալ նախագծման տեսությունը որպես տեսություն (գիտական ճյուղ, որն ունի հետազոտությունների որոշակի առարկա և որոշակի եղանակներ) կազմավորվել է վերջին 2-3 տասնամյակներում, երբ բազմաթիվ հետազոտողների կողմից բուռն կերպով սկսեցին դիտարկվել օպտիմալ նախագծման տարբեր բնույթի խնդիրներ, հարցեր՝ կիրառելով մաթեմատիկա և մեխանիկա գիտությունների տարբեր ճյուղերից վերցված միջոցներ:

1638թ. Գալիլեյի և 1770 թ. Լագրանժի կողմից դիտարկվել են խնդիրներ, որոնք կարելի է համարել օպտիմալ նախագծման առաջին խնդիրներ՝ դրված և հետազոտված գիտական հետևողականությամբ: Գալիլեյը ներմուծելով հավասարաչափ ամրության գաղափարը, հարց դրեց որոշելու հավասարաչափ ամուր չորսուի ձևը, երբ ուղղանկյուն կտրվածք ունեցող չորսուն մի ծայրով ամրացված է պատի մեջ, իսկ մյուս ծայրի վրա ազդող կենտրոնացված ուժի ազդեցությամբ ծովում է: Հետագայում պարզվել է, որ Գալիլեյի կողմից ստացած օպտիմալ չորսուն (որի լայնական կտրվածքի բարձրությունը փոխվում է պարաբոլական օրենքով) ունի ամնափոքր կշիռը այն չորսունների համեմատությամբ, որոնցում լարումը չի գերազանցում տրված արժեքը: Լագրանժի կողմից դիտարկված խնդրում փնտրվում է իր առանցքի ուղղությամբ սկեռված ուժով

սեղմվող օպտիմալ ձողի ձևը, որի դեպքում ձողն ունենում է ամենափոքր կշիռը և դիմակայում է կայունության կորուստին: Այս խնդիրը մինչև այսօր էլ գրավում է որոշ գիտնականների ուշադրությունը: Դա բացատրվում է մի շարք հանգամանքներով: Նախ, այդ խնդիրը լինելով բավականին պարզ իր դրվածքով, լուծելու տեսակետից այնքան էլ հեշտ չէ: Դեռևս անցյալ դարի կեսերին Կլաուդենը ճշգրտեց Լագրանժի առաջարկած լուծումը, բայց պարզվեց, որ նրա ստացած արդյունքը ևս զերծ չէ թերությունից. ձողի օպտիմալ ձևն այնպիսին է, որ նրա ծայրում հատույթի մակերեսը դառնում է գրո, որի պատճառով լարումներն ստացվում են անվերջ մեծ: Այդ թերությունը վերացվել է Նիկոլայի կողմից 20-րդ դարի սկզբին: Մյուս կողմից, Լագրանժի խնդիրը լինելով համեմատաբար պարզ, հնարավորություն է ընձեռում հետազոտելու շատ հարցեր, որոնց ավելի դժվար է պատասխանել սալերի կամ թաղանթներին վերաբերող նմանատիպ խնդիրներում:

Վերը նշված աշխատանքներում այս խնդիրը դիտարկվել է տարբեր տիպի ձողերի, տարբեր եզրային պայմանների դեպքում: Որոշ հետազոտողներ նպատակահարմար են գտել դիտարկել այդ երկակի խնդիրը. ձողի օպտիմալ ձևի ընտրությամբ հնարավորին չափ մեծացնել կայունության կորստի կրիտիկական ուժը՝ ձողի զանգվածը պահելով հաստատուն: Օպտիմալ նախագծման տեսության մեջ կարևոր դաս են կազմում դինամիկական խնդիրները: Առաջին անգամ այդպիսի խնդիր դիտարկել է Մ.Կրեյնը, երբ հարց է դրվել օպտիմալացնել անհամասեռ լարի սեփական տատանումները՝ լարի երկայնքով փոփոխելով նյութի բաշխումը: Հետագայում դիտարկվել են դինամիկական խնդիրներ ոչ միայն ձողերի, այլև սալերի ու թաղանթների համար, որոնցում որպես ղեկավարման պարամետր մեծ մասամբ հանդես է գալիս կառուցվածքի հաստությունը: Որոշ գիտնականներ հետազոտում են օպտիմալ նախագծման խնդիրներ (դինամիկական կամ այլ բնույթի), որոնցում ղեկավարման պարամետրը կառուցվածքի ձևն է՝ անհայտ եզրագիծը: Այս տիպի խնդիր առաջինը դիտարկել է Սեն-Վենանը: Նրա հետազոտած խնդրում գլանային ձողի լայնակի հատույթի ընտրությամբ հնարավորին չափ մեծացվում է ձողի ոլորման կոշտությունը:

Վերը հիշատակված խնդիրները վերաբերում են այն դեպքերին, երբ առկա է մեկ նպատակի ֆունկցիոնալ: Բայց իրական կառուցվածքները և նրանց տարրերը հաճախ աշխատում են տարբեր ուժային և մեխանիկական այլ գործոնների (ջերմային, մագնիսական դաշտերի) ազդեցության պայմաններում: Այդ իսկ պատճառով հետաքրքրություն են ներկայացնում այն աշխատանքները, որոնցում դիտարկվող օպտիմալ կառուցվածքները պետք է աշխատեն տարբեր պայմաններում: Այս տիպի խնդիրները հայտնի են օպտիմալացման բազմանպատակային խնդիրներ անվանք: Երբեմն հանդիպում են աշխատանքներ, որոնցում դիտարկվում են բազմաչափանիշ խնդիրներ: Այստեղ, ի տարբերություն բազմանպատակային խնդիրների, նպատակի ֆունկցիոնալը վեկտոր ֆունկցիա է: Օպտիմալ նախագծման մի շարք խնդիրներ վերաբերում են առաձգապլաստիկական, պլաստիկական դեֆորմացիոն վիճակներին: Կոմպոզիտ նյութերի կիրառման պատճառով մեծ նշանակություն են ձեռք բերում այն խնդիրները, որոնցում հաշվի են առնվում կառուցվածքների անիզոտրոպ և անհամասեռ հատկությունները: Օպտիմալ նախագծման տեսության արդիական թեմաներից են խնդիրների լուծումների գոյությանն ու միարժեքությանն առնչվող, խնդիրների լուծման նոր եղանակների մշակման հարցերը:

Այդ ասպարեզում կատարված աշխատանքները այնքան շատ են [8,123,73,96-99,106-111] և այլն, որ թեթև ակնարկ կկատարենք միայն Հայաստանում այդ ասպարեզի հետազոտություններին:

Հայաստանում անիզոտրոպ նյութերից դեֆորմացող համակարգերի մեխանիկայի դպրոցի հիմնադիրը ակադեմիկոս Ս. Ա. Համբարձումյանն է: Նրա առաջին աշխատանքները նվիրված են անիզոտրոպ միաշերտ և բազմաշերտ թաղանթների տեսությանը դասական դրվածքով: Հետագայում նրա կողմից սալերի և թաղանթների համար առաջարկվել են մի շարք ճշգրտված տեսություններ՝ սահքերի և նորմալ տեղափոխության հաշվառմամբ: Այդ հետազոտությունները ներկայացված են մենագրությունների և բազմաթիվ հոդվածների տեսքով [21-27,64]: Այդ տեսությունների հիման վրա կատարվել են բազմաթիվ աշխատանքներ սալերի և թաղանթների ծոման, տատանումների և կայունության վերաբերյալ նրա աշակերտների՝ Գ.Ե.

Բաղդասարյանի. [35-37,71,72], Մ.Վ. Բելուբեկյանի [38,76,119], Վ.Ց. Գնունու. [27,35,36,71,95], Լ. Ա. Մովսիսյանի. [46,113-116], Ջ. Վ. Փեշտմալջյանի [113], Ա. Ա. Խաչատրյանի [26] և ուրիշներ, կողմից:

Հետագայում այդ տեսության սահմաններում մշակվել է սալերի և թաղանթների համար մագնիսաառաձգանության տեսություն, որը անիզոտրոպ նյութերի համար ասիմպտոտիկ մեթոդով ընդհանրացրել է Ս. Հ. Սարգսյանը [14-17]:

Ինչպես հայտնի է, ընդհանուր անիզոտրոպության դեպքում առաձգականության հավասարումները թույլ չեն տալիս կիրառել մաթեմատիկական ֆիզիկայի հիմնական մեթոդներից մեկը՝ փոփոխականների անջատման մեթոդը:

Վ. Ս. Սարգսյան կողմից ֆիզիկական փոքր պարամետրի մեթոդով ուսումնասիրվել է ինչպես ձողերի ոլորման և ծոման, այնպես էլ սալերի ծոման, տատանումների, կայունության բազմաթիվ խնդիրներ [7-13,47-54,123,125]:

Այդ թեմայով բազմաթիվ աշխատանքներ են կատարվել նրա աշակերտների՝ Ս. Վ. Սարգսյանի [7-13, 18-20, 54, 55, 126], Բ. Պ. Գեղամյանի [1-5, 28, 48-50, 52], Ս. Հ. Ջիլավյանի [6, 40, 41, 54, 127], Ս. Գ. Շահինյան [61, 62, 128], Վ. Ս. Բելուբեկյան [77-80] և ուրիշներ կողմից:

Անիզոտրոպ բարակապատ համակարգերի ուսումնասիրության նոր ուղղությունը կապված է Լ. Ա. Աղալովյանի անվան հետ: Նրա կողմից մշակվել է միաշերտ և բազմաշերտ անիզոտրոպ սալերի և թաղանթների ամրության և տատանումների ասիմպտոտիկ տեսությունը, երբ փոքր պարամետր է ընտրվում օբյեկտի հարաբերական հաստությունը [29-32, 63]:

Հետագայում այդ ուղղությամբ լայն հետազոտություններ են կատարվել (փոփոխական հաստության շերտերը, շերտերի ոչ լրիվ կոնտակտային պայմանները և այլն) նրա և նրա բազմաթիվ աշակերտների՝ Ռ. Ս. Գևորգյանի [30], Ա.Մ Խաչատրյանի [31, 56, 60, 102], Մ.Լ. Աղալովյանի. [33,34], Լ. Գ Ղուլղազարյանի [92-94] և ուրիշների կողմից:

Ատենախոսությունը ընդգրկում է հարցեր, որոնք առնչվում են բազմաշերտ կառուցվածքների՝ թաղանթների և սալերի, կայունության, տատանումների և օպտիմալ

նախագծման խնդիրներին, նվիրված է դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկայի արդիական թեմաներից մեկին՝ կայունության, տատանումների և օպտիմալ նախագծման խնդիրների լուծանք, որոնք ունեն թե տեսական և թե կիրառական մեծ նշանակություն: Աշխատանքում օպտիմալ նախագծման ժամանակակից տեսության հիմնական դրույթների հիման վրա լուծված են կիրառական բնույթի մեծաթիվ խնդիրներ: Այդ խնդիրներում՝ թաղանթների, սալերի կատարելության չափանիշներն են զանգվածը, ամրությունը, կոշտությունը կամ կայունությունը բնորոշող մեծությունները: Հաշվի են առնված թաղանթների անիզոտրոպ համասեռ հատկությունները:

Աշխատանքը բաղկացած է ներածությունից, չորս գլուխներից և գրականությունից: Ներածության մեջ համառոտ շարադրված է կայունության, տատանումների և օպտիմալ նախագծման տեսության զարգացման հիմնական փուլերը, հակիրճ պարզաբանված է այդ տեսության դերը և նշանակությունը մեխանիկայում:

Առաջին գլխում ուսումնասիրվում է դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկայի կարևորագույն խնդիրներից մեկը՝ կառուցվածքների օպտիմալ նախագծման խնդիրը: Բերված են տեսության հիմնական սահմանումները և առնչությունները և ուսումնասիրված են հետևյալ խնդիրները. ա) ուղղանկյուն սալի կայնության խնդիրը կամայական բաշխված ճիգերի դեպքում, բ) բազմաշերտ կոմպոզիցիոն առաձգամածուցիկ սալի կայնության խնդիրը, գ) ուղղանկյուն սալի և շերտավոր սալի կայնության խնդիրները ընդլայնական սահքերի հաշվառումով: Ուսումնասիրվում է նաև եռաշերտ անիզոտրոպ անհամասեռ սալի օպտիմալ նախագծման խնդիրը:

Երկրորդ գլուխը նվիրված է թաղանթների օպտիմալ նախագծման խնդիրներին: Հետազոտված են եռաշերտ և միաշերտ թաղանթների զանգվածների հնարավորին չափ փոքրացման խնդիրներ, երբ սահմանափակում է դրված թաղանթների ազատ տատանումների հիմնական հաճախության արժեքի վրա: Նաև դիտարկվում է ձողերի օպտիմալացման խնդիր: Որպես օրինակ դիտարկված է կենտրոնացված ուժի ազդեցությամբ ծովող շրջանային ձողի ամենամեծ ճկվածքի հնարավորին չափ փոքրացման խնդիր: Անիզոտրոպ գլանային թաղանթների օպտիմալ նախագծման

խնդրի լուծումը բերվում է ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի, որը լուծված է թվային եղանակով, օգտագործելով Մաթլաբ ծրագիրը:

Երրորդ գլխում շարադրված են սալերի նախագծման խնդիրներ: Հետազոտված է ուղղանկյուն շերտավոր սալի ազատ տատանումների խնդիրը, երբ սալի բոլոր կողմերը հողակապորեն ամրակցված են: Ուսումնասիրվում է շերտավոր օրթոտրոպ ուղղանկյուն սալի կայունություն խնդիրներ, երբ սալի բոլոր կողմերը հողակապորեն ամրացված են և երբ սալի երկու հանդիպակաց կողմերը հողակապային պայմաններում են, իսկ մյուս երկուսը՝ կամայան: Դիտարկված են սալի տատանումների և կայունության խնդիրները ընդլայնական սահքերի հաշվառումով: Լուծված է նաև սալի դինամիկական կայունության և ծռման խնդիրը:

Չորրորդ գլխում նախ սեղմ շարադրված են բազմաշերտ սալերի տեսության ընդհանուր դրույթներ և բերված են տեսության հիմնական սահմանումները և լուծման եղանակների նկարագրությունները: Դիտարկված են մանրաթելերից լցանյութի հիմքի վրա պատրաստված շերտավոր կոմպոզիցիոն սալերի կայունության, ազատ տատանումների և օպտիմալ կառավարման խնդիրները: Ուսումնասիրված է բազմաշերտ կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված սալերի օպտիմալ կառավարման խնդիրը սալի ճկվածքային տատանումների համար սալի մակերևույթին նորմալ կիրառված փոփոխական բեռի ազդեցության տակ: Դիտարկված է թվային օրինակ, լուծման արդյունքները պատկերված են գրաֆիկների տեսքով:

Հեղինակը իր խորին շնորհակալությունն է հայտնում գիտական ղեկավար տեխ. գիտ. դոկտոր., պրոֆ. Լ.Ա. Մովսիսյանին մեծ օգնության և աջակցության համար, ակադեմիկոսներ Վ.Ս. Սարգսյանին և Լ.Ա. Աղալովյանին, պրոֆ. Ա.Մ.Խաչատրյանին, պրոֆ. Ս.Վ. Սարգսյանին, դոց. Բ.Պ. Գեղամյանին՝ արժեքավոր դիտողություններ համար:

ԳԼՈՒԽ ԱՌԱՋԻՆ
ՄԱԼԵՐԻ ԶԱՆԳՎԱԾՆԵՐԻ ՆՎԱԶԵՑՄԱՆ ՕՊՏԻՄԱԼ
ՆԱԽԱԳԾՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ժամանակակից դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկայի կարևորագույն խնդիրներից են կառուցվածքների օպտիմալ նախագծման խնդիրները: Այդ խնդիրների կարևորությունը և արդիականությունը պայմանավորված են ինչպես այդ խնդիրների կիրառական նշանակությամբ, այնպես էլ՝ դրանց գիտական-տեսական հետաքրքրությամբ:

Այս գլխում ուսումնասիրված են հետևյալ խնդիրները՝

Ուղղանկյուն սալի կայնության խնդիրը կամայական բաշխված ճիգերի դեպքում:

Բազմաշերտ կոմպոզիցիոն առաձգամածուցիկ սալի կայունության խնդիրը:

Ուղղանկյուն սալի և շերտավոր սալի կայնության խնդիրները ընդլայնական սահքերի հաշվառումով:

Ուսումնասիրվում է նաև եռաշերտ անիզոտրոպ անհամասեռ սալի օպտիմալ նախագծման խնդիրը:

1.1. Ուղղանկյուն սալի կայունության խնդիրը

Դիտարկենք ուղղանկյուն սալի կայունության խնդիրը կամայական բաշխված ճիգերի դեպքում, երկու եզրային պայմանների համար: Կայունության հավասարումը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + p(y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (1.1)$$

որտեղ՝ $D_{ij} = B_{ij} \frac{h^3}{12}$, անիզոտրոպ սալի կոշտություններն են [44, 45]

ա) Հողակապային եզրային պայմաններ

$$w = 0, \quad M_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \text{երբ } x = 0, \quad x = a$$

$$w = 0, \quad M_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \text{երբ } y = 0, \quad y = b$$

Հողակապային եզրային պայմանների դեպքում w ճկվածքը փնտրենք

$$w = \sin \lambda_m x \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \mu_n y \quad (1.2)$$

որտեղ՝ $\lambda_m = \frac{m\pi}{a}$, $\mu_n = \frac{n\pi}{b}$:

$p(y)$ - ֆունկցիան ներկայացնենք շարքի տեսքով՝

$$p(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \mu_k y, \quad \mu_k = \frac{k\pi}{b} \quad (1.3)$$

(1.2) և (1.3) տեղադրելով (1.1) մեջ կատանանք անվերջ հավասարումների համակարգ՝

$$Q_{mn} f_n - \frac{1}{2} \lambda_m^2 [(2a_0 - a_{2n}) f_n + \sum_{q=0}^{n-1} (a_{n-q} - a_{n+q}) f_q + \sum_{q=n+1}^{\infty} (a_{n-q} - a_{n+q}) f_q] = 0 \quad (1.4)$$

որտեղ՝

$$Q_{mn} = D_{11} \lambda_m^4 + 2(D_{12} - 2D_{66}) \lambda_m^2 \mu_n^2 + D_{22} \mu_n^4, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Փնտրվող ճիգերի կրիտիկական արժեքները որոշվում է (1.4) համակարգի լուծելության՝ դետերմինանտի զերո լինելու պայմանից:

բ) Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ $x = 0, x = a$ երկու եզրերը հողակապային են, իսկ մյուս երկուսի վրա տրված են հետևյալ եզրային պայմանները՝

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \quad \text{երբ } y=0 \text{ և } y=b \quad (1.5)$$

Վերջին պայմանը ճիգի զերո լինելու պայման է:

Այս դեպքում ճկվածքը փնտրենք

$$w = \sin \lambda_m x \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos \mu_n y \quad (1.6)$$

տեսքով:

Այս դեպքում անվերջ համակարգը կլինի

$$D_{11} \lambda_m^4 f_0 + a_0 f_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k = 0 \quad (1.7)$$

$$\Omega_{mn} f_n - \frac{1}{2} \lambda_m^2 [2a_0 f_0 (2a_0 + a_{2n}) f_n + \sum_{q=0}^{n-1} (a_{n-q} + a_{n+q}) f_q + \sum_{q=n+1}^{\infty} (a_{q-n} - a_{n+q}) f_q] = 0$$

(1.4) և (1.7) բանաձևերից երևում է, որ, երբ սեղմող ճիգը հաստատուն է

$p = a_0 \neq 0$, $a_n = 0$, երկու խնդիրներն էլ նույն կրիտիկական արժեքներն են տալիս:

Դիտարկենք եզրերում ճիգերի բաշխման երկու մասնավոր դեպք.

1) $p(y)$ ֆունկցիան տրված է

$$p(y) = p_0 \left[1 - \frac{(2y-b)^2}{b^2} \right] \quad (1.8)$$

պարաբոլական տեսքով: Այդ դեպքում համապատասխան գործակիցները կլինեն՝

$$a_0 = \frac{2}{3} p_0, \quad a_n = -p_0 \frac{8}{n^2 \pi^2} [1 + (-1)^n]$$

2) $p(y)$ ֆունկցիան տրված է

$$p(y) = p_0 \frac{(2y-b)^2}{b^2} \quad (1.9)$$

պարաբոլական տեսքով: Այս դեպքում համապատասխան գործակիցները կլինեն՝

$$a_0 = \frac{1}{3} p_0, \quad a_n = p_0 \frac{8}{n^2 \pi^2} [1 + (-1)^n]$$

1.2. Բազմաշերտ առաձգամածուցիկ սալի կայունության մասին

Շատ կոմպոզիտների թելերը օժտված են լինում առաձգական հասկություններով, մինչդեռ կապակցող նյութը՝ սոսինձը, առաձգամածուցիկ է:

Այդպիսի նյութերի համար դեֆորմացիա-լարում կապն ունի այսպիսի տեսք՝ [45].

$$\sigma_x = A_{11} \varepsilon_x + A_{12} \varepsilon_y, \quad \sigma_y = A_{12} \varepsilon_x + A_{22} \varepsilon_y, \quad \sigma_{xy} = \tilde{A}_{66} \varepsilon_{xy} \quad (2.1)$$

Այսինքն, միայն սահքի լարման և դեֆորմացիայի կապի մեջ է հանդես գալիս մածուցիկության առկայությունը: Մենք ընդունելու ենք, որ այդ կապը ունի այսպիսի տեսք

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{66} f &= A_{66} (A - \Gamma^*) f \\ \Gamma^* &= D \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f(\tau) d\tau, \quad D = \left(1 - \frac{A_{66}^\infty}{A_{66}} \right) \alpha \end{aligned} \quad (2.2)$$

Այստեղ α^{-1} -ը ռելակսացիայի ժամանակն է, $A_{66}^\infty = \tilde{A}_{66}(t \rightarrow \infty)$: Այսինքն ընդունում ենք տիպիկ նյութի մոդելը:

Կոորդինատական հարթության նկատմամբ սիմետրիկ հավաքած բազմաշերտ սալի համար [114], եթե շերտերը դասավորենք այնպես, որ $D_{16} = D_{26} = 0$, այսինքն

$$\sum_{k=1}^n K(k) \sin 2\varphi_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n K(k) \sin 4\varphi_k = 0 \quad (2.3)$$

$$K(k) = 3k(k-1) + 1$$

ապա մոմենտների արտահայտությունների համար կունենանք

$$\begin{aligned}
M_k &= D_{11}\chi_1 + D_{12}\chi_2 - D_1\Gamma^*(\chi_1 - \chi_2)\chi \\
M_k &= D_{12}\chi_1 + D_{22}\chi_2 - D_1\Gamma^*(\chi_2 - \chi_1) \\
M_{xy} &= D_{66}\chi_{12} + (D_1 + D_2)\Gamma^*\chi_{12}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Այստեղ D_{ij} կոշտությունները որոշվում են հայտնի բանաձևերով, իսկ D_1 -ը և D_2 -ը՝

$$\begin{aligned}
D_1 &= \frac{h^3}{3} A_{66} \sum_{k=1}^n K(k)(1 - \cos 4\varphi_k) \\
D_2 &= \frac{2h^3}{3} A_{66} n^3
\end{aligned} \tag{2.5}$$

բանաձևերով:

$$\text{Դիտարկելու ենք այն դեպքը, երբ } A_{11} = A_{22}$$

Ուղղանկյան երկու կողմերից հավասարաչափ սեղմող p ճիգերի դեպքում կայունության հավասարումը ունի այս տեսքը՝

$$\begin{aligned}
D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \\
-D_1 \Gamma^* \Delta^2 w - 2D_2 \Gamma^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\
\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Ազատ հենված ուղղանկյուն սալի համար վերցնելով

$$w = f_{mn}(t) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{b} \tag{2.7}$$

(2.6)-ից, նկատի ունենալով (2.2)-ը, կստանանք

$$Q_{mn} f_{mn} - R_{mn} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f_{mn}(\tau) d\tau = 0 \tag{2.8}$$

որտեղ

$$\begin{aligned}
Q_{mn} &= D_{11}\lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda_m^2\mu_n^2 + D_{22}\mu_n^4 - P\lambda_n^2, \\
R_{mn} &= D_1 D(\lambda_m^2 + \mu_n^2) + 2D_2 D\lambda_m^2\mu_n^2
\end{aligned}$$

(2.8) ինտեգրալ հավասարումը բերվում է հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարմանը

$$Q_{mn} f'_{mn} + \alpha \left(Q_{mn} - \frac{1}{\alpha} R_{mn} \right) f_{mn} = 0 \tag{2.9}$$

Նկատի ունենանք, որ ամեն մի m -ի և n -ի համար f_{mn} -ի նկատմամբ կունենանք տարբեր հավասարումներ:

$$f_{mn}(0) = f_{mn}^{(0)}, \text{ երբ } t = 0$$

նախնական պայմանի դեպքում՝

$$f_{mn}(t) = f_{mn}^{(0)} \exp\left[-\frac{\alpha Q_{mn} - R_{mn}}{Q_{mn}}\right] t \quad (2.10)$$

Ինչպես հայտնի է [114]

$$Q_{mn} = 0 \quad (2.11)$$

պայմանից կստանանք ակնթարթային կրիտիկական ճիգը, իսկ

$$Q_{mn} - \frac{1}{\alpha} R_{mn} = 0 \quad (2.12)$$

պայմանից՝ երկարատև կրիտիկական ճիգը:

Ամեն մի $\frac{a}{b}$ և $\frac{D_{11}}{D_{22}}$ հարաբերությունների համար կարելի է որոշել

համապատասխան կրիտիկական ճիգը [44, 106].

Այստեղ, բավարարվենք պարզագույն դեպքով, երբ $a = b$, $D_{11} = D_{22}$: Այս դեպքում ակնթարթային ճիգը կլինի

$$P_{\text{кр}}^{\text{M}} = A(D_{11} + D_{12} + 2D_{66}), A = \frac{2\pi^2}{\alpha^2} \quad (2.13)$$

Իսկ երկարատև՝

$$P_{\text{кр}}^{(A)} = P_{\text{кр}}^{(M)} - \frac{A}{\alpha}(2D_1 + D_2)D \quad (2.14)$$

Բնական է, երկարատև ճիգի փոքրացումը այնքան էլ շատ չէ, որովհետև միայն մի գործակից \tilde{A}_{66} է փոփոխվում կախված ժամանակից և ինչքան մեծ է A_{66}^{∞} , այնքան էլ մեծ է $P_{\text{кр}}^{(M)}$ և $P_{\text{кр}}^{(A)}$ միջև եղած տարբերությունը:

Բնական է, որ շերտերի տարբեր դասավորվածությունների դեպքում տարբեր են ստացվում կրիտիկական ճիգերը: Ցույց տանք դա երկու դեպքերի համար: Բերված գործակիցների համար [113, 114] ունենք

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{11}^{(k)} &= \tilde{A} + \tilde{C} \cos^2 2\varphi_k, \quad \tilde{B}_3^{(k)} = \tilde{D} - 3\tilde{C} \cos^2 2\varphi_k \\ \tilde{A} &= \frac{1}{2}(A_{11} + \tilde{A}_3), \quad \tilde{C} = \frac{1}{2}(A_{11} - \tilde{A}_3), \\ \tilde{D} &= \frac{1}{2}(3A_{11} - \tilde{A}_3), \quad \tilde{A}_3 = A_{12} + 2\tilde{A}_{66}\end{aligned}\tag{2.15}$$

Նկատի ունենալ որ

$$\tilde{D}_{ij} = \frac{2}{3}h^3 \sum_{k=1}^n K(k) B_{ij}^{(n)}$$

(2.12) ակնթարթային կրիտիկական ճիգի համար կունենանք

$$P_{\text{кр}}^{(M)} = \frac{2}{3}h^3 \cdot n^3 A \begin{cases} A_{11} + A_3, \text{ երբ } \varphi_k = 0 \\ 2A_{11}, \text{ երբ } \varphi_k = \frac{\pi}{4} \end{cases}\tag{2.16}$$

$$\text{Այստեղ } A = 2 \frac{\pi^2}{a^2}$$

Երկարատև կրիտիկական ճիգի համար համապատասխանաբար կունենանք

$$P_{\text{кр}}^{(A)} = P_{\text{кр}}^{(M)} - \begin{cases} AD_2 \cdot N \\ 3AD_2 \cdot N, N = 1 - \frac{A_{66}^\infty}{A_{66}} \end{cases}\tag{2.17}$$

1.3. Ընդլայնական սահքերի հաշվառում

Ինչպես հայտնի է շերտավոր կոմպոզիտների ամենախոցելի տեղը շերտերի միջև կապն է, երբ դեֆորմացիայի ժամանակ շերտերն անջատվում են իրարից: Այդ պատճառով էլ դասական տեսության փոխարեն ընդունվում է ճշգրտված տեսություն՝ ընդլայնական սահքերի հաշվառումով: Պարզագույն և ընդունված մոդելը հետևյալն է

$$u_x = u + z\varphi, \quad u_y = v + z\psi, \quad u_z = w\tag{3.1}$$

Այսպիսի դրվածքով սալի ճիգերը և մոմենտները արդեն կունենան հետևյալ տեսքը

$$T_x = C_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad T_y = C_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{22} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad T_{xy} = C_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)\tag{3.2}$$

$$M_x = D_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad M_y = D_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad M_{xy} = D_{66} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)\tag{3.3}$$

$$N_x = 2nhA_{44} \left(\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad C_{44} = 2nhA_{44}, \quad N_y = 2nhA_{55} \left(\psi + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad C_{55} = 2nhA_{55}$$

Այստեղ արդեն ընդունված է, որ բացի $D_{16} = D_{26} = 0$ ունենք նաև $C_{16} = C_{26} = 0$,
 $C_{ij} = 2h \sum_{k=1}^n B_{ij}^{(k)}$

Գիտարկելու ենք երկու խնդիր [90]:

Առաջինը դա ուղղանկյուն սալի կայունության խնդիրն է, երբ երկու հանդիպակաձ կողմերի վրա ազդում են հավասարաչափ բաշխված p ճիգեր:

Կրիտիկական ճիգն այս դեպքում կորոշվի հետևյալ համակարգից՝

$$\begin{aligned} D_{44} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + D_{55} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - p \frac{\partial^2 w}{\partial x} &= 0 \\ D_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= D_{44} \left(\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= D_{55} \left(\psi + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Սովորական հողակապի անալոգ պայմանները կլինեն՝

$$\begin{aligned} w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \text{երբ } x = 0 \text{ և } x = a \\ w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \text{երբ } y = 0 \text{ և } y = b \end{aligned} \quad (3.5)$$

Այդ պայմաններին բավարարող փնտրվող ֆունկցիաների համար կունենանք՝

$$\begin{aligned} w &= w_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \\ \varphi &= \varphi_{mn} \cos \lambda_m x \sin \mu_n y \\ \psi &= \psi_{mn} \sin \lambda_m x \cos \mu_n y, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{b} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Որոշակի a և b հարաբերությունների համար կրիտիկական ճիգը կորոշվի հետևյալ բանաձևից

$$p \lambda_m^2 = D_{44} \lambda^2 + D_{55} \mu^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad (3.7)$$

որտեղ՝

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 2C_{44} C_{55} \lambda_m^2 \mu_n^2 + (D_{12} + D_{66}) - C_{44}^2 \lambda_m^2 (D_{22} \mu_n^2 + D_{66} \lambda_m^2 + C_{55}) - \\ &- D_{55}^2 \mu_n^2 (D_{11} \lambda_m^2 + D_{66} \mu_n^2 + D_{44}) \\ \Delta &= D_{11} D_{66} \lambda_m^4 + D_{22} D_{66} \mu_n^4 - (D_{11} D_{22} - D_{12}^2 - 2D_{12} D_{66}) \lambda_m^2 \mu_n^2 + C_{44} (D_{22} \mu_n^2 + D_{66} \lambda_m^2) + \\ &+ C_{55} (D_{11} \lambda_m^2 + D_{66} \mu_n^2) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Պարզագույն լուծում ստացվում է միաչափ (զլանային ծուման) խնդրի համար՝

$$C_{44} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.9)$$

$$D_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = C_{44} \left(\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

Գիտարկված եզրային պայմանների համար կրիտիկական ճիգը այս դեպքում կլինի

$$p_{kp} = D_{11} \lambda_1^2 \left(1 - \frac{D_{11}}{C_{44}} \lambda_1^2 \right) \quad (3.10)$$

Այստեղից էլ երևում է, որ երբ $C_{44} \rightarrow \infty$ ստանում ենք դասական $p_{kp} = D_{11} \lambda_1^2$ արդյունքը և որ *ընդլայնական սահքերի հաշվառումը բերում է կրիտիկական ճիգի փոքրացմանը*:

Եթե դիտարկված խնդրում նախնական վիճակը հարթ լարվածայինն է, ապա այստեղ դիտարկենք խնդիր, երբ նախնական վիճակը մոմենտային է: Մասնավորապես, դիտարկենք շերտավոր սալի կայունության խնդիրը, երբ նրա արտաքին հարթությունների վրա ազդում են հակադարձ ուղղված S ինտենսիվության լարումներ [91,113]: Այս դեպքում նախնական վիճակից եկած միակ ճիգը կլինի ընդլայնական

$$N_1^0 = S \cdot H \quad , \quad H = 2nh \quad (3.11)$$

և կայունության հավասարումները կունենան հետևյալ տեսքը

$$C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + SH = 0$$

$$(C_{11} + C_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + SH = 0$$

$$C_{44} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + C_{55} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3.12)$$

$$SH \frac{\partial u}{\partial x} + C_{44} \left(\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - D_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - D_{66} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0$$

$$SH \frac{\partial v}{\partial x} + C_{55} \left(\psi + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - D_{66} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

Ազատ հենված սալի համար՝

$$u = u_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y$$

$$v = v_{mn} \cos \lambda_m x \sin \mu_n y$$

$$w = w_{mn} \sin \lambda_m x \cos \mu_n y$$

$$\varphi = \varphi_{mn} \cos \lambda_m x \sin \mu_n y$$

$$\psi = \psi_{mn} \sin \lambda_m x \cos \mu_n y$$

(3.13)

Կրիտիկական ճիգը կորոշվի հետևյալ պայմանից

$$\det \|a_{ij}\| = 0 \quad (3.14)$$

որտեղ՝

$$\begin{aligned} a_{11} &= -C_{11}\lambda^2 - C_{66}\mu^2, & a_{12} &= a_{21} = (C_{12} + C_{66})\lambda^2\mu^2 \\ a_{41} &= a_{14} = -SH = -a_{25} = -a_{52}, & a_{22} &= -C_{22}\mu^2 - C_{66}\lambda^2 \\ a_{33} &= -C_{55}\mu^2 - C_{44}\lambda^2, & a_{43} &= a_{34} = -C_{44}\lambda \\ a_{35} &= a_{55} = -C_{55}\mu, & a_{44} &= -(C_{44} + D_{11}\lambda^2 + D_{66}\mu^2) \\ a_{45} &= a_{54} = (D_{12} + D_{66})\lambda\mu, & a_{55} &= -(C_{55} + D_{66}\lambda^2 - D_{22}\mu^2) \end{aligned}$$

Մնացած a_{ij} գործակիցները հավասար են զերոյի և վերջին արտահայտություններում, համառոտության համար, λ և μ մեծություններին ինդեքս չի դրվել:

Ինչպես նախորդ խնդրում, դիտարկենք գլանային ծոման դեպքը՝

$$\begin{aligned} C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + SH \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0 \\ C_{44} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) &= 0 \\ SH \frac{\partial u}{\partial x} + C_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi \right) - D_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Կրիտիկական ճիգը կվորոշվի հետևյալ բանաձևով

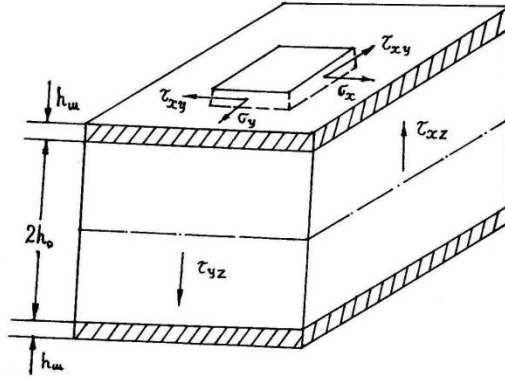
$$Sh = \pm \sqrt{C_{11} D_{11}} \lambda_1 \quad (3.16)$$

Փաստորեն միաչափ խնդրում ընդլայնական սահքերի հաշվառումը չի փոխում կրիտիկական ճիգի դասականի արժեքը:

1.4. Անիզոտրոպ անհամասեռ սալերի օպտիմալ նախագծման խնդիրներ:

1.4.1. Եռաշերտ սալերի հիմնական առնչությունները: Դիցուք ունենք եռաշերտ սալ, որի արտաքին շերտերը սիմետրիկ ձևով են դասավորված միջին շերտի նկատմամբ [88,101]: Միջին շերտն ունի $2h_0 = \text{const}$ հաստություն, իսկ արտաքին շերտերի $h_w(x, y)$ հաստությունը կախված է սալի միջին հարթության կետերից, ընդ որում $h_w \ll h_0$: Ենթադրվում է, որ սալի վրա ազդող ծռող ուժերը դիմակայվում են գլխավորապես արտաքին շերտերի կողմից, և նրանցում գործում են ծոման լարումները $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$,

լարման թենզորի մյուս բաղադրիչներն արհամարելիորեն փոքր են: Իսկ միջին շերտը հիմնականում ծառայում է այն բանին, որ արտաքին շերտերն իրար չմոտենան, և այդ շերտում էական են լարումների թենզորի միայն τ_{xz} , τ_{yz} բաղադրիչները (նկ. 4-1)



Նկ. 4-1

Կոնիտարկենք ընդանուր դեպք, երբ սալի արտաքին շերտերը պատրաստված են անիզոտրոպ համասեռ նյութից, և սալի արտաքին շերտերի ամեն մի կետում անցնում է առանձգական սիմետրիայի հարթություն, որը զուգահեռ է սալի միջին հարթությանը: Սալում առաջանում են [8]

$$\begin{aligned}
 M_x &= - \left(D_{11} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x \partial y} \right) \\
 M_y &= - \left(D_{12} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x \partial y} \right) \\
 M_{xy} &= D_{16} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x \partial y}
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

մոմենտները, որոնք պետք է բավարարեն

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q
 \tag{4.2}$$

հավասարակշռության հավասարմանը:

(4.1) առնչություններում մասնակցում են D_{ij} ծոման կոշտության գործակիցները, որոնք եռաշերտ սալերի համար վերը կատարված ընդունելությունների շնորհիվ

առաձգականության $B_{ij} = const$ գործակիցների և h_0, h_w հաստությունների հետ կապված են հետևյալ ձևով.

$$D_{ij}(x, y) = 2B_{ij}h_0^2h_w(x, y) \quad (4.3)$$

(4.2) հավասարման մեջ տեղադրելով (4.1) առնչությունները և վերցնելով որպես q արտաքին ուժ

$$q = -2(\rho_0h_0 + \rho_w h_w) \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial t^2}$$

իներցիոն ուժը (ρ_w, ρ_0 հաստատուններն իրենցից ներկայացնում են սալի արտաքին և միջին շերտերի նյութերի խտությունը), կատանանք սալի ազատ տատանումները նկարագրող հավասարումը.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (D_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}) + 2 \frac{\partial}{\partial x \partial y} (D_{16} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (D_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}) = 2(\rho_0h_0 + \rho_w h_w) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (4.4)$$

Այստեղ սալի ճկվածքը բնութագրող $W(x, y)$ և $\bar{W}(x, y, t)$ ֆունկցիաները կապված են $\bar{W}(x, y, t) = W(x, y) \cdot F(t)$ (4.5) օրենքով:

Դարձյալ ելնելով սալի տատանումների կայունությունից և այն հանգամանքից, որ սալի դեֆորմացիայի ընթացքում էներգիայի ցրում տեղի չի ունենում, ստանում ենք $F(t) = \sin \omega t$, այսինքն սալը կատարում է ω հաճախությամբ հարմոնիկ տատանումներ:

$h_w(x, y) = h_w^0$ հաստատուն հաստությամբ սալը կանվանենք տիպային սալ: Տարբեր եզրային պայմանների դեպքում կարելի է որոշել տիպային սալի ազատ տատանումների հիմնական հաճախությունը: Դիտարկենք եզրերով հողակակապորեն ամրացված ուղղանկյուն սալ.

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \text{երբ } x = 0, \quad x = a$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \text{երբ } y = 0, \quad y = b \quad (4.6)$$

Ոչ օրթոտրոպ սալերի համար, երբ $B_{16}^2 + B_{26}^2 \neq 0$, ազատ տատանումների հիմնական հաճախության որոշումը կապված է որոշակի դժվարությունների հետ, որի պաճառով կիրառվում են թվային կամ այլ մոտավոր եղանակներ: Նշենք, որ այդ

հարցում լավ արդյունք է ստացվում, երբ կիրարկվում է փոքր պարամետրի եղանակը, վերցնելով որպես փոքր պարամետր $\mu_i = \frac{B_{i6}}{\sqrt{B_{ii}B_{66}}} < 1$ ($i = 1,2$) հարաբերությունները:

Օրթոտրոպ սալերի համար $B_{16} = B_{26} = 0$, ստացվում է

$$\omega_0^2 = \frac{\pi^4 h_0^2 h_w^0}{h_0 \rho_0 + h_w \rho_w} \left[\frac{B_{11}}{a^4} + \frac{2(B_{12} + 2B_{66})}{a^2 b^2} + \frac{B_{22}}{b^4} \right] \quad (4.7)$$

Մասնավորաբար, իզոտրոպ սալերի դեպքում

$$\omega_0^2 = \pi^2 h_0 \sqrt{\frac{h_w}{h_0 \rho_0 + h_w \rho_w}} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$$

1.4.2. Եռաշերտ սալերի օպտիմալացման խնդիրը: Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը. գտնել եռաշերտ սալի այնպիսի h_w հաստություն, որի դեպքում սալի զանգվածն ստանում է ամենափոքր արժեք, իսկ ազատ տատանումների հիմնական հաճախության արժեքը համընկնումը է տիպային սալի ազատ տատանումների հիմնական հաճախության ω_0 արժեքի հետ: Սալի զանգվածի ամենափոքր արժեքը գտնելու խնդիրը համարժեք է

$$J = \int_0^a \int_0^b h_w(x, y) dx dy \quad (4.8)$$

ֆունկցիոնալի ամենափոքր արժեքը գտնելու խնդիրին, քանի որ h_0 , ρ_0 և ρ_w մեծությունները հաստատուններ են: Այսպես որ, պետք է գտնել $h_w(x, y)$ ֆունկցիա, որը բավարարում է (4.4), (4.6) եզրային խնդիրն, երբ $\omega = \omega_0$ և (4.8) ֆունկցիոնալին հաղորդում է ամենափոքր արժեք: h_w ֆունկցիային տանք δh_w աճ. այդ դպքում (4.4) հավասարումը կգրվի ըստ այդ աճերի և կստանա հետևյալ տեսքը:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} 2h_0^2(h_w + \delta h_w) \left[B_{11} \frac{\partial^2(W + \delta W)}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2(W + \delta W)}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2(W + \delta W)}{\partial x \partial y} \right] + 4 \frac{\partial}{\partial x \partial y} h_0^2(h_w + \\ & + \delta h_w) \left[B_{16} \frac{\partial^2(W + \delta W)}{\partial x^2} + B_{26} \frac{\partial^2(W + \delta W)}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2(W + \delta W)}{\partial x \partial y} \right] + 2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} h_0^2(h_w + \delta h_w) \times \\ & \times \left[B_{11} \frac{\partial^2(W + \delta W)}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2(W + \delta W)}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2(W + \delta W)}{\partial x \partial y} \right] = \\ & = 2(\rho_0 h_0 + \rho_w h_w + \rho_w \delta h_w) \frac{\partial^2(W + \delta W)}{\partial t^2} \end{aligned}$$

(4.9)

Հաշվի առնելով (4.4) հավասարումը և արհամարելով δh_w , δW աճերի երկրորդ կարգի փոքր մեծությունները, կստանանք:

$$\begin{aligned}
& 2B_{11}h_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} h_w \frac{\partial^2 \delta W}{\partial x^2} + 2B_{11}h_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta h_w \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2B_{12}h_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} h_w \frac{\partial^2 \delta W}{\partial y^2} + 2B_{12}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \delta h_w \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2B_{16}h_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\
& h_w \frac{\partial^2 \delta W}{\partial x \partial y} + 2B_{16}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \delta h_w \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + 4B_{16}h_0^2 \frac{\partial}{\partial x \partial y} h_w \frac{\partial^2 \delta W}{\partial x^2} + 4B_{16}h_0^2 \frac{\partial}{\partial x \partial y} \delta h_w \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 4B_{26}h_0^2 \frac{\partial}{\partial x \partial y} h_w \\
& \frac{\partial^2 \delta W}{\partial y^2} + 4B_{26}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \delta h_w \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 4B_{66}h_0^2 \frac{\partial}{\partial x \partial y} h_w \frac{\partial^2 \delta W}{\partial x \partial y} + 4B_{66}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \delta h_w \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + 2B_{12}h_0^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} h_w \frac{\partial^2 \delta W}{\partial x^2} \\
& + 2B_{12}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \delta h_w \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2B_{22}h_0^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} h_w \frac{\partial^2 \delta W}{\partial y^2} + 2B_{22}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \delta h_w \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2B_{26}h_0^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} h_w \frac{\partial^2 \delta W}{\partial x \partial y} + 2B_{26}h_0^2 \\
& \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \delta h_w \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - 2(\rho_0 h_0 + \rho_w h_w) \frac{\partial^2 \delta W}{\partial t^2} - \rho_w \delta h_w \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0
\end{aligned} \tag{4.10}$$

(4.8) նպատակի ֆունկցիոնալը նույնպես կստանա աճ:

$$\delta J = \int_0^a \int_0^b \delta h_w dx dy \tag{4.11}$$

(4.10) հավասարումը բազմապատկենք W_1 համալուծ ֆունկցիաներով; Ստացված արտահայտությունների գումարը ինտեգրենք 0 -ից a և 0 -ից b , որին էլ գումարենք (4.12) արտահայտությունը:

$$\begin{aligned}
& \int_0^a \int_0^b [[2B_{11}h_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} h_w \frac{\partial^2 \delta W}{\partial x^2} + 2B_{11}h_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta h_w \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2B_{12}h_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} h_w \frac{\partial^2 \delta W}{\partial y^2} + 2B_{12}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \delta h_w \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2B_{16}h_0^2 \\
& \frac{\partial^2}{\partial x^2} h_w \frac{\partial^2 \delta W}{\partial x \partial y} + 2B_{16}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \delta h_w \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + 4B_{16}h_0^2 \frac{\partial}{\partial x \partial y} h_w \frac{\partial^2 \delta W}{\partial x^2} + 4B_{16}h_0^2 \frac{\partial}{\partial x \partial y} \delta h_w \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 4B_{26}h_0^2 \frac{\partial}{\partial x \partial y} h_w \\
& \frac{\partial^2 \delta W}{\partial y^2} + 4B_{26}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \delta h_w \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 4B_{66}h_0^2 \frac{\partial}{\partial x \partial y} h_w \frac{\partial^2 \delta W}{\partial x \partial y} + 4B_{66}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \delta h_w \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + 2B_{12}h_0^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} h_w \frac{\partial^2 \delta W}{\partial x^2} \\
& + 2B_{12}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \delta h_w \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2B_{22}h_0^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} h_w \frac{\partial^2 \delta W}{\partial y^2} + 2B_{22}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \delta h_w \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2B_{26}h_0^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} h_w \frac{\partial^2 \delta W}{\partial x \partial y} + 2B_{26}h_0^2 \\
& \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \delta h_w \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - 2(\rho_0 h_0 + \rho_w h_w) \frac{\partial^2 \delta W}{\partial t^2} - \rho_w \delta h_w \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}] W_1 + \delta h_w] dx dy
\end{aligned} \tag{4.12}$$

(4.12) ինտեգրալում կատարենք մասերով ինտեգրում, որպեսզի ազատվենք h_w , δW աճերի ածանցյալներից: Ստացված ինտեգրալտակ արտահայտությունում կատարենք խմբավորում ըստ δh_w , δW աճերի:

Ինտեգրալից դուրս եղած աճերի մի մասը տրված (4.8) եզրային պայմաններին՝ որոնք նույնպես գրված են աճերով: Ինտեգրալից դուրս մնացած արտահայտությունները կբավարարեն մեր ուզած պայմաններին, որոնք կհանդիսանան որպես եզրային պայմաններ W_1 համալուծ ֆունկցիաների համար:

Այսպիսով (4.12) ինտեգրալը կունենա հետևյալ տեսքը:

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_0^b \left[2B_{11}h_0^2 \delta W \frac{\partial^2}{\partial x^2} h_w \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + 2B_{11}h_0^2 \delta h_w \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + 2B_{12}h_0^2 \delta W \frac{\partial^2}{\partial x^2} h_w \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} + 2B_{12}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \delta h_w \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} + \right. \\ & 2B_{16}h_0^2 \delta W \frac{\partial^2}{\partial x^2} h_w \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} + 2B_{16}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \delta h_w \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} + 4B_{16}h_0^2 \delta W \frac{\partial}{\partial x \partial y} h_w \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + 4B_{16}h_0^2 \frac{\partial}{\partial x \partial y} \delta h_w \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + 4B_{26}h_0^2 \\ & \delta W \frac{\partial}{\partial x \partial y} h_w \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} + 4B_{26}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \delta h_w \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} + 4B_{66}h_0^2 \delta W \frac{\partial}{\partial x \partial y} h_w \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} + 4B_{66}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \delta h_w \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} + 2B_{12}h_0^2 \delta W \\ & \frac{\partial^2}{\partial y^2} h_w \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + 2B_{12}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \delta h_w \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + 2B_{22}h_0^2 \delta W \frac{\partial^2}{\partial y^2} h_w \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} + 2B_{22}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \delta h_w \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} + 2B_{26}h_0^2 \delta W \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ & \left. h_w \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} + 2B_{26}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \delta h_w \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} - 2h_0 \rho_0 \delta W \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} - 2h_w \rho_w \delta W \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} - 2\rho_w W \delta h_w \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} \right] dx dy \end{aligned} \quad (4.13)$$

(4.13) ինտեգրալատակ արտահայտությունում կատարենք խմբավորում ըստ δW աճերի, պահանջենք որ δW աճերի գործակիցները հավասար լինեն $\mathbf{0}$ -ի: Դա հնարավոր է, քանի որ W_1 ֆունկցիաները որևէ սահմանափակման չի բավարարում և այժմ պահանջվում ենք, որ դրանք բավարարեն վերը նշված հավասարումներին:

$$\begin{aligned} & 2B_{11}h_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} h_w \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + 2B_{12}h_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} h_w \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} + 2B_{16}h_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} h_w \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} + 4B_{16}h_0^2 \frac{\partial}{\partial x \partial y} h_w \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + 4B_{26}h_0^2 \\ & \frac{\partial}{\partial x \partial y} h_w \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} + 4B_{66}h_0^2 \frac{\partial}{\partial x \partial y} h_w \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} + 2B_{12}h_0^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} h_w \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + 2B_{22}h_0^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} h_w \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} + 2B_{26}h_0^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ & h_w \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} - 2h_0 \rho_0 \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} - 2h_w \rho_w \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Այս դեպքում δh_w գործակիցը պետք է լինի $\mathbf{0}$, քանի որ $\delta J = \mathbf{0}$ կամայական δh_w դեպքում:

$$\begin{aligned}
& 2B_{11}h_0^2\delta h_w \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + 2B_{12}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} + 2B_{16}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} + 4B_{16}h_0^2 \frac{\partial}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + 4B_{26}h_0^2 \\
& \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} + 4B_{66}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} + 2B_{12}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + 2B_{22}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} + 2B_{26}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} - \\
& 2\rho_w W \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} = 0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

