

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

САРКИСЯН НАРИНЕ СУРЕНОВНА

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
АНИЗОТРОПНЫХ ПОЛОС И ПЛАСТИН НА ОСНОВЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ
НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.02.04 – Механика
деформируемого твердого тела

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор Хачатрян А.М.

ЕРЕВАН-2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА I. СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ ПО ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.....	16
§1. Основные соотношения и постановка задач.....	17
§2. Асимптотическое решение внутренней смешанной задачи.....	19
§3. Смешанная задача анизотропной двухслойной полосы при полном контакте между слоями.....	23
§4. Асимптотическое решение плоской задачи для двухслойной полосы с проскальзыванием.....	27
§5. Решение плоской задачи когда слои взаимодействуют по закону сухого трения	30
§6. Частные решения	33
ГЛАВА II. СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДВУХСЛОЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.....	39
§1. Постановка задачи и основные уравнения.....	40
§2. Выбор асимптотики и вывод двумерных уравнений.....	43
§3. Общий интеграл внутренней задачи.....	50
§4. Ортоотропная двухслойная пластинка.....	53
§5. Частные решения	56
ГЛАВА III. ДВУХМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ НА ОСНОВЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ НЕПОЛНОМ КОНТАКТЕ МЕЖДУ СЛОЯМИ.....	66
§1. Постановка задач и исходные уравнения.....	67
§2. Выбор асимптотики и вывод двумерных уравнений.....	68

§3. Общий интеграл внутренней задачи когда на плоскости раздела слоев задан закон распределения разности тангенциальных перемещений.....	70