(4.4) և (4.15) համագարկերի նմանությունից ելնելով, կարող ենք ասել, որ

$$W_1 = WC \tag{4.16}$$

(4.16) հավասարությունները տեղատրենք (4.15) հավասարման մեջ, կստանանք:

$$\begin{aligned}
& 2B_{11}h_0^2\delta h_w \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (WC)}{\partial x^2} + 2B_{12}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (WC)}{\partial y^2} + 2B_{16}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (WC)}{\partial x \partial y} + 4B_{16}h_0^2 \frac{\partial}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (WC)}{\partial x^2} + \\
& 4B_{26}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (WC)}{\partial y^2} + 4B_{66}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (WC)}{\partial x \partial y} + 2B_{12}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (WC)}{\partial x^2} + 2B_{22}h_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (WC)}{\partial y^2} + 2B_{26}h_0^2 \\
& \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (WC)}{\partial x \partial y} - 2\rho_w W \frac{\partial^2 (WC)}{\partial t^2} = 0
\end{aligned} \tag{4.17}$$

(4.17) հավասարումը (4.4) հավասարումների համագարկի հետ միասին կազմում են փակ համագարկ W , h_w անհայտ ֆունկցիաների նկատմամբ: Լուծելով այս հավասարումների համակարգը, հաշվի առնելով համապատասխան (4.6) եզրային պայմանները, կստանանք տեղափոխության W և սալի հաստությունը նկարակրող h ֆունկցիան: Այդ հավասարումն սկզբնական նշանակումներով կներկայացվի հետևյալ ձևով.

$$\begin{aligned}
& B_{11} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + 2B_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + B_{22} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 4B_{66} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 + 4B_{16} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 4B_{26} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \\
& = C + \frac{\omega_0^2}{h_0^2} \cdot \rho_w \cdot W^2
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Այսպիսով, ստացանք եռաշերտ սալի համար օպտիմալության անհրաժեշտ պայման, որը կախված չէ դեկավարման h_w ֆունկցիայից: (4.18) հավասարումից ստացվում է օպտիմալ սալի ճկվածքի $W(x, y)$ ֆունկցիան, որը պետք է բավարարի նաև (4.6) եզրային պայմանին: Ունենալով $W(x, y)$ ֆունկցիան, (4.4) հավասարումից կորոշենք սալի արտաքին շերտերի օպտիմալ $h_w(x, y)$ հաստությունը:

Բազմաշերտ սալի շերտերը դասավորենք այնպես, որ $D_{16} = D_{26} = 0$, այդ դեպքում սալի տատանումների հավասարումը և պայմանները կլինեն:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2N\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad 2N\rho h = Q \quad (4.19)$$

$$M_x = D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad x = 0, x = a, w = M_x = 0$$

$$M_y = D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad y = 0, y = b, w = M_y = 0$$

$$w = f_{mn} \sin \lambda_m x + \sin \mu_n y$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(D_{66} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(D_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = \\ & = 2(\rho_0 h_0 + \rho_w h_w) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$\omega_{mn} = \frac{1}{Q} (D_{11} \lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_m^2 \mu_n^2 + D_{22} \mu_n^4)$$

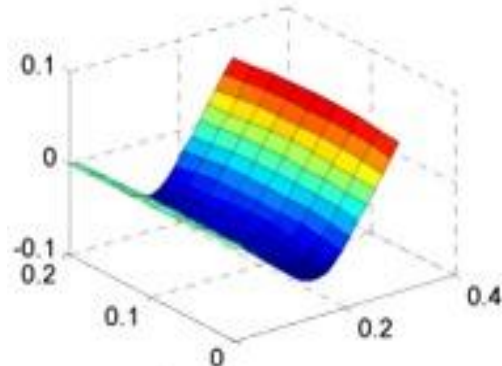
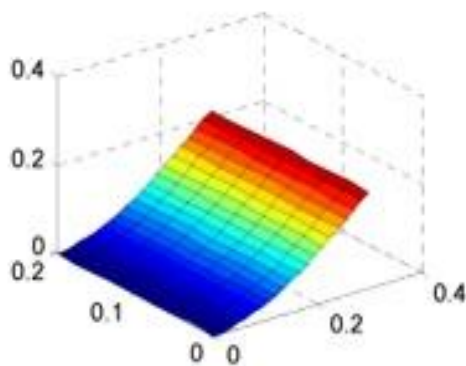
$$D_{16} = D_{26} = 0, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{b}$$

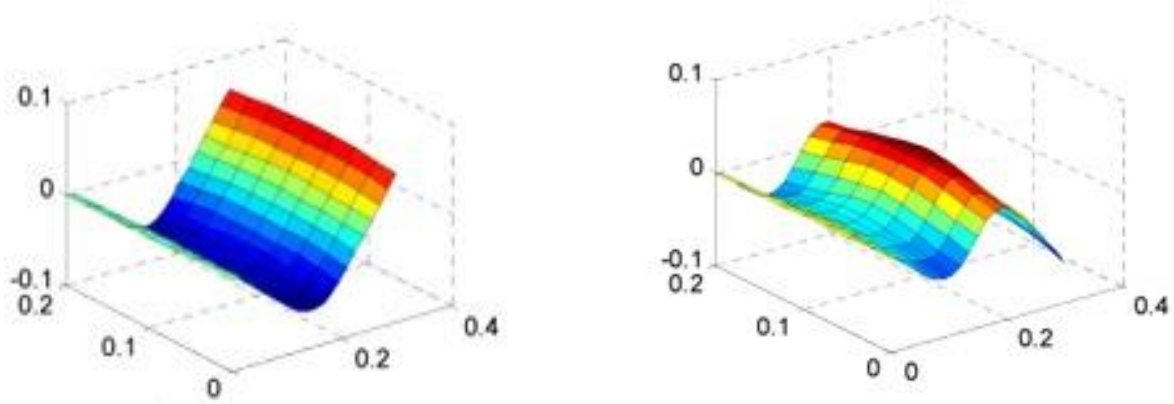
1.4.3. Օպտիմալության խնդրի թվային հաշվարկը մաթլաբ ծրագրի միջոցով:

(4.19) և (4.18) հավասարումները լուծված են մաթլաբ ծրագրի միջոցով:

Հաշվարկը կատարվել է $a = b$ երկարությամբ կողմերով քառակուսային սալի համար: Միջին շերտը պատրաստված է այլումինից, արտաքին շերտերը՝ մեկ այլ տեեսակի այլումինից:

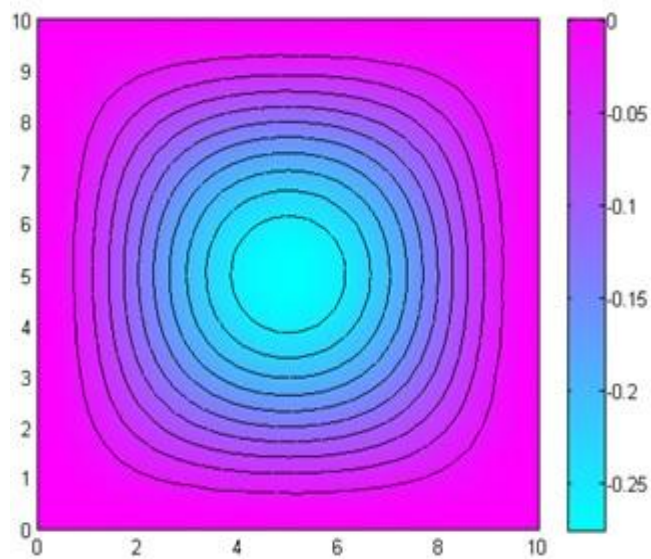
Կատարելով ձևափոփոխություն, սալը բերվում է չափում չունեցող 10×10 քառակուսային տիրույթի: Արդյունքները պատկերված են նկ.4.1-4.8-ում: Դրանք համեմատված են [8] աշխատանքում այլ մեթոդով ստացված արդյունքների հետ:





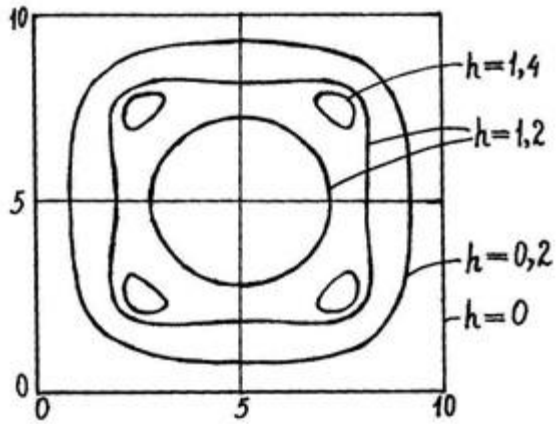
Նկ. 4.1.

Նկար 4.1-ում պատկերված են սալի ճկվածքի, տանգենցիալ տեղափոխության և աստության փոփոխությունների տարածական պատկերները՝ ըստ տարբեր մակարդակների:



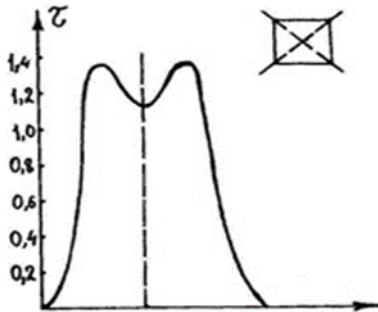
Նկ. 4.2.

Նկար 4.2.-ում պատկերված են օպտիմալ հաստության բաշխման մակարդակի գծերը:

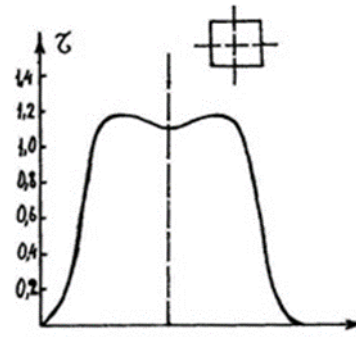


Նկ. 4.3

Նկար 4.3-ում պատկերված են ստացված $W(x, y)$ ֆունկցիայի մակարդակի գծերը, երբ զուգամիությունն ստացվել է 10-րդ մոտարկման ժամանակ (ըստ [8] աշխատանքի):

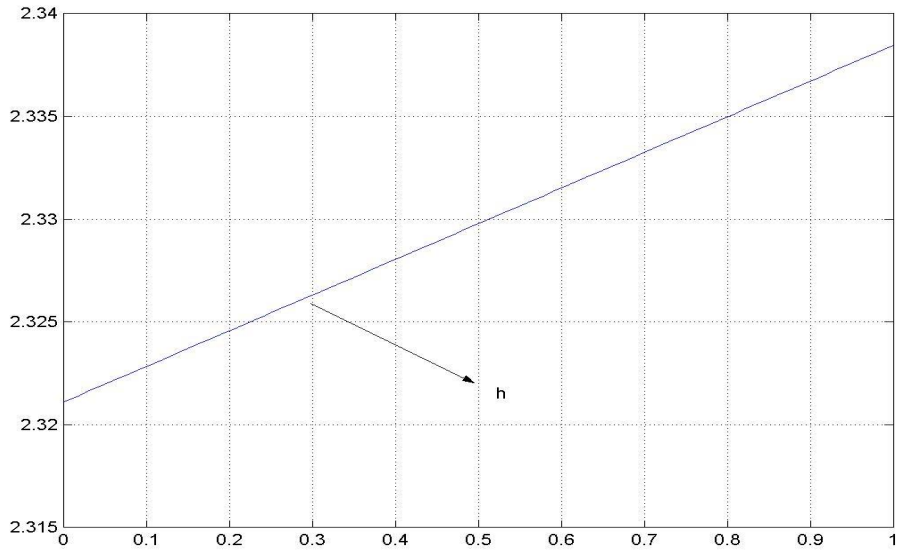


Նկ.4.4



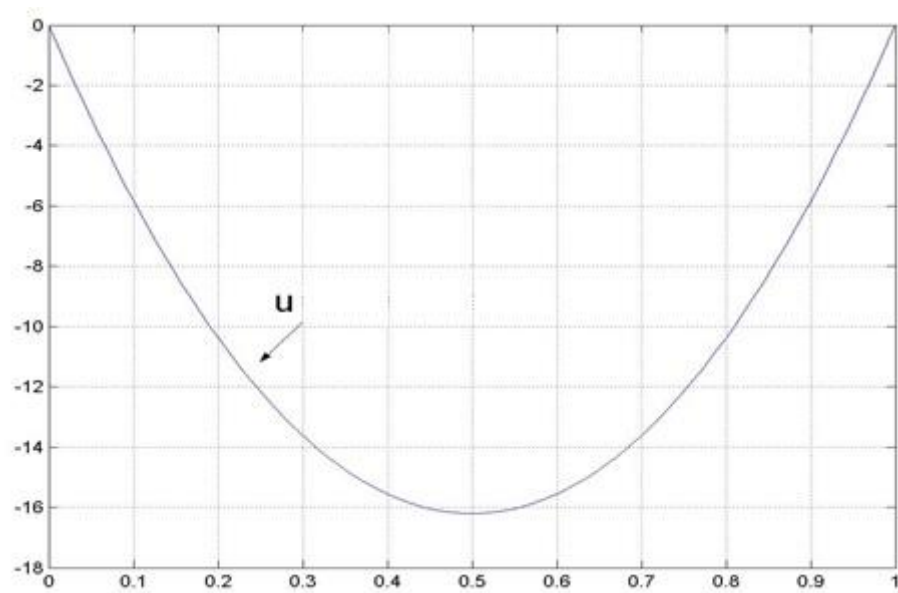
Նկ. 4.5

Նկ.4.4 և նկ.4.5 հաստության բաշխումը ցույց է տրված համապատասխանաբար քառակուսու անկյունագծային և ոչ անկյունագծային սիմետրիայի առանցքներով անցնող լայնական հաստայթներով:



Նկ. 4.6

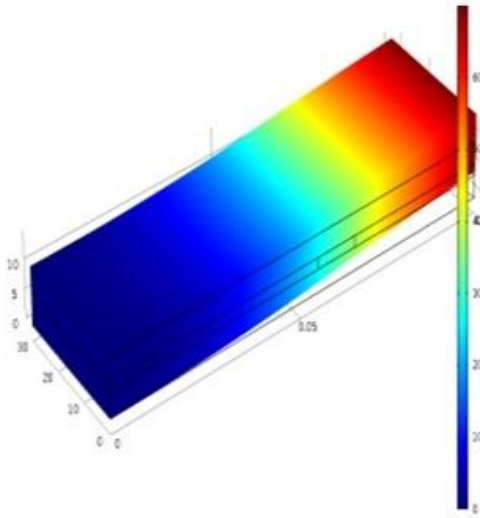
Նկ.4.6-ում պատկերված է սալի h_w հաստությունը՝ հաշված մաթլաբ ծրագրով:



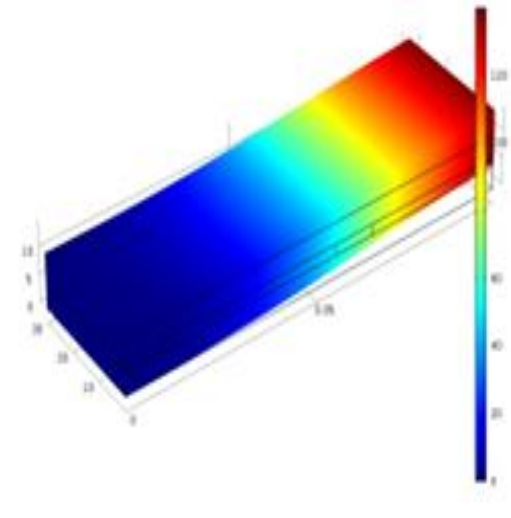
$$u = 64.8(a^2 - al)$$

Նկ. 4. 7

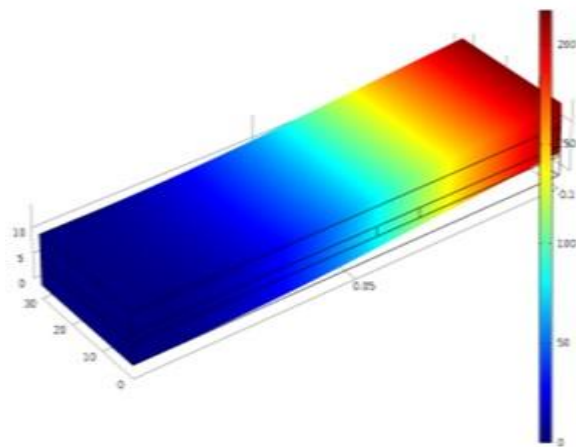
Նկար 4.7-ում պատկերված է սալի u տեղափոխությունը՝ հաշված մաթլաբ ծրագրով:



Նկ. 4.8 ա



Նկ. 4.8 բ



Նկ. 4.8 գ

Նկ. 4.8.-ում պատկերված է բազմաշերտ անիզոտրոպ սալերի օրինակներ դեֆորմացիայից հետո: Տարբեր մակարդակներում (ըստ x, y կոորդինատների) սալի հաստությունը պատկերված է տարբեր գույներով:

ԳԼՈՒԽ ԵՐԿՐՈՐԴ
ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԶԱՆԳՎԱԾՆԵՐԻ ՆՎԱԶԵՑՄԱՆ ՕՊՏԻՄԱԼ
ՆԱԽԱԳԾՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Թաղանթները, ի տարբերություն սալերի, հարթ չեն և ունեն կորություն: Այդ պատճառով թաղանթի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակն ընդհանուր դեպքում նկարագրվում է երեք իրարից անկախ $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$ և $w(\alpha, \beta)$ ֆունկցիաների միջոցով, որոնք իրենից ներկայացնում են թաղանթի միջին մակերևույթի կետերի տեղախոխությունները, համապատասխանաբար α , β և γ առանցքների ուղղություններով (հիշենք, որ սալերի դեպքում գործ ունենք միայն մեկ ֆունկցիայի՝ ճկվածքի $w(x, y)$ ֆունկցիայի հետ): Ըստ այդմ, թաղանթի դեֆորմացիոն վիճակը ընդհանուր դեպքում մաթեմատիկորեն նկարագրվում է երեք մասնական ածանցյալներով, դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգով, որի կարգն ավելի բարձր է, քան սալերի դեպքում եղած մեկ հավասարման կարգը: [8,90,104,1197,118,125].

Դիտարկվում է թաղանթի զանգվածի հնարավորին փոքրացումը, երբ թաղանթի սեփական տատանումների հիմնական հաճախության արժեքը ֆիքսված է: Կդիտարկենք նաև միաշերտ, փոփոխական $h(\alpha, \beta)$ հաստությամբ և համասեռ նյութից պատրաստված թաղանթներ: [1-4, 47-54].

Թաղանթների օպտիմալ նախագծման խնդիրը, որը դիտարկվում է այս գլխում, թվարկված բոլոր տիպերի համար ունի հետևյալ ընդհանուր ձևակերպումը.

$$M \xrightarrow{h} \min \tag{ա}$$

$$\omega = \text{fix} \tag{բ}$$

որտեղ M -ը թաղանթի զանգվածն է, իսկ ղեկավարման $h(\alpha, \beta)$ պարամետրը թաղանթի հաստության ֆունկցիան, որը կարող է լինել վեկտորական, եթե $B_{ij}(\alpha, \beta)$ գործակիցներն անկախ են միմյանցից: Երկրորդ դեպքը, երբ ղեկավարման $h(\alpha, \beta)$ պարամետրը պետք է բավարարի հետևյալ երկրաչափական (ֆիզիկական) և իզոպերիմետրիկ սահմանափակումներին:

$$(0 < t_1 \leq t \leq t_2), \quad t_1, t_2 = \text{const}$$

(գ)

$$\iint_{\Omega} |\text{grad}h|^2 d\Omega \leq C^2, \quad C = \text{const}$$

Ուսումնասիրվում է գլանային թաղանթի կայունության խնդիրը արտաքին առանցքասիմետրիկ կամայական նորմալ բեռի դեպքում:

Ուսումնասիրվում է փոփոխական հաստության անիզոտրոպ միաշերտ գլանային թաղանթի օպտիմալ նախագծման խնդիրը:

Դիտարկվում է շրջանային փոփոխական լայնական հաստությո ունեցող ձողի, օպտիմալացման խնդիրը նրա վրա կիրառված կենտրոնացված ուժի դեպքում. գտնել լայնական հաստության փոփոխական կտրվածքը բնութագրող այնպիսի օրենք, որ ձողի ամենամեծ ճկվածքն ստանա փոքրագույն արժեք:

Դիտարկվում են օրթոտրոպ պատման և բաց գլանային թաղանթների օպտիմալ նախագծման խնդիրները:

2.1. Գլանային թաղանթների կայունության ուսումնասիրումը

Գլանային թաղանթի կայունությունն ուսումնասիրելու ենք ($C_{i6} = D_{i6} = 0, i = 1, 2$) արտաքին առանցքասիմետրիկ կամայական նորմալ բեռի դեպքում: Նախնական վիճակի համապատասխան հավասարումների համակարգը կլինի

$$C_{11} \frac{d^2 u_0}{dx^2} + C_{12} \frac{1}{R} \frac{dw_0}{dx} = 0 \quad (1.1)$$

$$D_{11} \frac{d^4 w_0}{dx^4} + \frac{1}{R} (C_{12} \frac{du_0}{dx} + C_{22} \frac{w_0}{R}) = Z(x)$$

Կայունության վիճակի հավասարումները

$$C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{12} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + C_{66} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) = 0$$

$$C_{65} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + C_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_{22} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.2)$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{1}{R} [C_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{22} (\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R})] - \frac{\partial}{\partial x} (T_1^0 \frac{\partial w}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y} (T_2^0 \frac{\partial w}{\partial y}) = 0$$

Ինչպես նշել ենք, քնարկելու ենք եզրային պայմանների երկու դեպք:

$$1) w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = T_1 = v = 0 \quad \text{երբ } x = 0 \text{ և } x = l \quad (1.3)$$

$$2) \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = u = s = 0 \quad \text{երբ } x = 0 \text{ և } x = l \quad (1.4)$$

Առաջին եզրային պայմանները համապատասխանում են դասական ազատ հենված դեպքին է, իսկ երկրորդը՝ «լողող ամրակցում» դեպքին:

Համապատասխանաբար առաջին դեպքի համար լուծումի փնտրելու ենք

$$u = \cos \mu_n y \sum_{m=0}^{\infty} u_m \cos \lambda_m x \quad v = \sin \mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} v_m \sin \lambda_m x \quad (1.5)$$

$$w = \cos \mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \lambda_m x, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{l}, \quad \mu_n = \frac{n}{R}$$

ստեքով, իսկ եկրորդ դեպքի համար՝

$$u = \cos \mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} u_m \sin \lambda_m x$$

$$v = \sin \mu_n y \sum_{m=0}^{\infty} v_m \cos \lambda_m x$$

$$w = \cos \mu_n y \sum_{m=0}^{\infty} w_m \cos \lambda_m x$$

$$(1.6)$$

ստեքով:

Ընդունենք, որ T_1^0 և T_2^0 ճիգերը ունեն հետևյալ ստեքը (քիչ հետո կստանանք)

$$T_1^0 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos \lambda_n x$$

$$T_2^0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \lambda_n x$$

$$(1.7)$$

Նկատի ունենալով (1.5) և (1.6), (1.2) հավասարումներից կունենանք հետևյալ համակարգը

$$L(w_m) - L_1(a_m b_m) w_m = 0 \quad (1.8)$$

$$L(w_m) = D_{11} \lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_m^2 \mu_n^2 + D_{22} \mu_n^4 + \frac{1}{R^2} \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$\Delta = C_{11} C_{66} \lambda^4 + (C_{11} C_{22} - C_{12}^2 - 2C_{12} C_{66}) \lambda^2 \mu^2 + C_{22} \mu^4 \quad (1.9)$$

$$\Delta_1 = C_{66} (C_{11} C_{22} - C_{12}^2) \lambda^4 + 2C_{22} (C_{11} C_{22} - C_{12}^2 - C_{12} C_{66}) \lambda^2 \mu^2 + C_{22}^2 C_{66} \mu^4 \quad (1.10)$$

Առաջին դեպքի համար՝

$$L_1(a_n b_m) w_m = \frac{1}{2} \mu_n^2 [(2a_0 - a_{2n}) w_n + \sum_{q=0}^{n-1} (a_{n-q} + a_{n+q}) w_q + \sum_{q=n+1}^{\infty} (a_{q-n} - a_{n+q}) w_q]$$

(1.11)

Երկրորդի համար՝

$$T_2^0 = \frac{C_{12}}{C_{11}} T_1^0, \quad (b_m = \frac{C_{12}}{C_{11}} a_m)$$

$$L_1(a_m b_m) w_m = \left(\lambda^2 \frac{C_{12}}{C_{11}} + \mu \right) \cdot \left\{ a_0 w_n + \frac{1}{2} \left[\sum_{q=0}^{\infty} a_{n+q} w_q + \sum_{q=n+1}^{\infty} a_{q-n} w_q + \sum_{q=0}^{n-1} a_{n-q} w_q \right] \right\}$$

(1.12)

Այս դեպքում (1.8) հետ միասին ունենք ևս մի հավասարում

$$C_{22} \frac{1}{R^2} w_0 - \mu^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n = 0$$

(1.13)

Կրիտիկական պարամետրերը որոշվում են (1.8) համակարգի որոշիչի գերոլինելու պայմանից:

Այժմ դիտարկենք (1.1) համակարգը, որտեղից էլ որուշում է T_2^0 :

Առաջին դեպքի համար եզրային պայմաններն են

$$w_0 = \frac{d^2 w_0}{dx^2} = \frac{d^2 u_0}{dx^2} = 0 \quad \text{երբ } x = 0 \text{ և } x = l$$

(1.14)

Որոնցից հետևում է

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} = -\frac{C_{12}}{C_{11}} w_0$$

(1.15)

$$D_{11} \frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{C}{R^2} w_0 = Z, \quad C = \frac{C_{11} C_{22} - C_{12}^2}{C_{11}},$$

որտեղից էլ

$$w_0 = \sum_{i=0}^n C_i X_i(x) + \frac{1}{D_{11} k^3} \int_0^l Z(\xi) X_4[k(x-\xi)] d\xi$$

(1.16)

Այստեղ՝

$$X_1 = \cos kx \operatorname{ch} kx, \quad X_2 = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} kx \operatorname{sink} x + \operatorname{sh} kx \operatorname{cos} kx)$$

$$X_3 = \frac{1}{2} \operatorname{sh} kx \operatorname{sink} x, \quad X_4 = \frac{1}{4} (\operatorname{ch} kx \operatorname{sink} x - \operatorname{sh} kx \operatorname{cos} kx)$$

(1.17)

$$4k^4 = \frac{C}{R^2 D_{11}}$$

Բավարարելով (1.14) պայմաններին գործակիցների համար ստանում ենք՝

$$C_1 = C_3 = 0$$

$$C_2 X_2(l) + C_4 X_4(l) + \frac{1}{D_{11} k^3} \int_0^l Z(\xi) X_4[k(1-\xi)] d\xi = 0$$

(1.18)

$$-4C_2X_4(l) + C_4X_2(l) + \frac{1}{D_{11}k^3} \int_0^l Z(\xi)X_2[k(1-\xi)]d\xi = 0$$

T_2^0 նախնական ճիգը հավասար է

$$T_2^0 = \frac{1}{R} C w_0 \quad (1.19)$$

Որտեղից էլ կստանանք (1.7) a_n գործակիցները;

Երկրորդ դեպքում

$$u_0 = w_0' = w_0''' = 0, \text{ երբ } x = 0 \text{ և } x = l \quad (1.20)$$

Եզրային պայմաններին բավարում են

$$u_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \sin \lambda_n x$$

$$w_0 = \sum_{m=0}^{\infty} f_m \cos \lambda_n x \quad (1.21)$$

և (1.1) հավասարումներից կստանանք

$$\varphi_m = -\frac{C_{12}}{C_{11R} \lambda_m} f_m$$

$$f_m = \frac{a_m}{D_{11} \lambda_m^4 + \frac{C}{R^2}} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (1.22)$$

$$f_0 = \frac{a_0 R^2}{C_{22}}$$

որտեղ a_m -ը $Z(x)$ -ի շարքի գործակիցներն են՝

$$Z(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \lambda_n x \quad (1.23)$$

2.2. Անիզոտրոպ գլանային թաղանթների օպտիմալ նախագծումը

Դիտարկենք միաշերտ գլանային թաղանթ, որն ունի փոփոխական հաստություն, պատրաստված է համասեռ նյութից, երկրաչափական և ֆիզիկամեխանիկական հատկություններով առանցքասիմետրիկ է թաղանթի միջին (շրջանային գլանային) մակերևույթի պատման առանցքի նկատմամբ և միջին մակերևույթի ամեն մի կետում ունի առաձգական սիմետրիայի մեկ հարթություն: Այդ թաղանթի ազատ ատանումները նկարագրվում են հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգով [86]:

$$\frac{d}{d\alpha} \left\{ C_{11} \frac{dU}{d\alpha} + C_{12} \frac{W}{R} + C_{16} \frac{dV}{d\alpha} \right\} = -\rho h(\alpha) \omega^2 U$$

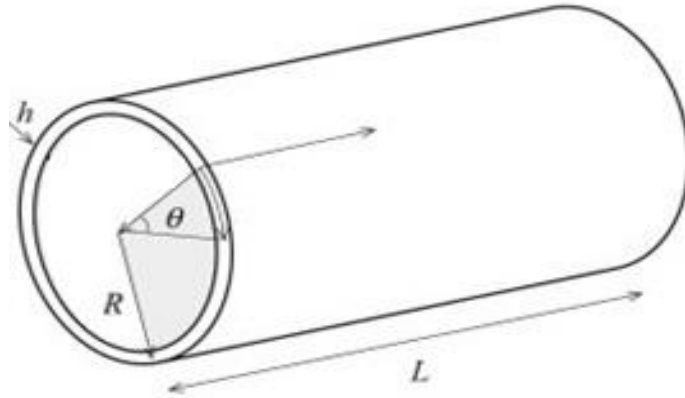
$$\frac{d}{d\alpha} \left\{ C_{16} \frac{dU}{d\alpha} + C_{26} \frac{W}{R} + C_{66} \frac{dV}{d\alpha} + \frac{2}{R} \left[\frac{2D_{66}}{R} \frac{dV}{d\alpha} - D_{16} \frac{d^2W}{d\alpha^2} \right] \right\} = -\rho h(\alpha) \omega^2 V \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{R} \left(C_{12} \frac{dU}{d\alpha} + C_{22} \frac{W}{R} + C_{26} \frac{dV}{d\alpha} \right) + \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(D_{11} \frac{d^2W}{d\alpha^2} - \frac{2D_{16}}{R} \frac{dV}{d\alpha} \right) = \rho h(\alpha) \omega^2 W,$$

որտեղ C_{ij} , D_{ij} կոշտության գործակիցները տրվում են հետևյալ բանաձևերով [8,119,123,127]:

$$C_{ij} = h(\alpha) B_{ij}, \quad D_{ij} = \frac{h^3(\alpha) B_{ij}}{12}, \quad B_{ij} = const, \quad \rho = const \quad (2.2)$$

Ենթադրենք, որ $\alpha = 0$, $\alpha = l$ եղրագծերում սեղի ունի հետևյալ եզրային պայմաններից մեկը.



Նկ. 2.1

ա) ազատ եզր.

$$T_1 \equiv C_{11} \frac{dU}{d\alpha} + C_{12} \frac{W}{R} + C_{16} \frac{dV}{d\alpha} = 0$$

$$S_{12} \equiv C_{16} \frac{dU}{d\alpha} + C_{26} \frac{W}{R} + C_{66} \frac{dV}{d\alpha} = 0 \quad (2.3 \text{ ա})$$

$$M_1 \equiv -D_{11} \frac{d^2W}{d\alpha^2} + \frac{2D_{16}}{R} \frac{dV}{d\alpha} = 0$$

$$N_1 \equiv \frac{dM_1}{d\alpha} = 0$$

բ) հողակապորեն ամրակցված եզր

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0, \quad M_1 = 0 \quad (2.3 \text{ բ})$$

գ) հողակապորեն ամրացված, բայց տանգենցիալ ուղղությամբ ազատ եզր.

$$T_1 = 0, \quad V = 0, \quad W = 0, \quad M_1 = 0 \quad (2.3 \text{ գ})$$

Թաղանթի զանգվածը հաստատուն բազմապատկչի ճշտությամբ տրվում է հետևյալ ֆունկցիոնալի միջոցով.

$$J = \int_0^l h(\alpha) d\alpha \quad (2.4)$$

Այսպիսով, մեր խնդիրն է հնարավորին փոքրացնել J ֆունկցիոնալը, երբ $\omega = \omega_0$: Դա նշանակում է, որ (2.4) ֆունկցիոնալը $h(\alpha)$ ֆունկցիայի ընտրությամբ պետք է ընդունի ամենափոքր արժեք և միևնույն ժամանակ պետք է բավարարվեն (2.1) դիֆերենցիալ հավասարումներն և (2.3) եզրային պայմանները, երբ $\omega = \omega_0$

(2.1), (2.3) խնդիրը լուծվում է վարիացիոն մեթոդով:

h ֆունկցիային տանք δh աճ: Այդ դպքում (2.1) համակարգի հավասարումները կգրվեն ըստ այդ աճերի և կստանան հետևյալ տեսքերը:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\alpha} \left(B_{11}(h + \delta h) \frac{d(U + \delta U)}{d\alpha} + \frac{B_{12}}{R} (h + \delta h)(W + \delta W) + B_{16}(h + \delta h) \frac{d(V + \delta V)}{d\alpha} \right) + \rho\omega^2 (h + \delta h)(U + \delta U) = 0 \\ & \frac{d}{d\alpha} \left(B_{16}(h + \delta h) \frac{d(U + \delta U)}{d\alpha} + B_{26}(h + \delta h) \frac{(W + \delta W)}{R} + B_{66}(h + \delta h) \frac{d(V + \delta V)}{d\alpha} + \frac{2}{R} \left[\frac{2(h + \delta h)^3 B_{66}}{12R} \frac{d(V + \delta V)}{d\alpha} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(h + \delta h) B_{16}}{12} \frac{d^2(W + \delta W)}{d\alpha^2} \right] \right) + \rho\omega^2 (h + \delta h)(V + \delta V) = 0 \\ & \frac{1}{R} \left((h + \delta h) B_{12} \frac{d(U + \delta U)}{d\alpha} + (h + \delta h) B_{22} \frac{(W + \delta W)}{R} + (h + \delta h) B_{26} \frac{d(V + \delta V)}{d\alpha} \right) + \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\frac{(h + \delta h)^3 B_{11}}{12} \frac{d^2(W + \delta W)}{d\alpha^2} - \right. \\ & \left. - \frac{2(h + \delta h)^3 B_{16}}{12R} \frac{d(V + \delta V)}{d\alpha} \right) - \rho\omega^2 (h + \delta h)(W + \delta W) = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Հաշվի առնելով (2.1) հավասարումները և արհամարելով δh , δU , δW , δV աճերի երկրորդ կարգի փոքր մեծությունները, կստանանք:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\alpha} \left(B_{11}h \frac{d\delta U}{d\alpha} + B_{11}\delta h \frac{dU}{d\alpha} + \frac{B_{12}}{R} h\delta W + \frac{B_{12}}{R} \delta h W + B_{16}h \frac{d\delta V}{d\alpha} + B_{16}\delta h \frac{dV}{d\alpha} \right) + \rho\omega^2 h\delta U + \rho\omega^2 \delta h U = 0 \\ & \frac{d}{d\alpha} \left(B_{16}h \frac{d\delta U}{d\alpha} + B_{16}\delta h \frac{dU}{d\alpha} + B_{26}h \frac{\delta W}{R} + B_{26}\delta h \frac{W}{R} + B_{66}h \frac{d\delta V}{d\alpha} + B_{66}\delta h \frac{dV}{d\alpha} + \frac{B_{66}h^2\delta h}{R^2} \frac{dV}{d\alpha} + \frac{B_{16}h^2\delta h}{2} \frac{d^2W}{d\alpha^2} \right) + \\ & \rho\omega^2 h\delta V + \rho\omega^2 \delta h V = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{B_{12}}{R} h \frac{d\delta U}{d\alpha} + \frac{B_{12}}{R} \delta h \frac{dU}{d\alpha} + \frac{B_{22}}{R} h \frac{\delta W}{R} + \frac{B_{22}}{R} \delta h \frac{W}{R} + \frac{B_{26}}{R} h \frac{d\delta V}{d\alpha} + \frac{B_{26}}{R} \delta h \frac{dV}{d\alpha} + \frac{B_{26}}{R} \delta h \frac{d\delta V}{d\alpha} + \frac{d^2}{d\alpha^2} \frac{B_{11} h^2 \delta h}{4} \frac{d^2 W}{d\alpha^2} - \frac{B_{16} h^2 \delta h}{2R} \frac{dV}{d\alpha} - \rho \omega^2 h \delta W - \rho \omega^2 \delta h W = 0 \quad (2.6)$$

(2.3) եզրային պայմանները նույնպես գրենք աճերով:

$$\begin{aligned} & \left(B_{11} h \frac{d\delta V}{d\alpha} + B_{11} \delta h \frac{dU}{d\alpha} + \frac{B_{12}}{R} h \delta W + \frac{B_{12}}{R} \delta h W + B_{16} h \frac{d\delta V}{d\alpha} + B_{16} \delta h \frac{dV}{d\alpha} \right) \Big|_{\alpha=0}^{\alpha=l} = 0 \\ & \left(B_{16} h \frac{d\delta V}{d\alpha} + B_{16} \delta h \frac{dU}{d\alpha} + \frac{B_{26}}{R} h \delta W + \frac{B_{26}}{R} \delta h W + B_{66} h \frac{d\delta V}{d\alpha} + B_{66} \delta h \frac{dV}{d\alpha} \right) \Big|_{\alpha=0}^{\alpha=l} = 0 \\ & \left(-\frac{B_{11}}{12} h^3 \frac{d^2 \delta W}{d\alpha^2} - \frac{3h^2 B_{11} \delta h}{12} \frac{d^2 W}{d\alpha^2} + \frac{B_{16}}{R} h^3 \frac{d\delta V}{d\alpha} + \frac{3B_{16} h^2 \delta h}{6R} \frac{dV}{d\alpha} - \frac{B_{11}}{12} h^3 \frac{d^2 W}{d\alpha^2} - \frac{3h^2 B_{11} \delta h}{12} \frac{d^2 \delta W}{d\alpha^2} + \right. \\ & \left. + \frac{B_{16}}{6R} h^3 \frac{dV}{d\alpha} + \frac{3B_{16} h^2 \delta h}{6R} \frac{d\delta V}{d\alpha} \right) \Big|_{\alpha=0}^{\alpha=l} = 0 \\ & \left(-\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{B_{11}}{12} h^3 \frac{d^2 \delta W}{d\alpha^2} \right) - \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{3h^2 B_{11} \delta h}{12} \frac{d^2 W}{d\alpha^2} \right) + \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{B_{16}}{R} h^3 \frac{d\delta V}{d\alpha} \right) + \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{3B_{16} h^2 \delta h}{6R} \frac{dV}{d\alpha} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{B_{11}}{12} h^3 \frac{d^2 W}{d\alpha^2} \right) - \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{3h^2 B_{11} \delta h}{12} \frac{d^2 \delta W}{d\alpha^2} \right) + \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{B_{16}}{6R} h^3 \frac{dV}{d\alpha} \right) + \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{3B_{16} h^2 \delta h}{6R} \frac{d\delta V}{d\alpha} \right) \right) \Big|_{\alpha=0}^{\alpha=l} = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

(2.4) նպատակի ֆունկցիոնալը նույնպես կստանա աճ՝

$$\delta J = \int_0^l \delta h d\alpha \quad (2.8)$$

(2.6) համակարգի առաջին, երկրորդ և երրորդ հավասարումների ձախ մասերը բազմապատկենք համապատասխանաբար U_1 , V_1 , W_1 համալուծ ֆունկցիաներով: Ստացված արտահայտությունների գումարը ինտեգրենք 0 -ից l որին էլ գումարենք (2.8) արտահայտությունը:

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \left[\left[\frac{d}{d\alpha} \left(B_{11}h \frac{d\delta U}{d\alpha} + B_{11}\delta h \frac{dU}{d\alpha} + \frac{B_{12}}{R} h\delta W + \frac{B_{12}}{R} \delta h W + B_{16}h \frac{d\delta V}{d\alpha} + B_{16}\delta h \frac{dV}{d\alpha} \right) + \rho\omega^2 h\delta U + \rho\omega^2 \delta h U \right] U_1 + \right. \\
& \left[\frac{d}{d\alpha} \left(B_{16}h \frac{d\delta U}{d\alpha} + B_{16}\delta h \frac{dU}{d\alpha} + B_{26}h \frac{\delta W}{R} + B_{26}\delta h \frac{W}{R} + B_{66}h \frac{d\delta V}{d\alpha} + B_{66}\delta h \frac{dV}{d\alpha} + \frac{B_{66}h^2 \delta h}{R^2} \frac{dV}{d\alpha} - \frac{B_{16}h^2 \delta h}{2} \frac{dV}{d\alpha} \right) + \right. \\
& \left. \rho\omega^2 h\delta V + \rho\omega^2 \delta h V \right] V_1 + \left[\frac{B_{12}}{R} h \frac{d\delta U}{d\alpha} + \frac{B_{12}}{R} \delta h \frac{dU}{d\alpha} + \frac{B_{22}}{R} h \frac{\delta W}{R} + \frac{B_{22}}{R} \delta h \frac{W}{R} + \frac{B_{26}}{R} h \frac{d\delta V}{d\alpha} + \frac{B_{26}}{R} \delta h \frac{dV}{d\alpha} + \right. \\
& \left. \frac{B_{26}}{R} \delta h \frac{d\delta V}{d\alpha} + \frac{d^2}{d\alpha^2} \frac{B_{11}h^2 \delta h}{4} \frac{d^2 W}{d\alpha^2} - \frac{B_{16}h^2 \delta h}{2R} \frac{dV}{d\alpha} - \rho\omega^2 h\delta W - \rho\omega^2 \delta h W \right] W_1 + \delta h \left] d\alpha \quad (2.9)
\end{aligned}$$

(2.9) ինտեգրալում կատարենք մասերով ինտեգրում, որպեսզի ազատվենք δh , δU , δW , δV աճերի ածանցիալներից:

Ստացված ինտեգրալտակ արտահայտություն կատարենք խմբավորում ըստ δh , δU , δW , δV աճերի:

Ինտեգրալից դուրս եղած աճերի մի մասը տրված է (2.7) եզրային պայմաններին՝ որոնք նույնպես գրված են աճերով:

Ինտեգրալից դուրս մնացած արտահայտությունները կրավարարեն մեր ուզած պայմաններին, որոնք կհանդիսանան որպես եզրային պայմաններ U_1 , V_1 , W_1 համալուծ ֆունկցիաների համար:

Այսպիսով (2.9) ինտեգրալը կունենա հետևյալ տեսքը:

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \left[-B_{11}\delta h \frac{dU_1}{d\alpha} \frac{dU}{d\alpha} + \frac{B_{12}}{R} + B_{11}\delta U \frac{d}{d\alpha} \left(h \frac{dU_1}{d\alpha} \right) - \frac{B_{12}}{R} \delta h \frac{dU_1}{d\alpha} W - \frac{B_{12}}{R} h \frac{dU_1}{d\alpha} \delta W - B_{16}\delta h \frac{dU_1}{d\alpha} \frac{dV}{d\alpha} + \right. \\
& \left. + B_{16}\delta V \frac{d}{d\alpha} \left(h \frac{dU_1}{d\alpha} \right) + \rho\omega^2 (\delta h U + h\delta U) U_1 - B_{16}\delta h \frac{dV_1}{d\alpha} \frac{dV}{d\alpha} + B_{16}\delta U \frac{d}{d\alpha} \left(h \frac{dV_1}{d\alpha} \right) - \frac{B_{26}}{R} \delta W h \frac{dV_1}{d\alpha} - \right. \\
& \left. - \frac{B_{26}}{R} \delta h \frac{dV_1}{d\alpha} W - B_{66}\delta h \frac{dV_1}{d\alpha} \frac{dV}{d\alpha} + B_{66}\delta V \frac{d}{d\alpha} \left(h \frac{dV_1}{d\alpha} \right) + \frac{B_{66}}{3R^2} \delta V \frac{d}{d\alpha} \left(h^3 \frac{dV}{d\alpha} \right) - \frac{3B_{66}}{3R^2} h^2 \delta h \frac{dV}{d\alpha} \frac{dV_1}{d\alpha} - \right. \\
& \left. - \frac{3B_{66}}{3R^2} h^2 \delta h \frac{dV}{d\alpha} \frac{dV_1}{d\alpha} + \frac{B_{16}}{6R} h^3 \frac{d^2 V}{d\alpha^2} \delta W - \frac{B_{16}}{6R} \delta W \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(h^3 \frac{dV_1}{d\alpha} \right) - \frac{3B_{16}}{6R} h^2 \delta h \frac{d^2 W}{d\alpha^2} \frac{dV_1}{d\alpha} + \rho\omega^2 \cdot \right. \\
& \left. (\delta h V + h\delta V) V_1 + \frac{B_{12}}{R} \delta h \frac{dU}{d\alpha} W_1 - \frac{B_{12}}{R} \delta U \frac{d(hW_1)}{d\alpha} + \frac{B_{22}}{R^2} (h\delta W) W_1 + \frac{B_{22}}{R^2} (h\delta W) W_1 + \frac{B_{26}}{R} W_1 \cdot \right. \\
& \left. \left(\delta h \frac{dV}{d\alpha} \right) - \frac{B_{26}}{R} \delta V \frac{d(hW_1)}{d\alpha} + \frac{B_{11}}{12} \delta W \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(h^3 \frac{d^2 W_1}{d\alpha^2} \right) + \frac{B_{11}}{4} h^2 \delta h \frac{d^2 W}{d\alpha} \frac{d^2 W_1}{d\alpha^2} - \frac{B_{16}}{6R} \delta W \frac{d}{d\alpha} \left(h^3 \frac{dW_1}{d\alpha} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{3B_{16}}{6R} h^2 \delta h \frac{dV}{d\alpha} \frac{dW_1}{d\alpha} - \frac{B_{16}}{6R} \frac{d}{d\alpha} h^3 \frac{d^2 W_1}{d\alpha^2} \delta V - \rho\omega^2 (\delta h W + h\delta W) W_1 \right] d\alpha \quad (2.10)
\end{aligned}$$

(2.10) ինտեգրալում ինտեգրալատակ արտահայտությունում կատարենք խմբավորում ըստ $\delta h, \delta U, \delta W, \delta V$ աճերի, պահանջենք, որ $\delta h, \delta U, \delta W, \delta V$ աճերի գործակիցները հավասար լինեն զրոյի: Դա հնարավոր է, քանի որ U_1, V_1 և W_1 ֆունկցիաների վրա որևէ սահմանափակում դրված չէ և այժմ պահանջենք, որ դրանք բավարարեն վերը նշված հավասարումներին:

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{d}{d\alpha} \left(h \frac{dU_1}{d\alpha} \right) + \rho\omega^2 h U_1 + B_{16} \frac{d}{d\alpha} \left(h \frac{dV_1}{d\alpha} \right) - \frac{B_{12}}{R} \frac{d(hW_1)}{d\alpha} = 0 \\
& - \frac{B_{12}}{R} h \frac{dU_1}{d\alpha} - \frac{B_{26}}{R} h \frac{dV_1}{d\alpha} + \frac{B_{16}}{R} h^3 \frac{d^2 V_1}{d\alpha^2} - \frac{B_{16}}{6R} \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(h^3 \frac{dV_1}{d\alpha} \right) - \frac{B_{22}}{R^2} h W_1 + \frac{B_{11}}{12} \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(h^3 \frac{d^2 W_1}{d\alpha^2} \right) - \\
& \rho\omega^2 h W_1 = 0 \\
& B_{16} \frac{d}{d\alpha} \left(h \frac{dU_1}{d\alpha} \right) + B_{66} \frac{d}{d\alpha} \left(h \frac{dV_1}{d\alpha} \right) + \frac{B_{66}}{3R^2} \frac{d}{d\alpha} \left(h^3 \frac{dV_1}{d\alpha} \right) - \frac{B_{26}}{R} \frac{d(hW_1)}{d\alpha} - \frac{B_{16}}{6R} \frac{d}{d\alpha} \left(h^3 \frac{d^2 W_1}{d\alpha^2} \right) + \rho\omega^2 h V_1 = 0 \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Այս դեպքում δh -ի գործակիցը պետք է լինի 0, քանի որ $\delta J = 0$ կամայական δh դեպքում:

$$\begin{aligned}
& - B_{11} \frac{dU_1}{d\alpha} \frac{dU}{d\alpha} - \frac{B_{12}}{R} \frac{dU_1}{d\alpha} W - B_{16} \frac{dU_1}{d\alpha} \frac{dV}{d\alpha} + \rho\omega^2 U U_1 - B_{16} \frac{dV_1}{d\alpha} \frac{dV}{d\alpha} - \frac{B_{26}}{R} \frac{dV_1}{d\alpha} W - B_{66} \frac{dV_1}{d\alpha} \frac{dV}{d\alpha} - \\
& \frac{B_{66}}{R^2} h^2 \frac{dV}{d\alpha} \frac{dV_1}{d\alpha} - \frac{B_{66}}{R^2} h^2 \frac{dV}{d\alpha} \frac{dV_1}{d\alpha} - \frac{3B_{16}}{6R} h^2 \frac{d^2 W}{d\alpha^2} \frac{dV_1}{d\alpha} + \rho\omega^2 V V_1 + \frac{B_{12}}{R} \frac{dU}{d\alpha} W_1 + \frac{B_{22}}{R^2} W W_1 + \frac{B_{26}}{R} \left(\frac{dV}{d\alpha} \right) \\
& W_1 + \frac{B_{11}}{4} h^2 \frac{d^2 W}{d\alpha} \frac{d^2 W_1}{d\alpha} - \frac{3B_{16}}{6R} h^2 \frac{dV}{d\alpha} \frac{dW_1}{d\alpha} - \rho\omega^2 W W_1 = 0 \quad (2.12)
\end{aligned}$$

(2.1) և (2.12) համակարգերի նմանությունից ելնելով, կարող ենք ասել, որ

$$U_1 = -UC, \quad V_1 = -VC, \quad W_1 = WC \quad (2.13)$$

(2.13) հավասարությունները տեղատրենք (17) հավասարման մեջ, կստանանք:

$$\begin{aligned}
& - B_{11} \frac{d(-UC)}{d\alpha} \frac{dU}{d\alpha} - \frac{B_{12}}{R} \frac{d(-UC)}{d\alpha} W - B_{16} \frac{d(-UC)}{d\alpha} \frac{dV}{d\alpha} + \rho\omega^2 U(-UC) - B_{16} \frac{d(-VC)}{d\alpha} \frac{dV}{d\alpha} - \frac{B_{26}}{R} \frac{d(-VC)}{d\alpha} W - \\
& B_{66} \frac{d(-VC)}{d\alpha} \frac{dV}{d\alpha} - \frac{B_{66}}{R^2} h^2 \frac{dV}{d\alpha} \frac{d(-VC)}{d\alpha} - \frac{B_{66}}{R^2} h^2 \frac{dV}{d\alpha} \frac{d(-VC)}{d\alpha} - \frac{3B_{16}}{6R} h^2 \frac{d^2 W}{d\alpha^2} \frac{d(-VC)}{d\alpha} + \rho\omega^2 V(-VC) + \frac{B_{12}}{R} \\
& \frac{dU}{d\alpha} (WC) + \frac{B_{22}}{R^2} W(WC) + \frac{B_{26}}{R} \left(\frac{dV}{d\alpha} \right) (WC) + \frac{B_{11}}{4} h^2 \frac{d^2 W}{d\alpha} \frac{d^2 (WC)}{d\alpha} - \frac{3B_{16}}{6R} h^2 \frac{dV}{d\alpha} \frac{d(WC)}{d\alpha} - \rho\omega^2 W(WC) = 0 \quad (2.14)
\end{aligned}$$

(2.14) հավասարումը (2.1) հավասարումների համակարգի հետ միասին կազմում են փակ համակարգ $U(\alpha), V(\alpha), W(\alpha), h(\alpha)$ անհայտ ֆունկցիաների նկատմամբ:

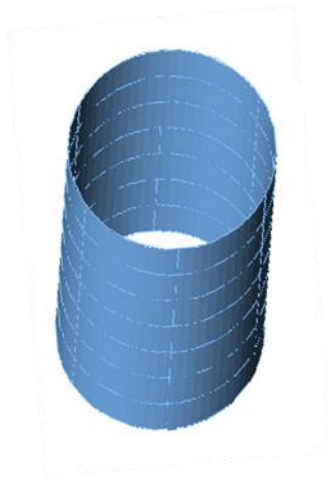
Լուծելով այս հավասարումների համակարգը, հաշվի առնելով համապատասխան (2.3) եզրային պայմանները, կստանանք U , V , W տեղափոխությունների և թաղանթի հաստությունը նկարակրող h ֆունկցիայի արժեքները:

$$B_{11}\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)^2 + 2\frac{B_{12}}{R}\frac{dU}{d\alpha}W + 2B_{16}\frac{dU}{d\alpha}\frac{dV}{d\alpha} + 2\frac{B_{16}}{R}\frac{dV}{d\alpha}W + B_{66}\left(\frac{dV}{d\alpha}\right)^2 + \frac{B_{66}}{R^2}h^2\left(\frac{dV}{d\alpha}\right)^2 + \frac{B_{22}}{R^2}W^2 + \frac{B_{11}}{4}h^2\left(\frac{d^2W}{d\alpha^2}\right)^2 - \frac{B_{16}}{R}h^2\frac{dV}{d\alpha}\frac{dW}{d\alpha} = h[\rho\omega^2U^2 + \rho\omega^2V^2 + \rho\omega^2W^2 + c] \quad (2.15)$$

(2.16) հավասարումը գրված է բևեռային կոորդինատներով առանցքապահման թաղանթների դեպքում:

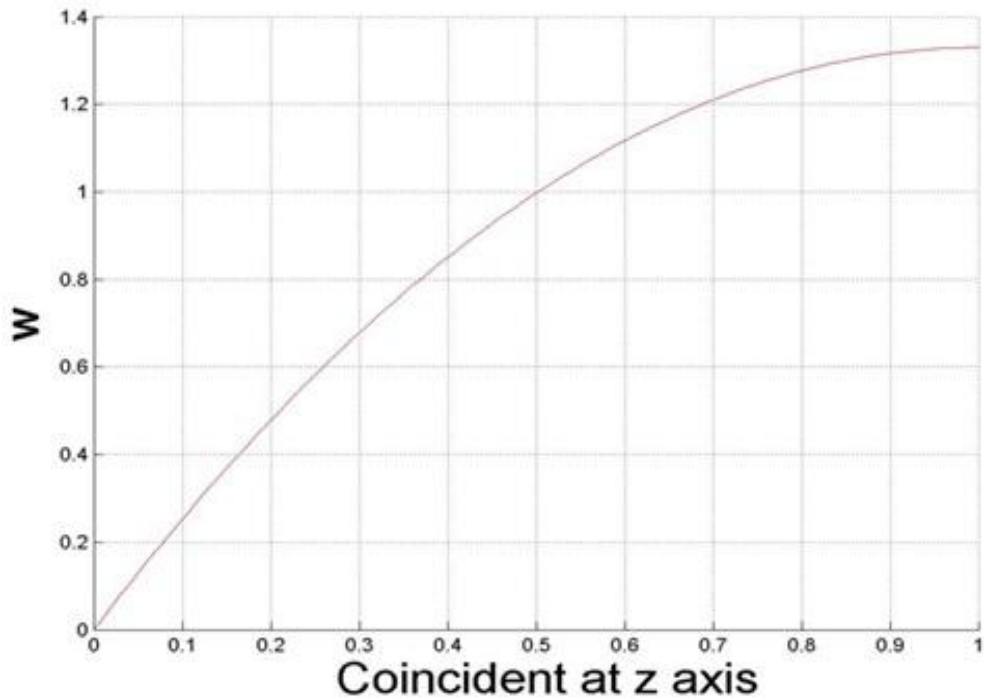
$$\begin{cases} -B_{66}\frac{d}{d\alpha}\left(h\frac{dV}{d\alpha}\right) - \frac{B_{66}}{3R^2}\frac{d}{d\alpha}\left(h^3\frac{dV}{d\alpha}\right) = \rho\omega^2hV + ch \\ \frac{d^2h}{d\alpha^2} + B_{66}h\left(\frac{dV}{d\alpha}\right)^2 + 2\frac{B_{66}}{R^2}h^3\left(\frac{dV}{d\alpha}\right)^2 = \rho\omega^2V^2h + ch \end{cases} \quad (2.16)$$

Հավասարումների (2.16) համակարգը լուծվել է թվային մեթոդով՝ օգտվելով Մաթլաբ ծրագրերից:



Նկ.2.2.

Նկ.2.2. -ում պատկերված է գլանային թաղանթը մինչև դեֆորմացիան [58], նկ.2.3-ում՝ w ճկվածքի կախվածության գրաֆիկը α կոորդինատից: Նկ.2.3-ում α առանցքը համապատասխանում է գլանի Z առանցքին, իսկ շառավղային փոփոխականից անկախ է և հաստատուն:

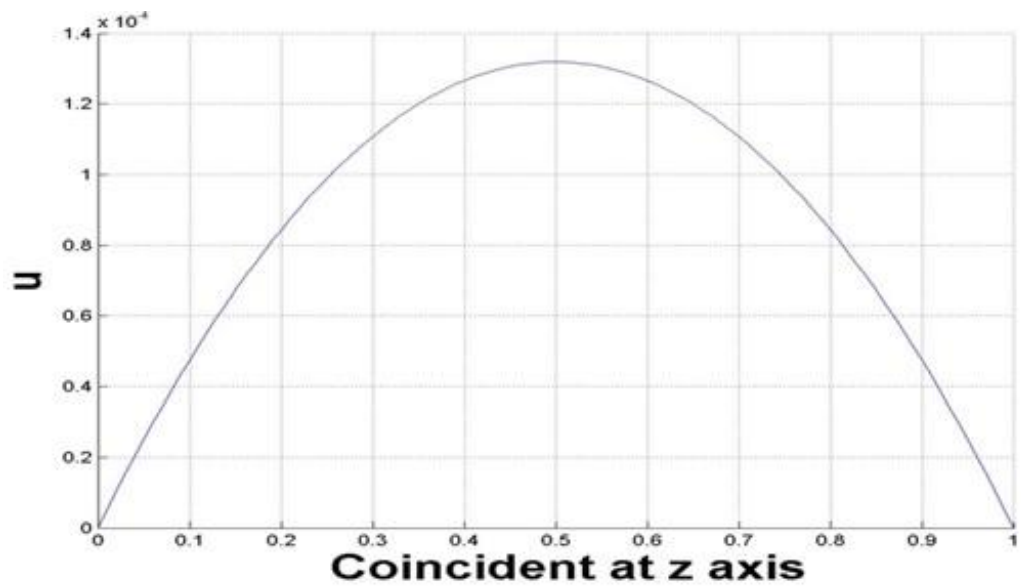


$$w = -1.3296(\alpha^2 - 2l.\alpha) \quad (l = 1)$$

$$w(0) = 0, \quad \frac{dw}{d\alpha}(l) = 0$$

Նկ.2.3

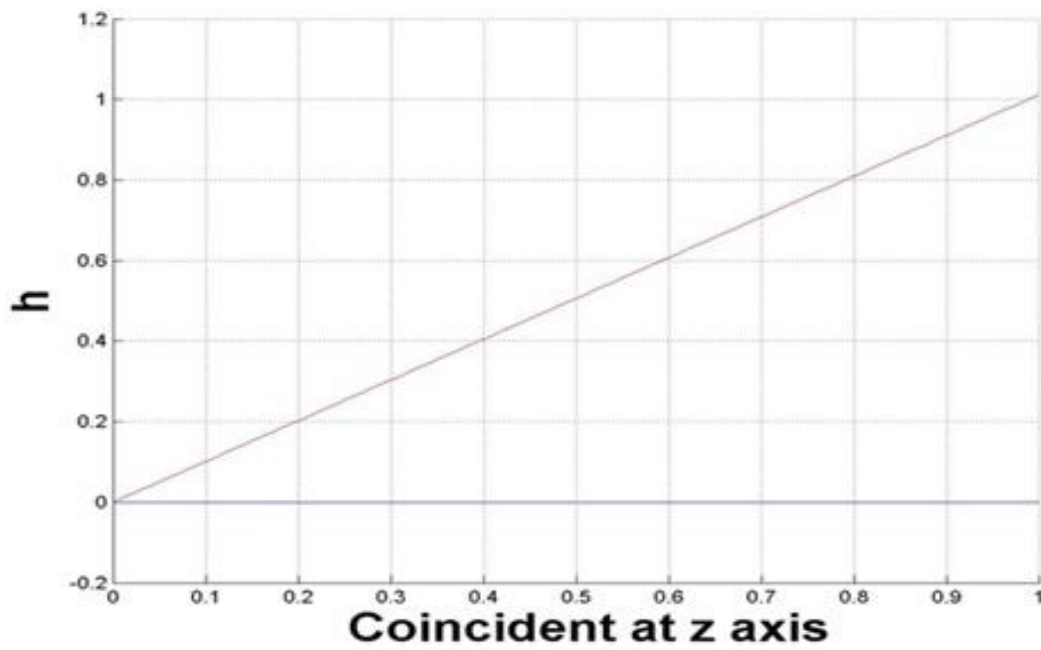
Նկ.2.4.-ում պատկերված է u տեղափոխության կախվածության գրաֆիկը α կոորդինատից՝ հաստատատուն շառավղային փոփոխականի դեպքում, իսկ նկ.2.5.-ում՝ h հաստատության կախվածության գրաֆիկը α կոորդինատից՝ հաստատատուն շառավղային փոփոխականի դեպքում: Գրաֆիկների վրա α կոորդինատը զուգահեռ է գլանի Z առանցքին, շառավղային փոփոխականը հաստատատուն:



$$u = -5.2748 \times 10^{-4}(\alpha^2 - l.\alpha), \quad (l = 1),$$

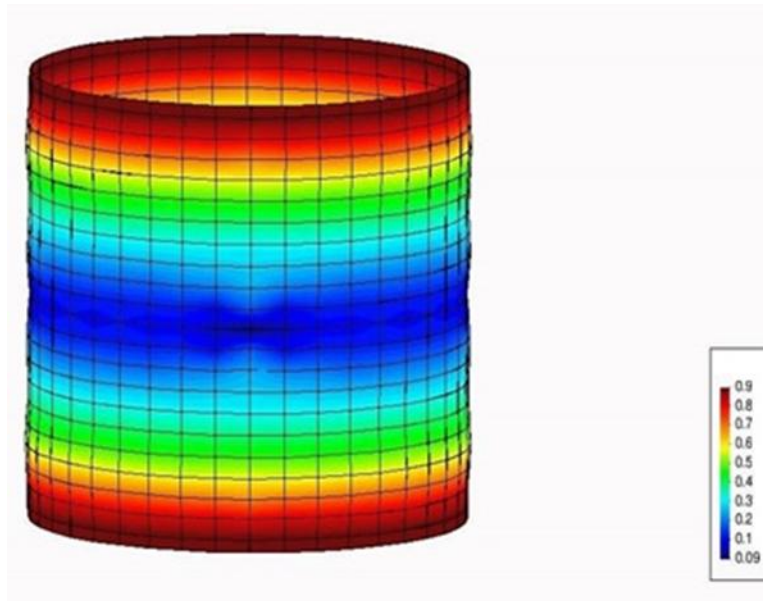
$$u(0) = 0, u(l) = 0$$

Ўқ.2.4



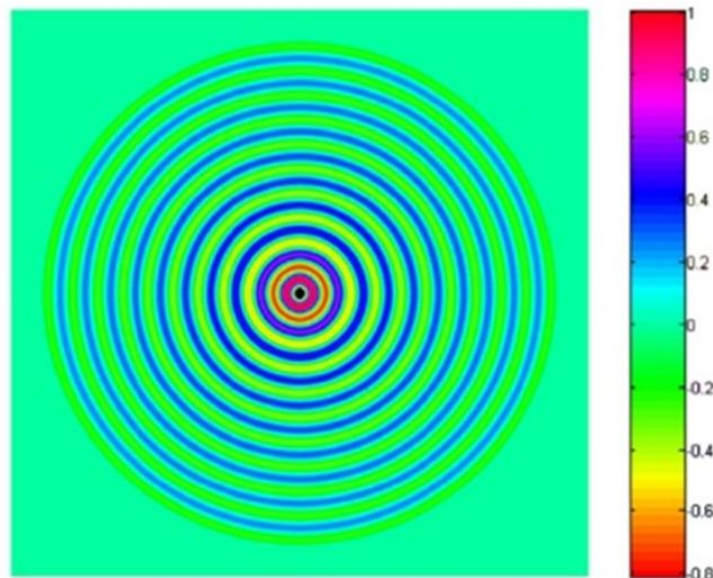
$$h = 1.0120\alpha - 1.9237 \times 10^{-6}$$

Ўқ.2.5



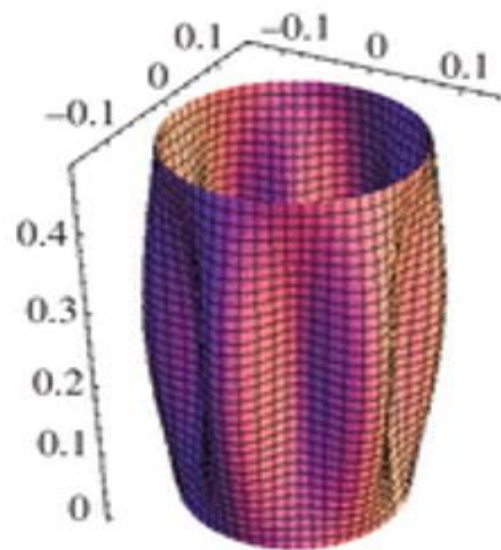
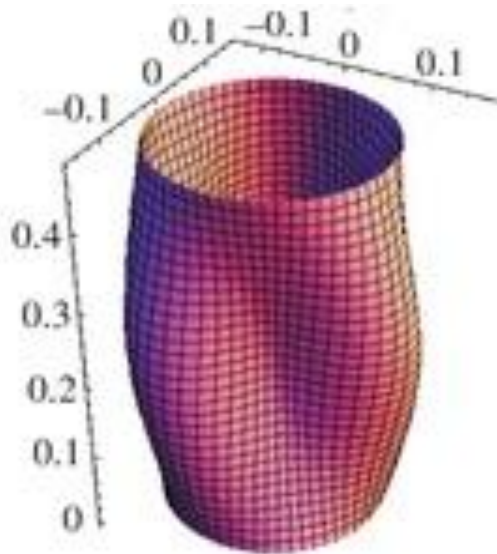
Նկ.2.6

Նկ. 2.6.-ում պատկերված է գլանային թաղանթը դեֆորմացիայից հետո: Տարբեր մակարդակներում (ըստ α կոորդինատի) գլանի հաստությունը պատկերված է տարբեր գույներով:



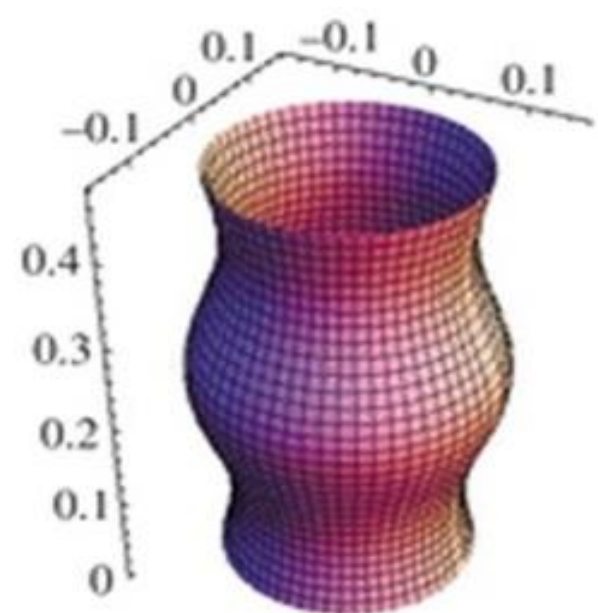
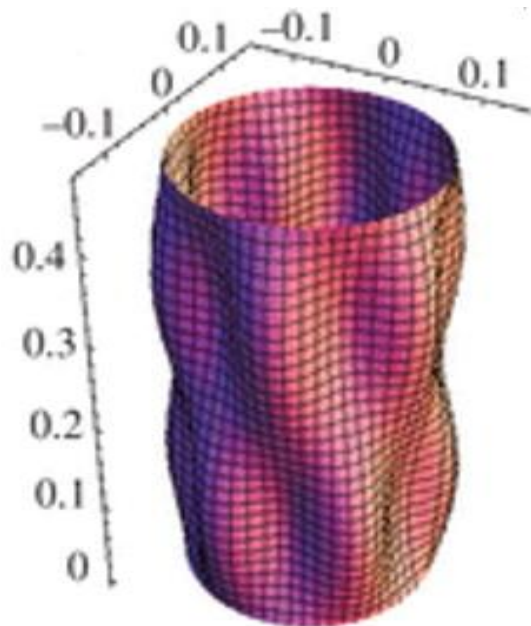
Նկ.2.7

Նկ.2.7-ում պատկերված է գլանային թաղանթի հաստության բաշխման պրոեկցիան գլանի առանցքին ուղղահայաց հարթության վրա:



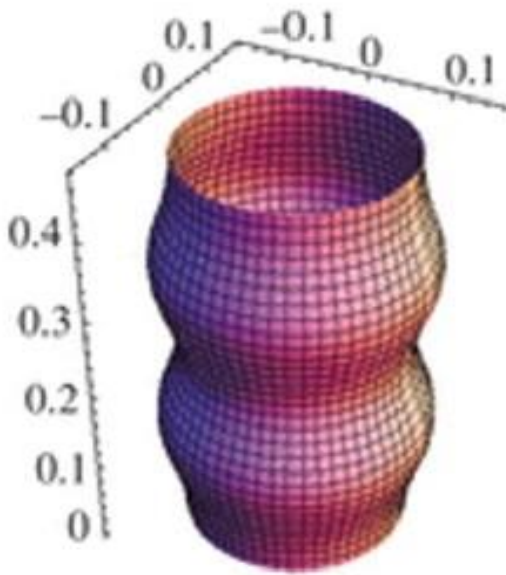
Նկ.2.8.ա

Նկ.2.8.բ

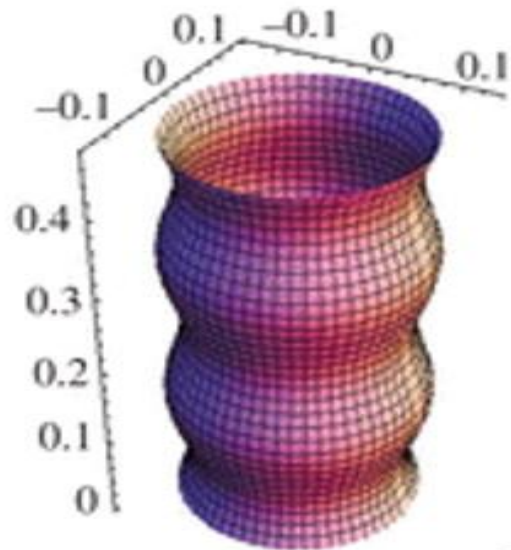


Նկ.2.8.գ

Նկ.2.8.դ



Նկ.2.8.ե



Նկ.2.8.զ

Նկ.2.8-ում պատկերված են գլանային թաղանթի ճկվածքի, տանգենցիալ տեղափոխության և հաստության փոփոխությունների տարածական պատկերները տարբեր մակարդակների վրա (գրաֆիկները ըստ α կոորդինատի):

2.3. Կենտրոնացված ուժի ազդեցությամբ ծովող շրջանային կտրվածքով ձողի ամենամեծ ճկվածքը հնարավորին չափ փոքրացնելու խնդիր

Դիցուք $2l$ երկարությամբ շրջանային ձողը հողակապորեն ամրակցված է $x = \pm l$ եզրերում և նրա վրա $x = 0$ կետում ազդում է $q = P \cdot \delta(x)$ կենտրոնացված ուժը, որտեղ $\delta(x)$ -ը Դիրակի ֆունկցիան է:

Դիտարկենք փոփոխական շառավղով շրջանային լայնական հատույթ ունեցող ձողի օպտիմալացման հետևյալ խնդիրը. գտնել շրջանային ձողի լայնական հատույթի փոփոխական կտրվածքը բնութագրող այնպիսի $h(x) = r^2(x)$ ֆունկցիա, որի դեպքում ձողի ամենամեծ ճկվածքն ունենում է հնարավորին չափ փոքր արժեք, իսկ ձողի ծավալն ընդունում է նախապես տրված արժեք ($r(x)$ -ը լայնական հատույթի շառավիղն է): [5,85].

$h(x)$ ֆունկցիայի միջոցով որոշվում են շրջանային ձողի լայնական կտրվածքի $S(x)$ մակերեսը և $D = EI(x)$ կոշտությունը [8,81].

$$S(x) = \pi r^2 = \pi h(x) = B_2 h(x) \quad EI(x) = \frac{E\pi}{4} r^4 = \frac{E\pi}{4} h^2(x) = A_2 h^2(x) \quad (3.1)$$

որտեղ $B_2 = \pi$, $A_2 = \frac{E\pi}{4}$, $I(x)$ -ը հատույթի իներցիայի մոմենտն է, E -ն՝ ձողի նյութի Յունգի մոդուլը:

Չնակերպված խնդրի հիմնական առնչությունները գրվում են հետևյալ ձևով.

$$(DW_{xx})_{xx} = q, \quad W /_{x=\pm l} = DW_{xx} /_{x=\pm l} = 0 \quad (3.2)$$

$$\int_{-l}^l S(x) dx = V_0 \quad J = \int_{-l}^l W(x) \delta(x) dx = W(0) \xrightarrow{h(x)} \min ,$$

որտեղ $W(x)$ -ը ձողի ճկվածքի ֆունկցիան է, J -ն՝ նպատակի ֆունկցիոնալը:

Չնակերպված երկակի խնդրում պահանջվում է հնարավորինս փոքրացնել շրջանային ձողի M զանգվածն այնպես, որ ձողի ամենամեծ ճկվածքը ստանա նախապես տրված արժեքը:

Օգտվելով վարիացիոն եղանակից ստանանք օպտիմալության անհրաժեշտ պայմանները [8,74,75]:

Չողի ծոման հավասարումը գրենք վարիացիաներով.

$$(h^2 \delta W_{xx})_{xx} + 2(hW_{xx} \delta h)_{xx} = 0 \quad (3.3)$$

Երկու կողմը բազմապատկենք որևէ $V(x)$ համալուծ ֆունկցիայով և մասերով ինտեգրենք: Ինտեգրալի ներսում պահանջենք, որ զերո դառնա δW աճի գործակիցը, իսկ ինտեգրալից դուրս պահանջենք, որ զերո դառնա $V(x)$ ֆունկցիան և դրա ածանցյալները պարունակող այն գումարելիների եզրային արժեքները, որոնք զերո չեն ստացվում $W(x)$ ֆունկցիայի և դրա ածանցյալների եզրային արժեքների պատճառով, ապա $\delta J = 0$ պայմանից [8], այսպիսով, ստացվում են.

$$\begin{cases} (h^2 V_{xx})_{xx} + \lambda q = 0 \\ 2hW_{xx} V_{xx} + 1 = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Այստեղից արտաքսենք $V(x)$ ֆունկցիան: Հեշտ է նկատել, որ $V = -\lambda W$, որը տեղադրելով (3.4) համակարգի երկրորդ հավասարման մեջ, կստանանք.

$$hW_{xx}^2 = C^2 \quad (3.5)$$

որտեղ C -ն անհայտ հաստատուն է: Վերջինս որոշվում է ձողի բեռնավորման ընթացքում կատարվող աշխատանքի և առաձգական դեֆորմացիաների էներգիայի հավասարության պայմանից [8],

$$P = \frac{A_2}{B_2 W(0)} \int_{-l}^l h^2 W_{xx}^2 dx = \frac{A_2 C^2 V_0}{B_2 W(0)} \quad (3.6)$$

Օպտիմալության հավասարումից որոշենք $h(x)$ պարամետրը.

$$h(x) = \frac{C^2}{W_{xx}^2} \quad (3.7)$$

Հետևաբար, շրջանային ձողի ծոման եզրային խնդրից արտաքսելով $h(x)$ ֆունկցիան, ձկվածքի $W(x)$ ֆունկցիայի համար կունենանք հետևյալ եզրային խնդիրը.

$$\begin{cases} (W^{-3}_{xx}) = 0 & (0 < x < l, -l < x < 0) \\ W(-l) = W(l) = hW_{xx}(-l) = hW_{xx}(l) = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

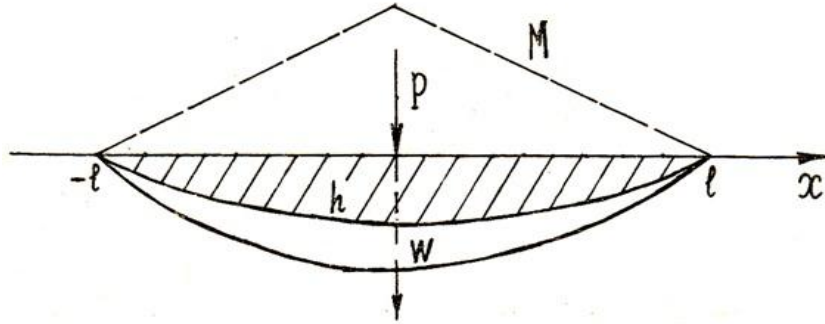
Ինտեգրելով այս եզրային խնդիրը և օգտագործելով $W_x(0) = 0$ սիմետրիայի պայմանը, $W(x)$ ֆունկցիայի համար կստանանք.

$$\begin{cases} W(x) = \frac{39P\pi^2 l^5}{250A_2 V_0^2} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(5 - 3\sqrt[3]{\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2}\right) & (0 \leq x \leq l) \\ W(x) = \frac{39P\pi^2 l^5}{250A_2 V_0^2} \left(1 + \frac{x}{l}\right) \left(5 - 3\sqrt[3]{\left(1 + \frac{x}{l}\right)^2}\right) & (-l \leq x \leq 0) \end{cases} \quad (3.9)$$

Այնուհետև (3.5) և (3.7) պայմաններից կորոշենք $h(x)$ օպտիմալ հաստությունը.

$$\begin{cases} h(x) = \frac{5V_0}{6\pi l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{\frac{2}{3}}, & (0 \leq x \leq l) \\ h(x) = \frac{5V_0}{6\pi l} \left(1 + \frac{x}{l}\right)^{\frac{2}{3}}, & (-l \leq x \leq 0) \end{cases} \quad (3.10)$$

(3.9) և (3.10) բանաձևերին համապատասխան ձկվածքի $W(x)$ ֆունկցիայի և $h(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկները կլինեն.



Նկ.2.9

Շ հաստատունն այս հաշվարկներում որոշվում է (3.6) պայմանի շնորհիվ՝ հաշվի առնելով նաև (3.2) պայմաններում առկա իզոպերիմետրիկ սահմանափակումը

$$C^2 = \frac{pbW(0)}{A_2V_0} = \left(\frac{pb \cdot 3l \cdot \frac{5}{8}}{A_2V_0 \cdot 10^3 \sqrt{c}} \right)^2$$

Ամենամեծ ճկվածքն այսպիսի շրջանային ձողի համար կլինի

$$J_* = W(0) = \frac{39p\pi^2 l^5}{250A_2V_0^2}$$

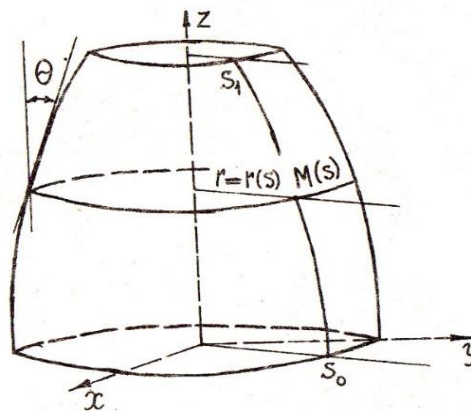
2.4. Օրթոտրոպ պատման թաղանթների օպտիմալ նախագծումը

Դարձյալ դիտարկենք այն դեպքը, երբ ունենք փոփոխական հաստությամբ միաշերտ համասեռ թաղանթ: Օրթոտրոպ թաղանթների ազատ տատանումները նկարագրվում են հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգով. [8,87,103,112,121]:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dS} \left\{ rh \left[B_{11} \left(\frac{dU}{dS} + \frac{W}{R_1} \right) + \frac{B_{12}}{r} (W \cos \theta + U \sin \theta) \right] \right\} + \frac{1}{R_1} \frac{d}{dS} \left\{ \frac{rh^3}{12} \left[B_{11} \frac{d}{dS} \left(-\frac{dW}{dS} + \frac{U}{R_1} \right) + B_{12} \frac{\sin \theta}{r} \right. \right. \\ & \left. \left. \left(\frac{dW}{dS} - \frac{U}{R_1} \right) \right] \right\} + h \left[B_{12} \left(\frac{dU}{dS} + \frac{W}{R_1} \right) + B_{22} \frac{1}{r} (W \cos \theta - U \sin \theta) \right] \sin \theta + \frac{\sin \theta}{R_1} \frac{h^3}{12} \left[B_{12} \frac{d}{dS} \left(-\frac{dW}{dS} + \frac{U}{R_1} \right) \right. \\ & \left. + B_{22} \frac{\sin \theta}{r} \left(\frac{dW}{dS} - \frac{U}{R_1} \right) \right] = -r\rho\omega^2 hU = -\omega^2 \psi_3(t)U \\ & \frac{d}{dS} \left\{ \frac{d}{dS} \left[\frac{rh^3}{12} \left(B_{11} \frac{d}{dS} \left(-\frac{dW}{dS} + \frac{U}{R_1} \right) + B_{12} \frac{\sin \theta}{r} \left(\frac{dW}{dS} + \frac{U}{R_1} \right) \right) \right] + \frac{h^3 \sin \theta}{12} \left[B_{12} \frac{d}{dS} \left(-\frac{dW}{dS} + \frac{U}{R_1} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + B_{22} \frac{\sin \theta}{r} \left(\frac{dW}{dS} - \frac{U}{R_1} \right) \right] \right\} - rh \left\{ \frac{1}{R_1} \left[B_{12} \left(\frac{dU}{dS} + \frac{W}{R_1} \right) + \frac{B_{12}}{r} (W \cos \theta - U \sin \theta) \right] + \frac{1}{R_2} \left[B_{12} \left(\frac{dU}{dS} + \frac{W}{R_1} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + B_{22} \frac{1}{r} (W \cos \theta - U \sin \theta) \right] \right\} = -r\rho\omega^2 hW = -\omega^2 \psi_3(D_3)W \\ & \psi_3(D_3) \equiv r\rho h, \quad D_3 = h(S) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Որտեղ S -ը թաղանթի պատման մակերևույթի միջօրեագծի աղեղն է՝ տվյալ M կետի և սևեռված հաշվարկային սկզբի՝ M_0 կետի միջև (նկ.2.10), $r = r(S)$ -ը M կետի հեռավորությունն է պատման OZ առանցքից, $\theta = \theta(S)$ -ը M կետում միջօրեագծի շոշափողի կազմած անկյունն է OZ առանցքի հետ, R_1, R_2 - ը պատման մակերևույթի կորության գլխավոր շառավիղներն են: Որոշակիության համար կենթադրենք, որ թաղանթի $S = S_0$ և $S = S_1$ եզրագծերում տեղի ունեն հետևյալ եզրային պայմանները. [8].

$$W(S) = \frac{dW}{dS} = U(S) = 0, \quad \text{երբ } S = S_0, \quad S = S_1 \quad (4.2)$$



Նկ.2.10

Առանցքասիմետրիկ գլանային անիզոտրոպ թաղանթների դեպքը:

Թաղանթի զանգվածը հաստատուն արտադրիչի ճշտությամբ համարժեք է (4.3)

ինտեգրալին:

$$J = \int_{S_0}^S r h dS \quad (4.3)$$

Այսպիսով, մեր խնդիրն է հնարավորին փոքրացնել J ֆունկցիոնալը, երբ $\omega = \omega_0$: Դա նշանակում է, որ (4.3) ֆունկցիոնալը $h(\alpha)$ ֆունկցիայի ընտրությամբ պետք է ընդունի ամենափոքր արժեք և միևնույն ժամանակ պետք է բավարարվեն (4.1) դիֆերենցիալ հավասարումներն և (4.2) եզրային պայմանները, երբ $\omega = \omega_0$

(4.1)-(4.2) խնդիրը լուծվում է վարիացիոն մեթոդով:

h ֆունցիային տանք δh աճ: Այդ դպքում (4.1) համակարգի հավասարումները

կգրվեն ըստ այդ աճերի և կստանան հետևյալ տեսքերը:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dS} \left\{ rh + \delta h \left[B_{11} \left(\frac{d(U + \delta U)}{dS} + \frac{W + \delta W}{R_1} \right) + \frac{B_{12}}{r} (W + \delta W \cos \theta + U + \delta U \sin \theta) \right] \right\} + \frac{1}{R_1} \frac{d}{dS} \left\{ \frac{rh + \delta h^3}{12} \left[B_{11} \frac{d}{dS} \right. \right. \\ & \left. \left(-\frac{d(W + \delta W)}{dS} + \frac{U + \delta U}{R_1} \right) + B_{12} \frac{\sin \theta}{r} \left(\frac{d(W + \delta W)}{dS} - \frac{U + \delta U}{R_1} \right) \right] \right\} + h + \delta h \left[B_{12} \left(\frac{d(U + \delta U)}{dS} + \frac{W + \delta W}{R_1} \right) + \right. \\ & \left. B_{22} \frac{1}{r} (W + \delta W \cos \theta - U + \delta U \sin \theta) \right] \sin \theta + \frac{\sin \theta}{R_1} \frac{h + \delta h^3}{12} \left[B_{12} \frac{d}{dS} \left(-\frac{d(W + \delta W)}{dS} + \frac{U + \delta U}{R_1} \right) + B_{22} \frac{\sin \theta}{r} \right. \\ & \left. \left(\frac{d(W + \delta W)}{dS} - \frac{U + \delta U}{R_1} \right) \right] + r \rho \omega^2 h + \delta h U + \delta U = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dS} \left\{ \frac{d}{dS} \left[\frac{rh + \delta h^3}{12} \left(B_{11} \frac{d}{dS} \left(-\frac{d(W + \delta W)}{dS} + \frac{U + \delta U}{R_1} \right) + B_{12} \frac{\sin \theta}{r} \left(\frac{d(W + \delta W)}{dS} + \frac{U + \delta U}{R_1} \right) \right) \right] + \frac{h + \delta h^3 \sin \theta}{12} \right. \\ & \left. \left[B_{12} \frac{d}{dS} \left(-\frac{d(W + \delta W)}{dS} + \frac{U + \delta U}{R_1} \right) + B_{22} \frac{\sin \theta}{r} \left(\frac{d(W + \delta W)}{dS} - \frac{U + \delta U}{R_1} \right) \right] \right\} - rh + \delta h \left\{ \frac{1}{R_1} \left[B_{12} \left(\frac{d(U + \delta U)}{dS} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{W + \delta W}{R_1} \right) + \frac{B_{12}}{r} (W + \delta W \cos \theta - U + \delta U \sin \theta) \right] + \frac{1}{R_2} \left[B_{12} \left(\frac{d(U + \delta U)}{dS} + \frac{W + \delta W}{R_1} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + B_{22} \frac{1}{r} (W + \delta W \cos \theta - U + \delta U \sin \theta) \right] \right\} + r \rho \omega^{-2} h + \delta h W + \delta W = 0 \end{aligned}$$

(4.4)

Հաշվի առնելով (4.1) հավասարումները և արհամարելով δh , δU , δW աճերի

երկրորդ կարգի փոքր մեծությունների կստանանք:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dS} \left\{ r \left[B_{11} h \frac{d\delta U}{dS} + B_{11} \delta h \frac{dU}{dS} + B_{11} h \frac{\delta W}{R_1} + B_{11} \delta h \frac{W}{R_1} + \frac{B_{12}}{r} h \delta W \cos \theta + \frac{B_{12}}{r} \delta h W \cos \theta + \frac{B_{12}}{r} h \delta U \sin \theta + \right. \right. \\ & \left. \frac{B_{12}}{r} \delta h U \sin \theta \right] \right\} + \frac{1}{R_1} \frac{d}{dS} \left\{ \frac{r}{12} \left[-B_{11} \frac{d}{dS} h^3 \frac{d\delta W}{dS} - B_{11} \frac{d}{dS} 3h^2 \delta h \frac{dW}{dS} + B_{11} \frac{d}{dS} h^3 \frac{\delta U}{R_1} + B_{11} \frac{d}{dS} 3h^2 \delta h \right. \right. \\ & \left. \frac{U}{R_1} + B_{12} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d}{dS} h^3 \frac{d\delta W}{dS} + B_{12} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d}{dS} 3h^2 \delta h \frac{dW}{dS} - B_{12} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d}{dS} h^3 \frac{\delta U}{R_1} - B_{12} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d}{dS} 3h^2 \delta h \frac{U}{R_1} \right] \right\} \\ & + \left[B_{12} h \frac{d\delta U}{dS} + B_{12} \delta h \frac{dU}{dS} + B_{12} h \frac{\delta W}{R_1} + B_{12} \delta h \frac{W}{R_1} + B_{22} \frac{1}{r} h \delta W \cos \theta + B_{22} \frac{1}{r} \delta h W \cos \theta - B_{22} \frac{1}{r} h \delta U \sin \theta - B_{22} \frac{1}{r} \right. \\ & \left. \delta h U \sin \theta \right] \sin \theta + \frac{\sin \theta}{R_1} \frac{1}{12} \left[-B_{12} \frac{d}{dS} h^3 \frac{d\delta W}{dS} - B_{12} \frac{d}{dS} 3h^2 \delta h \frac{dW}{dS} + B_{12} \frac{d}{dS} h^3 \frac{\delta U}{R_1} + B_{12} \frac{d}{dS} 3h^2 \delta h \frac{U}{R_1} + \right. \\ & \left. B_{22} \frac{\sin \theta}{r} h^3 \frac{d\delta W}{dS} + B_{22} \frac{\sin \theta}{r} 3h^2 \delta h \frac{dW}{dS} - B_{22} \frac{\sin \theta}{r} h^3 \frac{\delta U}{R_1} - B_{22} \frac{\sin \theta}{r} 3h^2 \delta h \frac{U}{R_1} \right] + r \rho \omega^2 h \delta U + r \rho \omega^2 \delta h U = 0 \end{aligned}$$

(4.5)

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{ds} \left\{ \frac{d}{dS} \left[\frac{r}{12} \left(-B_{11}h^3 \frac{d\delta W}{dS} - B_{11}3h^2\delta h \frac{dW}{dS} + B_{11}h^3 \frac{\delta U}{R_1} + B_{11}3h^2\delta h \frac{U}{R_1} + B_{12} \frac{\sin\theta}{r} h^2 \frac{d\delta W}{dS} + B_{12} \frac{\sin\theta}{r} 3h^2\delta h \frac{dW}{dS} + B_{12} \frac{\sin\theta}{r} h^3 \frac{\delta U}{R_1} + B_{12} \frac{\sin\theta}{r} 3h^2\delta h \frac{U}{R_1} \right) \right] + \frac{\sin\theta}{12} \left[-B_{12} \frac{d}{dS} h^3 \frac{d\delta W}{dS} - B_{12} \frac{d}{dS} 3h^2\delta h \frac{dW}{dS} + B_{12} \frac{d}{dS} h^3 \frac{\delta U}{R_1} + B_{12} \frac{d}{dS} 3h^2\delta h \frac{U}{R_1} \right] + B_{22} \frac{\sin\theta}{r} h^3 \frac{d\delta W}{dS} + B_{22} \frac{\sin\theta}{r} 3h^2\delta h \frac{dW}{dS} - B_{22} \frac{\sin\theta}{r} h^3 \frac{\delta U}{R_1} - B_{22} \frac{\sin\theta}{r} 3h^2\delta h \frac{U}{R_1} \right] \left. \vphantom{\frac{d}{ds}} \right\} \\
& - r \left\{ \frac{1}{R_1} \left[B_{12}h \frac{d\delta U}{dS} + B_{12}\delta h \frac{dU}{dS} + B_{12}h \frac{\delta W}{R_1} + B_{12}\delta h \frac{W}{R_1} + B_{12} \frac{1}{r} h\delta W \cos\theta + B_{12} \frac{1}{r} \delta h W \cos\theta - B_{12} \frac{1}{r} h\delta U \sin\theta - B_{12} \frac{1}{r} \delta h U \sin\theta \right] + \frac{1}{R_2} \left[B_{12}h \frac{d\delta U}{dS} + B_{12}\delta h \frac{dU}{dS} + B_{12}h \frac{\delta W}{R_1} + B_{12}\delta h \frac{W}{R_1} + B_{22} \frac{1}{r} h\delta W \cos\theta + B_{22} \frac{1}{r} \delta h W \cos\theta - B_{22} \frac{1}{r} h\delta U \sin\theta - B_{22} \frac{1}{r} \delta h U \sin\theta \right] \right\} + r\rho\omega^{-2} h\delta W + r\rho\omega^{-2} \delta h W = 0
\end{aligned}$$

(4.3) նպատակի ֆունկցիոնալը նույնպես կատանա աճ՝

$$\delta J = \int_{S_0}^S r \delta h dS \quad (4.6)$$

(4.5) հանակարգի առաջին և երկրորդ հավասարումների ձախ մասերը բազմապատկենք համապատասխանանաբար U_1 , W_1 համալուծ ֆունկցիաներով: Ստացված արտահայտությունների գումարը ինտեգրենք S_0 -ից S որին էլ գումարենք (4.6) արտահայտությունը:

$$\begin{aligned}
& \left[\left[\frac{d}{dS} \left\{ r \left[B_{11}h \frac{d\delta U}{dS} + B_{11}\delta h \frac{dU}{dS} + B_{11}h \frac{\delta W}{R_1} + B_{11}\delta h \frac{W}{R_1} + \frac{B_{12}}{r} h\delta W \cos\theta + \frac{B_{12}}{r} \delta h W \cos\theta + \frac{B_{12}}{r} h\delta U \sin\theta + \frac{B_{12}}{r} \delta h U \sin\theta \right] \right\} + \frac{1}{R_1} \frac{d}{dS} \left\{ \frac{r}{12} \left[-B_{11} \frac{d}{dS} h^3 \frac{d\delta W}{dS} - B_{11} \frac{d}{dS} 3h^2\delta h \frac{dW}{dS} + B_{11} \frac{d}{dS} h^3 \frac{\delta U}{R_1} + B_{11} \frac{d}{dS} 3h^2\delta h \frac{U}{R_1} + B_{12} \frac{\sin\theta}{r} \frac{d}{dS} h^3 \frac{d\delta W}{dS} + B_{12} \frac{\sin\theta}{r} \frac{d}{dS} 3h^2\delta h \frac{dW}{dS} - B_{12} \frac{\sin\theta}{r} \frac{d}{dS} h^3 \frac{\delta U}{R_1} - B_{12} \frac{\sin\theta}{r} \frac{d}{dS} 3h^2\delta h \frac{U}{R_1} \right] \right\} \right. \\
& \left. + \left[B_{12}h \frac{d\delta U}{dS} + B_{12}\delta h \frac{dU}{dS} + B_{12}h \frac{\delta W}{R_1} + B_{12}\delta h \frac{W}{R_1} + B_{22} \frac{1}{r} h\delta W \cos\theta + B_{22} \frac{1}{r} \delta h W \cos\theta - B_{22} \frac{1}{r} h\delta U \sin\theta - B_{22} \frac{1}{r} \delta h U \sin\theta \right] \sin\theta + \frac{\sin\theta}{R_1} \frac{1}{12} \left[-B_{12} \frac{d}{dS} h^3 \frac{d\delta W}{dS} - B_{12} \frac{d}{dS} 3h^2\delta h \frac{dW}{dS} + B_{12} \frac{d}{dS} h^3 \frac{\delta U}{R_1} + B_{12} \frac{d}{dS} 3h^2\delta h \frac{U}{R_1} + B_{22} \frac{\sin\theta}{r} h^3 \frac{d\delta W}{dS} + B_{22} \frac{\sin\theta}{r} 3h^2\delta h \frac{dW}{dS} - B_{22} \frac{\sin\theta}{r} h^3 \frac{\delta U}{R_1} - B_{22} \frac{\sin\theta}{r} 3h^2\delta h \frac{U}{R_1} \right] + r\rho\omega^2 h\delta U + r\rho\omega^2 \delta h U \right] U_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{d}{dS} \left\{ \frac{d}{dS} \left[\frac{r}{12} \left(-B_{11} \frac{d}{dS} h^3 \frac{d\delta W}{dS} - B_{11} \frac{d}{dS} 3h^2 \delta h \frac{dW}{dS} + B_{11} \frac{d}{dS} h^3 \frac{\delta U}{R_1} + B_{11} \frac{d}{dS} 3h^2 \delta h \frac{U}{R_1} + B_{12} \frac{\sin \theta}{r} h^2 \frac{d\delta W}{dS} \right. \right. \right. \\
& + B_{12} \frac{\sin \theta}{r} 3h^2 \delta h \frac{dW}{dS} + B_{12} \frac{\sin \theta}{r} h^3 \frac{\delta U}{R_1} + B_{12} \frac{\sin \theta}{r} 3h^2 \delta h \frac{U}{R_1} \left. \left. \left. \right) \right] + \frac{\sin \theta}{12} \left[-B_{12} \frac{d}{dS} h^3 \frac{d\delta W}{dS} - B_{12} \frac{d}{dS} 3h^2 \delta h \frac{dW}{dS} \right. \right. \\
& + B_{12} \frac{d}{dS} h^3 \frac{\delta U}{R_1} + B_{12} \frac{d}{dS} 3h^2 \delta h \frac{U}{R_1} + B_{22} \frac{\sin \theta}{r} h^3 \frac{d\delta W}{dS} + B_{22} \frac{\sin \theta}{r} 3h^2 \delta h \frac{dW}{dS} - B_{22} \frac{\sin \theta}{r} h^3 \frac{\delta U}{R_1} - B_{22} \frac{\sin \theta}{r} 3h^2 \\
& \delta h \frac{U}{R_1} \left. \left. \right] \right\} - r \left\{ \frac{1}{R_1} \left[B_{12} h \frac{d\delta U}{dS} + B_{12} \delta h \frac{dU}{dS} + B_{12} h \frac{\delta W}{R_1} + B_{12} \delta h \frac{W}{R_1} + B_{12} \frac{1}{r} h \delta W \cos \theta + B_{12} \frac{1}{r} \delta h W \cos \theta - B_{12} \frac{1}{r} \right. \right. \\
& h \delta U \sin \theta - B_{12} \frac{1}{r} \delta h U \sin \theta \left. \left. \right] + \frac{1}{R_2} \left[B_{12} h \frac{d\delta U}{dS} + B_{12} \delta h \frac{dU}{dS} + B_{12} h \frac{\delta W}{R_1} + B_{12} \delta h \frac{W}{R_1} + B_{22} \frac{1}{r} h \delta W \cos \theta + B_{22} \frac{1}{r} \delta h W \right. \right. \\
& \cos \theta - B_{22} \frac{1}{r} h \delta U \sin \theta - B_{22} \frac{1}{r} \delta h U \sin \theta \left. \left. \right] \right\} + r \rho \bar{\omega}^{-2} h \delta W + r \rho \bar{\omega}^{-2} \delta h W \left. \right] W_1 + \delta h \left. \right] dS
\end{aligned} \tag{4.7}$$

(4.7)-ինտեգրալում կատարենք մասերով ինտեգրում, որպեսզի ազատվենք δh , δU , δW աճերի ածանցիալներից:

Ստացված ինտեգրալտակ արտահայտություններում կատարենք խմբավորում ըստ δh , δU , δW աճերի: Ինտեգրալից դուրս եղած աճերի մի մասը տրված են (4.2) եզրային պայմաններով՝ որոնք նույնպես գրված են աճերով: Ինտեգրալից դուրս մնացած արտահայտությունները կբավարարեն մեր ուզած պայմաններին, որոնք կհանդիսանան որպես եզրային պայմաններ U_1 , W_1 համալուծ ֆունկցիաների համար:

Այսպիսով (4.7) ինտեգրալը կունենա հետևյալ տեսքը:

$$\begin{aligned}
& \int_{S_0}^S \left[\left\{ r \left[B_{11} \delta U \frac{d}{dS} h \frac{dU_1}{dS} - B_{11} \delta h \frac{dU_1}{dS} \frac{dU}{dS} - \frac{B_{11}}{R_1} h \frac{dU_1}{dS} \delta W - \frac{B_{11}}{R_1} \delta h \frac{dU_1}{dS} W + \frac{B_{12}}{r} h \frac{dU_1}{dS} \delta W \cos \theta - \frac{B_{12}}{r} \right. \right. \right. \\
& \delta h \frac{dU_1}{dS} W \cos \theta - \frac{B_{12}}{r} h \frac{dU_1}{dS} \delta U \sin \theta - \frac{B_{12}}{r} \delta h \frac{dU_1}{dS} U \sin \theta \left. \left. \left. \right] \right\} + \frac{1}{R_1} \left\{ \frac{r}{12} \left[-B_{11} \delta W \frac{d^2}{dS^2} h^3 \frac{dU_1}{dS} + 3B_{11} h^2 \delta h \right. \right. \right. \\
& \frac{d^2 W}{dS^2} \frac{dU_1}{dS} + \frac{B_{11}}{R_1} \frac{d}{dS} h^3 \frac{dU_1}{dS} \delta U + \frac{3B_{11}}{R_1} \frac{d}{dS} h^2 \delta h \frac{dU_1}{dS} U + B_{12} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d}{dS} h^3 \frac{dU_1}{dS} \delta W - B_{12} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d}{dS} 3h^2 \delta h \frac{dU_1}{dS} \\
& W - \frac{B_{12}}{R_1} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d}{dS} h^3 \frac{dU_1}{dS} \delta U - \frac{B_{12}}{R_1} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d}{dS} 3h^2 \delta h \frac{dU_1}{dS} U \left. \left. \right] \right\} + \left[B_{12} \delta U \frac{dhU_1}{dS} - B_{12} \delta h \frac{dU}{dS} U_1 - \frac{B_{12}}{R_1} h \delta W U_1 \right. \\
& - \frac{B_{12}}{R_1} \delta h W U_1 - B_{22} \frac{1}{r} h \delta W U_1 \cos \theta + B_{22} \frac{1}{r} \delta h W U_1 \cos \theta + B_{22} \frac{1}{r} h \delta U U_1 \sin \theta + B_{22} \frac{1}{r} \delta h U U_1 \sin \theta \left. \right] \sin \theta + \frac{\sin \theta}{R_1} \\
& \frac{1}{12} \left[-B_{12} \delta W \frac{d^2}{dS^2} h^3 \frac{dU_1}{dS} + 3B_{12} h^2 \delta h \frac{d^2 W}{dS^2} \frac{dU_1}{dS} - \frac{B_{12}}{R_1} \frac{d}{dS} h^3 \frac{dU_1}{dS} \delta U - \frac{3B_{12}}{R_1} \frac{d}{dS} h^2 \delta h \frac{dU_1}{dS} U + B_{22} \frac{\sin \theta}{r} h^3 \right. \\
& \left. \frac{dU_1}{dS} \delta W - B_{22} \frac{\sin \theta}{r} 3h^2 \delta h \frac{dU_1}{dS} W + \frac{B_{22}}{R_1} \frac{\sin \theta}{r} h^3 \delta U U_1 + \frac{B_{22}}{R_1} \frac{\sin \theta}{r} 3h^2 \delta h U U_1 \right] + r \rho \bar{\omega}^2 h \delta U U_1 + r \rho \bar{\omega}^2 \delta h U U_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{r}{12} \left(B_{11} \delta W \frac{d^3}{dS^3} h^3 \frac{dW_1}{dS} - B_{11} \frac{d^3}{dS^3} 3h^2 \delta h \frac{dW_1}{dS} \frac{dW}{dS} - \frac{B_{11}}{R_1} \frac{d^3}{dS^3} h^3 \frac{dW_1}{dS} \delta U - \frac{B_{11}}{R_1} \frac{d^3}{dS^3} 3h^2 \delta h \frac{dW_1}{dS} U + \right. \right. \\
& B_{12} \delta W \frac{\sin \theta}{r} \frac{d^2}{dS^2} h^2 \frac{dW_1}{dS} - B_{12} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d^2}{dS^2} 3h^2 \delta h \frac{dW_1}{dS} \frac{dW}{dS} - \frac{B_{12}}{R_1} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d^2}{dS^2} h^3 \delta U W_1 - B_{12} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d^2}{dS^2} 3h^2 \delta h \\
& \left. U W_1 \right)] + \frac{\sin \theta}{12} \left[-B_{12} \delta W \frac{d^3}{dS^3} h^3 \frac{dW_1}{dS} + B_{12} \frac{d^2}{dS^2} 3h^2 \delta h \frac{dW_1}{dS} \frac{dW}{dS} + \frac{B_{12}}{R_1} \frac{d^2}{dS^2} h^3 \frac{dW_1}{dS} \delta U + \frac{B_{12}}{R_1} \frac{d^2}{dS^2} 3h^2 \delta h \right. \\
& \left. \frac{dW_1}{dS} U + B_{22} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d^2}{dS^2} h^3 \frac{dW_1}{dS} \delta W - B_{22} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d^2}{dS^2} 3h^2 \delta h \frac{dW_1}{dS} \frac{dW}{dS} - \frac{B_{22}}{R_1} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d^2}{dS^2} h^3 W_1 \delta U - \frac{B_{22}}{R_1} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d^2}{dS^2} \right. \\
& \left. 3h^2 \delta h W_1 U \right] \} - r \left\{ \frac{1}{R_1} \left[B_{12} \frac{d}{dS} h \frac{dW_1}{dS} \delta U - B_{12} \delta h \frac{dW_1}{dS} \frac{dU}{dS} - \frac{B_{12}}{R_1} h \frac{dW_1}{dS} \delta W - \frac{B_{12}}{R_1} \delta h \frac{dW_1}{dS} W - B_{12} \frac{1}{r} h \frac{dW_1}{dS} \delta W \right. \right. \\
& \left. \left. \cos \theta + B_{12} \frac{1}{r} \delta h \frac{dW_1}{dS} W \cos \theta + B_{12} \frac{1}{r} h \frac{dW_1}{dS} \delta U \sin \theta + B_{12} \frac{1}{r} \delta h \frac{dW_1}{dS} U \sin \theta \right] + \frac{1}{R_2} \left[B_{12} \frac{d}{dS} h \frac{dW_1}{dS} \delta U - B_{12} \delta h \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{dW_1}{dS} \frac{dU}{dS} - \frac{B_{12}}{R_1} h \frac{dW_1}{dS} \delta W - \frac{B_{12}}{R_1} \delta h \frac{dW_1}{dS} W + B_{22} \frac{1}{r} h \frac{dW_1}{dS} \delta W \cos \theta - B_{22} \frac{1}{r} \delta h \frac{dW_1}{dS} W \cos \theta + B_{22} \frac{1}{r} h \frac{dW_1}{dS} \delta U \sin \theta \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{22} \frac{1}{r} \delta h \frac{dW_1}{dS} U \sin \theta \right] \right\} + r \rho \omega^{-2} h \delta W W_1 + r \rho \omega^{-2} \delta h W W_1] dS
\end{aligned} \tag{4.8}$$

(4.8)-ինտեգրալում ինտեգրալատակ արտահայտությունում կատարենք խմբավորում ըստ δh , δU , δW աճերի, պահանջենք որ δh , δU , δW աճերի գործակիցները հավասար լինեն զերոյի: Դա հնարավոր է, քանի որ U_1 , W_1 ֆունկցիաները որևէ սահմանափակման չեն բավարարում և այժմ պահանջում ենք, որ դրանք բավարարեն վերը նշված հավասարումներին:

$$\begin{aligned}
& \left\{ r \left[B_{11} \frac{d}{dS} h \frac{dU_1}{dS} - \frac{B_{12}}{r} h \frac{dU_1}{dS} \sin \theta \right] \right\} + \frac{1}{R_1} \left\{ \frac{r}{12} \left[+ \frac{B_{11}}{R_1} \frac{d}{dS} h^3 \frac{dU_1}{dS} - \frac{B_{12}}{R_1} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d}{dS} h^3 \frac{dU_1}{dS} \right] \right\} + \\
& \left[B_{12} \frac{dhU_1}{dS} + B_{22} \frac{1}{r} h U_1 \sin \theta \right] \sin \theta + \frac{\sin \theta}{R_1} \frac{1}{12} \left[- \frac{B_{12}}{R_1} \frac{d}{dS} h^3 \frac{dU_1}{dS} + \frac{B_{22}}{R_1} \frac{\sin \theta}{r} h^3 U_{11} \right] + r \rho \omega^2 h U_1 + \\
& \left[\frac{r}{12} \left(- \frac{B_{11}}{R_1} \frac{d^3}{dS^3} h^3 \frac{dW_1}{dS} - \frac{B_{12}}{R_1} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d^2}{dS^2} h^3 W_1 \right) \right] + \frac{\sin \theta}{12} \left[\frac{B_{12}}{R_1} \frac{d^2}{dS^2} h^3 \frac{dW_1}{dS} - \frac{B_{22}}{R_1} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d^2}{dS^2} h^3 W_1 \right] \} \\
& - r \left\{ \frac{1}{R_1} \left[B_{12} \frac{d}{dS} h \frac{dW_1}{dS} + B_{12} \frac{1}{r} h \frac{dW_1}{dS} \sin \theta \right] + \frac{1}{R_2} \left[B_{12} \frac{d}{dS} h \frac{dW_1}{dS} + B_{22} \frac{1}{r} h \frac{dW_1}{dS} \sin \theta \right] \right\} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ r \left[-\frac{B_{11}}{R_1} h \frac{dU_1}{dS} + \frac{B_{12}}{r} h \frac{dU_1}{dS} \cos \theta \right] \right\} + \frac{1}{R_1} \left\{ \frac{r}{12} \left[-B_{11} \frac{d^2}{dS^2} h^3 \frac{dU_1}{dS} + B_{12} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d}{dS} h^3 \frac{dU_1}{dS} \right] \right\} \\
& + \left[-\frac{B_{12}}{R_1} h U_1 - B_{22} \frac{1}{r} h U_1 \cos \theta \right] \sin \theta + \frac{\sin \theta}{R_1} \frac{1}{12} \left[-B_{12} \frac{d^2}{dS^2} h^3 \frac{dU_1}{dS} + B_{22} \frac{\sin \theta}{r} h^3 \frac{dU_1}{dS} \right] + \\
& \left[\frac{r}{12} \left(B_{11} \frac{d^3}{dS^3} h^3 \frac{dW_1}{dS} + B_{12} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d^2}{dS^2} h^2 \frac{dW_1}{dS} \right) \right] + \frac{\sin \theta}{12} \left[-B_{12} \frac{d^3}{dS^3} h^3 \frac{dW_1}{dS} + B_{22} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d^2}{dS^2} \right. \\
& \left. h^3 \frac{dW_1}{dS} \right] \left\} - r \left\{ \frac{1}{R_1} \left[-\frac{B_{12}}{R_1} h \frac{dW_1}{dS} - B_{12} \frac{1}{r} h \frac{dW_1}{dS} \cos \theta \right] + \frac{1}{R_2} \left[-\frac{B_{12}}{R_1} h \frac{dW_1}{dS} + B_{22} \frac{1}{r} h \frac{dW_1}{dS} \cos \theta \right] \right\} \quad (4.9) \\
& + r \rho \bar{\omega}^{-2} h W_1 = 0
\end{aligned}$$

Այս դեպքում δh գործակիցը պետք է լինի 0 , քանի որ $\delta J = 0$ կամայական δh դեպքում:

$$\begin{aligned}
& \left\{ r \left[-B_{11} \frac{dU_1}{dS} \frac{dU}{dS} - \frac{B_{11}}{R_1} \frac{dU_1}{dS} W - \frac{B_{12}}{r} \frac{dU_1}{dS} W \cos \theta - \frac{B_{12}}{r} \frac{dU_1}{dS} U \sin \theta \right] \right\} + \frac{1}{R_1} \left\{ \frac{r}{12} \left[+3B_{11} h^2 \frac{d^2 W}{dS^2} \frac{dU_1}{dS} + \right. \right. \\
& \left. \frac{3B_{11}}{R_1} \frac{d}{dS} h^2 \frac{dU_1}{dS} U - B_{12} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d}{dS} 3h^2 \frac{dU_1}{dS} W - \frac{B_{12}}{R_1} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d}{dS} 3h \frac{dU_1}{dS} U \right] \left\} + \left[-B_{12} \frac{dU}{dS} U_1 - \frac{B_{12}}{R_1} W U_1 + B_{22} \frac{1}{r} \right. \right. \\
& \left. W U_1 \cos \theta + B_{22} \frac{1}{r} U U_1 \sin \theta \right] \sin \theta + \frac{\sin \theta}{R_1} \frac{1}{12} \left[3B_{12} h^2 \frac{d^2 W}{dS^2} \frac{dU_1}{dS} - \frac{3B_{12}}{R_1} \frac{d}{dS} h^2 \frac{dU_1}{dS} U - B_{22} \frac{\sin \theta}{r} 3h^2 \frac{dU_1}{dS} W + \right. \\
& \left. \frac{B_{22}}{R_1} \frac{\sin \theta}{r} 3h^2 U U_1 \right] + r \rho \bar{\omega}^2 U U_1 + \left[\frac{r}{12} \left(-B_{11} \frac{d^3}{dS^3} 3h^2 \frac{dW_1}{dS} \frac{dW}{dS} - \frac{B_{11}}{R_1} \frac{d^3}{dS^3} 3h^2 \frac{dW_1}{dS} U - B_{12} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d^2}{dS^2} 3h^2 \right. \right. \\
& \left. \frac{dW_1}{dS} \frac{dW}{dS} - B_{12} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d^2}{dS^2} 3h^2 U W_1 \right) \left. \right] + \frac{\sin \theta}{12} \left[B_{12} \frac{d^2}{dS^2} 3h^2 \frac{dW_1}{dS} \frac{dW}{dS} + \frac{B_{12}}{R_1} \frac{d^2}{dS^2} 3h^2 \frac{dW_1}{dS} U - B_{22} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d}{dS} \right. \\
& \left. 3h^2 \frac{dW_1}{dS} \frac{dW}{dS} - \frac{B_{22}}{R_1} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d^2}{dS^2} 3h^2 W_1 U \right] \left\} - r \left\{ \frac{1}{R_1} \left[-B_{12} \frac{dW_1}{dS} \frac{dU}{dS} - \frac{B_{12}}{R_1} \frac{dW_1}{dS} W + B_{12} \frac{1}{r} \frac{dW_1}{dS} W \cos \theta + B_{12} \frac{1}{r} \right. \right. \\
& \left. \frac{dW_1}{dS} U \sin \theta \right] + \frac{1}{R_2} \left[-B_{12} \frac{dW_1}{dS} \frac{dU}{dS} - \frac{B_{12}}{R_1} \frac{dW_1}{dS} W - B_{22} \frac{1}{r} \frac{dW_1}{dS} W \cos \theta + B_{22} \frac{1}{r} \frac{dW_1}{dS} U \sin \theta \right] \left. \right\} + r \rho \bar{\omega}^{-2} W W_1 = 0 \quad (4.10)
\end{aligned}$$

(4.1) և (4.10) համակարգերի նմանությունից ելնելով, կարող ենք ասել, որ

$$U_1 = -UC, \quad W_1 = WC \quad (4.11)$$

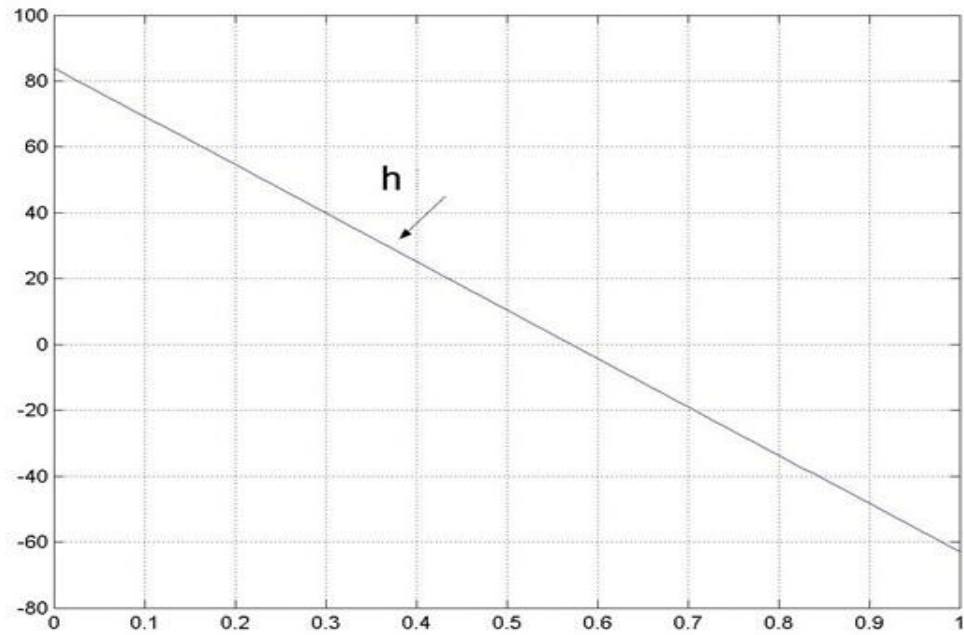
(4.11) հավասարությունները տեղադրենք (4.10) հավասարման մեջ, կստանանք:

$$\begin{aligned}
& \left\{ r \left[B_{11} \frac{d(UC)}{dS} \frac{dU}{dS} + \frac{B_{11}}{R_1} \frac{d(UC)}{dS} W + \frac{B_{12}}{r} \frac{d(UC)}{dS} W \cos \theta + \frac{B_{12}}{r} \frac{d(UC)}{dS} U \sin \theta \right] \right\} + \frac{1}{R_1} \left\{ \frac{r}{12} \left[-3B_{11} h^2 \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{d^2 W}{dS^2} \frac{d(UC)}{dS} - \frac{3B_{11}}{R_1} \frac{d}{dS} h^2 \frac{d(UC)}{dS} U + B_{12} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d}{dS} 3h^2 \frac{d(UC)}{dS} W + \frac{B_{12}}{R_1} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d}{dS} 3h \frac{d(UC)}{dS} U \right] \right\} + \left[B_{12} \right. \\
& \left. \frac{dU}{dS} (UC) + \frac{B_{12}}{R_1} W(UC) - B_{22} \frac{1}{r} W(UC) \cos \theta - B_{22} \frac{1}{r} U(UC) \sin \theta \right] \sin \theta + \frac{\sin \theta}{R_1} \frac{1}{12} \left[-3B_{12} h^2 \frac{d^2 W}{dS^2} \frac{d(UC)}{dS} \right. \\
& \left. + \frac{3B_{12}}{R_1} \frac{d}{dS} h^2 \frac{d(UC)}{dS} U + B_{22} \frac{\sin \theta}{r} 3h^2 \frac{d(UC)}{dS} W - \frac{B_{22}}{R_1} \frac{\sin \theta}{r} 3h^2 U(UC) \right] - r \rho \omega^2 U(UC) + \left[\frac{r}{12} \left(-B_{11} \frac{d^3}{dS^3} \right. \right. \\
& \left. \left. 3h^2 \frac{d(WC)}{dS} \frac{dW}{dS} - \frac{B_{11}}{R_1} \frac{d^3}{dS^3} 3h^2 \frac{d(WC)}{dS} U - B_{12} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d^2}{dS^2} 3h^2 \frac{d(WC)}{dS} \frac{dW}{dS} - B_{12} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d^2}{dS^2} 3h^2 U(WC) \right) \right] + \\
& \left. \frac{\sin \theta}{12} \left[B_{12} \frac{d^2}{dS^2} 3h^2 \frac{d(WC)}{dS} \frac{dW}{dS} + \frac{B_{12}}{R_1} \frac{d^2}{dS^2} 3h^2 \frac{d(WC)}{dS} U - B_{22} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d}{dS} 3h^2 \frac{d(WC)}{dS} \frac{dW}{dS} - \frac{B_{22}}{R_1} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d^2}{dS^2} \right. \right. \\
& \left. \left. 3h^2 (WC) U \right] \right\} - r \left\{ \frac{1}{R_1} \left[-B_{12} \frac{d(WC)}{dS} \frac{dU}{dS} - \frac{B_{12}}{R_1} \frac{d(WC)}{dS} W + B_{12} \frac{1}{r} \frac{d(WC)}{dS} W \cos \theta + B_{12} \frac{1}{r} \frac{d(WC)}{dS} U \sin \theta \right] + \right. \\
& \left. \frac{1}{R_2} \left[-B_{12} \frac{d(WC)}{dS} \frac{dU}{dS} - \frac{B_{12}}{R_1} \frac{d(WC)}{dS} W - B_{22} \frac{1}{r} \frac{d(WC)}{dS} W \cos \theta + B_{22} \frac{1}{r} \frac{d(WC)}{dS} U \sin \theta \right] \right\} + r \rho \omega^{-2} W(WC) = 0
\end{aligned} \tag{4.12}$$

(4.12) հավասարումը (4.1) հավասարումների համակարգի հետ միասին կազմում են փակ համակարգ $U(\alpha)$, $W(\alpha)$, $h(\alpha)$ անհայտ ֆունկցիաների նկատմամբ: Լուծելով այս հավասարումների համակարգը հաշվի առնելով համապատասխան (4.2) եզրային պայմանները, U , W տեղափոխության և թաղանթի հաստությունը նկարակրող h ֆունկցիայի համար կստանանք

$$\begin{aligned}
& \frac{h^2}{4} \left\{ B_{11} \left[\frac{d}{dS} \left(\frac{dW}{dS} + \frac{U}{R_1} \right) \right]^2 + 2B_{12} \left(\frac{dW}{dS} - \frac{U}{R_1} \right) \frac{d}{dS} \left(\frac{dW}{dS} - \frac{U}{R_1} \right) \frac{\sin \theta}{r} + B_{22} \left(\frac{dW}{dS} - \frac{U}{R_1} \right)^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right\} + \\
& B_{11} \left(\frac{dU}{dS} - \frac{U}{R_1} \right)^2 + 2B_{12} \left(\frac{dU}{dS} + \frac{W}{R_1} \right) \left(\frac{W}{R_2} - \frac{U \sin \theta}{r} \right) + B_{22} \left(\frac{W}{R_2} - \frac{U \sin \theta}{r} \right)^2 = \rho \omega^2 U^2 + \rho \omega^2 W^2 \\
& \frac{B_{12}}{R} h \frac{dU}{d\alpha} - \frac{B_{22}}{R^2} h W + \frac{B_{11}}{12} \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(h^3 \frac{d^2 W}{d\alpha^2} \right) = \rho \omega^2 h W \\
& - B_{11} \frac{d}{d\alpha} \left(h \frac{dU}{d\alpha} \right) - \frac{B_{12}}{R} \frac{d(hW)}{d\alpha} = \rho \omega^2 h U
\end{aligned} \tag{4.13}$$

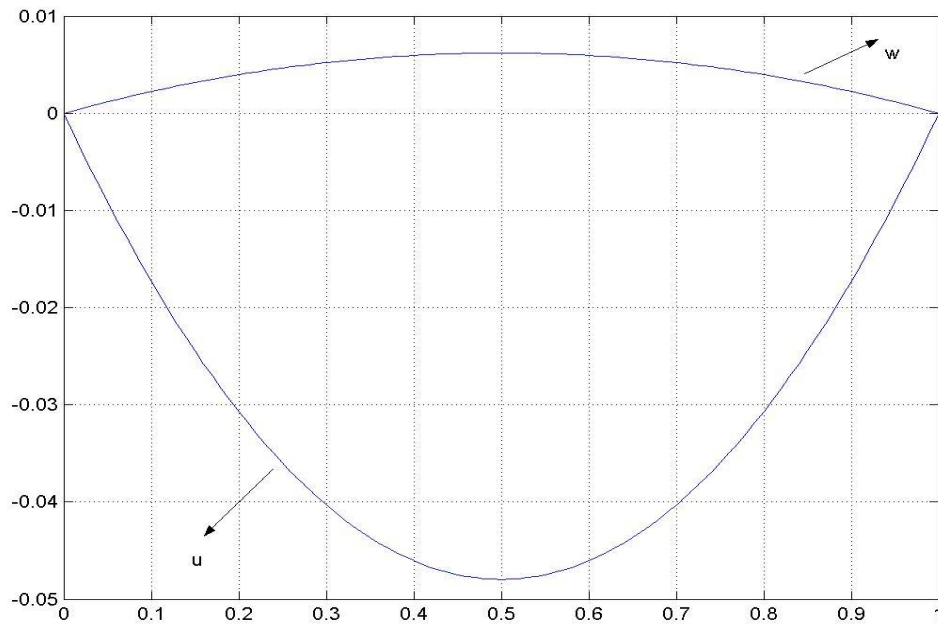
(4.13) համակարգը լուծվել է Մաթլաբ ծրագրով: Լուծման արդյունքները պատկերված են գրաֆիկների տեսքով (նկ. 2.11-նկ. 2.13):



$$h = -147\alpha + 84$$

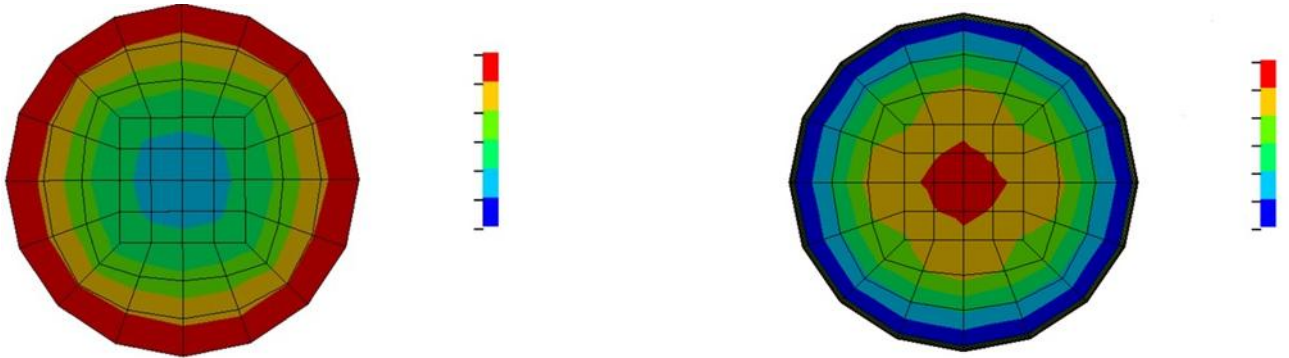
Նկ. 2.11.

Նկ. 2.11-ում պատկերված է թաղանթի h հաստության α կոորդինատից կախվածության գրաֆիկը:



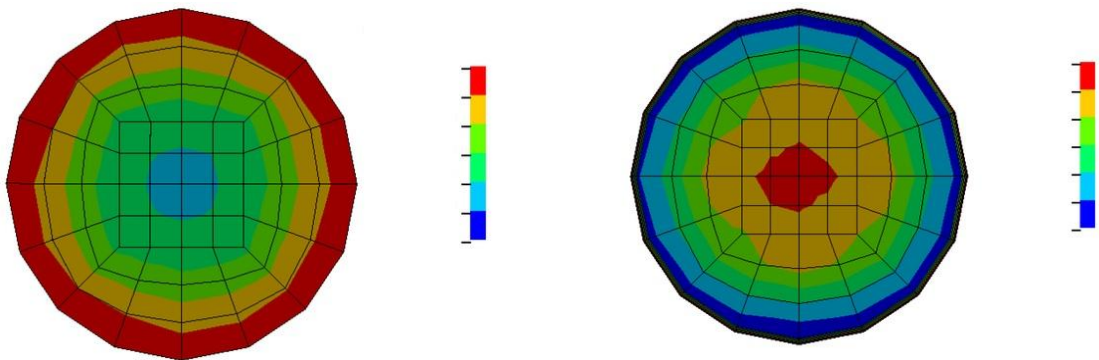
Նկ.2.12

Նկար 2.12-ում պատկերված է թաղանթի u և w տեղափոխությունների α կոորդինատից կախվածության գրաֆիկները:



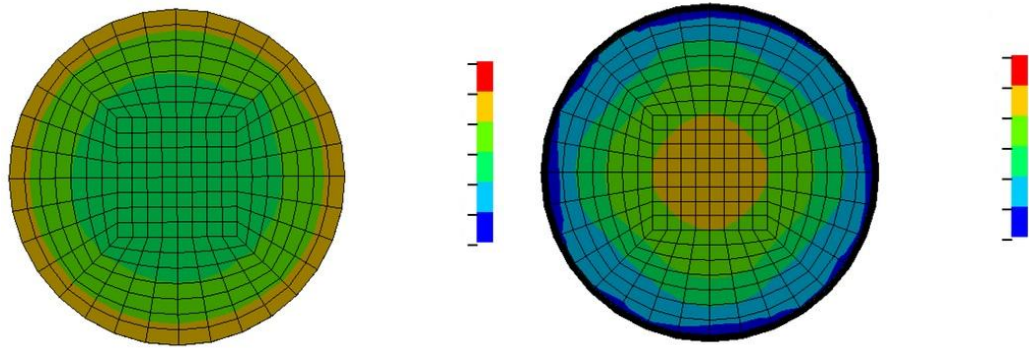
Նկ.2.13.ա

Նկ.2.13.ա. Օրթոտրոպ պտտման թաղանթը ներքևից և վերևից՝ ըստ մակարդակի փոփոխության(առաջին դեպքը);



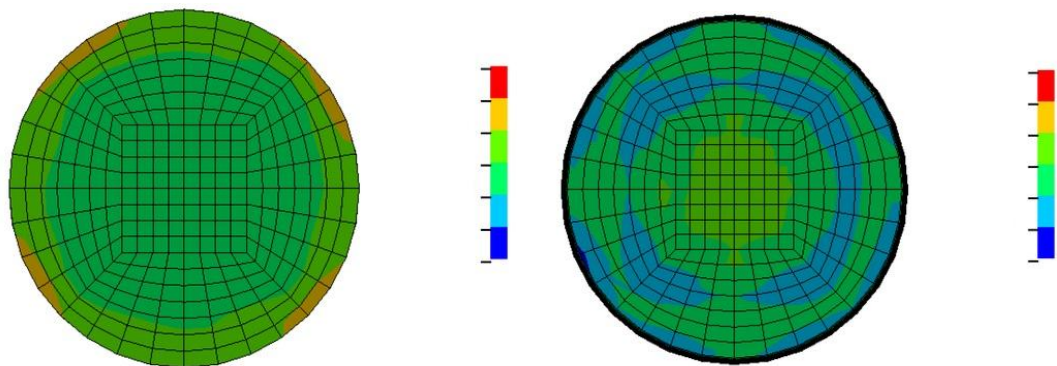
Նկ.2.13.բ

Նկ.2.13.բ. Օրթոտրոպ պտտման թաղանթը ներքևից և վերևից՝ ըստ մակարդակի փոփոխության(երկրորդ դեպքը);



Նկ.2.13.գ

Նկ.2.13.գ. Օրթոտրոպ պատման թաղանթը ներքևից և վերևից՝ ըստ մակարդակի փոփոխության(երրորդ դեպքը);



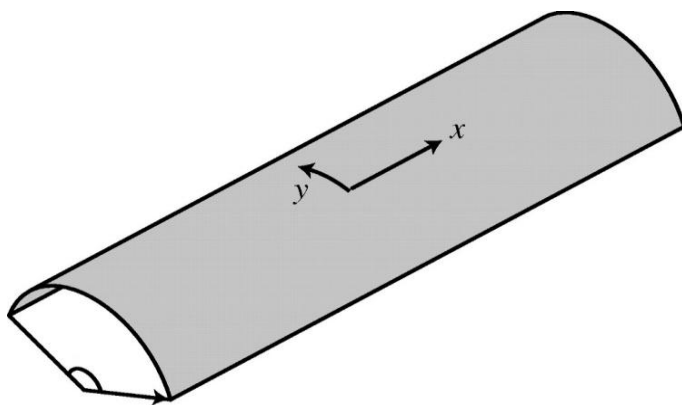
Նկ.2.13.դ

Նկ.2.13.դ. Օրթոտրոպ պատման թաղանթը ներքևից և վերևից՝ ըստ մակարդակի փոփոխության (չորրորդ դեպքը);

2.5. Գլանային երկչափ թաղանթների օպտիմալացումը

Դիտարկենք գլանային բաց թաղանթ (նկ.2.14), որի համար տեղի ունի տեխնիկական տեսության հիմնական ընդունելությունները [8,83,84]

Նշենք, որ ընդանուր դեպքի դիտարկումը էական տարբերություններ չէր առաջացնի հետագա շարադրանքում, միայն կավելանան լրացուցիչ անդամներ, որոնք ավելի մեծաձավալ կդարձնեին դիտարկվող առնչությունները և հավասարումները:



Նկ.2.14

Նկ.2.14-ում պատկերված է գլանային երկչափ թաղանթը՝ մինչև դեֆորմացիան.

Այս թաղանթների ω_0 հիմնական հաճախությամբ ազատ տատանումները նկարագրվում են

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[C_{11} \frac{\partial U}{\partial \alpha} + C_{12} \left(\frac{\partial V}{\partial \beta} + \frac{W}{R} \right) + C_{16} \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[C_{16} \frac{\partial U}{\partial \alpha} + C_{26} \left(\frac{\partial V}{\partial \beta} + \frac{W}{R} \right) + C_{66} \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right) \right] \\
 & = -\rho h \omega_0^2 U \\
 & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[C_{16} \frac{\partial U}{\partial \alpha} + C_{26} \left(\frac{\partial V}{\partial \beta} + \frac{W}{R} \right) + C_{66} \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[C_{12} \frac{\partial U}{\partial \alpha} + C_{22} \left(\frac{\partial V}{\partial \beta} + \frac{W}{R} \right) + C_{26} \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right) \right] \\
 & = -\rho h \omega_0^2 V \\
 & \frac{1}{R} \left[C_{12} \frac{\partial U}{\partial \alpha} + C_{22} \left(\frac{\partial V}{\partial \beta} + \frac{W}{R} \right) + C_{26} \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left[D_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} + D_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial \beta} \right] \\
 & + 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \left[D_{16} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} + D_{26} \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial \beta} \right] + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left[D_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} + D_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial \beta} \right] \\
 & = -\rho h \omega_0^2 W
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

հավասարումներով, որտեղ C_{ij}, D_{ij} կոշտության գործակիցները տրվում են հետևյալ բանաձևերով.

$$C_{ij} = h(\alpha) B_{ij}, \quad D_{ij} = \frac{h^3(\alpha) B_{ij}}{12}, \quad B_{ij} = \text{const}
 \tag{5.2}$$

Միաժամանակ պետք է բավարարվեն $\alpha = 0, \alpha = a, \beta = 0, \beta = b$ եզրագծերում տրվող հետևյալ եզրային պայմաններից որևէ մեկը [23]

ա) ազատ եզր.

$$T_1 = 0, \quad S_{12} + \frac{H_{12}}{R} = 0, \quad N_1 + \frac{\partial H_{12}}{\partial \beta} = 0, \quad M_1 = 0 \quad (5.3.1)$$

բ) հողակապորեն ամրակցված եզր.

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0, \quad M_1 = 0 \quad (5.3.2)$$

գ) հողակապային, տանգենցիալ ուղղությամբ ազատ եզր.

$$V = 0, \quad W = 0, \quad T_1 = 0, \quad M_1 = 0 \quad (5.3.3)$$

դ) հողակապային նորմալի ուղղությամբ ազատ եզր.

$$M_1 = 0, \quad N_1 + \frac{\partial H_{12}}{\partial \beta} = 0, \quad U = 0, \quad V = 0 \quad (5.3.4)$$

ե) կոշտ ամրակցված եզր.

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0, \quad \tilde{\theta} = -\frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0 \quad (5.3.5)$$

որտեղ $\tilde{\theta}$ -ը թաղանթի միջին մակերևույթի նորմալի պտույտն է եզրագծի շոշափողի նկատմամբ, իսկ թաղանթի զանգվածը հաստատուն բազմապատկչի ճշտությամբ տրվում է հետևյալ ֆունկցիոնալի միջոցով.

$$J = \int_0^a \int_0^b h(\alpha, \beta) d\beta d\alpha \quad (5.4)$$

Այսպիսով, մեր խնդիրն է հնարավորին փոքրացնել J ֆունկցիոնալը, երբ $\omega = \omega_0$: Դա նշանակում է, որ (5.1) ֆունկցիոնալը $h(\alpha, \beta)$ ֆունկցիայի ընտրությամբ պետք է ընդունի ամենափոքր արժեք և միևնույն ժամանակ պետք է բավարարվեն (2.1) դիֆերենցիալ հավասարումներն և (5.3) եզրային պայմանները, երբ $\omega = \omega_0$

(5.1)-(5.3) խնդիրը լուծվում է վարիացիոն մեթոդով:

h ֆունկցիային տանք δh աճ այդ դեպքում (5.1) համակարգի հավասարումները կգրվեն ըստ այդ աճերի և կստանան հետևյալ տեսքերը:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha} (B_{11}(h + \delta h) \frac{\partial(U + \delta U)}{\partial \alpha} + B_{12}(h + \delta h) \frac{(W + \delta W)}{R} + B_{12}(h + \delta h) \frac{\partial(V + \delta V)}{\partial \beta} + B_{16}(h + \delta h) \frac{\partial(U + \delta U)}{\partial \beta} + B_{16}(h + \delta h) \\ & \frac{\partial(V + \delta V)}{\partial \alpha}) + \frac{\partial}{\partial \beta} [B_{16}(h + \delta h) \frac{\partial(U + \delta U)}{\partial \alpha} + B_{26}(h + \delta h) \frac{(W + \delta W)}{R} + B_{26}(h + \delta h) \frac{\partial(V + \delta V)}{\partial \beta} + B_{66}(h + \delta h) \frac{\partial(U + \delta U)}{\partial \beta} \\ & + B_{66}(h + \delta h) \frac{\partial(V + \delta V)}{\partial \alpha}] + \rho \omega_0^2 (h + \delta h) (U + \delta U) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha} (B_{16}(h + \delta h) \frac{\partial(U + \delta U)}{\partial \alpha} + B_{26}(h + \delta h) \frac{(W + \delta W)}{R} + B_{26}(h + \delta h) \frac{\partial(V + \delta V)}{\partial \beta} + B_{66}(h + \delta h) \frac{\partial(U + \delta U)}{\partial \beta} + B_{66}(h + \delta h) \\ & \frac{\partial(V + \delta V)}{\partial \alpha}) + \frac{\partial}{\partial \beta} [B_{12}(h + \delta h) \frac{\partial(U + \delta U)}{\partial \alpha} + B_{22}(h + \delta h) \frac{(W + \delta W)}{R} + B_{22}(h + \delta h) \frac{\partial(V + \delta V)}{\partial \beta} + B_{26}(h + \delta h) \frac{\partial(U + \delta U)}{\partial \beta} \\ & + B_{26}(h + \delta h) \frac{\partial(V + \delta V)}{\partial \alpha}] + \rho \omega_0^2 (h + \delta h) (V + \delta V) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R} (B_{12}(h + \delta h) \frac{\partial(U + \delta U)}{\partial \alpha} + B_{22}(h + \delta h) \frac{(W + \delta W)}{R} + B_{22}(h + \delta h) \frac{\partial(V + \delta V)}{\partial \beta} + B_{12}(h + \delta h) \frac{\partial(U + \delta U)}{\partial \beta} + B_{26}(h + \delta h) \\ & \frac{\partial(V + \delta V)}{\partial \alpha}) + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left[\frac{B_{11}(h + \delta h)^3}{12} \frac{\partial^2(W + \delta W)}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{12}(h + \delta h)^3}{12} \frac{\partial^2(W + \delta W)}{\partial \beta^2} + 2 \frac{B_{16}(h + \delta h)^3}{12} \frac{\partial^2(W + \delta W)}{\partial \alpha \partial \beta} \right] \\ & + 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \left[\frac{B_{16}(h + \delta h)^3}{12} \frac{\partial^2(W + \delta W)}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{26}(h + \delta h)^3}{12} \frac{\partial^2(W + \delta W)}{\partial \beta^2} + 2 \frac{B_{66}(h + \delta h)^3}{12} \frac{\partial^2(W + \delta W)}{\partial \alpha \partial \beta} \right] + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \\ & \left[\frac{B_{12}(h + \delta h)^3}{12} \frac{\partial^2(W + \delta W)}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{22}(h + \delta h)^3}{12} \frac{\partial^2(W + \delta W)}{\partial \beta} + 2 \frac{B_{26}(h + \delta h)^3}{12} \frac{\partial^2(W + \delta W)}{\partial \alpha \partial \beta} \right] + \rho \omega_0^2 (h + \delta h) \\ & (W + \delta W) = 0 \end{aligned}$$

(5.5)

Հաշվի առնելով (5.1) հավասարումները և արհամարհելով δh , δU , δW , δV աճերի երկրորդ կարգի փոքր մեծությունները, կստանանք:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha} (B_{11}h \frac{\partial \delta U}{\partial \alpha} + B_{11}\delta h \frac{\partial U}{\partial \alpha} + B_{12} \frac{h\delta W}{R} + B_{12} \frac{\delta h W}{R} + B_{12}h \frac{\partial \delta V}{\partial \beta} + B_{12}\delta h \frac{\partial V}{\partial \beta} + B_{16}h \frac{\partial \delta U}{\partial \beta} + B_{16}\delta h \frac{\partial U}{\partial \beta} + \\ & B_{16}h \frac{\partial \delta V}{\partial \alpha} + B_{16}\delta h \frac{\partial V}{\partial \alpha}) + \frac{\partial}{\partial \beta} [B_{16}h \frac{\partial \delta U}{\partial \alpha} + B_{16}\delta h \frac{\partial U}{\partial \alpha} + B_{26} \frac{h\delta W}{R} + B_{26} \frac{\delta h W}{R} + B_{26}h \frac{\partial \delta V}{\partial \beta} + B_{26}\delta h \frac{\partial V}{\partial \beta} \\ & + B_{66}h \frac{\partial \delta U}{\partial \beta} + B_{66}\delta h \frac{\partial U}{\partial \beta} + B_{66}h \frac{\partial \delta V}{\partial \alpha} + B_{66}\delta h \frac{\partial V}{\partial \alpha}] + \rho \omega_0^2 h \delta U + \rho \omega_0^2 \delta h U = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \alpha} (B_{16}h \frac{\partial \delta U}{\partial \alpha} + B_{16}\delta h \frac{\partial U}{\partial \alpha} + B_{26} \frac{h\delta W}{R} + B_{26} \frac{\delta h W}{R} + B_{26}h \frac{\partial \delta V}{\partial \beta} + B_{26}\delta h \frac{\partial V}{\partial \beta} + B_{66}h \frac{\partial \delta U}{\partial \beta} + B_{66}\delta h \frac{\partial U}{\partial \beta} + B_{66}h \frac{\partial \delta V}{\partial \alpha} + \\
& B_{66}\delta h \frac{\partial V}{\partial \alpha}) + \frac{\partial}{\partial \beta} [B_{12}h \frac{\partial \delta U}{\partial \alpha} + B_{12}\delta h \frac{\partial U}{\partial \alpha} + B_{22} \frac{h\delta W}{R} + B_{22} \frac{\delta h W}{R} + B_{22}h \frac{\partial \delta V}{\partial \beta} + B_{22}\delta h \frac{\partial V}{\partial \beta} + B_{26}h \frac{\partial \delta U}{\partial \beta} + B_{26}\delta h \frac{\partial U}{\partial \beta} \\
& + B_{26}h \frac{\partial \delta V}{\partial \alpha} + B_{26}\delta h \frac{\partial V}{\partial \alpha}] + \rho\omega_0^2 h\delta V + \rho\omega_0^2 \delta h V = 0 \\
\\
& \frac{1}{R} (B_{12}h \frac{\partial \delta U}{\partial \alpha} + B_{12}\delta h \frac{\partial U}{\partial \alpha} + B_{22} \frac{h\delta W}{R} + B_{22} \frac{\delta h W}{R} + B_{22}h \frac{\partial \delta V}{\partial \beta} + B_{22}\delta h \frac{\partial V}{\partial \beta} + B_{12}h \frac{\partial \delta U}{\partial \beta} + B_{12}\delta h \frac{\partial U}{\partial \beta} + B_{26}h \frac{\partial \delta V}{\partial \alpha} \\
& + B_{26}\delta h \frac{\partial V}{\partial \alpha}) + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} [\frac{B_{11}h^2 \delta h}{4} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{12}h^2 \delta h}{4} \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} + \frac{B_{16}h^2 \delta h}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial \beta}] + 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} [\frac{B_{16}h^2 \delta h}{4} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{26}h^2 \delta h}{4} \\
& \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} + \frac{B_{66}h^2 \delta h}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial \beta}] + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} [\frac{B_{12}h^2 \delta h}{4} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{22}h^2 \delta h}{4} \frac{\partial^2 W}{\partial \beta} + \frac{B_{26}h^2 \delta h}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial \beta}] + \rho\omega_0^2 h\delta W + \rho\omega_0^2 \delta h W = 0
\end{aligned}
\tag{5.6}$$

(5.3.1)- (5.3.5) եզրային պայմանները նույնպես գրենք աճերով:

$$T_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{16}\omega$$

$$\begin{aligned}
& (B_{11}h \frac{\partial \delta U}{\partial \alpha} + B_{11}\delta h \frac{\partial U}{\partial \alpha} + B_{12} \frac{h\delta W}{R} + B_{12} \frac{\delta h W}{R} + B_{12}h \frac{\partial \delta V}{\partial \beta} + B_{12}\delta h \frac{\partial V}{\partial \beta} + B_{16}h \frac{\partial \delta U}{\partial \beta} + B_{16}\delta h \frac{\partial U}{\partial \beta} + \\
& B_{16}h \frac{\partial \delta V}{\partial \alpha} + B_{16}\delta h \frac{\partial V}{\partial \alpha}) = 0
\end{aligned}$$

$$T_2 = C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{26}\omega$$

$$\begin{aligned}
& (B_{12}h \frac{\partial \delta U}{\partial \alpha} + B_{12}\delta h \frac{\partial U}{\partial \alpha} + B_{22} \frac{h\delta W}{R} + B_{22} \frac{\delta h W}{R} + B_{22}h \frac{\partial \delta V}{\partial \beta} + B_{22}\delta h \frac{\partial V}{\partial \beta} + B_{26}h \frac{\partial \delta U}{\partial \beta} + B_{26}\delta h \frac{\partial U}{\partial \beta} + \\
& B_{26}h \frac{\partial \delta V}{\partial \alpha} + B_{26}\delta h \frac{\partial V}{\partial \alpha}) = 0
\end{aligned}$$

$$S_{12} = S = C_{16}\varepsilon_1 + C_{26}\varepsilon_2 + C_{66}\omega$$

$$\begin{aligned}
& (B_{16}h \frac{\partial \delta U}{\partial \alpha} + B_{16}\delta h \frac{\partial U}{\partial \alpha} + B_{26} \frac{h\delta W}{R} + B_{26} \frac{\delta h W}{R} + B_{26}h \frac{\partial \delta V}{\partial \beta} + B_{26}\delta h \frac{\partial V}{\partial \beta} + B_{66}h \frac{\partial \delta U}{\partial \beta} + B_{66}\delta h \frac{\partial U}{\partial \beta} + \\
& B_{66}h \frac{\partial \delta V}{\partial \alpha} + B_{66}\delta h \frac{\partial V}{\partial \alpha}) = 0
\end{aligned}$$

$$M_1 = D_{11}x_1 + D_{12}x_2 + D_{16}\tau$$

$$\left(-\frac{B_{11}}{12}h^3\frac{\partial^2\delta W}{\partial\alpha^2}\right) - \left(\frac{3h^2B_{11}\delta h}{12}\frac{\partial^2W}{\partial\alpha^2}\right) - \left(\frac{B_{12}}{12}h^3\frac{\partial^2\delta W}{\partial\beta^2}\right) - \left(\frac{3B_{12}h^2\delta h}{12}\frac{\partial^2W}{\partial\beta^2}\right) - \left(\frac{B_{16}}{6}h^3\frac{\partial^2\delta W}{\partial\alpha\partial\beta}\right) - \left(\frac{3B_{16}h^2\delta h}{6}\frac{\partial^2W}{\partial\alpha\partial\beta}\right) = 0$$

$$M_2 = D_{12}x_1 + D_{22}x_2 + D_{26}\tau$$

$$\left(-\frac{B_{12}}{12}h^3\frac{\partial^2\delta W}{\partial\alpha^2}\right) - \left(\frac{3h^2B_{12}\delta h}{12}\frac{\partial^2W}{\partial\alpha^2}\right) - \left(\frac{B_{22}}{12}h^3\frac{\partial^2\delta W}{\partial\beta^2}\right) - \left(\frac{3B_{22}h^2\delta h}{12}\frac{\partial^2W}{\partial\beta^2}\right) - \left(\frac{B_{26}}{6}h^3\frac{\partial^2\delta W}{\partial\alpha\partial\beta}\right) - \left(\frac{3B_{26}h^2\delta h}{6}\frac{\partial^2W}{\partial\alpha\partial\beta}\right) = 0$$

$$H_{12} = H = D_{16}x_1 + D_{26}x_2 + D_{66}\tau$$

$$\left(-\frac{B_{16}}{12}h^3\frac{\partial^2\delta W}{\partial\alpha^2}\right) - \left(\frac{3h^2B_{16}\delta h}{12}\frac{\partial^2W}{\partial\alpha^2}\right) - \left(\frac{B_{26}}{12}h^3\frac{\partial^2\delta W}{\partial\beta^2}\right) - \left(\frac{3B_{26}h^2\delta h}{12}\frac{\partial^2W}{\partial\beta^2}\right) - \left(\frac{B_{66}}{6}h^3\frac{\partial^2\delta W}{\partial\alpha\partial\beta}\right) - \left(\frac{3B_{66}h^2\delta h}{6}\frac{\partial^2W}{\partial\alpha\partial\beta}\right) = 0$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial U}{\partial\alpha}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial V}{\partial\beta} + \frac{W}{R}, \quad \omega = \frac{\partial U}{\partial\beta} + \frac{\partial V}{\partial\alpha}$$

$$x_1 = -\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha^2}, \quad x_2 = -\frac{\partial^2 W}{\partial\beta^2}, \quad \tau = -2\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha\partial\beta} \quad (5.7)$$

(5.4) նպատակի ֆունկցիոնալը նույնպես կստանա աճ:

$$\delta J = \int_0^a \int_0^b \delta h d\alpha d\beta \quad (5.8)$$

(5.6) համակարգի առաջին, երկրորդ և երրորդ հավասարումների ձախ մասերը բազմապատկենք համապատասխանանաբար U_1 , V_1 , W_1 համալուծ ֆունկցիաներով: Ստացված արտահայտությունների գումարը ինտեգրենք 0 -ից a և 0 -ից b , որին էլ գումարենք (5.8) արտահայտությունը:

$$\begin{aligned}
& \int_0^a \int_0^b \left[\left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (B_{11}h \frac{\partial \delta U}{\partial \alpha} + B_{11}\delta h \frac{\partial U}{\partial \alpha} + B_{12} \frac{h\delta W}{R} + B_{12} \frac{\delta h W}{R} + B_{12}h \frac{\partial \delta V}{\partial \beta} + B_{12}\delta h \frac{\partial V}{\partial \beta} + B_{16}h \frac{\partial \delta U}{\partial \beta} + B_{16}\delta h \frac{\partial U}{\partial \beta} \right. \right. \\
& + B_{16}h \frac{\partial \delta V}{\partial \alpha} + B_{16}\delta h \frac{\partial V}{\partial \alpha}) + \frac{\partial}{\partial \beta} [B_{16}h \frac{\partial \delta U}{\partial \alpha} + B_{16}\delta h \frac{\partial U}{\partial \alpha} + B_{26} \frac{h\delta W}{R} + B_{26} \frac{\delta h W}{R} + B_{26}h \frac{\partial \delta V}{\partial \beta}] \\
& + B_{26}\delta h \frac{\partial V}{\partial \beta} + B_{66}h \frac{\partial \delta U}{\partial \beta} + B_{66}\delta h \frac{\partial U}{\partial \beta} + B_{66}h \frac{\partial \delta V}{\partial \alpha} + B_{66}\delta h \frac{\partial V}{\partial \alpha}] + \rho\omega_0^2 h \delta U + \rho\omega_0^2 \delta h U] U_1 + \\
& [\frac{\partial}{\partial \alpha} (B_{16}h \frac{\partial \delta U}{\partial \alpha} + B_{16}\delta h \frac{\partial U}{\partial \alpha} + B_{26} \frac{h\delta W}{R} + B_{26} \frac{\delta h W}{R} + B_{26}h \frac{\partial \delta V}{\partial \beta} + B_{26}\delta h \frac{\partial V}{\partial \beta} + B_{66}h \frac{\partial \delta U}{\partial \beta} + B_{66}\delta h \frac{\partial U}{\partial \beta} \\
& + B_{66}h \frac{\partial \delta V}{\partial \alpha} + B_{66}\delta h \frac{\partial V}{\partial \alpha}) + \frac{\partial}{\partial \beta} [B_{12}h \frac{\partial \delta U}{\partial \alpha} + B_{12}\delta h \frac{\partial U}{\partial \alpha} + B_{22} \frac{h\delta W}{R} + B_{22} \frac{\delta h W}{R} + B_{22}h \frac{\partial \delta V}{\partial \beta} + \\
& B_{22}\delta h \frac{\partial V}{\partial \beta} + B_{26}h \frac{\partial \delta U}{\partial \beta} + B_{26}\delta h \frac{\partial U}{\partial \beta} + B_{26}h \frac{\partial \delta V}{\partial \alpha} + B_{26}\delta h \frac{\partial V}{\partial \alpha}] + \rho\omega_0^2 h \delta V + \rho\omega_0^2 \delta h V] V_1 + \\
& [\frac{1}{R} (B_{12}h \frac{\partial \delta U}{\partial \alpha} + B_{12}\delta h \frac{\partial U}{\partial \alpha} + B_{22} \frac{h\delta W}{R} + B_{22} \frac{\delta h W}{R} + B_{22}h \frac{\partial \delta V}{\partial \beta} + B_{22}\delta h \frac{\partial V}{\partial \beta} + B_{12}h \frac{\partial \delta U}{\partial \beta} + B_{12}\delta h \frac{\partial U}{\partial \beta} + \\
& B_{26}h \frac{\partial \delta V}{\partial \alpha} + B_{26}\delta h \frac{\partial V}{\partial \alpha}) + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} [\frac{B_{11}h^2 \delta h}{4} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{12}h^2 \delta h}{4} \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} + \frac{B_{16}h^2 \delta h}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial \beta}] + 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} [\frac{B_{16}h^2 \delta h}{4} \\
& \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{26}h^2 \delta h}{4} \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} + \frac{B_{66}h^2 \delta h}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial \beta}] + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} [\frac{B_{12}h^2 \delta h}{4} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{22}h^2 \delta h}{4} \frac{\partial^2 W}{\partial \beta} + \frac{B_{26}h^2 \delta h}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial \beta}] + \\
& \rho\omega_0^2 h \delta W + \rho\omega_0^2 \delta h W] W_1 + \delta h] d\alpha d\beta
\end{aligned} \tag{5.9}$$

(5.9) ինտեգրալում կատարենք մասերով ինտեգրում, որպեսզի ազատվենք δh , δU , δW , δV աճերի ածանցիալներից:

Ստացված ինտեգրալատակ արտահայտություն կատարենք խմբավորում ըստ δh , δU , δW , δV աճերի:

Ինտեգրալից դուրս եղած աճերի մի մասը տրված են (5.7) եզրային պայմաններին՝ որոնք նույնպես գրված են աճերով:

Ինտեգրալից դուրս մնացած արտահայտությունները կբավարարեն մեր ուզած պայմաններով, որոնք կհանդիսանան որպես եզրային պայմաններ U_1 , V_1 , W_1 համալուծ ֆունկցիաների համար:

Այսպիսով (5.9) ինտեգրալը կունենա հետևյալ տեսքը:

$$\begin{aligned}
& \int_0^a \int_0^b [-B_{11}\delta h \frac{\partial U_1}{\partial \alpha} \frac{\partial U}{\partial \alpha} + B_{11}\delta U \frac{\partial}{\partial \alpha} (h \frac{\partial U_1}{\partial \alpha}) - B_{12}\delta h \frac{\partial U_1}{\partial \beta} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + B_{12}\delta V \frac{\partial}{\partial \alpha} (h \frac{\partial U_1}{\partial \beta}) - \frac{B_{12}}{R} \delta h \frac{\partial U_1}{\partial \alpha} W - \\
& - \frac{B_{12}}{R} h \frac{\partial U_1}{\partial \alpha} \delta W - B_{16}\delta h \frac{\partial U_1}{\partial \alpha} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + B_{16}\delta V \frac{\partial}{\partial \alpha} (h \frac{\partial U_1}{\partial \alpha}) - B_{16}\delta h \frac{\partial U_1}{\partial \beta} \frac{\partial U}{\partial \alpha} - B_{16}\delta U \frac{\partial}{\partial \alpha} h \frac{\partial U_1}{\partial \beta} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\rho\omega_0^2(\delta hU + h\delta U)U_1 - B_{16}\delta h\frac{\partial V_1}{\partial\alpha}\frac{\partial V}{\partial\alpha} + B_{16}\delta U\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(h\frac{\partial V_1}{\partial\alpha}\right) - \frac{B_{26}}{R}\delta Wh\frac{\partial V_1}{\partial\alpha} - B_{16}\delta h\frac{\partial V_1}{\partial\beta}\frac{\partial V}{\partial\alpha} + \\
& B_{16}\delta V\frac{\partial}{\partial\alpha}h\frac{\partial V_1}{\partial\alpha} - \frac{B_{26}}{R}\delta h\frac{\partial V_1}{\partial\alpha}W - B_{66}\delta h\frac{\partial V_1}{\partial\alpha}\frac{\partial V}{\partial\alpha} + B_{66}\delta V\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(h\frac{\partial V_1}{\partial\alpha}\right) - B_{66}\delta h\frac{\partial V_1}{\partial\beta}\frac{\partial U}{\partial\alpha} + \rho\omega_0^2 \\
& (\delta hV + h\delta V)V_1 + \frac{B_{12}}{R}\delta h\frac{\partial U}{\partial\alpha}W_1 - \frac{B_{12}}{R}\delta U\frac{\partial hW_1}{\partial\alpha} - \frac{B_{22}}{R}\delta h\frac{\partial V}{\partial\beta}W_1 + \frac{B_{22}}{R}\delta V\frac{\partial hW_1}{\partial\beta} - \frac{B_{22}}{R^2}(\partial hW)W_1 - \\
& - \frac{B_{22}}{R^2}(h\partial W)W_1 - \frac{B_{26}}{R}W_1\left(\delta h\frac{\partial V}{\partial\alpha}\right) + \frac{B_{26}}{R}\delta V\frac{\partial(hW_1)}{\partial\alpha} - \frac{B_{26}}{R^2}W_1\delta h\frac{\partial U}{\partial\beta} + \frac{B_{26}}{R^2}\delta U\frac{\partial hW_1}{\partial\beta} + \frac{B_{11}}{12}\delta W\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} \\
& \left(h^3\frac{\partial^2 W_1}{\partial\alpha^2}\right) + \frac{B_{11}}{4}h^2\delta h\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 W_1}{\partial\alpha^2} - \frac{B_{12}}{12}\delta W\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}h^3\frac{\partial^2 W_1}{\partial\beta^2} + \frac{B_{12}}{4}h^2\delta h\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 W_1}{\partial\beta^2} - \frac{B_{16}}{6R}\delta W\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} \\
& \left(h^3\frac{\partial W_1}{\partial\alpha\partial\beta}\right) + \frac{B_{16}}{4}h^2\delta h\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 W_1}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{B_{16}}{6}\delta W\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}h^3\frac{\partial^2 W_1}{\partial\alpha^2} + \frac{B_{16}}{2}h^2\delta h\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 W_1}{\partial\beta^2} - \frac{B_{26}}{6}\delta W\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta} \\
& h^3\frac{\partial^2 W_1}{\partial\beta^2} + \frac{B_{26}}{2}h^2\delta h\frac{\partial^2 W}{\partial\beta}\frac{\partial^2 W_1}{\partial\beta^2} - \frac{B_{66}}{3}\delta W\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}h^3\frac{\partial^2 W_1}{\partial\alpha\partial\beta} + B_{66}h^2\delta h\frac{\partial^2 W}{\partial\beta}\frac{\partial^2 W_1}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{B_{12}}{12}\delta W\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} \\
& h^3\frac{\partial^2 W_1}{\partial\alpha^2} + \frac{B_{12}}{4}h^2\delta h\frac{\partial^2 W}{\partial\beta}\frac{\partial^2 W_1}{\partial\alpha} - \frac{B_{22}}{12}\delta W\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}h^3\frac{\partial^2 W_1}{\partial\beta^2} + \frac{B_{22}}{4}h^2\delta h\frac{\partial^2 W}{(\partial\beta^2)\partial\alpha}\frac{\partial^2 W_1}{\partial\beta^2} - \frac{B_{26}}{6}\delta W\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} \\
& h^3\frac{\partial^2 W_1}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{B_{26}}{2}h^2\delta h\frac{\partial^2 W}{(\partial\beta^2)\partial\alpha}\frac{\partial^2 W_1}{\partial\alpha\partial\beta} + \rho\omega_0^2(\delta hW + h\delta W)W_1]dad\beta
\end{aligned} \tag{5.10}$$

(5.10) ինտեգրալատակ արտահայտությունում կատարենք խմբավորում ըստ δh , δU , δW , δV աճերի, պահանջենք որ δh , δU , δW , δV աճերի գործակիցները հավասար լինեն 0 - ի : Դա հնարավոր է, քանի որ U_1 , V_1 , W_1 ֆունկցիաները որևէ սահմանափակման չեն ենթարկվում և այժմ պահանջվում ենք, որ դրանք բավարարեն վերը նշված հավասարումներին:

$$\begin{aligned}
& B_{11}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(h\frac{\partial U_1}{\partial\alpha}\right) - B_{16}\frac{\partial}{\partial\alpha}h\frac{\partial U_1}{\partial\beta} + \rho\omega_0^2 hU_1 + B_{16}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(h\frac{\partial V_1}{\partial\alpha}\right) - \frac{B_{12}}{R}\frac{\partial(hW_1)}{\partial\alpha} + \frac{B_{26}}{R^2}\frac{\partial hW_1}{\partial\beta} = 0 \\
& - \frac{B_{12}}{R}h\frac{\partial U_1}{\partial\alpha} - \frac{B_{26}}{R}h\frac{\partial V_1}{\partial\alpha} + \frac{B_{16}}{R}h^3\frac{\partial^2 V_1}{\partial\alpha} - \frac{B_{11}}{12}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left(h^3\frac{\partial^2 W_1}{\partial\alpha^2}\right) - \frac{B_{16}}{6}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}h^3\frac{\partial W_1}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{B_{12}}{12}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left(h^3\frac{\partial^2 W_1}{\partial\beta^2}\right) - \\
& \frac{B_{16}}{6}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}h^3\frac{\partial^2 W_1}{\partial\alpha^2} - \frac{B_{26}}{6}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}h^3\frac{\partial^2 W_1}{\partial\beta^2} - \frac{B_{66}}{3}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}h^3\frac{\partial^2 W_1}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{B_{12}}{12}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}h^3\frac{\partial^2 W_1}{\partial\alpha^2} - \frac{B_{22}}{12}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}h^3\frac{\partial^2 W_1}{\partial\beta^2} - \\
& \frac{B_{26}}{6}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}h^3\frac{\partial^2 W_1}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{B_{22}}{R^2}hW_1 + \rho\omega^2 hW_1 = 0 \\
& B_{12}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(h\frac{\partial U_1}{\partial\beta}\right) + B_{16}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(h\frac{\partial U_1}{\partial\alpha}\right) + B_{16}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(h\frac{\partial V_1}{\partial\alpha}\right) + B_{66}\frac{\partial}{\partial\alpha}h\frac{\partial V_1}{\partial\alpha} + \frac{B_{22}}{R}\frac{\partial hW_1}{\partial\beta} + \frac{B_{26}}{R}\frac{\partial hW_1}{\partial\alpha} \\
& + \rho\omega_0^2 hV_1 = 0
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Այս դեպքում δh գործակիցը պետք է լինի 0, քանի որ $\delta J = 0$ կամայական δh դեպքում:

$$\begin{aligned}
& -B_{11} \frac{\partial U_1}{\partial \alpha} \frac{\partial U}{\partial \alpha} - B_{12} \frac{\partial U_1}{\partial \beta} \frac{\partial V}{\partial \alpha} - \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial V_1}{\partial \alpha} W - B_{16} \frac{\partial U_1}{\partial \alpha} \frac{\partial V}{\partial \alpha} - B_{16} \frac{\partial U_1}{\partial \beta} \frac{\partial U}{\partial \alpha} - B_{16} \frac{\partial V_1}{\partial \alpha} \frac{\partial V}{\partial \alpha} - B_{16} \frac{\partial V_1}{\partial \beta} \frac{\partial V}{\partial \alpha} - \\
& \frac{B_{26}}{R} \frac{\partial V_1}{\partial \alpha} W - B_{66} \frac{\partial V_1}{\partial \alpha} \frac{\partial V}{\partial \alpha} - B_{66} \frac{\partial V_1}{\partial \beta} \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial U}{\partial \alpha} W_1 - \frac{B_{22}}{R} \frac{\partial V}{\partial \beta} W_1 - \frac{B_{22}}{R^2} W W_1 - \frac{B_{26}}{R} W_1 \frac{\partial V}{\partial \alpha} - \frac{B_{26}}{R^2} W_1 \frac{\partial U}{\partial \beta} \\
& + \frac{B_{11}}{4} h^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{12}}{4} h^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \beta^2} + \frac{B_{16}}{4} h^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{B_{16}}{2} h^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \beta} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{26}}{2} h^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \beta} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \beta^2} \\
& + B_{66} h^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \beta} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{B_{12}}{4} h^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{22}}{4} h^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2 \partial \alpha} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \beta^2} + \frac{B_{26}}{2} h^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2 \partial \alpha} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \alpha \partial \beta} + \rho \omega_0^2 U U_1 + \\
& \rho \omega_0^2 V V_1 + \rho \omega_0^2 W W_1 = 0
\end{aligned} \tag{5.12}$$

(5.1) և (5.12) համակարգերի նմանությունից էլնելով, կարող ենք ասել, որ

$$U_1 = -UC, \quad V_1 = -VC, \quad W_1 = WC \tag{5.13}$$

(5.13) հավասարությունները տեղադրենք (5.12) հավասարման մեջ, կստանանք:

$$\begin{aligned}
& -B_{11} \frac{\partial(-UC)}{\partial \alpha} \frac{\partial U}{\partial \alpha} - B_{12} \frac{\partial(-UC)}{\partial \beta} \frac{\partial V}{\partial \alpha} - \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial(-VC)}{\partial \alpha} W - B_{16} \frac{\partial(-UC)}{\partial \alpha} \frac{\partial V}{\partial \alpha} - B_{16} \frac{\partial(-UC)}{\partial \beta} \frac{\partial U}{\partial \alpha} - B_{16} \frac{\partial(-VC)}{\partial \alpha} \frac{\partial V}{\partial \alpha} \\
& - B_{16} \frac{\partial(-VC)}{\partial \beta} \frac{\partial V}{\partial \alpha} - \frac{B_{26}}{R} \frac{\partial(-VC)}{\partial \alpha} W - B_{66} \frac{\partial(-VC)}{\partial \alpha} \frac{\partial V}{\partial \alpha} - B_{66} \frac{\partial(-VC)}{\partial \beta} \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial U}{\partial \alpha} (WC) - \frac{B_{22}}{R} \frac{\partial V}{\partial \beta} (WC) \\
& - \frac{B_{22}}{R^2} (W WC) - \frac{B_{26}}{R} (WC) \frac{\partial V}{\partial \alpha} - \frac{B_{26}}{R^2} (WC) \frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{B_{11}}{4} h^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 (WC)}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{12}}{4} h^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 (WC)}{\partial \beta^2} + \frac{B_{16}}{4} h^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha} \\
& \frac{\partial^2 (WC)}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{B_{16}}{2} h^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \beta} \frac{\partial^2 (WC)}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{26}}{2} h^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \beta} \frac{\partial^2 (WC)}{\partial \beta^2} + B_{66} h^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \beta} \frac{\partial^2 (WC)}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{B_{12}}{4} h^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} \frac{\partial^2 (WC)}{\partial \alpha} + \\
& \frac{B_{22}}{4} h^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \beta \partial \alpha} \frac{\partial^2 (WC)}{\partial \beta^2} + \frac{B_{26}}{2} h^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \beta \partial \alpha} \frac{\partial^2 (WC)}{\partial \alpha \partial \beta} + \rho \omega_0^2 U (-UC) + \rho \omega_0^2 V (-VC) + \rho \omega_0^2 W (WC) = 0
\end{aligned} \tag{5.14}$$

(5.14) հավասարումը (5.1) հավասարումների համակարգի հետ միասին կազմում են փակ համակարգ $U(\alpha, \beta), V(\alpha, \beta), W(\alpha, \beta), h(\alpha, \beta)$ անհայտ ֆունկցիաների նկատմամբ: Լուծելով այս հավասարումների համակարգը հաշվի առնելով համապատասխան (5.3) եզրային պայմանները, կստանանք տեղափոխության U, V, W և թաղանթի հաստությունը նկարակրող h ֆունկցիան:

Օրթոտրոպ նյութերի համար ($B_{16} = B_{26} = 0$). (5.14) հավասարումը կրնոունի հետևյալ տեսքը.

$$\begin{aligned}
& B_{11} \left(\frac{\partial U}{\partial \alpha} \right)^2 + B_{12} \frac{\partial U}{\partial \beta} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial V}{\partial \alpha} W W + B_{66} \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha} \right)^2 + B_{66} \frac{\partial V}{\partial \beta} \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial U}{\partial \alpha} W - \frac{B_{22}}{R} \frac{\partial V}{\partial \beta} W - \frac{B_{22}}{R^2} W^2 \\
& + \frac{B_{11}}{4} h^2 \frac{(\partial^2 W)^2}{\partial \alpha^3} + \frac{B_{12}}{4} h^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} + B_{66} h^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \beta} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{B_{12}}{4} h^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha} + \frac{B_{22}}{4} h^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} \\
& + \rho \omega_0^2 U^2 + \rho \omega_0^2 V^2 + \rho \omega_0^2 W^2 = 0
\end{aligned}
\tag{5.15}$$

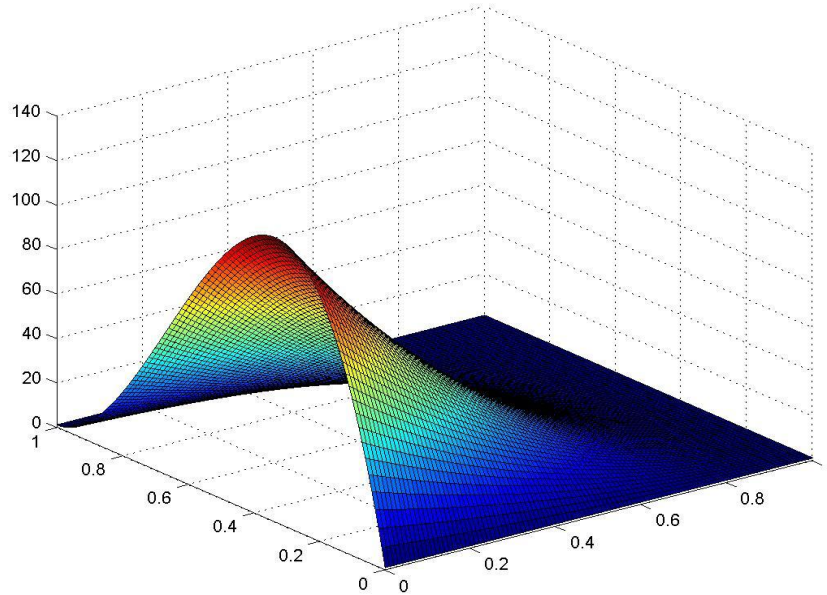
(5.15) հավասարումը ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարում է

Դիտարկենք հողակապորեն ամրակցված եզրերի դեպքը:

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0, \quad M_1 = 0$$

(5.1) և (5.15) հավասարումների համակարգը լուծվել է Մաթլաբ ծրագրով:

Լուծման արդյունքները պատկերված են գրաֆիկների տեսքով (նկ. 2.15-նկ. 2.21):



Նկ.2.15

Նկ.2.15-ում պատկերված է w տեղափոխության գրաֆիկը կախված α և β կոորդինատներից

Հաշվարկներում վերցված է՝

$$A = 24.2737$$

$$B = 129.4177$$

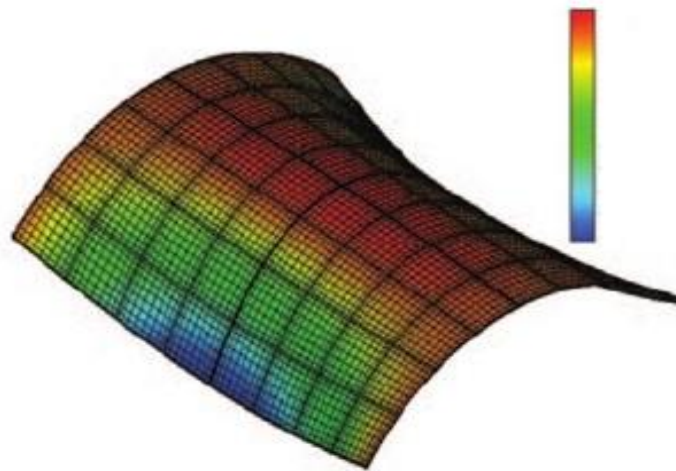
$$C = -60.6123$$

$$D = 106.7144$$

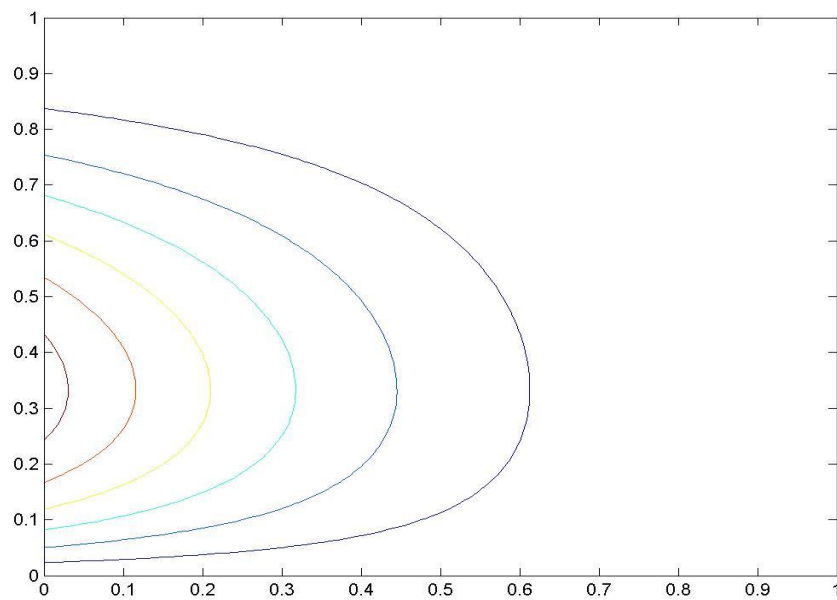
$$u = (A + 1)(\alpha(\alpha - 1)^2)(\beta(\beta - 1)^2) + 1$$

$$v = (B + 1)(\alpha(\alpha - 1)^2)(\beta^2(\beta - 1)^2) + 1$$

$$h = (C\alpha + D\beta)$$



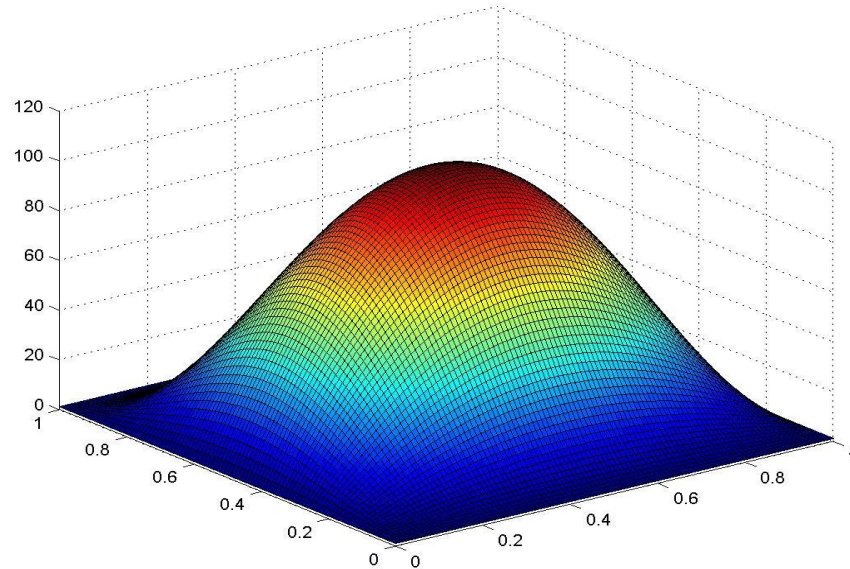
Նկ.2.16.ա



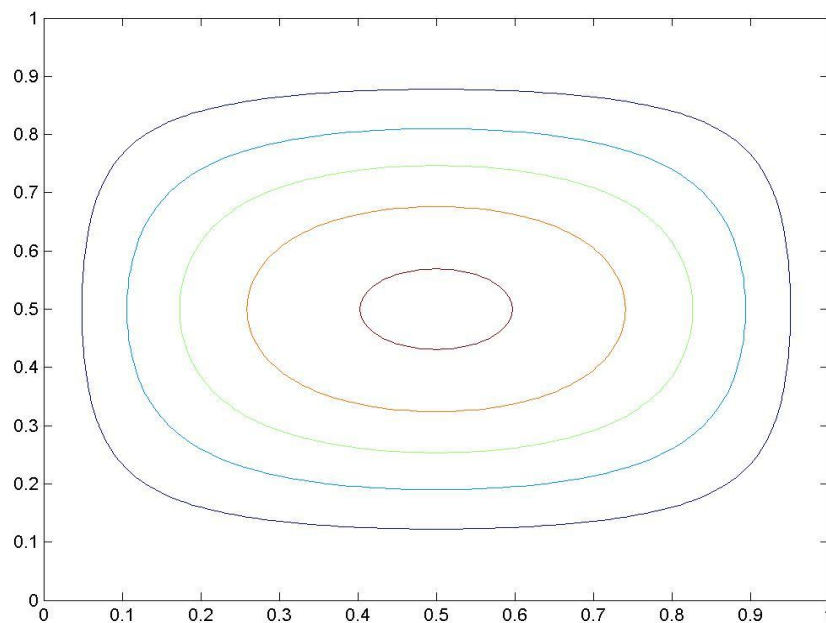
$$u = (A + 1)(\alpha(\alpha - 1)^2)(\beta(\beta - 1)^2) + 1,$$

Նկ.2.16.բ

Նկ.2.16.ա. պատկերված է միջին մակերևույթի u տեղափոխության գրաֆիկը կախված α և β կորրդինատներից: Նկ.2.16.բ. պատկերված է $u(\alpha, \beta)$ ֆունկցիայի մակարդակի գծերը:



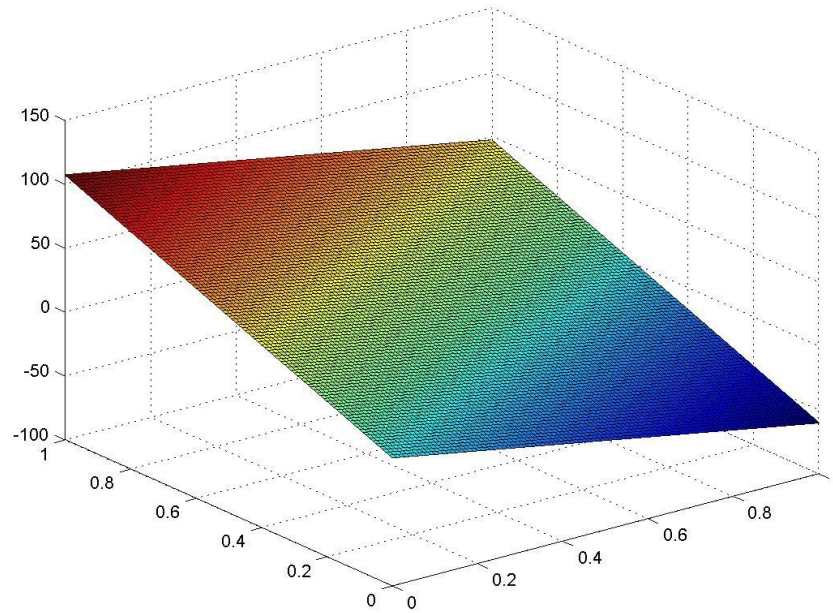
Նկ.2.17.ա



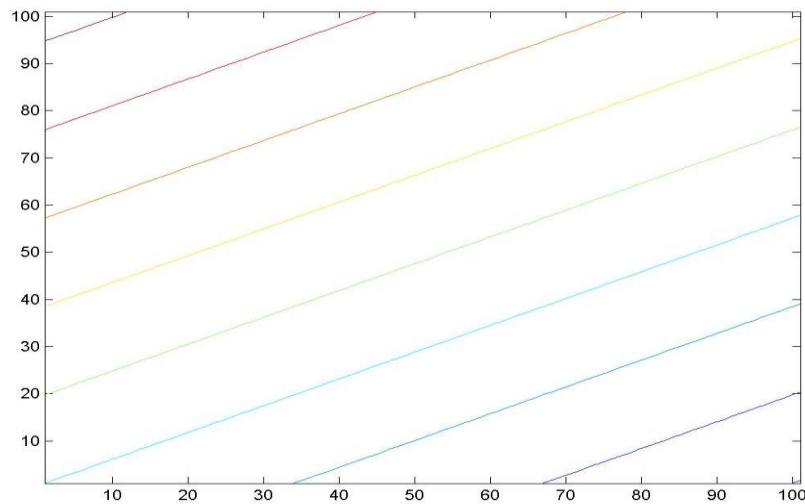
$$v = (B + 1)(\alpha(\alpha - 1)^2)(\beta^2(\beta - 1)^2) + 1,$$

Նկ. 2.17.բ

Նկ.2.17.ա. պատկերված է միջին մակերևույթի v տեղափոխության գրաֆիկը կախված α և β կոորդինատներից: Նկ.2.17.բ. պատկերված է $v(\alpha, \beta)$ ֆունկցիայի մակարդակի գծերը:



Նկ.2.18. ա



Նկ.2.18 բ

Նկ.2.18-ում պատկերված է h հաստության փոփոխության գրաֆիկը ըստ $h = C\alpha + D\beta$ բանաձևի:

ԳԼՈՒԽ ԵՐՐՈՐԴ
ՍԱԼԵՐԻ ՆԱԽԱԳԾՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Այս գլխում նախ բերված են անիզոտրոպ սալերի տեսությունից հայտնի [44, 64] սալի տատանումների, կայունության հայտնի խնդիրների լուծումները միաշերտ սալի համար ինչպես առանց սահքերի հաշվառմամբ, այնպես էլ ընդլայնական սահքերի հաշվառումով: Դիտարկված են շերտավոր սալերի տատանման և կայունության խնդիրներ: Կատարված են համեմատություններ հայտնի լուծումների հետ:

Ուսումնասիրվում է ուղղանկյան շերտավոր սալի ազատ տատանումների խնդիրը, երբ սալի բոլոր կողմերը հողակապորեն ամրակցված են: Օգտվելով Ռելե–Ռիցի մեթոդից առաջին մոտավորությամբ ստացված է բանաձև հիմնական հաճախության հաշվման համար:

Ուսումնասիրվում են շերտավոր ուղղանկյուն օրթոտրոպ սալի կայունություն խնդիրներ, երբ սալի բոլոր կողմերը հողակապորեն ամրացված են և երբ սալի երկու հանդիպակաց կողմերը հողակապային պայմաններում են, իսկ մյուս երկուսը՝ կամայական:

Դիտարկվում է սալի տատանումների և կայունության խնդիրները ընդլայնական սահքերի հաշվառումով: Ցույց է տրված, որ սահքերով հաշվառած սալի տատանման հաճախությունը փոքր է դասական տեսությամբ որոշվածից: Որոշված է կրիտիկական բեռի մեծությունը և ցույց է տրված, որ ճշգրտված տեսությունով կրիտիկական ճիգը փոքր է դասական դրվածքովից:

Դիտարկվում է սալի դինամիկական կայունության խնդիրը, երբ նրա հարթությանում ազդող ճիգը ժամանակի պարբերական ֆունկցիա է: Ստացված են հաճախությունների այն երեք արժեքները, որոնց դեպքում տեղի ունի անկայունություն:

Ուսումնասիրվում է սալի ծոման խնդիրը սահքերի հաշվառումով: Դիտարկված է այն դեպքը, երբ արտաքին նորմալ բեռը փոփոխվում է միայն մի ուղղությամբ: Անիզոտրոպ նյութերի համար տարբեր եզրային պայմանների դեպքում ստացված են բանաձևեր ճկվածքների հաշվման համար:

3.1. Սալի ազատ տատանումները

Շերտավոր սալի ազատ տատանումների հավասարումը դասական դրվածքով՝

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2n\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

Այստեղ ρ -ն նյութի միջին խտությունն է, h -ը մեկ շերտի հաստությունը, n -ը՝ շերտերի թիվը [44,105,129]:

Ուսումնասիրենք այն դեպքը, երբ ուղղանկյուն սալի չորս կողմերն էլ հողակապային ամրացման պայմաններում են՝

$$\begin{aligned} x = 0 \text{ և } x = a \quad w = M_x = 0, \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ y = 0 \text{ և } y = b \quad w = M_y = 0, \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

w ճկվածքը պետք է բավարարի հետևյալ սկզբնական պայմաններին

$$w = w_0(x, t), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = v_0(x, t)$$

որտեղ w_0, v_0 -ն նախնական ճկվածքը և արագությունն են:

(1.2) պայմաներին բավարարող w փնտրենք

$$w = f_{mn} e^{i\omega t} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{b} \quad (1.3)$$

տեսքով:

Ազատ տատանումների հաճախությունների համար կստանանք

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{b^2} \sqrt{\frac{1}{2n\rho h} \sqrt{D_{11} \left(\frac{m}{c}\right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})n^2 \left(\frac{m}{c}\right)^2 + D_{22}n^4}} \quad (1.4)$$

որտեղ $c = \frac{a}{b}$

Մասնավոր դեպքում քառակուսային ($a = b$) սալի համար, երբ $c = 1$

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{1}{2n\rho h} \sqrt{D_{11}m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})m^2n^2 + D_{22}n^4}} \quad (1.5)$$

և առաջին ամենափոքր հաճախությունը կլինի

$$\omega_{11} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{1}{2n\rho h} \sqrt{D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) + D_{22}}} \quad (1.6)$$

Իզոտրոպ նյութից պատրաստված սալի համար

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{2n\rho h}} \left[\left(\frac{m}{c}\right)^2 + n^2 \right] \quad (1.7)$$

Փոփոխականների անջատման մեթոդը կիրառելի է, երբ սալի երկու հանդիպակաձ կողմերի վրա հոդակապային պայմաններ են: Այլ պայմանների դեպքում օգտվում են այլ մեթոդներից, մասնավորապես վարիացիոն մեթոդներից:

Եթե ուղղանկյուն սալի չորս կողմերն էլ ամրակցված են, ունենք

$$\begin{aligned} w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \text{երբ } x = \pm \frac{a}{2} \\ w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \text{երբ } y = \pm \frac{b}{2} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Այս պայմաններին բավարարող ֆունկցիաներ կարելի է վերցնել

$$w = f_{mn} \left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right) \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) x^m y^n \quad (1.9)$$

տեսքով:

Օգտվելով Ռեյլե-Ռիցի մեթոդից առաջին մոտավորությամբ ((1.9) m և n վերցնել զերո) հիմնական հաճախություն համար ստացվում է

$$\omega_{11} = \frac{22.45}{a^2} \sqrt{\frac{1}{2n\rho h}} \sqrt{D_{11} + 0.571(D_{12} + 2D_{66})c^2 + D_{22}c^4} \quad (1.10)$$

Մասնավոր դեպքում իզոտրոպ նյութից քառակուսային սալի համար

$$\omega_{11} = \frac{36}{a^2} \sqrt{\frac{E}{1-\nu^2} \frac{n^2 h^2}{3\rho}} \quad (1.11)$$

3.2. Շերտավոր սալի կայունության խնդիրը

Շերտավոր սալի կայունություն խնդիրն էլ դիտարկելու ենք, երբ $D_{16} = D_{26} = 0$: Ունենք ուղղանկյուն սալ, որի չորս կողմերն էլ հոդակապորեն ամրացրած են և որը ենթարկվում է հավասարաչափ բաշխված նորմալ ճիգերով՝ p : Կրիտիկական ճիգը կորոշվի հետևյալ հավասարումից [105,66,67]

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2.1)$$

Կարճ գրելու համար այստեղ բերված գործակիցները ունեն հետևյալ տեսքը.

$$D_1 = D_{11}, \quad D_2 = D_{22}, \quad D_3 = D_{12} + 2D_{66} \quad (2.2)$$

Երբ սալի չորս կողմեր էլ հողակապային են [105], ապա

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \text{ երբ } x = 0 \text{ և } x = a$$

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \text{ երբ } y = 0 \text{ և } y = b \quad (2.3)$$

(2.1) հավասարման լուծումը կարելի փետրել հետևյալ ձևով՝

$$w = f_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{b} \quad (2.4)$$

(2.1) և (2.3) խնդրի ոչ նույնաբար զերո լուծումը կլինի

$$P \left(\frac{m}{a} \right)^2 = \pi^2 \left[D_1 \left(\frac{m}{a} \right)^4 + 2D_3 \left(\frac{mn}{ab} \right)^2 + D_2 \left(\frac{n}{b} \right)^4 \right] \quad (2.5)$$

Հեշտ է տեսնել, որ (2.5) բանաձևով որոշվող P արժեքը ըստ n կլինի մինիմում, երբ

$$n = 1$$

$$P = \frac{\pi^2 \sqrt{D_1 D_2}}{b^2} \left[\sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \left(\frac{m}{c} \right)^2 + \frac{2D_3}{\sqrt{D_1 D_2}} + \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} \left(\frac{c}{m} \right)^2 \right] \quad (2.6)$$

$$\text{որտեղ } c = \frac{a}{b}$$

Այստեղից կարելի է անել մի քանի եզրակացություններ:

1. Երբ կողմերի հարաբերություն c բավարարում է հետևյալ պայմանին

$$c = m' \sqrt[4]{\frac{D_1}{D_2}} \quad (2.7)$$

որտեղ m' ամբողջ թիվ է՝

$$P_{kp} = \frac{2\pi^2}{b^2} (\sqrt{D_1 D_2} + D_3) \quad (2.8)$$

(2.8) բանաձևով որոշվող P_{kp} արժեքը կլինի ամենափոքրը, որը որոշում է (2.6)

բանաձևով.

$$2. \text{ Երբ } c = c_0 = \sqrt{m(m+1)} \sqrt[4]{\frac{D_1}{D_2}} \quad (2.9)$$

որտեղ m ամբողջ թիվ է, ապա նույն կրիտիկական ճիգի դեպքում հնարավոր են հավասարակշռության երկու վիճակներ՝ m կիսաալիքներով a կողմի ուղղությամբ.

$$w = A_{m1} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (2.10)$$

$$w = A_{m+1,1} \sin \frac{(m+1)\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (2.11)$$

(2.9) հիման վրա կարելի է որոշել այն կիսաալիքների թիվը, որին համապատասխանում է տվյալ c -ն : Ահա այսպիսի պատկեր.

$$\text{երբ } 0 < c < 1.41 \sqrt[4]{\frac{D_1}{D_2}}, \quad m = 1$$

$$\text{երբ } 1.41 \sqrt[4]{\frac{D_1}{D_2}} < c < 2.45 \sqrt[4]{\frac{D_1}{D_2}}, \quad m = 2 \quad (2.12)$$

$$\text{երբ } 2.45 \sqrt[4]{\frac{D_1}{D_2}} < c < 3.46 \sqrt[4]{\frac{D_1}{D_2}}, \quad m = 3$$

և այլն:

3. Կամական c արժեքի համար, (2.7) որոշում է այն m -ը, որի դեպքում ապահովվում է P -ի համար կրիտիկական արժեքի որոշումը:

Կամայական c արժեքի համար, երբ $c > 3$, P կրիտիկական արժեքը կորոշվի (2.8) բանաձևից

$$P_{kp} = \frac{\pi^2 \sqrt{D_1 D_2}}{b^2} \cdot K \quad (2.13)$$

որտեղ K գործակիցը կախված է c/m և կոշտության գործակիցների հարաբերություններից:

Մասնավոր դեպքում, երբ սալը միաշերտ իզոտրոպ նյութից է ($D_1 = D_2 = D_3 = D$), ապա

$$P_{kp} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{m}{c} + \frac{c}{m} \right)^2 \quad (2.14)$$

Այստեղից, c -ի այն արժեքները, որոնց դեպքում հնարավոր են կայունության կորուստ m և $m + 1$ ձևերով՝

$$c = \sqrt{m(m+1)} \quad (2.15)$$

Ճիգի մինիմալ արժեքը, այս դեպքում հնարավոր է կայունության կորուստ՝

$$P_{kp} = 4 \frac{\pi^2 D}{b^2} \quad (2.16)$$

Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ սալի երկու հանդիպակաց կողմերը հողակապային պայմաններում են, իսկ մյուս երկուսը՝ կամայական: Այդ դեպքում (2.1)-ի լուծումը պետք է փնտրել

$$w = f(y) \sin \lambda_m x, \quad \left(\lambda_m = \frac{m\pi}{a} \right) \quad (2.17)$$

տեսքով:

Անհայտ $f(y)$ որոշման համար կստացվի

$$D_2 f^{IV} - 2\lambda_m^2 D_3 f'' + (D_1 \lambda_m^2 - P) \lambda_m^2 f = 0 \quad (2.18)$$

դիֆերենցիալ հավասարումը, որի բնութագրիչ հավասարումն է

$$D_2 S^4 - 2\lambda_m^2 D_3 S^2 + (D_1 \lambda_m^2 - P) \lambda_m^2 = 0, \quad (2.19)$$

որի արմատներն են $\pm iK_1$, $\pm iK_2$, որտեղ

$$K_1 = \sqrt{\lambda_m \sqrt{\left(\frac{D_3}{D_2}\right)^2 \lambda_m^2 + \frac{P}{D_2} + \frac{D_3 - D_1}{D_2} \lambda_m^2}} \quad (2.20)$$

$$K_2 = \sqrt{\lambda_m \sqrt{\left(\frac{D_3}{D_2}\right)^2 \lambda_m^2 - \frac{D_1 + D_3}{D_2} \lambda_m^2 + \frac{P}{D_2}}}$$

Հետևաբար՝

$$f(y) = A \operatorname{ch} K_1 y + B \operatorname{sh} K_1 y + C \cos K_2 y + D \sin K_2 y \quad (2.21)$$

Բավարարելով $y = 0$ և $y = b$ կողմերի եզրային պայմաններին A , B , C և D հաստատունների համար ստացվում է համառեռ հավասարումների համակարգ, որի լուծելիության պայմանից էլ որոշվում է P կրիտիկական արժեքները: Մասնավորապես, այն դեպքում, երբ կողմերը ամրակցված են, ունենք

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad x = 0 \quad \text{և} \quad x = a$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad y = 0 \quad \text{և} \quad y = b \quad (2.22)$$

Կրիտիկան P գտնելու համար ստացվում է հետևյալ հավասարումը՝

$$thK_1 b \operatorname{t}K_2 b = \frac{2K_1 K_2}{K_1^2 - K_2^2} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} K_1 b \cos K_2 b} \right) \quad (2.23)$$

Իհարկե, ինչպես տատանումների խնդրում, կարելի է օգտվել նաև վարիացիոն մեթոդներից: Մասնավորապես, եթե որպես f ընտրել

$$f = A_n \left(1 - \cos \frac{2n\pi y}{b} \right) \quad (2.24)$$

այս P մինիմում արժեքը ըստ n -ի ստացվում է, երբ $n = 1$.

$$P = \frac{\pi^2}{b^2} \left[D_1 \left(\frac{m}{c} \right)^2 + 2.67 D_3 + 5.33 D_2 \left(\frac{c}{m} \right)^2 \right] \quad (2.25)$$

Ճիգի մինիմալ արժեքը ստացվում է, երբ

$$c = 0.658 m \sqrt[4]{\frac{D_1}{D_2}} \quad (2.26)$$

և այն ունի հետևյալ տեսքը

$$P_{kp} = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot 2.67 (1.73 \sqrt{D_1 D_2} + D_3) \quad (2.27)$$

Հետաքրքրություն է առաջացնում նաև այն դեպքը, երբ սալի չորս կողմերն էլ գտնվում են արտաքին բեռի ազդեցության տակ: Մասնավորապես, եթե $x = 0$ և $x = a$ ազդում են p_1 հավասարաչափ բաշխված ճիգերը, իսկ $y = 0$ և $y = b$ եզրերում՝ p_2 ճիգերը, ապա գրգռված վիճակի ճկվածքը պետք է բավարարի հետևյալ հավասարմանը:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + p_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (2.28)$$

Հոդակապային եզրային պայմաններից կունենանք

$$p_1 \left(\frac{m}{a}\right)^2 + p_2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 = \pi^2 \left[D_1 \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2D_3 \left(\frac{mn}{ab}\right)^2 + D_2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right] \quad (2.29)$$

Խնդրի դրվածքի որոշակիության համար պետք է տալ լրացուցիչ պայմաններ p_1 և p_2 ճիգերի համար: Ընդ որում, դրանք կարող են լինել բազմակի բնույթի:

Դիտարկենք մի քանի մասնավոր դեպքեր:

1. p_1 և p_2 ճիգերը փոխվում են, բայց նրանց հարաբերությունը հաստատուն է՝

$$p_1 = \lambda, \quad p_2 = \lambda \alpha \quad (2.30)$$

Այդ դեպքում λ կրիտիկական արժեքը կորոշվի

$$\lambda = \frac{\pi^2 D_1 \left(\frac{m}{c}\right)^2 + 2D_3 n^2 + D_2 \left(\frac{c}{m}\right)^2 n^4}{b^2 (1 - \alpha \left(\frac{c}{m}\right)^2 n^2)} \quad (2.31)$$

բանաձևով:

Պետք է գտնել այն m և n , որոնք λ -ին հաղորդում են մինիմալ արժեք: Նշենք, որ եթե p_2 -ը ձգող է, ապա α գործակցի առաջ պետք է դնել մինուս նշանը:

2. Դիտարկենք մի մասնավոր դեպք ևս:

Եթե $x = 0$ և $x = a$ եզրերում ազդում են հավասարաչափ բաշխված սեղմող λ ճիգեր են, իսկ $y = 0$ և $y = b$ եզրերում ձգող p ճիգեր, ըստ որում, սեղմող ճիգերի

մեծությունը կարող է փոփոխվել, իսկ ձգողը՝ ոչ, ձգող ճիգերի ազդեցությունը կարելի է գնահատել: Այդ դեպքում (2.29)- ից կունենանք

$$\lambda = \frac{\pi^2}{b^2} \left[D_1 \left(\frac{m}{c} \right)^2 + 2D_3 n^2 + D_2 \left(\frac{c}{m} \right)^2 n^4 + \frac{pb^2}{\pi^2} \left(\frac{c}{m} \right)^2 n^2 \right] \quad (2.32)$$

Ամենափոքր λ կատարողի, երբ $n = 1$: Այդ դեպքում (2.32)- ի հետազոտությունը ցույց է տալիս որ, եթե c բավարարում է

$$c = \frac{m'}{\sqrt[4]{\frac{D_2}{D_1} + \frac{pb^2}{\pi^2 D_1}}} \quad (2.33)$$

պայմանին, որտեղ m ամբողջ թիվ է, ապա λ կրիտիկական արժեքը հավասար է՝

$$\lambda_{kp} = \frac{2\pi^2}{b^2} \sqrt{D_1 D_2} \left(\sqrt{1 + \frac{pb^2}{\pi^2 D_2}} + \frac{D_3}{\sqrt{D_1 D_2}} \right) \quad (2.34)$$

Կողմերի հարաբերության սահմանային արժեքը, երբ կայունությունը կորցնելու մի ձևից՝ m -ից անցնում է մյուս ձևին՝ $(m + 1)$ -ին, կորոշվի հետևյալ բանաձևից

$$c = \frac{\sqrt{m(m+1)}}{\sqrt[4]{\frac{D_2}{D_1} + \frac{pb^2}{\pi^2 D_1}}} \quad (2.35)$$

3.3. Սալի տատանման խնդիրը ընդլայնական սահքերի հաշվառումով

Տեսության հիմքում դրված է, այն ընդունելիությունը, որ ընդլայնական սահքերը ըստ սալի բարձրության ունեն [21]

$$\tau_{xz} = f(z)\varphi(x, y, t), \quad \tau_{yz} = f(z)\psi(x, y, t) \quad (3.1)$$

տեսքը, իսկ տեղափոխության կոմպոնենտները՝

$$u_z = w(x, y, t)$$

$$u_x = w(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} + a_{55} \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \varphi \quad (3.2)$$

$$u_y = v(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y} + a_{44} \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \psi$$

տեսքը:

Ընդունելով, որ սալի վրա ազդում է միայն նորմալ բեռ՝

$$\begin{aligned}
X^+ &= X^- = Y^+ = Y^- = X_i = Y_i = 0, (i = 1,2) \\
Z_1 &= \frac{1}{2} (Z^+ - Z^-), \quad Z_2 = Z^+ + Z^-
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Շարժման եռաչափ հավասարումներից՝

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

կստանանք

$$\sigma_z = Z_1 - \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + z \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{3.5}$$

և վերջապես մյուս լարման բաղադրիչների համար՝

$$\sigma_x = \bar{\sigma}_x - z A_1 \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \sigma_y = \bar{\sigma}_y - z A_2 \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \tau_{yx} = \bar{\tau}_{xy} \tag{3.6}$$

որտեղ $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}$ նույն մեծություններ են, առանց իներցիոն անդամների հաշվառման, իսկ

$$A_1 = B_{11} a_{13} + B_{12} a_{23}, \quad A_2 = B_{12} a_{13} + B_{22} a_{23}$$

(3.4) հավասարումները բազմապատկելով dz , այնուհետև առաջին երկուսը՝ $z dz$ և ինտեգրով $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$ կստանանք շարժման հավասարումները ճիգերով և մոմենտներով՝

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} &= \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial T_x}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\
\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= -Z_2 + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\
\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - N_x &= -\rho \frac{h^2}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + \rho a_{55} \frac{h^5}{120} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \\
\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} - N_y &= -\rho \frac{h^2}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} + \rho a_{44} \frac{h^5}{120} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Այս համակարգում տեղադրելով ճիգերի և մոմենտների արտահայտությունները, կստանանք

$$\begin{aligned}
C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= A_1 h \frac{\partial Z_1}{\partial x} + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= A_2 h \frac{\partial Z_1}{\partial y} + \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{12}{h^2} Z_2 + \rho h \frac{12}{h^3} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{h^2}{10} \left[a_{55} \left(D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi + a_{44} (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right] + \frac{h^3}{12} \varphi - A_1 \frac{h^5}{120} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = (1 - A_1) \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \rho a_{55} \frac{h^5}{120} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

$$D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{h^2}{10} \left[a_{44} \left(D_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi + a_{55} (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right] + \frac{h^3}{12} \psi - A_2 \frac{h^5}{120} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = (1 - A_2) \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} - \rho a_{44} \frac{h^5}{120} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Քանի որ դիտարկում ենք միաշերտ սալ, ապա

$$C_{ij} = h B_{ij}, \quad D_{ij} = \frac{h^3}{12} B_{ij}$$

Ալիքների տարածման խնդիրը այստեղ չի դիտակվելու, այդ պաճառով պտտման իներցիոն անդամները կարելի է արհամարել:

Դիտարկենք սալի ազատ տատանումները: (3.8) համակարգից կունենաք՝

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{h^3}{12} \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.9)$$

$$B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{h^2}{10} \left[a_{55} \left(B_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + a_{44} (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right] + \varphi = 0$$

$$B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{h^2}{10} \left[a_{44} \left(B_{22} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + a_{55} (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right] + \psi = 0$$

Դիտարկենք այն դեպքը, երբ ուղղանկյուն սալի չորս կողմերն է, ունեն հողակապային ամրացման պայմաններ

$$w = M_x = \psi = 0, \quad \text{երբ } x = 0 \text{ և } x = a$$

$$w = M_y = \varphi = 0, \quad \text{երբ } y = 0 \text{ և } y = b \quad (3.10)$$

(3.9) համակարգի լուծումը փնտրենք հետևյալ տեսքով

$$w = f_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \cos \omega_{mn} t$$

$$\varphi = \varphi_{mn} \cos \lambda_m x \sin \mu_n y \cos \omega_m t \quad (3.11)$$

$$\psi = \psi_{mn} \sin \lambda_m x \cos \mu_n y \cos \omega_m t, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{b}$$

(3.11) տեղադրելով (3.9) համակարգի մեջ f_{mn} , φ_{mn} և ψ_{mn} անկախ հաստատումների նկատմամբ կստանանք հետևյալ գծային հավասարումների համակարգը՝

$$\rho \omega_{mn}^2 f_{mn} - \frac{h^2}{12} \lambda_m \varphi_{mn} - \frac{h^2}{12} \mu_n \psi_{mn} = 0 \quad (3.12)$$

$$[B_{11}\lambda_m^3 + (B_{12} + 2B_{66})\lambda_m\mu_n^2]f_{mn} - \left[a_{55} \frac{h^2}{10} (B_{11}\lambda_m^2 + B_{66}\mu_n^2) + 1 \right] \varphi_{mn} -$$

$$- a_{44} \frac{h^2}{10} (B_{12} + B_{66})\lambda_m\mu_n\psi_{mn} = 0$$

$$[B_{22}\mu_n^3 + (B_{12} + 2B_{66})\lambda_m^2\mu_n]f_{mn} - a_{55} \frac{h^2}{10} (B_{11} + B_{66})\lambda_m\mu_n\psi_{mn} -$$

$$- \left[a_{44} \frac{h^2}{10} (B_{12}\mu_n^2 + B_{66}\lambda_m^2) + 1 \right] \varphi_{mn} = 0$$

Որպեսզի (3.12) համակարգը ունենա ոչ տրիվիալ (ոչ զերոյական) լուծում, պետք է նրա որոշիչը հավասար լինի զերոյի, որտեղից էլ հաճախության համար կստացվի

$$\omega_{mn} = \omega_{mn}^0 \sqrt{1-d} \quad (3.13)$$

Այստեղ ω_{mn}^0 դասական տեսությունից ստացվող ազատ տատանումների հաճախությունն է

$$\omega_{mn}^0 = \sqrt{\frac{1}{\rho h} [D_{11}\lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda_m^2\mu_n^2 + D_{22}\mu_n^4]}^{1/2} \quad (3.14)$$

իսկ d մեծության համար ստացվում

$$d = \frac{B-A}{1+B} \quad (3.15)$$

արժեքը, որտեղ`

$$A = \frac{h^2}{10} (a_{44}\lambda_m^2 + a_{55}\mu_n^2) \frac{(B_{11}\lambda_m^2 + B_{66}\mu_n^2)(B_{66}\lambda_m^2 + B_{22}\mu_n^2) - (B_{12} + B_{66})^2\lambda_m^2\mu_n^2}{B_{11}\lambda_m^4 + 2(B_{11} + 2B_{66})\lambda_m^2\mu_n^2 + B_{22}\mu_n^4}$$

$$B = \frac{\pi^2}{10} [a_{55}(B_{11}\lambda_m^2 + B_{66}\mu_n^2) + a_{44}(B_{66}\lambda_m^2 + B_{22}\mu_n^2)] +$$

$$+ a_{44}a_{55} \frac{h^4}{100} [(B_{11}\lambda_m^2 + B_{66}\mu_n^2)(B_{66}\lambda_m^2 + B_{22}\mu_n^2) - (B_{12} + B_{66})^2 + \lambda_m^2\mu_n^2] \quad (3.16)$$

Դիտելով (3.15) և (3.16) արտահայտությունները կարելի է տեսնել, որ d գործակիցը դրական և մեկից փոքր մեծությունն է, հետևաբար սահքերով հաշվառած հաճախությունը փոքր է դասական տեսությամբ որոշվածից:

Մասնավոր դեպքում, տրանսվերսալ իզոտրոպ նյութի համար

$$B_{11} = B_{22} = B_{12} + 2B_{66} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad B_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}$$

$$B_{66} = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad B_{12} + B_{66} = \frac{E}{2(1-\nu)}$$

$$a_{44} = a_{55} = \frac{1}{G'}, \quad a_{13} = a_{23} = -\frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu_{23}}{E_3} = -\frac{\nu'}{E'}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= A_2 = a_{12}(B_{11} + B_{12}) = a_{23}(B_{22} + B_{12}) = -\frac{v' E}{E'(1-v)} \\
v_1 &= v_2 = v \quad , \quad v_{13} = v_{23} = v' \\
\omega_{mn} &= \omega_{mn}^0 \frac{1}{\sqrt{1+h^*\left(\frac{m^2}{c^2} + n^2\right)}} \\
\omega_{mn}^0 &= \frac{\pi^2}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h} \left(\frac{m^2}{c^2} + n^2\right)} \tag{3.17}
\end{aligned}$$

որտեղ կատարված են հետևյալ նշանակումները

$$h^* = \frac{\pi^2 h^2}{10 b^2} \frac{E}{G'(1-v^2)}, \quad D = \frac{E h^3}{12(1-v^2)}, \quad c = \frac{a}{b}$$

3.4. Ուղղանկյուն սալի կայունությունը ընդլայնական սահքերի հաշվառումով

Այժմ դիտարկենք 3.2-ում նշված ուղղանկյուն սալի կայունության խնդիրը ընդլայնական սահքերի հաշվառումով, որոշված [44]

$$T_1^0 = -p, \quad T_2^0 = -\lambda p \tag{4.1}$$

նախնական լարվածին վիճակով:

Սալի կրիտիկական բեռի որոշման համար ունենք հետևյալ համակարգը՝

$$\frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \tag{4.2}$$

$$B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{h^2}{10} \left[a_{55} \left(B_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + a_{44} (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right] + \varphi = 0$$

$$B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{h^2}{10} \left[a_{44} \left(B_{22} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + a_{55} (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right] + \psi = 0$$

Եզրային պայմանները (3.10) տեսքի են: Համակարգի լուծում փնտրենք.

$$w = f_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y$$

$$\varphi = \varphi_{mn} \cos \lambda_m x \sin \mu_n y \tag{4.3}$$

$$\psi = \psi_{mn} \sin \lambda_m x \cos \mu_n y$$

տեսքով: (4.1) և (4.3) տեղադրելով (4.2) համակարգի մեջ f_{mn} , φ_{mn} և ψ_{mn} համար կստանանք հետևյալ համասեռ հավասարումների համակարգը՝

$$p(\lambda_m^2 + \lambda \mu_n^2) f_{mn} - \frac{h^3}{12} \lambda_m \varphi_{mn} - \frac{h^3}{12} \mu_n \psi_{mn} = 0 \tag{4.4}$$

$$[B_{11}\lambda_m^3 + (B_{12} + 2B_{66})\lambda_m\mu_n^2]f_{mn} - \left[a_{55} \frac{h^2}{10} (B_{11}\lambda_m^2 + B_{66}\mu_n^2) + 1 \right] \varphi_{mn} -$$

$$- a_{44} \frac{h^2}{10} (B_{12} + B_{66}) \lambda_m \mu_n \psi_{mn} = 0$$

$$[B_{22}\mu_n^3 + (B_{12} + 2B_{66})\lambda_m^2\mu_n]f_{mn} - a_{55} \frac{h^2}{10} (B_{12} + B_{66})\lambda_m\mu_n\varphi_{mn} -$$

$$- \left[a_{44} \frac{h^2}{10} (B_{22}\mu_n^2 + B_{66}\lambda_m^2) + 1 \right] \psi_{mn} = 0$$

Բեռի կրիտիկական արժեքը որոշվում է (4.4) համասեռ հանրահաշվական համակարգի լուծելիության պայմանից՝

$$p_{mn}^* = p_{mn}^0 \sqrt{1 - d} \quad (4.5)$$

որտեղ՝

$$p_{mn}^0 = \frac{D_{11}\lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda_m^2\mu_n^2 + D_{22}\mu_n^4}{\lambda_m^2 + \lambda_n^2} \quad (4.6)$$

Վերջին բանաձևը դասական դրվածքով խնդրի կրիտիկական ճիգի արտահայտությունն է: (4.5) բանաձևում d դասական դրվածքի ճշգրտում է և որպես կանոն $d < 1$:

Հետևապես, ճշգրտված տեսությունով կրիտիկական ճիգը փոքր է դասական դրվածքովից: Այժմ դիտարկենք մասնավոր դեպքը, երբ $\lambda = 0$: Այդ դեպքում

$$p_{mn}^* = \frac{1}{\lambda_m^2} [D_{11}\lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda_m^2\mu_n^2 + D_{22}\mu_n^4] \frac{1+A}{1+B} \quad (4.7)$$

որտեղ A և B որոշվում են (3.16) բանաձևներով:

Երբ սալի նյութը տրանսվերսալ իզոտրոպ նյութից է և ամեն կետում իզոտրոպիայի հարթությանը զուգահեռ է միջին հարթությանը, ապա կրիտիկական ճիգի համար ստացվում է ($n = 1$)

$$p_m^* = \frac{\pi^2 D}{b^2} \frac{\left(\frac{m}{c} + \frac{c}{m}\right)^2}{1 + h^* \left(1 + \frac{m^2}{c^2}\right)} \quad (4.8)$$

որտեղ՝

$$h^* = \frac{\pi^2 h^2}{10 b^2} \frac{E}{(1 - \nu^2) G'} = \frac{\pi^2 h^2}{5(1 - \nu^2) b^2} \frac{G}{G'}$$

(4.8) արտահայտության երկրորդ բազմապատիչը մինիմալ արժեքը ստանում է, երբ

$$c = m \sqrt{(1 - h^*) / (1 + h^*)} \quad (4.9)$$

և այն է՝ $\frac{4}{(1+h^*)^2}$:

Հետևապես՝

$$p_{min} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \frac{4}{(1+h^*)^2}$$

Ինչպես դասական դրվածքով, այստեղ էլ կրիտիկական ճիգի մեծությունը կախված չէ կիսաալիքների թվից, բայց էապես կախված է h^* -ից:

3.5. Սալի դինամիկական կայունությունը

Այժմ դիտարկենք սալի կայունության խնդիրը, երբ նրա հարթությունում ազդող ճիգը ժամանակի պարբերական ֆունկցիա է՝ $T_1^0 = -p(t)$.

Դինամիկական կայունությունն ուսումնասիրելու համակարգը կլինի [44,21,65]

$$\frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - p(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (5.1)$$

$$\left[B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] - \frac{h^2}{10} \left[a_{55} \left(B_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + a_{44} (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right] + \varphi = 0$$

$$\left[B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right] - \frac{h^2}{10} \left[a_{44} \left(B_{22} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + a_{55} (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right] + \psi = 0$$

Եզրային պայմանները ներկայացվում են (3.10) բանաձևով:

(5.1) համակարգի լուծումը փնտրենք՝

$$w = f_{mn}(t) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y$$

$$\varphi = \varphi_{mn}(t) \cos \lambda_m x \sin \mu_n y \quad (5.2)$$

$$\psi = \psi_{mn}(t) \sin \lambda_m x \cos \mu_n y$$

տեսքով:

Այդ դեպքում (5.1) -ից կունենանք

$$\lambda_m^2 p(t) - \frac{h^2}{12} \lambda_m \varphi_{mn}(t) f_{mn} - \frac{h^2}{12} \mu_n \psi_{mn}(t) = \rho h \frac{d^2 f_{mn}(t)}{dt^2} \quad (5.3)$$

$$\lambda_m^2 [B_{11} \lambda_m^2 + (B_{12} + 2B_{66}) \mu_n^2] f_{mn}(t) - \left[a_{55} \frac{h^2}{10} (B_{11} \lambda_m^2 + B_{66} \mu_n^2) + 1 \right] \varphi_{mn}(t) -$$

$$- a_{44} \frac{h^2}{10} (B_{12} + B_{66}) \lambda_m \mu_n \psi_{mn}(t) = 0$$

$$\mu_n^2 [B_{22} \mu_n^2 + (B_{12} + 2B_{66}) \lambda_m^2] f_{mn}(t) - \left[a_{44} \frac{h^2}{10} (B_{22} \mu_n^2 + B_{66} \lambda_m^2) + 1 \right] \psi_{mn}(t) -$$

$$-a_{55} \frac{h^2}{10} (B_{12} + B_{66}) \lambda_m \mu_n \varphi_{mn}(t) = 0$$

(5.3) համակարգից արտաքսելով φ_{mn} և ψ_{mn} , կստանանք

$$\frac{d^2 f_{mn}(t)}{dt^2} + \omega_{mn}^2 \left[\frac{1-p(t)}{p_{mn}^*} \right] f_{mn} \quad (5.4)$$

Այստեղ ω_{mn} որոշվում է (3.13) և (3.14) բանաձևերով, իսկ p_{mn}^* -ը (4.4) և (4.6) բանաձևերով:

Երբ $p(t)$ -ն պարբերական ֆունկցիա է՝ $p(t) = p_0 - p_1 \cos \theta t$, ապա

$$\frac{d^2 f_{mn}(t)}{dt^2} + \Omega_{mn}^2 (1 - 2\mu_{mn} \cos \theta t) f_{mn} = 0 \quad (5.5)$$

որտեղ

$$\Omega_{mn} = \omega_{mn} \left(\frac{1-p(t)}{p_{mn}^*} \right)^{1/2}, \mu_{mn} = \frac{p_1 t}{2(p_{mn}^* - p_0)} \quad (5.6)$$

(5.5)-ը գրականությունից հայտնի Մատյեի հավասարումն է, որի համար հայտնի են կայունության և անկայունության տիրույթները [70]:

Մանրամասը կանգ առնենք այն դեպքի վրա, երբ $p_0 = 0$, $-p(t) = p_1 \cos \theta t$: Այդ դեպքում (5.5) հավասարումը կունենա

$$\frac{d^2 f_{mn}(t)}{dt^2} + \omega_{mn}^2 (1 - 2\mu_{mn} \cos \theta t) f_{mn} = 0 \quad (5.7)$$

տեսքը:

$$\text{Այժմ } \mu_{mn} = \frac{p_1 t}{2p_{mn}^*}$$

Չբերելով ընթացիք գործողությունները, բերենք հաճախությունների այն երեք արժեքները, որոնց դեպքում տեղի ունի անկայունություն:

$$\begin{aligned} \theta^* &= \omega_{mn}^0 \sqrt{1 - d + \frac{1}{3} \frac{(\mu_{mn}^0)^2}{1-d}} \\ \theta^* &= \omega_{mn}^0 \sqrt{1 - d - 2 \frac{(\mu_{mn}^0)^2}{1-d}} \\ \theta^* &= \frac{2}{3} \omega_{mn}^0 \sqrt{1 - d - \frac{9(\mu_{mn}^0)^2}{8(1-d) \pm 9\mu_{mn}^0}} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Այստեղ d -ն որոշվում է (3.15) բանաձևով, իսկ

$$\mu_{mn}^0 = \frac{p_1}{2p_{mn}^0}$$

3.6. Սալի ծոման խնդիրը

Այստեղ բերենք նախորդ երկու դրվածքներով սալի ծոման խնդիրները, երբ արտաքին նորմալ բեռը միայն մի ուղղությամբ է փոփոխվում: Ծոման խնդրի համար կունենանք [21]

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(y) \quad (6.1)$$

Դիցուք $y = 0$ և $y = b$ կողմերի վրա տրված են հողակապային ամրացման պայմաններ, այսինքն՝

$$w = \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0, \quad \text{երբ } y = 0 \text{ և } y = b \quad (6.2)$$

(6.1) հավասարման լուծումը փնտրենք

$$w = w_0(y) + w_1(x, y) \quad (6.3)$$

տեսքով, որտեղ w_0 բավարարում է

$$D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(y) \quad (6.4)$$

հավասարմանը և $w_0(0) = w_0''(0) = w_0(b) = w_0''(b) = 0$ պայմաններին, իսկ $w_1(x, y)$ -ը

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} = 0 \quad (6.5)$$

հավասարմանը:

(6.2) եզրային պայմանների դեպքում $w_0(y)$ կունենա

$$w_0 = \frac{b^2}{D_{22} \pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^4} \sin \mu_n y, \quad \left(\mu_n = \frac{n\pi}{b} \right) \quad (6.6)$$

տեսքը:

Անհայտ $w_1(x, y)$ ֆունկցիան փնտրենք հետևյալ տեսքով՝

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} X_m(x) \sin \mu_n y \quad (6.7)$$

որտեղ X_m -ի որոշման համար կունենանք

$$D_{11} X_m^{IV} - 2(D_{12} + 2D_{66}) X_m'' + D_{22} X_m = 0 \quad (6.8)$$

դիֆերենցիալ հավասարումը: Համապատասխան

$$D_{11} k^4 - 2(D_{12} + 2D_{66}) k^2 + D_{22} = 0, \quad (6.9)$$

բնութագրիչ հավասարման արմատների համար հնարավոր են հետևյալ դեպքերը:

1. Արմատները իրական են և տակեր՝

$\pm k_1$, $\pm k_2$ ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$)

2. Արմատները իրական են և իրար հավասար

k , ($k > 0$)

3. Արմատները կոմպլեքս են

$k_1 \pm ik_2$, $-k_1 \pm ik_2$ ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$)

Այդ դեպքերին համապատասխանող X_n արտահայտությունները կլինեն

$$X_n = A_n ch\mu_n k_1 x + B_n sh\mu_n k_1 x + C_n ch\mu_n k_2 x + D_n sh\mu_n k_2 x$$

$$X_n = (A_n + B_n x) ch\mu_n kx + (C_n + D_n x) sh\mu_n kx \quad (6.10)$$

$$X_n = (A_n \cos\mu_n k_2 x + B_n \sin\mu_n k_2 x) ch\mu_n k_1 x + (C_n \cos\mu_n k_2 x + D_n \sin\mu_n k_2 x) sh\mu_n k_1 x$$

Վերջապես երեք դեպքերի ճկվածքների համար կունենաք հետևյալ արտահայտությունները

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n b^2}{D_{22} \pi^4 n^4} + A_n ch\mu_n k_1 x + B_n sh\mu_n k_1 x + C_n ch\mu_n k_2 x + D_n sh\mu_n k_2 x \right) \sin\mu_n y$$

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n b^2}{D_{22} \pi^4 n^4} + (A_n + B_n x) ch\mu_n kx + (C_n + D_n x) sh\mu_n kx \right) \sin\mu_n y \quad (6.11)$$

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n b^2}{D_{22} \pi^4 n^4} + (A_n \cos\mu_n k_2 x + B_n \sin\mu_n k_2 x) ch\mu_n k_1 x + \right.$$

$$\left. + (C_n \cos\mu_n k_2 x + D_n \sin\mu_n k_2 x) \right] sh\mu_n k_1 x$$

Ունենալով w արտահայտությունները, կարելի է նույնը ստանալ ֆիզիկական մեծությունների համար: Բանաձևում բերված A_n , B_n , C_n և D_n հաստատումները կորոշվեն $x = \pm \frac{a}{2}$ կողմերի վրա դրված պայմաններից:

Այժմ բերենք ճկվածքի արտահայտությունը, երբ սալի չորս կողմերն էլ հողակապային պայմաններում են:

$$w = w_0(y) + \frac{b^2}{D_{22} \pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^4 (k_1^2 - k_2^2)} \cdot \left(\frac{k_2^2 ch\mu_n k_1 x}{ch0.5 \mu_n k_1 a} - \frac{S_1^2 ch\mu_n k_2 x}{ch0.5 \mu_n k_2 a} \right) \sin\mu_n y \quad (6.12)$$

Այժմ դիտարկենք սալի ծոման խնդիրը սահքի հաշվառումով, ինչպես 3.3-ում: Եթե ընդունենք, որ նորմալ բեռը ունի այսպիսի տեսք՝

$$Z_1 = 0, \quad Z_2 = q \sin\lambda_1 x \sin\mu_1 y, \quad \left(\lambda_1 = \frac{m\pi}{a}, \quad \mu_1 = \frac{n\pi}{b} \right), \quad (6.13)$$

ապա սալի ծոման հավասարումները կլինեն

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{12}{h^3} q \sin \lambda_1 x \sin \mu_1 y \quad (6.14)$$

$$D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{h^2}{10} \left[a_{55} \left(D_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + a_{44} (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right] + \frac{h^2}{12} \varphi = -q A_1 \frac{h^2}{10} \lambda_1 \cos \lambda_1 x \sin \mu_1 y$$

$$D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{h^2}{10} \left[a_{44} \left(D_{22} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + a_{55} (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right] + \frac{h^2}{12} \psi = -q A_2 \mu_1 \sin \lambda_1 x \cos \mu_1 y$$

Եթե հողակապային եզրային պայմանները տրված են (3.10) տեսքով, ապա w , φ և ψ փնտրեք հետևյալ տեսքով

$$w = f \sin \lambda_1 x \sin \mu_1 y, \varphi = \bar{\varphi} \cos \lambda_1 x \sin \mu_1 y, \psi = \bar{\psi} \sin \lambda_1 x \cos \mu_1 y \quad (6.15)$$

Ստացված համակարգից կորոշվեն անհայտ գործակիցները: Համառոտության համար գրենք միայն f արտահայտությունը՝ $f = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} q$, որտեղ

$$\Delta_0 = \frac{h^3}{12} [D_{11} \lambda_1^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_1^2 \mu_1^2 + D_{22} \mu_1^4] + \frac{h^2}{10} [(D_{11} \lambda_1^2 + D_{66} \mu_1^2)(D_{22} \mu_1^2 + D_{66} \lambda_1^2) - (D_{12} + 2D_{66})^2 \lambda_1^2 \mu_1^2] (a_{44} \lambda_1^2 + a_{55}^2)$$

$$\Delta_1 = \frac{12}{h^3} \left\{ \frac{h^6}{144} + \frac{h^5}{120} [a_{55} (D_{11} \lambda_1^2 + D_{66} \mu_1^2) + a_{44} (D_{22} \mu_1^2 + D_{66} \lambda_1^2)] + \frac{h^4}{100} a_{44} a_{55} [(D_{12} + D_{66}) \lambda_1^2 \mu_1^2 - (D_{11} \lambda_1^2 + D_{66} \mu_1^2)(D_{22} \mu_1^2 + D_{11} \lambda_1^2)] \right\} + \frac{h^2}{10} \left\{ A_1 \left[\frac{h^3}{12} \lambda_1^2 + a_{44} \frac{h^2}{10} \lambda_1^2 (D_{22} \mu_1^2 + D_{66} \lambda_1^2) - a_{55} \frac{h^2}{10} (D_{12} + D_{66}) \mu_1^2 \right] + A_2 \left[\frac{h^3}{12} \mu_1^2 + a_{55} \frac{h^2}{10} \mu_1^2 (D_{11} \lambda_1^2 + D_{66} \mu_1^2) - a_{44} \frac{h^2}{10} (D_{12} + D_{66}) \lambda_1^2 \mu_1^2 \right] \right\} \quad (6.16)$$

Համեմատաբար շոշափելի արդյունքներ են ստացվում տրանսվերսալ իզոտրոպ նյութի դեպքում:

Այդ դեպքում

$$w = w_0 \left[1 + \frac{\pi^2 h^2}{10(1-\nu)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \left(2 \frac{G}{G'} - \nu' \frac{E}{E'} \right) \right] \quad (6.17)$$

որտեղ w_0 -ի համար ունենք հետևյալ արտահայտությունը

$$w_0 = \frac{12(1-\nu^2) a^4 b^4 q}{\pi^4 E h^3 (a^2 + b^2)^2} \sin \lambda_1 x \sin \mu_1 y \quad (6.18)$$

ԳԼՈՒԽ ԶՈՐՐՈՐԴ

ԲԱԶՄԱՇԵՐՏ ՍԱԼԵՐԻ ՀԱՐԿԱԴՐԱԿԱՆ ՏՍՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ԵՎ

ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ժամանակակից տեխնիկայում, հատկապես տրանսպորտում, մեծ կիրառություն են գտել կոմպոզիտային նյութերը՝ պոլիմերային, մետաղական, ածխածնային, կերամիկական կամ այլ հիմքերից (մատրիցայից) կազմված բազմաբաղադրիչ նյութեր՝ ամրակցված լցանյութերով՝ մանրաթելերով, թելանման բյուրեղներով և այլն: Ամրակցող լցանյութերը իրենց վրա են վերցնում կոմպոզիցիոն նյութերի բեռնվածքի (ծանրության) հիմնական բաժինը [120, 57, 63, 82]:

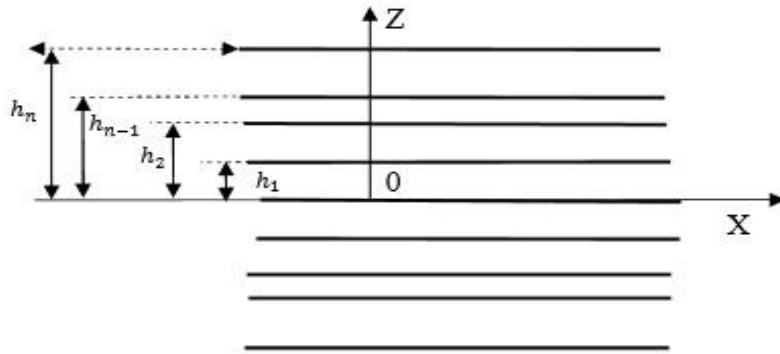
Կոմպոզիտային նյութերից շինվածքներ պատրաստելիս հարց է ծագում, ի՞նչ տեսքով սարքել կոմպոզիտը, որպեսզի այն լավագույնս հարմարեցված լինի գործնական կիրառման համար: Շերտավոր կոմպոզիտների պատրաստման հիմնական եղանակներից մեկը ներկայացնում են մամլումը և նախապես կապակցող միաշերտով պայմանավորված մանրաթելային հենքի կարծրացումը:[68, 69, 133-136].

Կառավարելով շերտերի դասավորության հաջորդականությունը՝ կարելի է ստանալ ամրացող մանրաթելերի տարբեր կողմնորոշումներով շերտավոր կոմպոզիտներ, որոնք դասավորման հարթության մեջ իզոտրոպ են կամ անիզոտրոպ:

Այս գլխում դիտարկվված են մանրաթելերից լցանյութի հիմքի վրա պատրաստված շերտավոր կոմպոզիցիոն սալերի կայունության, ազատ տատանումների և օպտիմալ կառավարման խնդիրներ:

4.1. Բազմաշերտ անիզոտրոպ սալերի մասին

Իմանալով յուրաքանչյուր շերտի առաձգական հաստատունները՝ նրանց միջոցով կարելի է որոշել ծոման և ոլորման կոշտությունները ամբողջ սալի համար, ինչպես նաև բերված առաձգականության մոդուլները իր միջին հարթության վրա ազդող ուժերի ազդեցության տակ դեֆորմացող սալի համար:



Նկ. 4.1

Դիտարկենք սուսնձված կամ իրար զոդված $2n$ շերտերից կազմված բազմաշերտ սալը: Ենթադրենք, որ հարևան շերտերի սահքը կոնտակտի մակերևույթով բացառված է սուսնձման կամ զոդման պատճառով: XOY կոորդինատային հարթությունը տեղադրված է շերտերի դասավորվածության կենտրոնում՝ երկու հարթությունների հպման հարթության վրա [39]:

Սալի բոլոր շերտերի հաստությունները միևնույն են և հավասար են h -ի : Սալի ընդհանուր հաստությունը հավասար է $H = 2nh$: Յուրաքանչյուր շերտի մանրաթելերը գտնվում են XY կոորդինատային հարթությանը զուգահեռ հարթության մեջ և OX առանցքի նկատմամբ ուղղված են φ_k անկյան տակ: X առանցքի նկատմամբ շերտերի մանրաթելերի ուղղությունները կարող են ուղղված լինել XOY հարթության նկատմամբ սիմետրիկ կամ ոչ սիմետրիկ: Առաջին դեպքում մեջտեղի հարթությունից k -րդ շերտերի մանրաթելերի ուղղությունը երկու կողմերով թեքված է միևնույն φ_k անկյան տակ:

Երկրորդ դեպքում, եթե k -րդ շերտի մանրաթելը թեքված է φ_k անկյան տակ, ապա նույն համարով մանրաթելը հակադիր կիսահարթության մեջ ունի $-\varphi_k$ ուղղությունը [42]:

Աշխատանքում դիտարկված են միայն սիմետրիկ դեպքերը:

Յուրաքանչյուր շերտի համար Հուկի ընդհանրացված օրենքն ունի հետևյալ տեսքը [21,23].

$$\sigma_i^{(k)} = B_{ij}^{(k)} e_j \quad (1.1)$$

A_{ij} օպերատորների միջոցով $B_{ij}^{(k)}$ օպերատորների վերահաշվարկի բանաձևերը արտահայտվում են հետևյալ կերպ [46].

$$\begin{aligned}
B_{11}^{(k)} &= A + B \cos 2\varphi_k + C \cos^2 2\varphi_k, \\
B_{22}^{(k)} &= A - B \cos 2\varphi_k + C \cos^2 2\varphi_k, \\
B_3^{(k)} &= B_{12} + 2B_{66} = D - 3C \cos^2 2\varphi_k, \\
B_{16}^{(k)} &= (0.5B + C \cos 2\varphi_k) \sin 2\varphi_k, \\
B_{26}^{(k)} &= (0.5B - C \cos 2\varphi_k) \sin 2\varphi_k, \\
A &= 0.25(A_{11} + A_{22} + 2A_3), \quad B = 0.5(A_{11} - A_{22}), \\
C &= 0.25(A_{11} + A_{22} - 2A_3), \quad D = 0.25[3(A_{11} + A_{22}) - 2A_3], \\
A_3 &= A_{12} + 2A_{66}.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Ընդունելով չդեֆորմացվող նորմալների հիպոթեզը ծող մոմենտների և ոլորող մոմենտի համար, կունենանք.

$$\begin{aligned}
M_x &= - \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \\
M_y &= - \left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \\
M_{xy} &= - \left(D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Այստեղ D_{ij} անիզոտրոպ սալի կոշտություններն են:

Այժմ դիտարկենք միևնույն հաստության և միևնույն հատկություններով շերտերից պատրաստված բազմաշերտ սալի ընդհանրացված հարթ լարված վիճակը (նկ.4.1): Այդ դեպքում բերված կոշտությունները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով. [46].

$$D_{ij} = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^n [h_k^3 - h_{k-1}^3] B_{ij}^{(k)}, \tag{1.4}$$

այստեղ $h_k - h_{k-1}$, k -րդ շերտի հաստությունն է: Եթե շերտերը ունեն միևնույն h հաստությունը, ապա այդ դեպքում նշանակելով $B_{ij}^{(k)}$ -ն B -ով, կստանանք.

$$D_{11} = \frac{2h^3}{3} (A \sum_{k=1}^n K(k) + B \sum_{k=1}^n K(k) \cos 2\varphi_k + C \sum_{k=1}^n K(k) (\cos 2\varphi_k)^2), \tag{1.5}$$

$$D_{22} = \frac{2h^3}{3} (A \sum_{k=1}^n K(k) - B \sum_{k=1}^n K(k) \cos 2\varphi_k + C \sum_{k=1}^n K(k) (\cos 2\varphi_k)^2), \tag{1.6}$$

$$D_{16} = \frac{2h^3}{3} \left(\frac{B}{2} \sum_{k=1}^n K(k) \sin 2\varphi_k + C \sum_{k=1}^n K(k) \cos 2\varphi_k \sin 2\varphi_k \right) \tag{1.7}$$

$$D_{26} = \frac{2h^3}{3} \left(\frac{B}{2} \sum_{k=1}^n K(k) \sin 2\varphi_k - C \sum_{k=1}^n K(k) \cos 2\varphi_k \sin 2\varphi_k \right) \quad (1.8)$$

$$D_3 = \frac{2h^3}{3} (D \sum_{k=1}^n K(k) - 3C \sum_{k=1}^n K(k) \cos^2 2\varphi_k) \quad (1.9)$$

որտեղ

$$K(k) = 3k(k-1) + 1. \quad (1.10)$$

D_{11} , D_{22} -ը ծոման կոշտություններն են X, Y առանցքների շուրջ, D_{66} -ը ոլորման կոշտությունն է, D_{16} , D_{26} - կողմնակի կոշտություններ են [43,130,131]:

Հարթ լարված վիճակի համար բերված մոդուլների մոտավոր արտահայտությունները կստանանք, ենթադրելով, որ դեֆորմացիայի ε_x , ε_y , γ_{xy} բաղադրիչները բոլոր շերտերի համար նույնն են և կախված չեն z -ից, իսկ լարումների բաղադրիչները չեն փոխվում տրված յուրաքանչյուր շերտում ըստ նրա հաստության:

Այդ դեպքում ըստ սալի ամբողջ հաստության լարումները կլինեն հավասար [44].

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \frac{1}{h} \left(2 \sum_{k=1}^n \sigma_x^{(m)} (h_m - h_{m-1}) + \sigma_x^{(n+1)} \delta_{n+1} \right) \\ \bar{\sigma}_{xy} &= \frac{1}{h} \left(2 \sum_{k=1}^n \sigma_{xy}^{(m)} \delta_m + \sigma_{xy}^{(n+1)} \delta_{n+1} \right) \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{1}{h} \left(2 \sum_{k=1}^n \tau_{xy}^{(m)} \delta_m + \tau_{xy}^{(n+1)} \delta_{n+1} \right) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Մակերևույթով բաշխված լայնական փոփոխական բեռով և հավասարաչափ սեղմող ուժերով X առանցքի ուղղությամբ սեղմված բազմաշերտ ուղղանկյուն սալի հարկադրական տատանման հավասարումը նկարագրվում է

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ + \rho 2nh \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Q(x, y, t) = 0, \end{aligned} \quad (1.12)$$

հավասարմամբ, որտեղ p -ն սալի միջին մակերևույթին (հարթությանը) ազդող երկայնական ուժն է, ρ -ն՝ նյութի խտությունը, $Q(x, y, t)$ -ն՝ լայնական փոփոխական ուժը: $Q(x, y, t) = 0$ և $\rho = 0$ դեպքում այդ հավասարումը հանդիսանում է անիզոտրոպ սալի համար ձկված մակերևույթի հավասարում, $p = 0$ և $Q(x, y, t) = 0$ -ի համար՝ շարժման հավասարում, իսկ $p = 0$ -ի դեպքում՝ հարկադրական տատանումների հավասարում: w ձկվածքը պետք է բավարարի նաև սալի եզրային պայմաններին և

$$w = w_0(x, y), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = v_0(x, y), \quad \text{երբ } t = 0, \quad (1.13)$$

սկզբնական պայմաններին:

D_{16} և D_{26} գործակիցների առկայությունը (1.12) հավասարման մեջ թույլ չի տալիս այդ հավասարումը լուծել փոփոխականների անջատման մեթոդով: Սակայն մանրաթելերով ամրակցված շերտերից կազմված բազմաշերտ սալերում մանրաթելերի ուղղությունները կարելի է ընտրել այնպես, որ D_{16} և D_{26} կողմնակի կոշտությունները հավասար լինեն զրոյի [130-132]:

$$D_{16} = D_{26} = 0 \quad (1.14)$$

Այդ դեպքում (1.12) հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2nh\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Q(x, y, t) = 0, \quad (1.15)$$

(1.7) (1.8) բանաձևերից հետևում է, որ D_{16} և D_{26} կողմնակի կոշտությունների զրոյի հավասար լինելը կարող է ստացվել հետևյալ պայմանների դեպքում.

$$\begin{aligned} \left(\frac{B}{2} \sum_{k=1}^n K(k) \sin 2\varphi_k + C \sum_{k=1}^n K(k) \cos 2\varphi_k \sin 2\varphi_k \right) &= 0, \\ \left(\frac{B}{2} \sum_{k=1}^n K(k) \sin 2\varphi_k - C \sum_{k=1}^n K(k) \cos 2\varphi_k \sin 2\varphi_k \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Այստեղից արդեն դժվար չէ ստանալ երկու հավասարումներից բաղկացած համակարգ, շերտերի մանրաթելերի ուղղությունների n անհայտ φ_k անկյուններով, որոնց դեպքում սալի անիզոտրոպ շերտերի D_{16} և D_{26} կողմնակի կոշտությունները հավասար կլինեն զրոյի:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n K(k) \sin 2\varphi_k &= 0, \\ \sum_{k=1}^n K(k) \sin 4\varphi_k &= 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Երբ $n = 1$, ապա սալը կազմված է միայն $2h$ հաստությամբ և մանրաթելերի φ_1 ուղղությամբ մեկ շերտից: Անիզոտրոպ սալերի խնդիրների լուծումը մանրամասն նկարագրված է [44, 21] մենագրություններում:

Չորս շերտից կազմված սալերի համար ($n = 2$), (1.17) համակարգը կազմված է երկու համասեռ հավասարումներից.

$$\begin{aligned} \sin 2\varphi_1 + 7 \sin 2\varphi_2 &= 0 \\ \sin 4\varphi_1 + 7 \sin 4\varphi_2 &= 0, \end{aligned} \quad (1.18)$$

որն ունի հետևյալ չորս լուծումները.

ա) զրոյական լուծում՝ $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, բ) $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi/2$, գ) $\varphi_2 = 0, \varphi_1 = \pi/2$, դ) անկյունները հավասար են՝ $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$:

Դիտարկենք սալ, որը կազմված է վեց շերտից՝ $n = 3$: Այդ դեպքում, կախված սալի առաջին շերտի մանրաթելերի ուղղության φ_1 անկյունից, φ_2 և φ_3 անկյունների արժեքները (1.7) և (1.8) արտահայտություններից կորոշվեն երկու հավասարումների համակարգով.

$$\begin{aligned} \sin 2\varphi_1 + 7\sin 2\varphi_2 + 19\sin 2\varphi_3 &= 0, \\ \sin 4\varphi_1 + 7\sin 4\varphi_2 + 19\sin 4\varphi_3 &= 0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

Առաջին հավասարումից սկզբում որոշենք φ_2 և φ_3 , անկյունները, կախված φ_1 -ից այնուհետև տեղադրելով դրանք երկրորդ հավասարման մեջ, կստանանք հետևյալ երկու հավասարումները ոչ պարզ տեսքով, որոնցից կարելի է որոշել անհայտ φ_2 և φ_3 անկյունները φ_1 կախված անկյունից

$$\begin{aligned} \sin 4\varphi_1 + 7\sin[2\arcsin(-1/7(\sin 2\varphi_1 + 19\sin 2\varphi_3))] + 19\sin 2\varphi_3 &= 0, \\ \sin 4\varphi_1 + 7\sin 4\varphi_2 + 19\sin[2\arcsin(-1/19(\sin 2\varphi_1 + 7\sin 2\varphi_2))] &= 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Այդ անկյունների արժեքներով կարելի է որոշել սալի կոշտությունների մեծությունները, իսկ հետո լուծել (1.12) հավասարումը:

Ութ շերտից բաղկացած սալերի համար (1.17) արտահայտությունը կընդունի հետևյալ տեսքը.

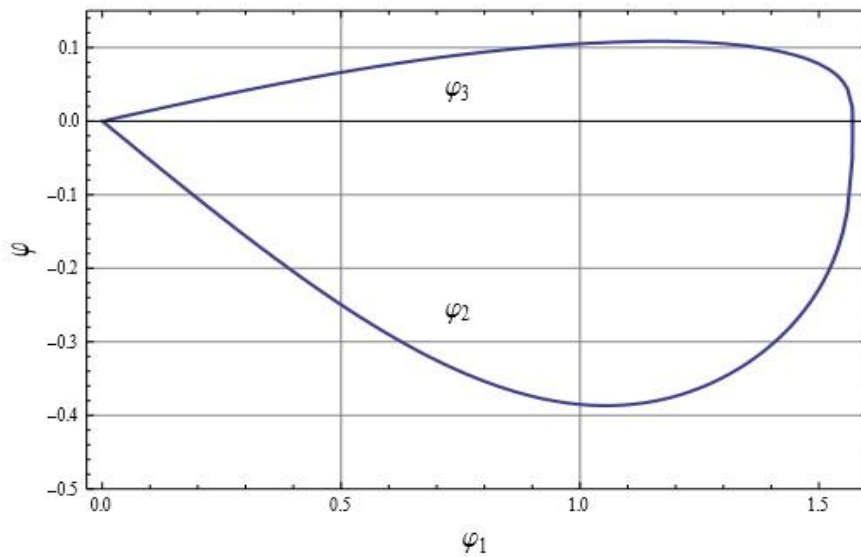
$$\begin{aligned} \sin 2\varphi_1 + 7\sin 2\varphi_2 + 19\sin 2\varphi_3 + 37\sin 2\varphi_4 &= 0, \\ \sin 4\varphi_1 + 7\sin 4\varphi_2 + 19\sin 4\varphi_3 + 37\sin 4\varphi_4 &= 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

Այդ երկու հավասարումների մեջ կան չորս անհայտներ՝ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$: Լուծենք այդ հավասարումները φ_3 և φ_4 անհայտների նկատմամբ: Ձևափոխենք այդ հավասար-

րումներն այնպես, որ նրանցից յուրաքանչյուրը պարունակի այս փոփոխականներից որևէ մեկը:

$$\begin{aligned} \sin 4\varphi_1 + 7\sin 4\varphi_2 + 19\sin 4\varphi_3 - 37\sin \left[2\arcsin \left[\frac{1}{37}(\sin 2\varphi_1 + 7\sin 4\varphi_2 + 19\sin 4\varphi_3) \right] \right] &= 0 \\ \sin 4\varphi_1 + 7\sin 4\varphi_2 - 19\sin \left[2\arcsin \left[\frac{1}{19}(\sin 2\varphi_1 + 7\sin 2\varphi_2 + 37\sin 4\varphi_3) \right] \right] + 37\sin 4\varphi_4 &= 0 \end{aligned} \quad (1.22)$$

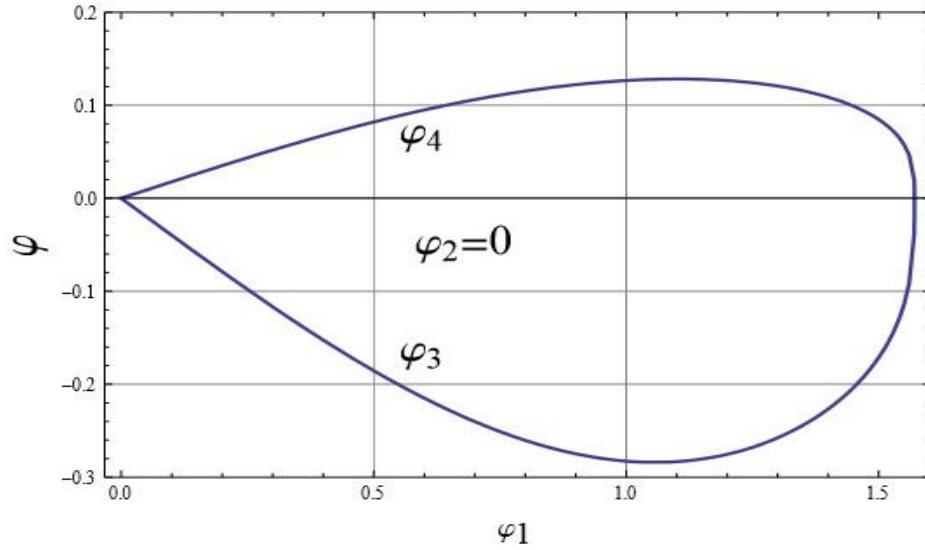
Նկ.4.2-ում պատկերված են տրված սալի առաջին շերտի մանրաթելերի դասավորվածության φ_2 -ի և φ_3 -ի φ_1 ուղղությունից կախվածությունների գրաֆիկները:



Նկ. 4.2

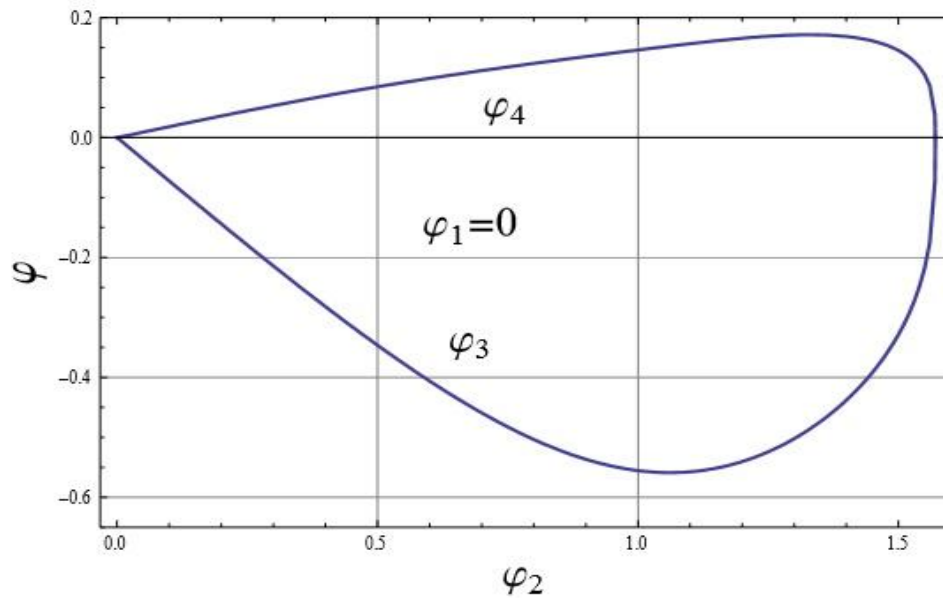
Նկ. 4.2.-ում պատկերված է եռաշերտ սալերի համար սալերի երկրորդ և երրորդ շերտերի մանրաթելերի դասավորվածության ուղղությունների կախվածությունը առաջին շերտի մանրաթելերի ուղղության անկյունից:

Նկ. 4.3-ում ներկայացված են տրված φ_3 և φ_4 կախվածությունների գրաֆիկները սալի առաջին շերտի մանրաթելերի դասավորվածության φ_1 ուղղությունից, երկրորդ շերտում մանրաթելերի՝ առանցքի երկարությամբ ֆիքսված $\varphi_2 = 0$ ուղղության դեպքում:



Նկ. 4.3.

Նկ. 4.3 -ում պատկերված են ութ շերտանի սալերի համար սալի երրորդ և չորրորդ շերտերի մանրաթելերի դասավորվածության ուղղությունների կախվածությունը առաջին շերտի մանրաթելերի ուղղությունից $\varphi_2 = 0$ դեպքում:



Նկ. 4.4.

Նկ. 4.4-ում պատկերված են սալի երրորդ և չորրորդ շերտերի մանրաթելերի դասավորվածության ուղղությունների կախվածությունը երկրորդ շերտի մանրաթելերի ուղղությունից, երբ $\varphi_1 = 0$, ութ շերտանի սալի համար:

Նմանատիպ եղանակով ութից մեծ n թվով շերտեր ունեցող սալերի համար որոշել φ_k անկյունների արժեքները կարելի է անհայտ n անկյունների միայն երկու շերտերի համար: Մնացած անկյունները կամ պետք է տրված լինեն թույլատրելի արժեքների սահմաններում, կամ էլ հաշվարկված լրացուցիչ պայմաններից, որոնց թիվը չի գերազանցում $n-2$ թիվը:

4.2. Բազմաշերտ կոմպոզիցիոն սալի ծոման տատանումները

Այս պարագրաֆում կդիտարկենք անիզոտրոպ բազմաշերտ կոմպոզիցիոն սալերի ծոման սեփական տատանումների մի շարք հարցեր, որոնք բնութագրվում են միջին (կենտրոնական) մակերևույթի կորացմամբ: Անիզոտրոպ բազմաշերտ կոմպոզիցիոն սալի կառուցվածքը մանրամասն նկարագրված է 4.1. պարագրաֆում: Ծոման տատանումների ժամանակ սալի կենտրոնական (միջին) մակերևույթի յուրաքանչյուր կետ տեղաշարժվում է իր մակերևույթի նկատմամբ ուղղահայաց, ինչի արդյունքում սալը ժամանակի ցանկացած պահին ներկայանում է ճկված՝ $w(x, y, t)$ կորությամբ: Դիտարկենք բազմաշերտ կոմպոզիտային սալերի ազատ ծոման տատանումները, որոնք նկարագրվում են (1.12) հավասարումով, երբ $p = 0$, $Q(x, y, t) = 0$:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2N\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

որտեղ $D_3 = D_{12} + D_{66}$, իսկ N -ը շերտերի թիվն է: (1.16) և (1.17) բանաձևերում n -ը պետք է փոխարինել N -ով:

(2.1) հավասարման լուծումը փնտրենք

$$w = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) W(x, y) \quad (2.2)$$

տեսքով:

Տեղադրելով (2.2)-ը (2.1) մեջ, $W(x, y)$ -ի որոշման համար կստանանք հետևյալ հավասարումը

$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \omega^2 2N\rho h W = 0 \quad (2.3)$$

Ազատ տատանումների հարցի ուսումնասիրության համար անհրաժեշտ է լուծել այս հավասարումը որոշակի եզրային պայմանների դեպքում: Ամրացված, հենված կամ ազատ եզրի դեպքում W -ի համար եզրային պայմանները չեն տարբերվում w -ի համար պայմաններից: Պահանջը, որ W ֆունկցիան բավարարի եզրային պայմաններին և լինի (2.3) հավասարման լուծումը, հանգեցնում է անհայտ հաստատունների համար համասեռ հավասարումների համակարգին [91]:

Ստացված համակարգը կունենա զրոյից տարբեր լուծումներ միայն այն դեպքում, երբ նրա որոշիչը՝ $\Delta(\omega)$, հավասար լինի զրոյի: Այստեղից հաճախականությունները որոշելու համար ստանում ենք հավասարում ω -ի նկատմամբ.

$$\Delta(\omega) = 0 \quad (2.4)$$

Այս հավասարումն ունի անվերջ բազմության լուծումներ, որոնք կախված են m և n -ի երկու պարամետրերից ($m = 1, 2, 3, \dots, n = 1, 2, 3, \dots$): Այս լուծումները տվյալ սալի համար կազմում են հաճախականությունների սպեկտրը: Յուրաքանչյուր ω_{mn} հաճախականությանը համապատասխանում են W_{mn} սեփական ֆունկցիաներ:

Որոշենք 4.1. պարագրաֆում նկարագրված կառուցվածքով ուղղանկյուն կոմպոզիտային բազմաշերտ սալի սեփական տատանումները [39]: Խնդիրը լուծենք այն դեպքի համար, երբ սալի ծայրերը ազատ հենված են: Ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգի նկատմամբ սալի դիրքը և նրա չափսերը ցույց են տրված նկար 4.1- ում:

Սալի ծոման տատանումների W_{mn} սեփական ֆունկցիաները պետք է բավարարեն (2.3) հավասարմանը և սալի ազատ հենման եզրային պայմաններին՝

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad \text{երբ } x = 0, a \quad (2.5)$$

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0, \quad \text{երբ } y = 0, b$$

(2.3) հավասարման լուծումը, որը բավարարում է (2.5) եզրային պայմաններին կփնտրենք հետևյալ տեսքով.

$$W_{mn} = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.6)$$

Տեղադրենք (2.6)-ը (2.3)-ի մեջ և հավասարեցնելով զրոյի $\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ -ի գործակիցը, կստանանք

$$D_{11} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2D_3 \left(\frac{mn\pi^2}{ab} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 - \omega_{mn}^2 2Nh\rho = 0$$

Այստեղից ստանում ենք սալի ծոման տատանումների ω_{mn} հաճախականությունները

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{b^2} \sqrt{\frac{1}{2Nh\rho}} \sqrt{D_{11} \left(\frac{m}{c} \right)^4 + 2D_3 n^2 \left(\frac{m}{c} \right)^2 + D_{22} n^4}, \quad (2.7)$$

որտեղ $c = a/b$:

Հիմնական տոնի հաճախականությունը որոշվում է այդ նույն հավասարմամբ, երբ $m = 1$ և $n = 1$.

$$\omega_{11} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{1}{2Nh\rho}} \sqrt{(D_{11} + 2D_3 c^2 + D_{22} c^4)} \quad (2.8)$$

Մասնավորապես a կողմ ունեցող քառակուսի սալի համար ($b = a, c = 1$)

$$\omega_{11} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{1}{2Nh\rho}} \sqrt{D_{11} + 2D_3 + D_{22}} \quad (2.9)$$

Սալի շերտերի D_{11}, D_{22}, D_3 կոշտությունները կախված են սալի շերտերում մանրաթելերի դասավորության ուղղությունից և որոշվում են (1.5)–(1.9) բանաձևերով:

Ուսումնասիրենք կոմպոզիտային սալերի լայնական տատանումների հաճախականության բնութագրերը, կախված սալի կողմերի հարաբերությունից և նրա շերտերում մանրաթելերի դասավորման ուղղությունից, չորս, վեց և ութ շերտերից կազմված սալերի համար: Սալի նյութը բորոպլաստ է, 0.5 լցանյութի ծավալային բաժնեմասով և մեխանիկական բնութագրերով [46].

$$E_1=201 \text{ ԳՊա}, E_2=21.7 \text{ ԳՊա}, G=21.7 \text{ ԳՊա}, \mu_{12} = 0.018, \mu_{21} = 0.17 \quad (2.10)$$

(1.5)–(1.9) բանաձևերում բերված կոշտությունների հաստատունները արտահայտվում են մեխանիկական բնութագրերի միջոցով հետևյալ կերպ.

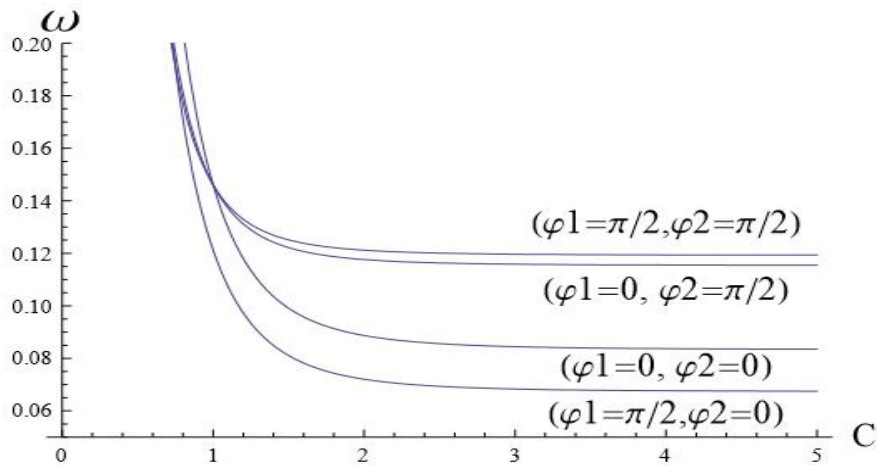
$$A_{11} = E_1, A_{22} = E_2, A_{12} = A_{21} = E_1 \mu_{12}, A_{66} = G :$$

1. *Չորս շերտանի սալեր*: Սկզբում ուսումնասիրենք քառաշերտ սալի ավելի պարզ դեպքը ($N = 2$), որը կազմված է չորս գոդված շերտերից: Այդպիսի համակարգի համար մանրաթելերի ուղղությունը շերտերում որոշվում է (1.17) հավասարումից, որն ունի չորս լուծում.

$$\text{ա) } \varphi_1 = \varphi_2 = 0; \text{ բ) } \varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi/2; \text{ գ) } \varphi_1 = \pi/2, \varphi_2 = 0; \text{ դ) } \varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$$

Այսպիսով, որպեսզի երկշերտ սալերում կողմնակի կոշտությունները (1.14) հավասար լինեն զրոյի, բավական է նրա շերտերում մանրաթելերի դասավորումը իրականացնել այս լուծումների ուղղություններով:

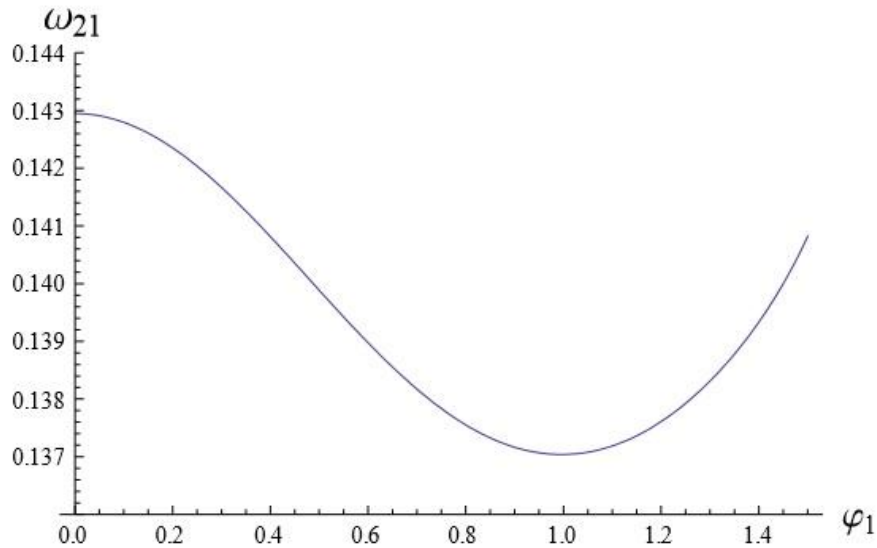
Նկար 4.5-ում ներկայացված է սալի կողմերի $c = a/b$ հարաբերությունից կախված սալի ազատ ճկվածքային տատանումների հաճախականության կախվածության գրաֆիկը: Երեք կորերը, բացի $\varphi_1 = \pi/2, \varphi_2 = 0$ կորից, հատվում են $c = 1$ կոորդինատով կետում: Այսպիսով քառակուսի սալի ճկվածքային տատանումների հաճախականությունը մանրաթելերի դասավորության երեք դեպքերի համար նույնն է և հավասար է 1.459794 վրկ⁻¹:



Նկ.4.5

Նկ.4.5 –ում պատկերված է մանրաթելերի շերտերի տարբեր ուղղությունների համար ճկման տատանումների հիմնական հաճախականության գրաֆիկը կախված սալի կողմերի հարաբերությունից:

2. *Վեց շերտանի սալեր (N = 3)*: Սալի շերտերում մանրաթելերի ուղղությունները տրվում են $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ երեք անհայտներով երկու հավասարումից կազմված (1.18), (1.19) համակարգով, որը երրորդ անկյան ֆիքսված արժեքի դեպքում թույլ է տալիս որոշել միայն երկու անկյունները: Այստեղ դիտարկենք այն դեպքը, երբ քառակուսային սալի երկրորդ և երրորդ շերտերում մանրաթելերի դասավորման ուղղությունները որոշվում են առաջին շերտում մանրաթելերի դասավորության ուղղությամբ (նկ. 4.6):



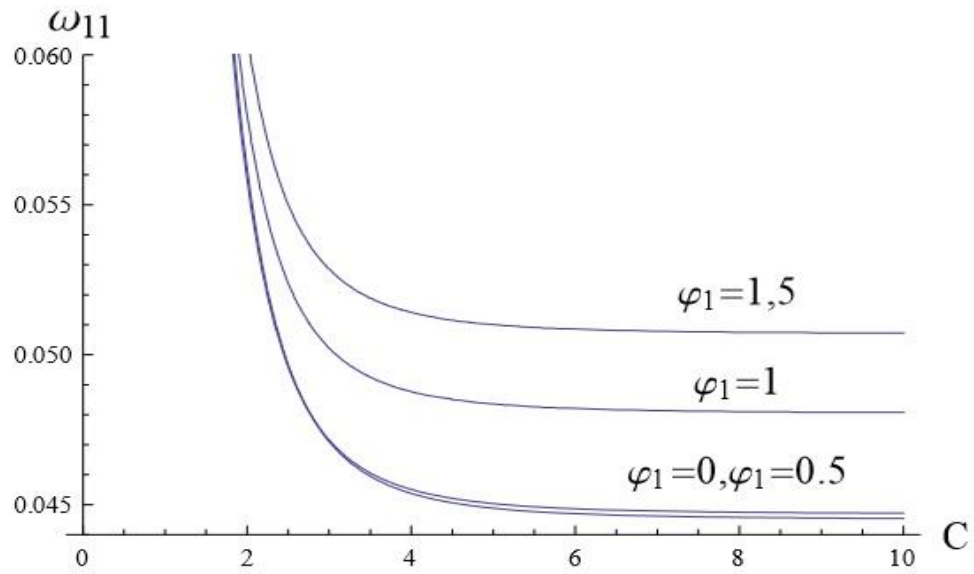
Նկ.4.6

Նկ. 4.6-ում պատկերված է ω_{11} տատանումների հիմնական սեփական հաճախականության (վրկ.-ում) կախվածության գրաֆիկը միջին շերտի մանրաթելերի ուղղությունից:

Այս գրաֆիկից (նկ. 4.6) հետևում է, որ հիմնական հաճախականությունը իր առավելագույն արժեքներին հասնում է, երբ մանրաթելերի ուղղությունները առաջին (հիմնական) շերտում զուգահեռ են X առանցքին, իսկ նվազագույն արժեքներին՝ երբ $\varphi_1 \approx 1$:

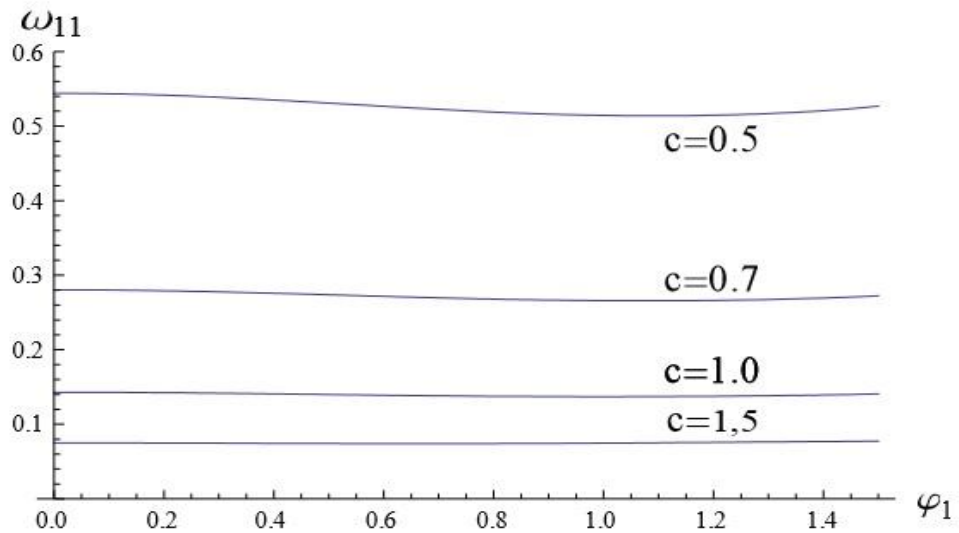
Նկար 4.7-ում ներկայացված է առաջին շերտի մանրաթելերի ուղղության տարբեր արժեքների դեպքում սալի տատանումների հիմնական հաճախականության կախվածությունը սալի կողմերի հարաբերությունից:

Կողմերի 0.9-ից փոքր հարաբերության դեպքում հաճախականությունները կտրուկ աճում են և նրանք քիչ են կախված մանրաթելի X առանցքի նկատմամբ թեքությունից (նկ. 4.7):



Նկ.4.7

Նկ. 4.7-ում պատկերված է ω_{11} տատանումների հիմնական սեփական հաճախականության (վրկ.-ում) կախվածության գրաֆիկը սալի կողմերի հարաբերությունից:

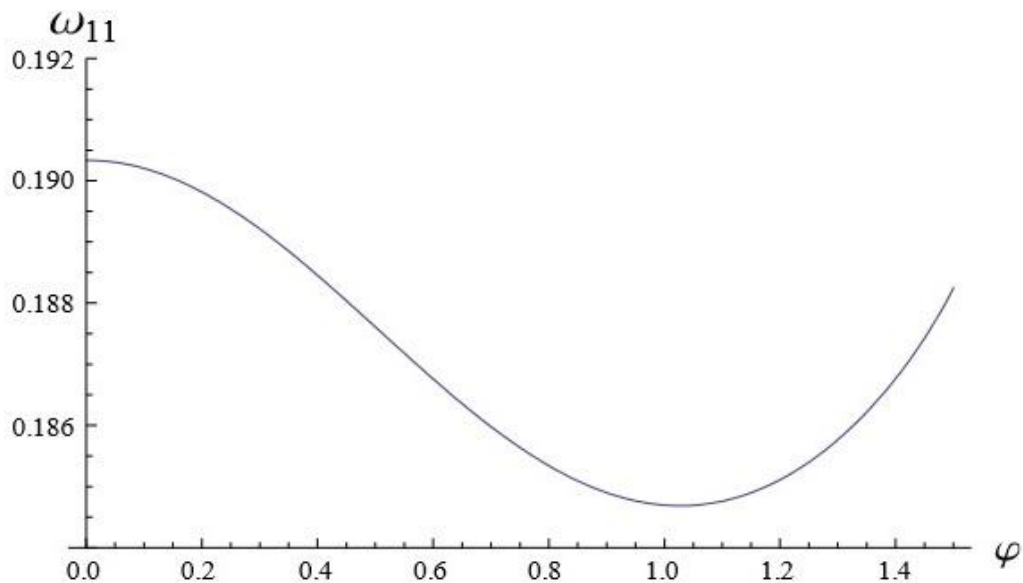


Նկ.4.8

Նկ. 4.8-ում պատկերված է ω_{11} տատանումների (վրկ.-ում) հիմնական սեփական հաճախականության կախվածության գրաֆիկը φ_1 անկյունից՝ սալի կողմերի հարաբերության տարբեր արժեքների դեպքում:

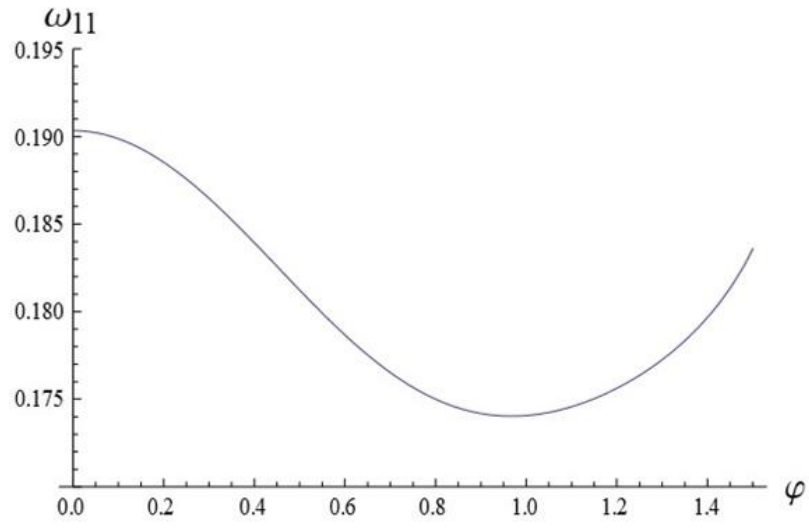
3. Ութ շերտանի սալեր ($N = 4$): Շերտերում (1.14)-ի պայմաններն ապահովող մանրաթելերի ուղղությունները տրվում են $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ չորս փոփոխական անհայտներով երկու հավասարումների (1.19) համակարգով, որը թույլ է տալիս որոշել միայն երկու անկյունները մյուս երկու անկյունների ֆիքսված արժեքների դեպքում:

Աշխատանքում դիտարկված են միայն երկու դեպք. առաջին դեպքում առաջին շերտի մանրաթելերի ուղղությունը զուգահեռ է X առանցքին ($\varphi_1 = 0$) և ուսումնասիրվում են հաճախականության բնութագրերը, կախված երկրորդ շերտի մանրաթելերի դասավորությունից, երկրորդ դեպքում երկրորդ շերտի մանրաթելերի դասավորության ուղղությունը զուգահեռ է X առանցքին ($\varphi_2 = 0$) և ուսումնասիրվում են հաճախականության բնութագրերը, կախված առաջին շերտի մանրաթելերի դասավորության ուղղությունից: Առաջին շերտի մանրաթելերի դասավորության ուղղություններից կախված ճկվածքային տատանումների հիմնական հաճախականությունների գրաֆիկները բերված են նկ.4.9.-ում, իսկ երկրորդ շերտի մանրաթելերի դասավորության ուղղությունից կախված՝ նկ.4.10.-ում:



Նկ.4.9

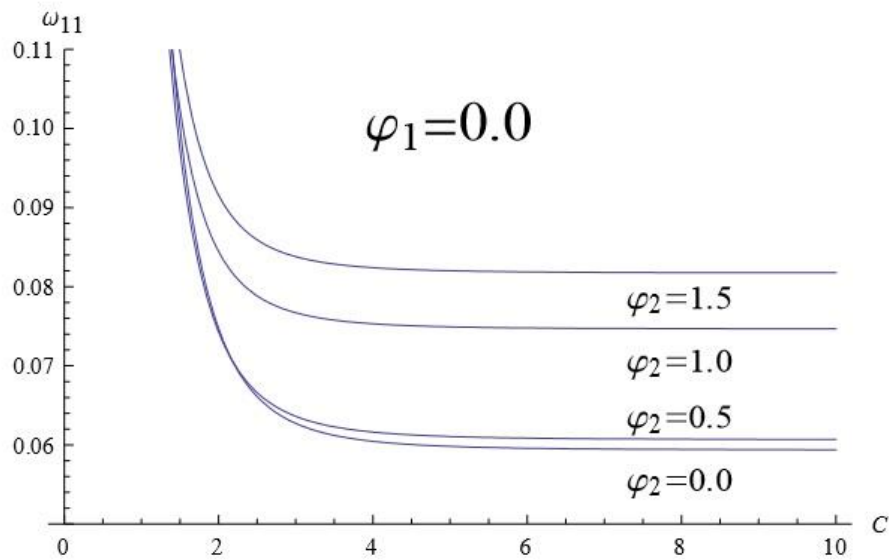
Նկ.4.9-ում պատկերված է առաջին շերտի մանրաթելերի ուղղությունից ω_{11} տատանումների(վրկ.-ում) հիմնական սեփական հաճախականության կախվածության գրաֆիկը $\varphi_1 = 0$ դեպքում:



Նկ.4.10

Նկ. 4.10-ում պատկերված է երկրորդ շերտի մանրաթելերի ուղղությունից տատանումների հիմնական սեփական ω_{11} (վրկ.-ում) հաճախականության կախվածության գրաֆիկը $\varphi_2 = 0$ դեպքում:

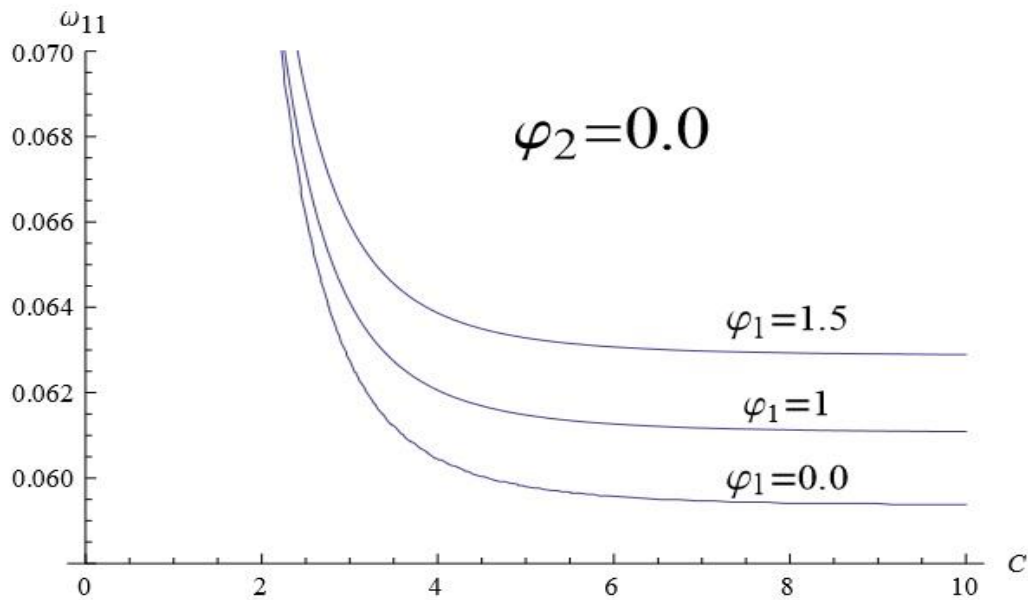
Նկ.4.11-ում ներկայացված է առաջին շերտի մանրաթելերի ֆիքսված ուղղության և երկրորդ շերտի մանրաթելերի տարբեր ուղղությունների դեպքում սալի տատանումների հիմնական հաճախականության կախվածության գրաֆիկը սալի կողմերի հարաբերությունից:



Նկ.4.11

Նկ 4.11 ում պատկերված է սալի կողմերի C հարաբերությունից սալի ω_{11} տատանումների (վրկ.-ում) հիմնական սեփական հաճախականության կախվածության գրաֆիկը $\varphi_1 = 0$ դեպքում:

Սալի տատանումների հիմնական հաճախականությունների կախվածությունը սալի կողմերի հարաբերությունից երկրորդ շերտի մանրաթելերի ֆիքսված ուղղության և առաջին շերտի մանրաթելերի տարբեր ուղղությունների դեպքում ներկայացված են նկ. 4.12.-ում:



Նկ 4.12

Նկ. 4.12 ում պատկերված է սալի սեփական տատանումների ω_{11} (վրկ.-ում) հիմնական հաճախականության սալի կողմերի c հարաբերությունից կախվածության գրաֆիկը $\varphi_2 = 0$ դեպքում:

Նկար 4.11 և 4.12-ում ներկայացված են ճկվածքային տատանումների հաճախականությունների կախվածության գրաֆիկները առաջին շերտերի մանրաթելերի թեքությունից ունեն ոչ մոնոտոն բնույթ, քանի որ $\varphi_1 = 1$ կորերը բարձր են $\varphi_1 = 1.5$: Դա պայմանավորված է 4.9 և 4.10 նկարներում ներկայացված առաջին շերտերի մանրաթելերի թեքություններից կախված հաճախականության կորերի բարդ վարքագծով:

4.3. Կոմպոզիցիոն շերտերից կազմած շերտավոր սալի կայունությունը

Դիտարկենք հավասարաչափ սեղմող ուժերով OX առանցքի ուղղությամբ սեղմված կոմպոզիտային շերտերից կազմված բազմաշերտ ուղղանկյուն սալի կայունությունը: Սալի դիրքը XOY կոորդինատային համակարգում և նրա չափերը բերված են նկ.4.1-ում: Սալի եզրերը ազատ հենված են: Պահանջվում է որոշել կրիտիկական ուժերը, որոնց դեպքում հարթ հավասարակշռված վիճակը կորցնում է կայունությունը: Սալի եզրերին կիրառված են $T_x = -p$, $T_y = S_{xy} = 0$ ուժերը: Խնդիրը լուծենք ստատիկ մեթոդով: Ճկված մակերևույթի հավասարումը, երբ նրա միջին հարթությունը սեղմվում է p ուժով, նկարագրվում է (1.12) հավասարումով, $Q(x, y, t) = 0$ և $\rho = 0$ դեպքում, կամ

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3-1)$$

Այս հավասարման մեջ սալը ճկվում է որպես D_{11} , D_{16} , D_{12} , D_{66} , D_{26} , D_{22} կոշտություններով համասեռ սալ:

Անհրաժեշտ է գտնել այս հավասարման գրոյից տարբեր լուծում, որը a և b կողմերի վրա կբավարարի հետևյալ պայմաններին.

$$w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \text{ երբ } x = 0 \text{ և } x = a \quad (3.2)$$

$$w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \text{ երբ } y = 0 \text{ և } y = b \quad (3.3)$$

Կայունության խնդիրը լուծելու համար այս պայմաններին, ինչպես նախորդ պարագրաֆում, ավելացնենք կողմնակի կոշտությունների գրոյի հավասար լինելու պայմանը՝ $D_{16} = D_{26} = 0$: Այս պայմանները որոշակի սահմանափակումներ են դնում սալի այն շերտերում մանրաթելերի դասավորվածության վրա, որոնց մանրաթելերի թեքության անկյունները պետք է կապված լինեն (1.16) հավասարումով: Այսպիսով ճկված մակերևույթի (3.1) հավասարումը ավելի պարզ է դառնում և կարող է գրվել հետևյալ տեսքով.

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.4)$$

Այս հավասարմանը և (3.2) և (3.3) եզրային պայմաններին բավարարում է հետևյալ արտահայտություններից յուրաքանչյուրը,

$$W_{mn} = A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.5)$$

Որտեղ A_{mn} հաստատուն գործակից է, իսկ m և n –ը՝ հաստատուն թվեր: Տեղադրելով (3.5) –ը (3.4) մեջ, կստանանք.

$$A_{mn} \left\{ \pi^4 \left[D_{11} \left(\frac{m}{a} \right)^4 + 2D_3 \left(\frac{mn}{ab} \right)^4 + D_{22} \left(\frac{n}{b} \right)^4 \right] I - p\pi^2 \left(\frac{m}{a} \right)^2 \right\} = 0 \quad (3.6)$$

Չրոյին ոչ հավասար լուծում ստացվում է, ձևավոր փակագծի մեջ եղած արտահայտությունը զրոյի հավասարեցնելով: Այստեղից գտնում ենք.

$$p = \frac{\pi^2 \sqrt{D_{11}D_{22}}}{b^2} \left[\sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}} \left(\frac{m}{c} \right)^2 + \frac{2D_3}{\sqrt{D_{11}D_{22}}} n^2 + \sqrt{\frac{D_{22}}{D_{11}}} \left(\frac{c}{m} \right)^2 n^4 \right] \quad (3.7)$$

Այս բանաձևը m և n յուրաքանչյուր արժեքի համար տալիս է p արժեքները, որոնց դեպքում հնարավոր է դառնում սալի ծուռը (3.5) տեսքով: Սալերի կայունության հիմնական խնդիրը p արժեքների բազմությունից նվազագույն արժեքի գտնելն է: Այս բանաձևը տալիս է սալը ուռուցիկ դարձնող ուժերի կրիտիկական արժեքները m և n թվերի համապատասխան ամբողջական արժեքների դեպքում՝ կախված սալի կողմերի $c = a/b$ հարաբերությունից:

p -ի արժեքների համախմբից նվազագույն արժեքը կստացվի, երբ $n = 1$: Այդ ժամանակ p -ի համար բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$p_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \sqrt{D_{11}D_{22}}}{b^2} \left[\sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}} \left(\frac{m}{c} \right)^2 + \frac{2D_3}{\sqrt{D_{11}D_{22}}} + \sqrt{\frac{D_{22}}{D_{11}}} \left(\frac{c}{m} \right)^2 \right] \quad (3.8)$$

Քառակուսի փակագծերի մեջ եղած արտահայտությունը նշանակենք K_σ , և կրիտիկական ուժի (3.8) բանաձևը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով.

$$p_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \sqrt{D_{11}D_{22}}}{b^2} K_\sigma \quad (3.9)$$

Այն դեպքում, երբ $D_{11} = D_{22} = D_3 = D$, այսինքն սալը պատրաստված է իզոտրոպ նյութից, (3.8)-ից կունենանք.

$$p_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{m}{c} + \frac{c}{m} \right)^2, \quad (3.10)$$

ինչը համապատասխանում է ուղղանկյուն իզոտրոպ սալի կայունության կորստի հայտնի բանաձևին [44]:

Ինչպես և նախորդ պարագրաֆում, բազմաշերտ կոմպոզիտային սալերի կայունության ուսումնասիրությունը սկսենք չորս շերտից կազմված ($n = 2$) սալերի կայունության ուսումնասիրությունից:

1. *Չորս շերտանի սալեր:* 4.1 նկարում ներկայացված են c կողմերի հարաբերությունից կախված K_σ գործակիցների գրաֆիկները նկարներում նշված պտտման անկյունների φ_1, φ_2 արժեքների դեպքում: Գրաֆիկը կազմված է 1,2,3...-ին հավասար m կիսաալիքների ամբողջ արժեքներին համապատասխանող կորերի հատվածներից: Սալի շերտերի հարաբերական հաստությունը (a երկարության նկատմամբ) 0.025 է սալի 0.1 ընդհանուր հարաբերական հաստության դեպքում: Սալի նյութը բորոպլաստիկ է լցանյութի 0.5 ծավալային չափաբաժնով [57]: Շերտերի առաձգական պարամետրերի արժեքներն են [46].

$$E_1 = 201 \text{ ԳՊա}, \quad E_2 = 21.7 \text{ ԳՊա}, \quad G = 5.4 \text{ ԳՊա}, \quad \mu_{12} = 0.018, \quad \mu_{21} = 0.17:$$

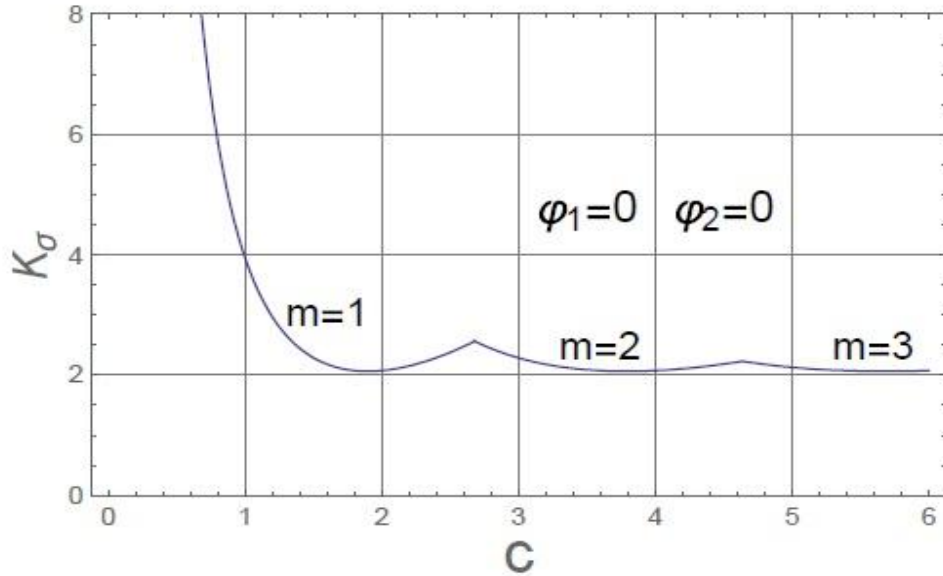
Աղյուսակ 1-ում բերված են K_σ -ի նվազագույն արժեքները $m = 1$ -ի դեպքում և սալի կողմերի C հարաբերությունների՝ նրանց համապատասխանող արժեքները X առանցքից φ_1 շերտերի մանրաթելերի ուղղությունների շեղման տարբեր անկյունների դեպքում: Երկրորդ շերտի մանրաթելերի φ_2 ուղղությունների անկյունները որոշվում են ըստ նկ. 4.13-ի գրաֆիկի:

Աղյուսակ 1

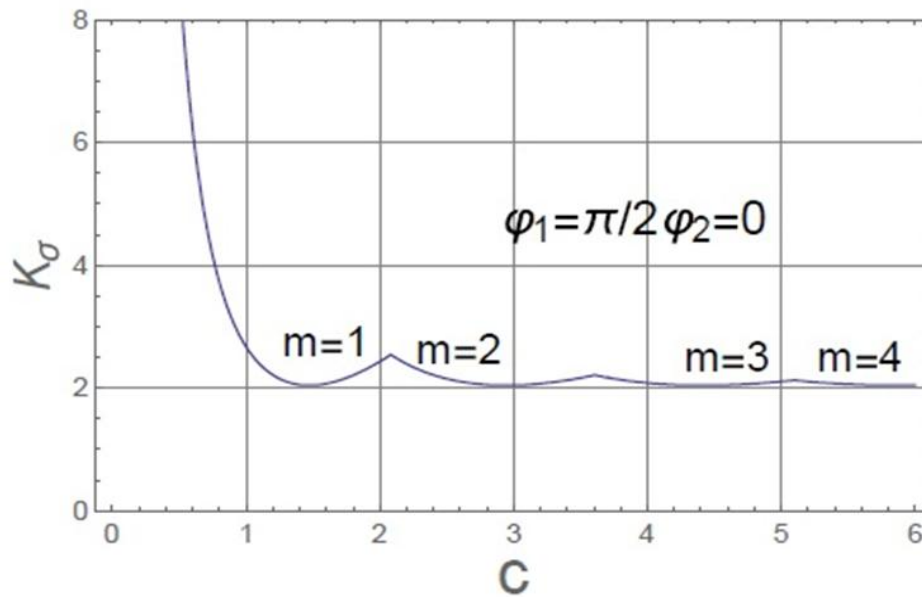
φ	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.5
K	2.0162	2.0164	2.0184	2.0165	2.0163	2.0159	2.0159	2.0150	2.0147
c	1.742	1.742	1.721	1.7058	1.6693	1.6318	1.6341	1.6012	1.6074

φ_1 -ի փոփոխության դեպքում K_σ մեծության տարբերությունը φ_1 -ի 0-ից մինչև $\pi/2$ միջակայքում փոփոխությունների դեպքում չի գերազանցում 0.2%: Ավելի նկատելի փոփոխվում է կիսաալիքների թիվը: Ալիքի երկարությունը կարճանում է φ_1 -ի մեծացմամբ և ալիքների երկարություններում տարբերությունը հասնում է 6%:

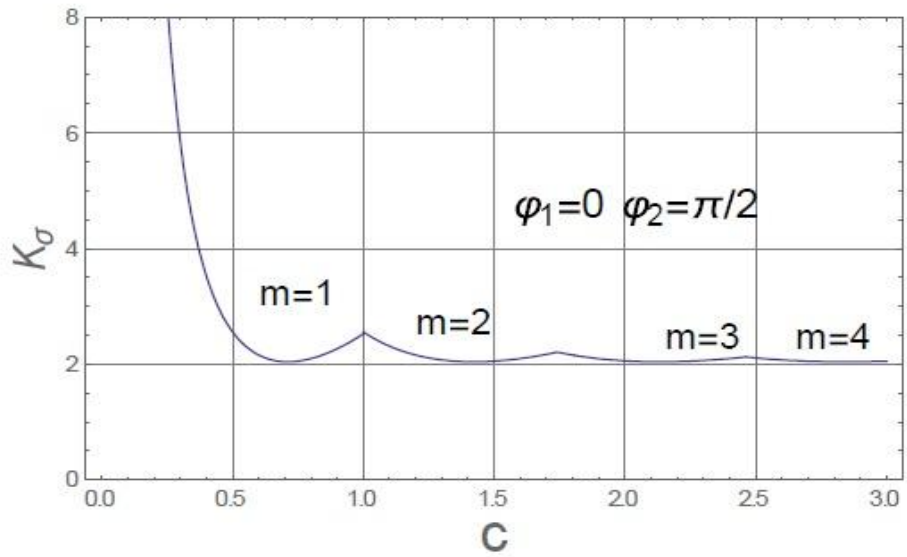
X առանցքի երկարությամբ մանրաթելերի զուգահեռ ուղղությամբ անիզոտրոպ սալերի K_{σ} կորերը, տեղաշարժված են Δ ախ՝ իզոտրոպ սալերի հետ համեմատած (նկ.4.13 ա): Առաջին շերտի մանրաթելերի φ_1 ուղղությունների պտտումն իննսուն աստիճանով հանգեցնում է կորերի տեղաշարժին դեպի Δ ախ:



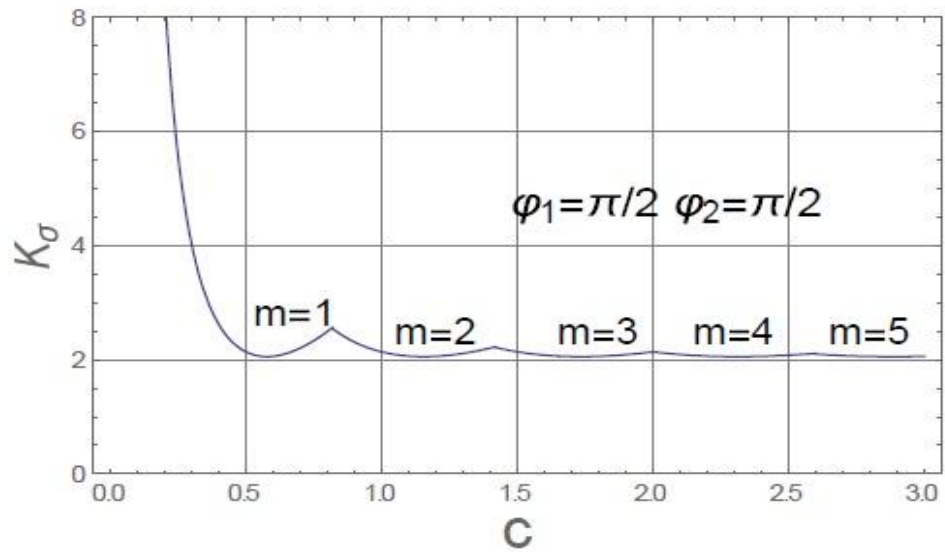
Նկ.4.13 ա



Նկ.4.13 բ



Նկ.4.13 գ



Նկ.4.13 դ

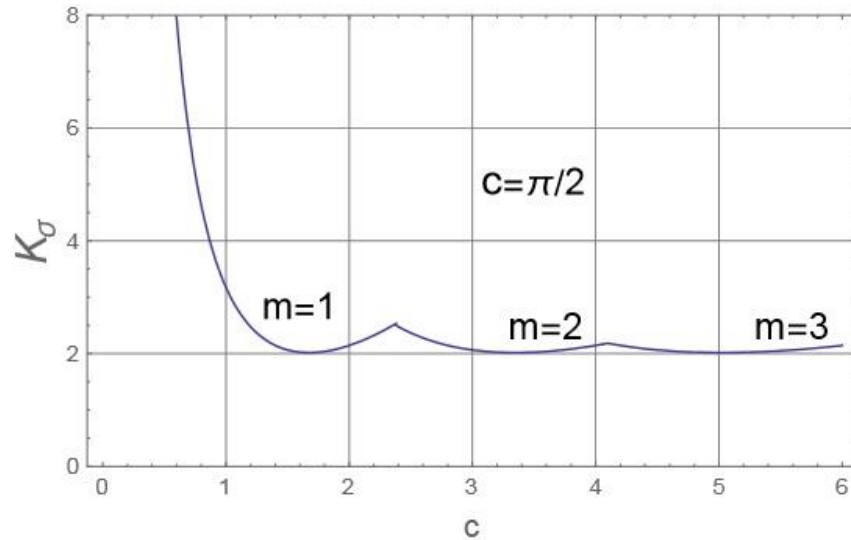
Նկ. 4.13-ում պատկերված է չորս շերտանի սալերի համար սալի կողմերի C հարաբերության փոփոխությունից կախված K_σ -ի գրաֆիկը: Մանրաթելերի ուղղությունները շերտերում ցույց են տրված նկարների վրա:

X առանցքի երկայնքով առաջին շերտի մանրաթելերի ուղղությունների պահպանման դեպքում երկրորդ շերտի մանրաթելերի պտտման φ_2 անկյան փոփոխությունը հանգեցնում է ինչպես կորերի տեղաշարժին դեպի Δ ախ, այնպես էլ են սալի՝ իր մակերևույթի վրա կայունության կորստի դեպքում առաջացող m կիսաալիքների թվի մեծացմանը: Եթե երկու շերտերի մանրաթելերը ուղղված են ուղղահայաց X առանցքի նկատմամբ, K_σ կորերը, նախորդ դեպքի հետ համեմատած, տեղաշարժվում են Δ ախ կիսաալիքների թվի աննշան փոփոխությամբ:

2. Վեց շերտանի սալեր: Վեց շերտից կազմված սալերի համար մանրաթելերի ուղղությունները կապված են (1.18) հավասարումով: Այդ հանգամանքը թույլ է տալիս շերտերում մանրաթելերի ուղղություններից կախված վեց շերտանի սալերի կայունության ուսումնասիրությունները հանգեցնել շերտերից միայն մեկում ուղղության փոփոխության դեպքում կայունության ուսումնասիրությանը: Տվյալ աշխատանքում այդ ուսումնասիրությունները կատարվել են առաջին շերտում մանրաթելերի ուղղության փոփոխության դեպքի համար:

Սալի կողմերի հարաբերությունից K_σ -ի կախվածության ուսումնասիրությունները ցույց տվեցին, որ նրանք քիչ են փոփոխվում առաջին շերտի մանրաթելերի ուղղությունից: Նկ. 4.14-ում ներկայացված է K_σ գրաֆիկը կախված սալի կողմերի c հարաբերության փոփոխությունից վեց շերտանի սալի համար, որի առաջին սալի մանրաթելերի ուղղությունը ուղղահայաց է X առանցքին ($\varphi_1 = \pi/2$): Այդ գրաֆիկը քիչ է տարբերվում կախվածությունների կորերից, որոնք ստացվել են φ_1 անկյան 0 -ից մինչև π փոփոխության դեպքում: Աղյուսակ 1-ում բերված են φ_1 առաջին շերտում մանրաթելերի ուղղությունների և X առանցքի միջև անկյունից կախված կորերի հատման կետերի աբսցիսները և K_σ -ի նվազագույն արժեքների տվյալները: Սալի, վերը նշված կոշտությունների արժեքների դեպքում, X առանցքից մանրաթելերի ուղղության φ_1 շեղումը քիչ է ազդում սալի կայունության վրա: Ինչպես երևում է այդ աղյուսակից,

K_σ -ի նվազագույն արժեքները (հետևաբար նաև կայունության կորստի կրիտիկական արժեքները), ինչպես նաև կորերի հատման կետերը խիստ աննշան են փոփոխվում:



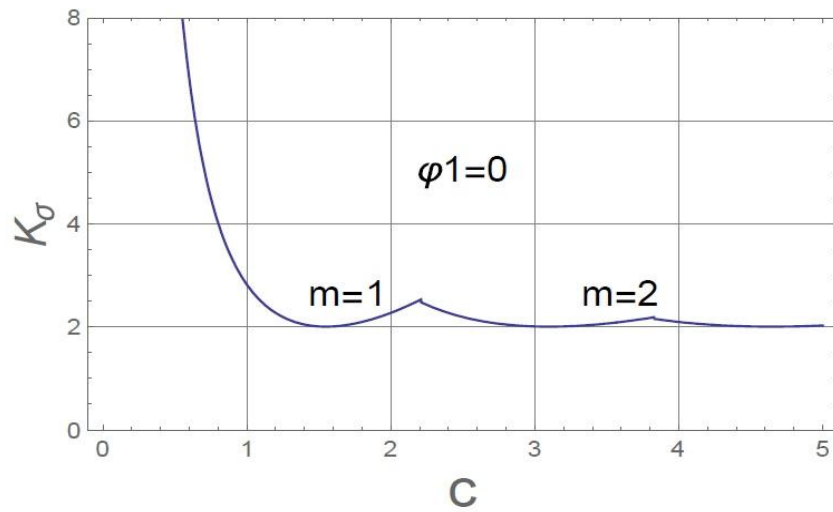
Նկ. 4.14

Նկ.4.14-ում պատկերված է վեցշերտանի սալերի համար K_σ -ի կախվածությունը սալի կողմերի C հարաբերության փոփոխությունից: Մանրաթելերի ուղղությունները 2-րդ և 3-րդ շերտերում զուգահեռ են, իսկ 1-ին շերտում ուղղահայաց են X առանցքին:

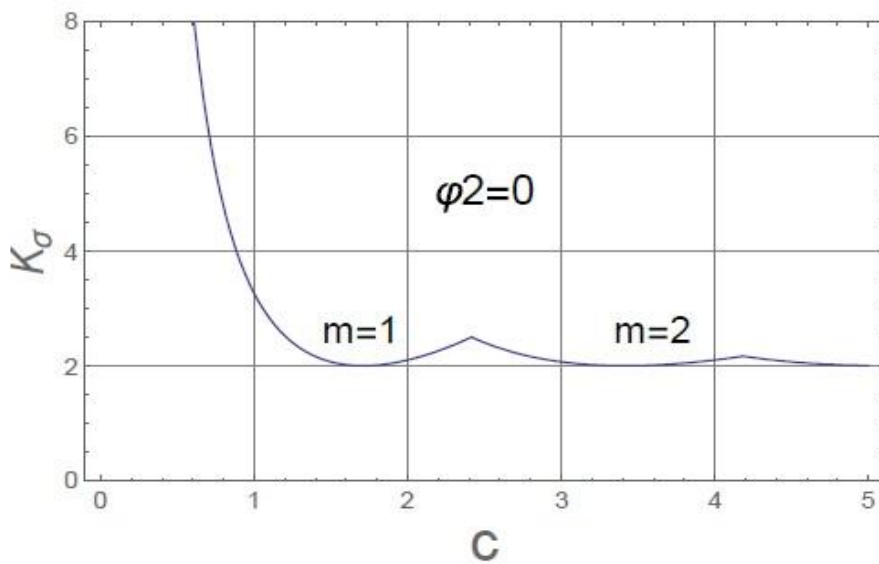
3. *Ութ շերտանի սալեր ($n = 4$):* Ութ շերտանի սալերի K_σ կայունության կորերը, որոնց հատկությունները որոշվում են շերտերի սիմետրիկ զույգերում մանրաթելերի ուղղություններով, կարող են ստացվել երկու զույգերում մանրաթելերի ուղղությունների տրամաբ: Մնացած երկու զույգի մանրաթելերի ուղղությունները հաշվարկվում են (1.21) բանաձևերով:

Աշխատանքում ուսումնասիրվել է սալի շերտերի միայն առաջին երկու զույգերում մանրաթելերի ուղղություններից կախված սալերի կայունությունը հաջորդ երկու դեպքերի համար. առաջին շերտերի մանրաթելերի ուղղությունները զուգահեռ են X առանցքին և ուսումնասիրվել են $K_\sigma(\varphi_2)$ կախվածությունները, երկրորդ շերտերի մանրաթելերի ուղղությունները զուգահեռ են X առանցքին և ուսումնասիրվել են $K_\sigma(\varphi_1)$

կախվածությունները: Ուսումնասիրությունները ցույց են տվել, որ մանրաթելերի ուղղությունների փոփոխությունները առաջին երկու շերտերում թույլ են արտացոլվում սալի կայունության վրա: K_{σ} կորերը այդ երկու դեպքերի համար բերված են նկ. 4.15-ում, $\varphi_1 = 0$ և $\varphi_2 = \pi/2$, և $\varphi_2 = 0$, $\varphi_1 = \pi/2$ դեպքերի համար: Նրանց միջև եղած տարբերությունը աննշան է:



Նկ. 4.15 ա



Նկ. 4.15 բ

Նկ. 4.15-ում պատկերված է ութ շերտանի սալերի համար K_{σ} -ի կախվածությունը սալի կողմերի C հարաբերության փոփոխությունից: Մանրաթելերը 1-ին շերտերում զուգահեռ են X առանցքին (նկ. 4.15 ա), 2-րդ շերտերում զուգահեռ են X առանցքին (նկ. 4.15 բ):

4.4. Բազմաշերտ կոմպոզիտային սալերի հարկադրական տատանումների կառավարումը

Այս պարագրաֆում դիտարկվում է առաձգական համակարգի շարժման օպտիմալ կառավարման խնդիրը սալի ճկվածքային տատանումների համար: Ճկվածքային տատանումները տեղի են ունենում սալի մակերևույթին նորմալ կիրառված փոփոխական բեռի ազդեցության տակ: Սալի հարկադրական տատանումների կառավարման մասին խնդիրը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ:

Տրված են սալի միջին մակերևույթի շարժման հավասարումները, $[t_0, t_1]$ ժամանակահատվածը, միջին մակերևույթի կետերի տեղափոխության և սալի մակերևույթի տեղափոխության արագությունների սկզբնական և վերջնական արժեքները: Պահանջվում է գտնել նշված ժամանակահատվածում սալը սկզբնական վիճակից վերջնական վիճակին բերող լայնական $Q(x, y, t)$ ուժերը:

Լրացուցիչ պահանջ դնենք բեռի վրա՝ նրա մեծության քառակուսուց մինիմալացնելով ֆունկցիոնալը: Անիզոտրոպ սալի հարկադրական տատանումների դիֆերենցիալ հավասարումը լայնական բեռի զրոյական արժեքի դեպքում տրվում է

$$\frac{1}{\rho h} \left(D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho h} Q(x, y, t) \quad (4.1)$$

հավասարումով:

Այս հավասարման մեջ D_{16} և D_{26} կոշտությունների առկայությունը թույլ չի տալիս անջատել փոփոխականները, ինչը խիստ բարդացնում է նրա լուծումը: Սակայն կոմպոզիցիոն շերտերից կազմված սալերի համար խնդիրը կարելի է պարզեցնել, եթե

սալերի շերտերի գլխավոր առանցքների φ_k անկյունները X առանցքի նկատմամբ տեղադրենք այնպես, որ D_{16} և D_{26} գործակիցները հավասար լինեն զրոյի: Այդ դեպքում (4.1) հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը. [114].

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Q(x, y, t) \quad (4.2)$$

Սալի եզրերի վրա ընդունենք ազատ հենման պայմանները, որոնց ժամանակ տեղափոխությունները և մոմենտները եզրերում հավասար են զրոյի:

$$\begin{aligned} w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \text{երբ } x = 0 \text{ և } x = a \\ w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \text{երբ } y = 0 \text{ և } y = b \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ժամանակի սկզբնական պահին սալի միջին մակերևույթի տեղափոխությունը՝ w և այդ տեղափոխության արագությունը որոշվում են հետևյալ կախվածություններով.

$$w = F_1(x, y), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = F_2(x, y), \quad \text{երբ } t = 0 \quad (t_0 = 0) \quad (4.4)$$

Կառավարման խնդիրը կայանում է նրանում, որպեսզի գտնենք այնպիսի լուծում, որի դեպքում ժամանակի $t = t_1$ պահին սալի միջին մակերևույթի տեղափոխությունը և տեղափոխության արագությունը բերվեն նոր վիճակի՝ $\Phi_1(x, y)$, և $\Phi_2(x, y)$ ֆունկցիաներով [39]:

$$w(x, y, t) = \Phi_1(x, y), \quad \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} = \Phi_2(x, y) \quad \text{երբ } t = t_1 \quad (4.5)$$

Այս պայմանին անհրաժեշտ է ավելացնել պահանջ, որ

$$J = \int_0^a \int_0^b \int_0^{t_1} Q^2 dx dy dt \quad (4.6)$$

ֆունկցիոնալի էքստրեմումը ունենա մինիմալ արժեք՝ $J = J_{min}$:

Հավասարման լուծումը, որը բավարարում է տատանումների (4.2) հավասարմանը և (4.3) եզրային պայմաններին, ներկայացնենք հետևյալ տեսքով.

$$w(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn}(t) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \quad (4.7)$$

որտեղ $\lambda_m = \pi m x / a$, $\mu_n = \pi n y / b$: $f_{mn}(t)$ անհայտ ֆունկցիաները գտնելու համար (4.2) հավասարման ձախ մասում տեղադրենք (4.7), իսկ աջ մասում՝ $Q(x, y, t)$ բեռի ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքը՝

$$Q = \sum_{m,n=1}^{\infty} q_{mn}(t) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \quad (4.8)$$

Հավասարեցնելով միանման եռանկյունաչափական ֆունկցիաների գործակիցները, սալի տատանումների հաճախականությունները որոշելու համար կստանանք հավասարումների համակարգ.

$$\frac{d^2 f_{mn}(t)}{dt^2} + \omega^2 f_{mn}(t) = \frac{1}{\rho h} q_{mn}(t) \quad (4.9)$$

որտեղ՝

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{\rho h} (D_{11}\lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda_m^2\mu_n^2 + D_{22}\mu_n^4) \quad (4.10)$$

Այս հավասարման լուծումը ունի հետևյալ տեսքը.

$$f_{mn}(t) = A_{mn} \cos \omega_{mn} t + B_{mn} \sin \omega_{mn} t + \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^t q_{mn}(\tau) \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau \quad (4.11)$$

A_{mn} և B_{mn} անհայտները կարող են գտնվել (4.4) նախնական պայմաններից: Դրա համար $F_1(x, y)$ և $F_2(x, y)$ ֆունկցիաները վերլուծենք Ֆուրյեի շարքի.

$$F_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}(t) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \quad (4.12 \text{ ա})$$

$$F_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}(t) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \quad (4.12 \text{ բ})$$

Հաշվի առնելով (4.12ա) և (4.12բ) ներկայայումները և $t = 0$ դեպքում բավարարելով (4. 4) սկզբնական պայմաններին, կգտնենք անհայտ գործակիցները.

$$A_{mn} = a_{mn}, \quad B_{mn} = b_{mn} / \omega_{mn} \quad (4.13)$$

Այս լուծման մեջ մնաց որոշել ու $q_{mn}(\tau)$ անհայտ ֆունկցիան: Այն կարող է որոշվել (4.5) պայմանից և (4.6) պայմանից: Դրա համար $\Phi_1(x, y)$ և $\Phi_2(x, y)$ ֆունկցիաները վերլուծենք Ֆուրյեի շարքի.

$$\Phi_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} d_{mn}(t) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y$$

$$\Phi_2(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn}(t) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \quad (4.14)$$

Հաշվի առնելով (4.11)-ը՝ տեղադրենք (4.14)-ը և (4.7)-ը (4.5)-ի մեջ, երբ $t = t_1$, և ստացված արտահայտության մեջ հավասարեցնելով միանման եռանկյունաչափական ֆունկցիաների գործակիցները, բեռի (4.8) շարքի վերլուծության գործակիցների որոշման համար կստանանք հավասարումների համակարգ.

$$a_{mn} \cos \omega_{mn} t_1 + \frac{b_{mn}}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn} t_1 + \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^{t_1} q_{mn}(\tau) [\sin \omega_{mn} t_1 \cos \omega_{mn} \tau - \cos \omega_{mn} t_1 \sin \omega_{mn} \tau] d\tau = d_{mn}$$

$$-a_{mn} \omega_{mn} \sin \omega_{mn} t_1 + b_{mn} \cos \omega_{mn} t_1 + \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^{t_1} q_{mn}(\tau) [\cos \omega_{mn} t_1 \cos \omega_{mn} \tau + \sin \omega_{mn} t_1 \sin \omega_{mn} \tau] d\tau = c_{mn}$$

$$(4.15)$$

Հավասարումների այս համակարգից յուրաքանչյուր m և n համար հնարավոր չէ որոշել $q_{mn}(t)$ ֆունկցիաները: Դա կարելի է անել (4.6) լրացուցիչ պայմանի օգնությամբ՝ եռակի ինտեգրալի մեջ տեղադրելով $Q(x, y, t)$ –ի Ֆուրյեի շարքը:

$$J = \int_0^{t_1} \int_0^a \int_0^b (\sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}(t) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y)^2 dx dy dt \quad (4.16)$$

Հաշվի առնելով Ֆուրյեի շարքերի եռանկյունաչափական ֆունկցիաների օրթոգոնալությունը, J ֆունկցիոնալի մինիմալացումը հանգեցնում է նրա բաղադրիչներից յուրաքանչյուրի մինիմալացմանը

$$J_{mn} = \int_0^{t_1} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}^2(\tau) d\tau \quad (4.17)$$

Այստեղից երևում է, որ յուրաքանչյուր հարմոնիկի մինիմալիզացիան իրականացվում է իրարից անկախ:

Քանի որ ինտեգրալների տակ կան $q_{mn} \sin \omega_{mn} t$ և $q_{mn} \cos \omega_{mn} t$ գումարելիներ, ապա կազմվում է

$$T = q_{mn}^2 + \alpha_{mn} q_{mn} \cos \omega_{mn} \tau + \beta_{mn} q_{mn} \sin \omega_{mn} \tau \quad (4.18)$$

ֆունկցիոնալը, որտեղ α_{mn} և β_{mn} որոնելի արտադրիչներ են

Ածանցելով T ֆունկցիոնալը՝ ըստ q_{mn} -ի և այն զրոյի հավասարեցնելով, գտնենք $q_{mn}(\tau)$ շարքի վերլուծության գործակիցները.

$$q_{mn}(\tau) = -0.5 (\alpha_{mn} q_{mn} \cos \omega_{mn} \tau + \beta_{mn} q_{mn} \sin \omega_{mn} \tau), \quad (4.19)$$

և տեղադրելով դրանք Ֆուրյեի (4.8) շարքի մեջ, կստանանք սալի սկզբնական վիճակից t_1 ժամանակահատվածում պահանջվող վիճակին անցնելու համար օպտիմալ բեռի մեծությունը:

Տեղադրելով այդ գործակիցները (4.15) մեջ, կստանանք հավասարումների համակարգ $\alpha_{m,n}$ և $\beta_{n,m}$ անհայտ հաստատունները որոշելու համար

$$\begin{aligned} \alpha_{mn} &= (-a_{mn} \omega - 2b_{mn} t_1 \omega + 2c_{mn} t_1 \omega \cos t_1 \omega + a_{mn} \omega \cos 2t_1 \omega - 2c_{mn} \sin t_1 \omega + \\ & 2d_{mn} t_1 \omega^2 \sin t_1 \omega + b_{mn} \sin 2t_1 \omega) \frac{4\omega}{1-t_1^2 \omega^2 - \cos 2t_1 \omega} \\ \beta_{mn} &= (b_{11} \omega - 2a_{11} t_1 \omega - 2d_{mn} t_1 \omega^2 \cos t_1 \omega - b_{mn} \cos 2t_1 \omega - 2d_{mn} \omega \sin t_1 \omega + \\ & 2c_{mn} t_1 \omega \sin t_1 \omega + a_{mn} \omega \sin 2t_1 \omega) \frac{4\omega}{1-t_1^2 \omega^2 - \cos 2t_1 \omega} \end{aligned} \quad (4.20)$$

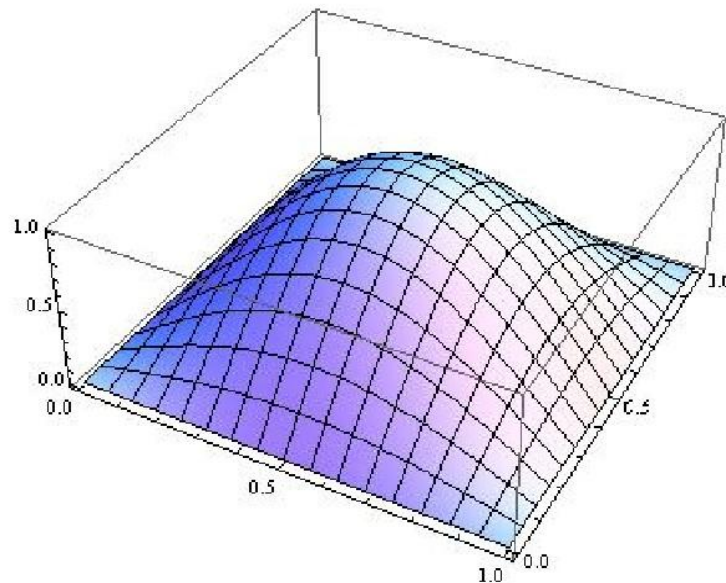
Ֆուրյեի շարքի վերլուծության գործակիցների համար ստացված բեռները թույլ են տալիս պարզեցնել ճկման և նրանց փոփոխման արագությունների ֆունկցիաների շարքերի վերլուծության գործակիցների արտահայտությունները: Տեղադրելով (4.19) (4.7)-ի մեջ և ինտեգրելով ստացված արտահայտությունը, կստանանք.

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1, n=1}^{\infty} (a_{mn} \cos \omega t + \frac{b_{mn}}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{4h\rho\omega^2} (\beta_{mn} \omega t \cos \omega t - (\beta_{mn} + \alpha_{mn} \omega t \sin \omega t))) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y$$

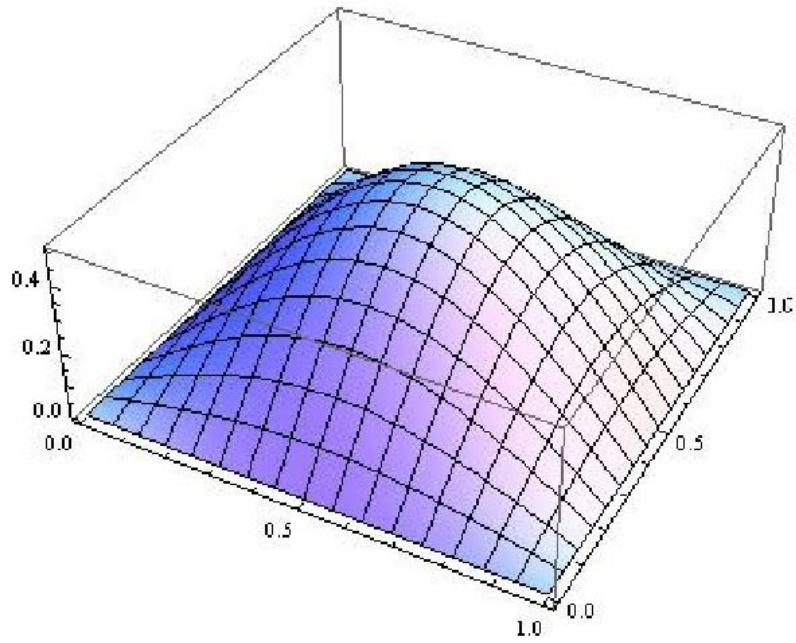
$$w_t(x, y, t) = \sum_{m=1, n=1}^{\infty} (-a_{mn} \omega \sin \omega t + b_{mn} \cos \omega t + \frac{1}{4h\rho\omega^2} (\beta_{mn} \omega \cos \omega t - \omega(\beta_{mn} + \alpha_{mn} \omega t \sin \omega t) - \omega(\alpha_{mn} + \beta_{mn} \omega t) \sin \omega t))) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y$$

(4.21)

Բերված արտահայտությունը պարզաբանենք բորոսիլիկատից պատրաստված հողակապով ամրացված ուղղանկյուն սալի օրինակի վրա ($a = b = 1$), որի մակերևույթը և մակերևույթի կետերի տեղափոխության արագությունները ունեն սինուսիդալ ձևեր, կազմված X և Y առանցքներով ուղղված կիսաալիքներից: Այդ ժամանակ (4.21) մեջ Ֆուրյեի շարքերը կազմված կլինեն միայն մի տեսակի անդամներից $m = n = 1$ արժեքներով: Բորոսիլիկատի մեխանիկական և ֆիզիկական պարամետրերը բերված են 4.1 կետում: Նկ. 4.16-ում բերված են տեղափոխությունները մակերևույթները $t_1 = 0.1$ -ի դեպքում: Նկ 4.17-ում, ցույց է տրված օպտիմալ բեռների դեպքում:

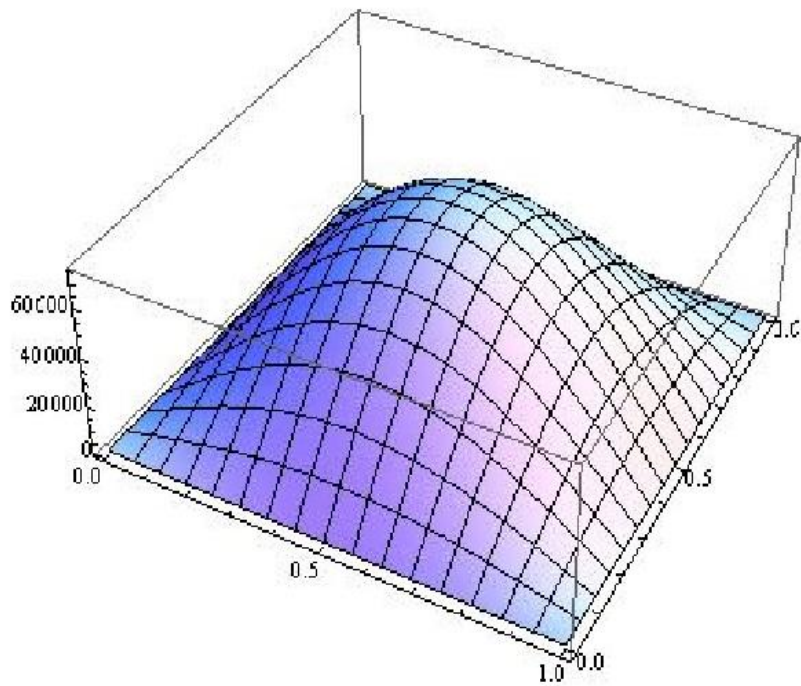


Նկ. 4.16.ա

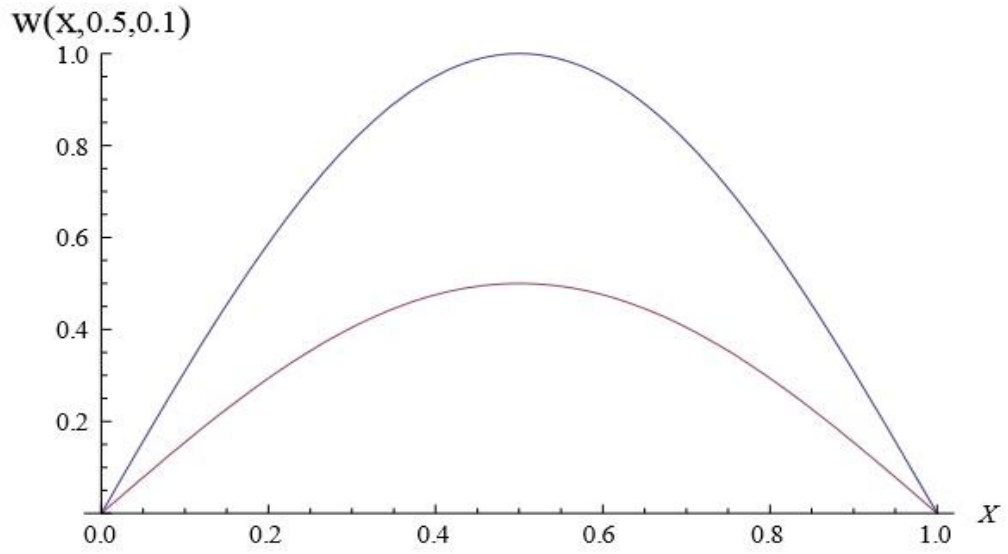


Նկ. 4.16.բ

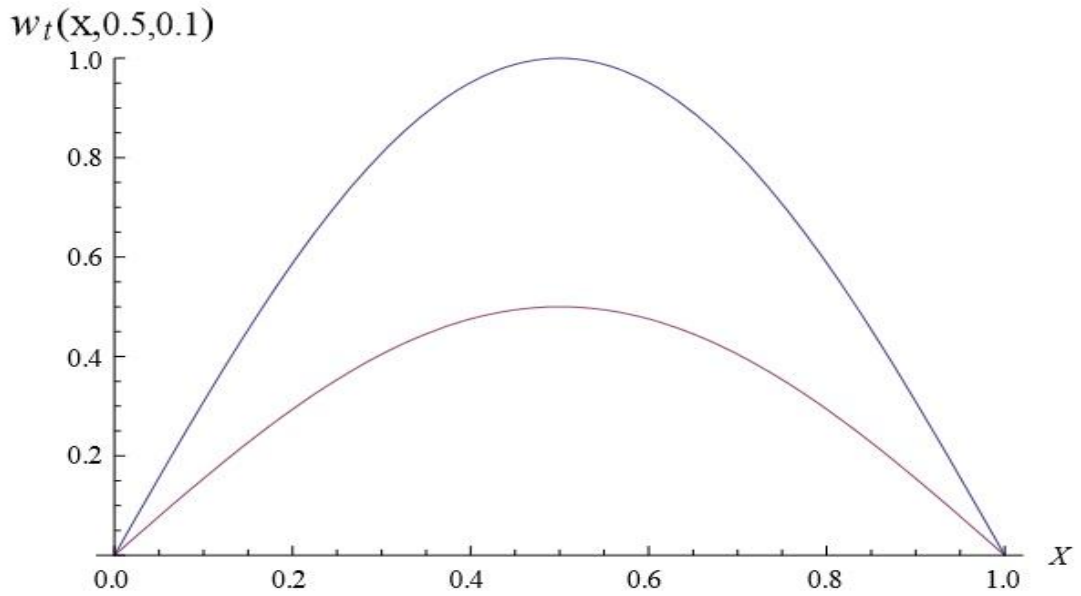
Նկ. 4.16-ում պատկերված են սկզբնական տեղափոխությունների մակերևույթները (նկ. 4.16 ա.) և տեղափոխությունների արագությունները (նկ. 4.16 բ.), երբ $t_1 = 0.1$, $a_{11} = 1$, $b_{11} = 1$, $d_{11} = 5$, $c_{11} = 5$:



Նկ.4.17 Օպտիմալ բեռնավորման գրաֆիկը $t_1 = 0.1$ -ի համար:

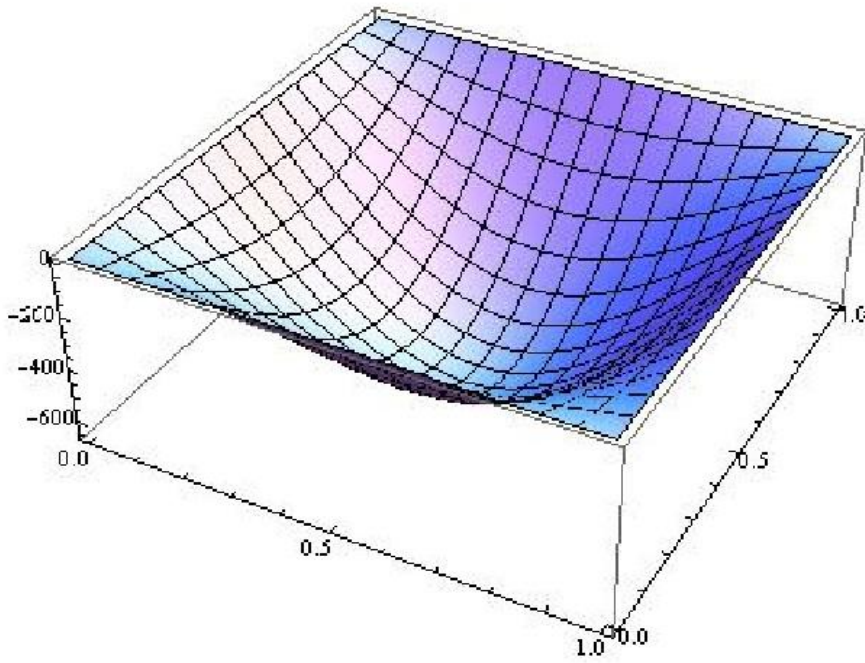


Նկ. 4.18.ա



Նկ. 4.18 բ

Նկ. 4.18–ում պատկերված են $w(x, 0.5, 0.1)$ տեղափոխությունների (նկ.4.18 ա.) և տեղափոխությունների $w_t(x, 0.5, 0.1)$ ածանցյալի (նկ.4.18 բ.) գրաֆիկները $t_1 = 0.1$ -ի համար:



Նկ. 4.19

Նկ. 4.19 Օպտիմալ բեռնավորման գրաֆիկը $t_1 = 0.35$ -ի համար

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

Աշխատանքում դիտարկված են դեֆորմացվող բազմաշերտ սալերի և թաղանթների կայունության, տատանումների և օպտիմալ նախագծման խնդիրներ, որոնք ունեն թե տեսական, և թե կիրառական մեծ նշանակություն: Օպտիմալ նախագծման ժամանակակից տեսության հիման վրա լուծված են կիրառական բնույթի խնդիրներ: Այդ խնդիրներում թաղանթների սալերի կատարելության չափանիշներն են զանգվածը, ամրությունը, կոշտությունը կամ կայունությունը բնորոշող մեծությունները:

Ատենախոսության մեջ մասնավորապես ստացված են հետևյալ արդյունքները.

- Լուծված են միաշերտ ուղղանկյուն սալի կայունության խնդիրը կամայական բաշխված ճիգերի դեպքում, կոմպոզիցիոն առաձգամածուցիկ բազմաշերտ ուղղանկյուն սալի կայունության խնդիրը կոորդինատական հարթության նկատմամբ շերտերի տարբեր դասավորվածության դեպքում, երբ սալի երկու կողմերի վրա ազդում են հավասարաչափ սեղմող ճիգեր և շերտավոր սալի կայունության երկու խնդիրներ՝ ընդլայնական սահքերի հաշվառումով:

- Լուծված է սիմետրիկ եռաշերտ անհոտորոպ անհամասեռ սալի օպտիմալ նախագծման խնդիր: Սալի ազատ տատանումների հիմնական հաճախության սևեռված արժեքի դեպքում գտնվել է սալի այնպիսի հաստություն, որի դեպքում սալի զանգվածը ստանում է ամենափոքր արժեք: Ստացված ոչ գծային հավասարումների համակարգը լուծված է թվային եղանակով՝ Մաթլաբ ծրագրով:

- Լուծված է գլանային թաղանթի կայունության խնդիրը արտաքին առանցքասիմետրիկ կամայական նորմալ բեռի դեպքում, ազատ հենված եզրային և Տյուրոդ ամրակցում՝ եզրային պայմանների դեպքերում: Որոշված են կայունության կրիտիկական պարամետրերը:

- Լուծված են փոփոխական հաստության համասեռ անհոտորոպ միաշերտ գլանային թաղանթի, միաշերտ փոփոխական հաստության համասեռ օրթոտրոպ պտտման թաղանթի և բաց գլանային թաղանթի օպտիմալ նախագծման խնդիրները:

Գտնված է թաղանթի այնպիսի հաստություն, որի դեպքում թաղանթի զանգվածը ստանում է ամենափոքր արժեք:

- Լուծված է շրջանային փոփոխական լայնական հաստությո ունեցող ձողի օպտիմալ նախագծման խնդիր. գտնել լայնական հաստությի փոփոխական կտրվածքը բնութագրող այնպիսի օրենք, որ ձողի ամենամեծ ճկվածքը ստանա փոքրագույն արժեք, իսկ ձողի ծավալն ընդունի նախապես տրված արժեք: Ստացված են ձողի ճկվածքի և օպտիմալ հաստության բանաձևեր:

- Լուծված են սալի ծոման, տատանումների և կայունության խնդիրներ ընդլայնական սահքերի հաշվառումով: Ցույց է տրված, որ սահքերով հաշվառած սալի տատանման հաճախությունը և կրիտիկական բեռի մեծությունը փոքր են դասական տեսությամբ որոշվածից:

- Ուսումնասիրված է սալի դինամիկական կայունության խնդիրը, երբ նրա հարթությունում ազդող ճիգը ժամանակից պարբերական ֆունկցիա է: Ստացված են հաճախությունների այնպիսի արժեքներ, որոնց դեպքում տեղի ունի անկայունություն:

- Լուծված են բազմաշերտ կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված սալերի ծոման, հարկադրական տատանման, կայունության և օպտիմալ կառավարման խնդիրներ: Տատանման խնդրում ուսումնասիրված է հիմնական հաճախության վարքը կախված նրա կողմերի հարաբերությունից և շերտերում մանրաթելի ուղղությունից: Որոշված են կրիտիկական ուժերը: Գտնված են նշված ժամանակահատվածում սալը սկզբնական վիճակից վերջնական վիճակին բերող լայնական ուժերը: Դիտարկված խնդիրների համար կատարված են թվային հաշվարկներ, հաշվարկների արդյունքները պատկերված են գրաֆիկների տեսքով:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Գեղամյան Բ. Պ., Հայրապետյան Վ.Ժ. Օրթոտրոպ բազմաշերտ (յոթ շերտանի) սալերի օպտիմալ նախագծման խնդիր: Եվրոպական ակադեմիա, Գիտական տեղեկագիր, Երևան, 2010, էջ 163-170.

2. Գեղամյան Բ. Պ. Բազմաշերտ անիզոտրոպ կառուցվածքների օպտիմալ նախագրծման խնդիրներ. ՀՊՀՀ Լրաբեր-75 Գիտամեթոդական հոդվածների ժողովածու, մաս 1, Երևան, 2008, էջ 194-197.

3. Գեղամյան Բ. Պ. Սեփական տատանումների հիմնական հաճախության վրա դրված սահամնափակումներով կատարյալ կառուցվածքների նախագծման խնդիրներ: Գյումրիի Մ. Նալբանդյանի անվ. մանկ. ինստիտուտի 60-ամյակի գիտ.նստաշրջանի աշխատանքների ժողովածու, 1995, էջ 133-137.

4. Գեղամյան Բ. Պ., Նազարյան Զ. Անիզոտրոպ սալերի ճկվածքի ամենամեծ արժեքի հնարավորին փոքրացման խնդիր, ՀՊՀՀ տարեկան գիտաժողով, նյութերի ժողովածու, հատոր 1, Երևան, 2004, էջ 298-301.

5. Դարյադար Մ. Խ., Գեղամյան Բ. Պ. Կենտրոնացված ուժի ազդեցությամբ ծովող շրջանային ձողի ամենամեծ ճկվածքը հնարավորին չափ փոքրացնելու խնդիր: ԵՊՀ գիտական տեղեկագիր, Ֆիզիկա և մաթեմատիկա, 2012, №1, էջ 63-65.

6. Միրզոյան Ե.Ս., Ջիլավյան Ս.Հ. Առաձգականության տեսության խնդիրների ժողովածու: Երևան, ԵՊՀ հրատարակչություն, 2011, 48 էջ.

7. Սարգսյան Վ. Ս., Գեղամյան Բ. Պ. Կառուցվածքների օպտիմալ նախագծման տեսություն և կիրառություններ Երևան, ԵՊՀ հրատ. 1990, 244 էջ.

8. Սարգսյան Վ. Ս., Գեղամյան Բ. Պ. Սարգսյան Գ. Ռ., Անիզոտրոպ շրջանային զլանային թաղանթի ձևի օպտիմալ նախագծումը սահքի լարումների հաշվառումով: ԵՊՀ Գիտական տեղեկագիր, Բնական գիտություններ, 1995, №1, էջ 35-39 .

9. Սարգսյան Վ. Ս., Սարգսյան Ս. Վ., Շաբոյան Ա. Ֆ. Ուղղագիծ անիզոտրոպիայով օժտված կորագծային քառանկյան սեփական տատանումների անալիզը, ԵՊՀ Գիտական տեղեկագիր, Բնական գիտություններ, 2001, №1, էջ 139-140

10. Սարգսյան Վ. Ս., Սարգսյան Ս. Վ., Հայրապետյան Վ. Ժ. Էլիպսական կիսա-օղակաձև լայնական կտրվածքով անիզոտրոպ պրիզմատիկ ձողի ոլորումը: ԵՊՀ Գիտական տեղեկագիր, Բնական գիտություններ, 1995, №2, էջ 22-26 .

11. Սարգսյան Վ. Ս., Գեղամյան Բ. Պ., Սարդարյան Գ. Ռ. Անիզոտրոպ շրջանային գլանային թաղանթի ձևի օպտիմալ նախագծումը սահքի լարումների հաշվառումով, ԵՊՀ Գիտական տեղեկագիր, Բնական գիտություններ, 1995, №1, էջ 35-39

12. Սարգսյան Վ. Ս., Գեղամյան Բ. Պ., Սալեհ Շ. Անզոտրոպային միանվագ մարմինների պլանային խնդիրը երկարաձգված պրոֆիլներով: ԵՊՀ Գիտական տեղեկագիր, №3, 1990, էջ 22-29 .

13. Սարգսյան Վ. Ս., Գեղամյան Բ. Պ., Ջուլիակյան Հ. Ս. Փոքր պարամետրային մեթոդի կիրառումը միատեսակ անիզոտրոպային կառուցվածքների օպտիմալացման խնդիրների նկատմամբ: Միջբուհական ժողովածու, Մեխանիկա, թող.8, Երևան, 1990, ԵՊՀ հրատ. էջ 20-28.

14. Սարգսյան Ս.Հ. Ասիմպտոտիկ մեթոդները պինդ մարմնի մեխանիկայում: Երևան, ԵՊՀ հրատ, 1989, 155 էջ.

15. Սարգսյան Ս.Հ. Բարակ թաղանթների մազնիսաառաձգականության ընդհանուր երկչափանի տեսություն, Երևան, ՀՀ ԳԱԱ, 1992, 260 էջ

16. Սարգսյան Ս.Հ. Նյութական կետի դինամիկա: Երևան, պոլիտեխնիկական ինստիտուտ, տեսական մեխանիկայի ամբիոն, 1989, 90 էջ

17. Սարգսյան Ս.Հ.« Տեսական մեխանիկա », Երևան, ՀԽՍՀ, 1988, 74 էջ

18. Սարգսյան Ս. Վ., Պողոսյան Ա. Ս. Երկայնական մազնիսական դաշտում գտնվող էլեկտրահաղորդիչ սալի տատանումների մասին, ԵՊՀ Գիտական տեղեկագիր, Բնական գիտություններ, 2001, №1, էջ 53-57 .

19. Սարգսյան Ս.Վ. Անհամասեռ լարի տատանման խնդրի մասին: ԵՊՀ Գիտական տեղեկագիր, Բնական գիտություններ, 1990, № 3, էջ 41-44 .

20. Սարգսյան Ս.Վ. Ուղղանկյուն սալի տատանումը երկայնական մազնիսական դաշտում: ԵՊՀ Գիտական տեղեկագիր, Բնական գիտություններ, 1981, №1, էջ 46-50 .

21. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. М: Наука, 1987.- 268 с.
22. Амбарцумян С.А. Еще одна теория анизотропных оболочек.-Механика полимеров, 1970, № 5, с.884-896.
23. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974, 446 с.
24. Амбарцумян С.А., Саркисян С.В. Колебание двухслойной пластинки во внешнем магнитном поле. Доклады НАН Армении, т.99, №3, 1999, с. 212-215
25. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М: Физматгиз, 1961.- 384 с.
26. Амбарцумян С.А., Хачатрян А. А. Об устойчивости и колебаниях анизотропных пластинок. ДАН Арм ССР, т.VI, № 3, 1959, с. 159-166
27. Амбарцумян С.А. Гнуни В.Ц. О вынужденных колебаниях и динамической устойчивости трехслойных ортотропных пластинок: Изв. ОТН АН СССР, Мех и МаШ. 1961, № 3.
28. Айрапетян В.Ж., Гегамян Б.П., Гегамян Г.Б. Задача минимизации наибольшего значения прогиба анизотропных пластин: Труды международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, Ереван, 2010, т. 1, с.53-55.
29. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука. 1997. 415с.
30. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ер.: Изд-во Гитутюн НАН РА. 2005. 468с.
31. Агаловян Л.А., Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. К определению напряженно-деформированного состояния слоистых пластин с анизотропией общего вида: Изв. НАН РА Механика. 1996, т.49, № 3, с. 10-22.
32. Агаловян Л.А., Саргсян М.З. О собственных колебаниях ортотропных пластин при наличии вязкого сопротивления: Изв. НАН РА Механика. 2011, т.64, №1, с. 26-36.
33. Агаловян М.Л. Пространственная задача о вынужденных колебаниях пластин с общей анизотропией: В сб. "Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести". Изд. "Гитутюн" НАН РА .Ереван, 2006 , с.42-49.

34. Агаловян М. Л. О собственных значениях дифференциального оператора и его собственных функциях. Труды ЕГУ, Естественные науки, 1997, №2, с. 8-14
35. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. Резонанс в вынужденных нелинейных колебаниях анизотропных оболочек: Изв.АН Арм.ССР, Серия физ. мат.н. 1961, т.XIV, №1.
36. Багдасарян Г.Е. Гнуни В.Ц. К теории динамической устойчивости анизотропных оболочек вращения: Изв.АН Арм.ССР, Серия физ. мат.н. 1960, т.XIII, №5
37. Багдасарян Г.Е. Об уравнениях магнитоупругости тонких пластин в постоянном магнитном поле: Труды ЕГУ, науки, 1983, № 3, с. 47-52
38. Белубекян М.В, Саркисян С.В. Об одном уточнении уравнений нелинейных колебаний пластин.Труды ЕГУ, науки, №1, 1992, с. 41-46
39. Дарьядар М. Х. Устойчивость многосложных композитных пластин. Актуальные проблемы механики сплошной среды. Труды IV международной конференции 21-26 сентября 2015, Цахкадзор, Армения. с. 190 – 194
40. Джилаван С. А., Саркисян В.С. Колебания трансформной пластинки под действием движущегося источника тепла: Труды 14-ой Всес. конф. пластин-оболочек. Кутаиси-Тбилиси, 1987, т.1, с. 480-485
41. Джилаван С. А. К вопросу о термоупругих колебаниях трансформных пластин: Межв. сб. “Механика”, ЕГУ. вып 5, 1985, с.230-241
42. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. Из. “Мир” М. 1982, 334 с.
43. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968, 475с.
44. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. ГИТТЛ. М. 1957, 463 с.
45. Малмейастр А.К., Тамуж В.Т., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига. Зинатис. 1980, 571 с.
46. Мовсисян Л.А. К устойчивости упругой и вязкоупругой анизотропной многослойной пластинки. Изв.АН Арм.ССР. Механика, т.43. №4. 1960, с.3-12.
47. Саркисян В.С., Галстян К.А., Григорян А.А., Елбакян Л.А. Некоторые задачи оптимизации и стабилизации анизотропных пластин: В сб. Межд. Науч. Тех. Конф.

“Инженерно-физические проблемы ав. И косм. тех”. Моск, ГТУ им. М.Э. Баумана, Егорьевск, 1993, 5с.

48. Саркисян В. С., Гегамян Б. П., Джулакян Г. М., Сардарян Г. Р. К решению задач оптимизации неоднородных конструкций: Матер. Всесоюз.научного семинара “Актуальн пробл.неднород. мех.” Ереван, 1991, с. 284-290,

49. Саркисян В. С., Гегамян Б. П., Джулакян Г. М., Гукасян Г. Некоторые задачи оптимизации форм и структуры анизотропных неоднородных пластин и оболочек: Механика. Межвузовский сборник научных трудов. Ереван, изд-во ЕГУ, вып. 5, 1986.

50. Саркисян В. С., Гегамян Б. П. Необходимые условия оптимальности для трехслойных анизотропных оболочек: Материалы НИ конф. ‘Прочность, жесткость и технологичност. изделий из композиционных матерериалов, т.3, 1984, с. 111-115

51. Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван: изд-во ЕрГУ, 1976, -536 с.

52. Саркисян В. С., Гегамян Б. П., Сардарян Г. Р. Численная реализация задачи оптимизации неоднородных анизотропных цилиндрических оболочек с учетом сдвигов: Сб.”Численные методы решения задач строительной механики” Теория упругости и пластичности Волгоград, 1990, с 43-44.

53. Саркисян В.С. Некоторые задачи теории упругости анизотропного тела. Ереван: изд-во ЕрГУ, 1970, 443 с.

54. Саркисян В.С., Саркисян С.В., Джилавян С. А., Саргсян А.Л. Исследование колебаний электропроводящих пластин в магнитном поле: Изв. НАН Армении, Механика, т.56, № 4, 2003, с. 3-17

55. Саркисян С.В. Об одном уточнении уравнений нелинейных магнитоупругих колебаний электропроводящих пластин: Изв. НАН Армении, Механика, т.51, №4, 1998, с.55-64

56. Саркисян Н. С., Хачатрян А. М. О двухмерных уравнениях двухслойной анизотропной пластинки по нелинейной теории упругости: Изв. АН Армении. Механика. 2017, т. 70. № 1. с. 64-73.

57. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. Гостехиздат. 1946.
58. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. М: Машиностроение, 1970. 734 с.
59. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. М., Изд-во МГТУ им. Н. М. Баумана, 1999., с. 592.
60. Хачатрян А.М. Об уравнениях двухслойной анизотропной цилиндрической оболочки при неполном контакте между слоями: Вестник Нижегородского университета. Серия Механика. 2000. Вып. 2. с. 123-129
61. Шагинян С. Г. Об устойчивости по действующей силе системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Труды ЕГУ, науки, 2002, № 3, с. 31-34.
62. Шагинян С. Г., Амбарцумян С. Р. Об устойчивости по действующей силе в критическом случае. Труды ЕГУ, науки, 1997, №2, с. 15-20.
63. Aghalovyan L.A. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells. Singapore-London: World Scientific Publishing, 2015, 376 p.
64. Ambartsumyan S.A., Belubekyan M.V. On bending waves localized along the edge of a plate, International Applied Mechanics. 1994, Vol.30, pp.135–140.
65. Amazigo J.C, Frank D. Dynamic buckling, Journal of Applied Math.1973, Vol.31, pp.1–9.
66. Arbocz J. Past present, future of shell stability analysis. Zeitschrift für Flugwissenschaften und Weltraumforschung 1981. Mechanics., Vol. 5, Nos. 6, pp.335–348.
67. Arbocz J. Shell stability analysis: theory and practice. In: Thompson JMT, Hunt GW, editors. Collapse: buckling of structures in theory and practice. Cambridge, UK: Cambridge University Press; 1983. pp. 43–74.
68. Ashton J. E., Halpin, J. C. and Petit, P. H. Primer on Composite Materials: Analysis, Technomic Publishing Co., Inc., 1969. 124 p.
69. Ashton, J. E., and Whitney, J. M. Theory of Laminated Plates, Technomic Publishing Co., Stamford, Conn., 1970. 153 p.

70. Bolotin V.V. Dynamic stability of elastic systems. Moscow: Gostekhizdat, 1956, 600 p.
71. Baghdasaryan G. Y., Gnuni V. C. Stability of the cylindrical shell, which is partially filled by liquid under dynamic pressure. Proc. of NAS of Armenia, Mechanics, 2007, Vol. 60, No 1, pp 25-32.
72. Baghdasaryan G.Y., Marukhyan S.A. Dynamic behavior of coaxial cylindrical shells, with a gap partially filled with fluid. Proc. of NAS of Armenia, Mechanics 2011, Vol 64, No 3, pp 10-21.
73. Banichuk, N.V., Ishlinskii, A.Yu. Some Special Features of Problems of the Stability and Vibrations of Rectangular Plates. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 59, No 4, Aug, 1995. pp. 593-597.
74. Belyaev N.M. Resistance of materials, Vol. I, 497 p; 1964, Vol. 2, 513 p. (in Russian)
75. Brayson A., Ho Yu Shi. Applied theory of optimal government, M: Mir, 1972, 544 p.
76. Belubekyan M. V., Sargsyan S. V., Papyan A. A. Localized bending vibrations of piezoceramic transverse polarized plate. YSU of Armenia, Physics and Mathematics, 2018, Vol 52, No 1, pp. 27-33
77. Belubekyan V.M., Sharifian R. buckling of isotropic plates with two opposite sliding contact edges and the other two edges simply supported unloaded. Proceeding of international school conference of young scientists, 2009. pp. 353-356.
78. Belubekyan, V.M. on the problem of stability of orthotropic rectangular plate with two free opposite edges. The problem of Ishlinskii. Proc. International Sc. And Tech. conf. Architecture and construction- contemporary problems Yerevan, Yerevan State University of Architecture and Construction, Vol.3, 2008. pp. 80-83.
79. Belubekyan V.M., E.O. Chil-Akobyanyan. "Problems of localized instability of plates with a free edge," in Proc. NAS conf., Mechanics, Yerevan, 2004. Vol. 57, No 2, pp.34-39.
80. Belubekyan V.M. On the problem of stability of plate under account of transverse shears, in Proc. Rus. Sc. Academy, MTT conf., 2004. No. 2, pp.126-131.

81. Cosha A. Variational calculation. M: Visshaya shkola, 1983, 280p. (in Russian)
82. Christensen R. M. Mechanics of Composite Materials. Dover. New York. 2013, 348 p.
83. Daryadar M.Kh. Optimization of tubular two dimensional shells. IJTPE Journal, 2013, Vol.5, Issue 17, No.4, pp.17-21.
84. Daryadar M.Kh. The Optimization Problems in Open Shells. The second Scientific–Research Conference of Iranian Students, Yerevan-Armenia 24-25 June 2013, pp.90-96.
85. Daryadar M.Kh. Rod Metal Retrofitting in Mechanical structures. The second Scientific–Research Conference of Iranian Students, Yerevan-Armenia 24-25 June 2013, pp.60-64.
86. Daryadar M.Kh. The optimization in anizotrop shells. IJSID Journal, 2013, Vol.3, Issue 4. pp.446-451.
87. Daryadar M.Kh. Optimization in symmetric orthotropic shells. IJTPE Journal, 2014, Vol.6, Issue 20, No.3, pp.134-138.
88. Daryadar M.Kh. Problems of Optimal Design of Non-Isotropic Mixed Plates. Caspian Journal of Applied Sciences Research, 2015, Vol. 4, Issue 5. pp.38-44.
89. Daryadar M.Kh. Stability of multilayered composite plates. PONTE Journal, 2016, Vol. 72, Issue 5, pp.2-10.
90. Daryadar M.Kh. The Accounting of the Transverse Slides for the Layered Composites. Journal of Steel Structures & Construction, 2018, Vol.4, Issue. 2 • 149. 3 p.
91. Fleming J.F., Herrmann G., Mooney I. Buckling of Structural Elements Subject to Surface Shear. J. of Applied Mechanics, 1965, Vol. 32, Issue1.
92. Ghulghazaryan G. R., Ghulghazaryan L.G. Free interfacial and edge vibrations of momentless cylindrical shell of variable curvature with free ends: Armenian State pedagogical university after Kh. Abovyan.Scintifik news, 2014, Vol. 1, No. 20, pp. 62-85.
93. Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan L.G. Vibrations of a corrugated orthotropic cylindrical shells with free edges: Int. Apple. Mechanics, 2006, Vol. 42, No. 12, p.p. 1398-1413.

94. Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan L. G. Saakyan R.D., The vibrations of a thin elastic orthotropic circular cylindrical shell with free and hinged edges: *J. Appl. Math and Mech*, 2008, Vol. 72, Nos. 3, pp. 453-465.
95. Gnuni V. C. Analysis of influence of transverse shear deformations on the stiffness, stability and vibration characteristics of shallow shells and shells of constant dual curvature. *Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, Mechanics*, 2003. Vol. 56, No4, pp. 39-45.
96. Ishlinskii, A. Yu. *Applied Problems in Mechanics*. Nauka, Moscow 1986, Vol.2, Mechanics of elastic and absolutely rigid bodies. 416p.
97. Ishlinskii A.Yu. On a limiting process in the theory of the stability of elastic rectangular plates. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1954, Vol 95, No 3, pp.477-479.
98. Jones, R. M. *Mechanics of Composite Materials*, Scripta Book Co., Washington, D.C., 1975, 355 p.
99. Jones RM. *Buckling of bars, plates, and shells*. Blacksbourg, VA: Bull Ridge Publishing, 2006.
100. Jilavian S.A., Khurshudyan Ac. J. Topology Optimization for Elastic Base Under Rectangular Plate Subjected to Moving Load: *Archives of Control Sciences*, Poland, 2015, Vol. 25, No.3, pp 289-305.
101. Kheradmandia K., Azhari M., Bradford M. A. Local Instability and Free Vibration of Supported Plates Using the Basic Plate Triangle. *Computational Mechanics* 40, 2007, pp. 73-84
102. Khachatryan A.M., Tovmasyan A.B. Asimptotic solution of mixed three dimension interior problem for anisotropic plate. *Proceedings of International Conferens «Topical Problems of Continuum Mechanics»*. Tsaghkadzor, Armenia. October 08-12, 2012, Vol.2, pp. 229-233
103. Lawrence C. Bank & Jiansheng Yin. Buckling of Orthotropic Plates with Free and Rotationally Restrained Unloaded Edges. *Thin-Walled Structures* 1994, Vol 2, Vol 4, 1996. pp. 83-96.
104. Lagaros ND, Papadopoulos V. Optimum design of shell structures with random geometric, material and thickness imperfections. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, Vol. 43, Nos. 22–23, pp. 6948–6964.

105. Lekhnitskii, S. G. Anisotropic Plates, Second Edition, translated from the Russian by S. W. Tsai and T. Chern, Gordon and Breach Science Publishers, Inc., 1968. 534 p.
106. Leissa, A.W. Vibrations of Plates, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C., 1969. 353 p.
107. Leissa, A. W. Vibration of Shells, NASA SP-288, U.S.Govt. Printing Office, 1973, 428 p.
108. Lockhart D, Amazigo JC. Dynamic buckling of externally pressurized imperfect cylindrical shells. *Journal of Applied Mechanics* 1975, vol42, pp.316–320.
109. Makarov BP. Application of statistical method for analysis of nonlinear shell stability problems, in theory of plates and shells. In: *Proceeding of the second all-union conference*. Kiev, Ukraine: Ukrainian SSR Academy of Sciences Press; 1962, pp. 363–370 [in Russian].
110. Makarov BP. Statistical analysis of stability of imperfect cylindrical shells. In: *Proceeding of the seventh all-union conference on the theory of plates and shells*. “Nauka” Publishing House; 1969, pp. 387–391 [in Russian].
111. Makarov BP. Statistical analysis of nonideal cylindrical shells. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Mekhanika Tverdogo Tela* 1970, Vol.1, pp.97–104 [in Russian], [English translation: *Mechanics of Solids* 1970, Vol 5, No1, pp.86–91.
112. Mkrtchyan H.P. “localized bending waves in an elastic orthotropic plate,” in *Proc. HAH conf. Mechanics, Armenia*. 2003, Vol.56, No. 4, p66-68.
113. Movsisyan L.A., Peshtmaljyan G.V. On the stability and vibrations equations of the anisotropic plates. *Proc. As of ArmSSR, Mechanics*, 1973, Vol 26, No 6, pp.18-28.
114. Movsisyan L.A. To the stability of elastic and viscoelastic anisotropic multilayer plate. *Proc. As of ArmSSR, Mechanics*, 1990, Vol.4, pp.3-11.
115. Movsisyan L.A. On the stability of rectangular plate with two free edges. *Proc. Armenian National Sc. Academy, Mechanics*, 2008, Vol. 61, pp. 33-35.
116. Movsisyan L.A. The stability of cylindrical ring under punches. *Proc. of NAS of Armenia, Mechanics* 2011, Vol 64, No 3, pp.32-38.

117. Norris A. N., Krylov and Abrahams I.D. Flexural edge waves and comments on a new bending wave solution for the classical plate equation. J. Acoust. Soc. Am. 1998, Vol 104, pp 2220-2222.

118. Navin Jaunky, Norman F. Knight, Damodar R. Ambur. Optimal Design of Grid-Stiffened Composite Panels. Journal of Aircraft, 1998, Vol.35, No 3, pp.478-486

119. Piliposyan G.T., Belubekyan M.V., and Ghazaryan K.B., Localized bending waves in a transversely isotropic plate. J. Soun. Vib. 2010, Vol.329, pp 3596-3605.

120. Reddy J. N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis. Second Edition CRC Press. New York,1997.

121. Saadatpour M. M., Azhari M., Bradford M. A. Analysis of general quadrilateral orthotropic thick plates with arbitrary boundary conditions by the Rayleigh-Ritz method. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2002, Vol.54, No7, pp.1087-1102

122. Sarkisyan V. S., Geghamyan B. P., Gyulzadyan E.E. New approach to the optimization of anizotropic plates and shells. II World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization Extended Abstract. ISSMO Zakopane Poland, 1997.

123. Sargisyan V. S., Ayrapetyan V.Q. New classes of elasticity problems of anisotropic body. Yerevan, YSU, 1997, 241p.

124. Sarkisyan V. S., Geghamyan B. P. Optimal design problems for anisotropic inhomogeneous plates and shells: Mathematical methods in engineering, 1986. Karlovy Vary Vol. 2, pp. 246-247.

125. Sarkisyan V.S., Galstyan K.A., Grigoryan A.A. The new app on the solution of problem of optimal design of anizotropic nonhomogeneous layer construction: First World congress of struct and Multidisciplinary Optimization. Extended Abstract. Germany, 1995, 49p.

126. Sarkisyan V.S, Sarkisyan S.V., Galstyan K.A. Waves propagation in anisotropic medium: Report of Scientific Invest. AUA, Yerevan, 1996, 3p.

127. Sarkisyan S.V., Jilavian S.A., Khurshudyan Ac.J. Structural optimization of an inhomogeneous infinite layer in problems on propagation of periodic waves: Mechanics of Composite Materials. 2015, Vol. 51, № 3, pp.277-284

128. Shahinyan S. G., Rezaei M. The Problem of the Optimal Stabilization of the Spinning Top Motion. NAS of Armenia, Mechanic. 2016, Vol. 69, No 1, pp 66-75.
129. Thomson, W.T. Vibration Theory and Applications, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
130. Tymoshenko S. P., Gere J. M. Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill Book Company, 1961.
131. Timoshenko, S. P., and Goodier, J. N. Theory of Elasticity, Third Edition, McGraw-Hill Book Co., 1970, 567 p.
132. Timoshenko, S., and Woinowsky-Krieger, S. Theory of Plates and Shells, Second Edition, McGraw-Hill Book Co., 1959, 580 pp.
133. Upadhyay A.K., Shukla K.K. Post-buckling behavior of composite and sandwich skew plates. International Journal of Non-Linear Mechanics 55, 2013, pp.120-127.
134. Vinson J.R., and Sierakowski, R.L. The Behavior of Structures Composed of Composite Materials, Boston: Martinus Nijhoff Publishers, 1986. 435p.
135. Vinson. Jack R. The Behavior of Shells Composed of Isotropic and Composite Materials. Kluwer Academic Publ, 1993.
136. Zakharov D.D. Konenkov's waves in anisotropic layered plates. Acoust. Phys. 2002, Vol.48, pp. 171-175.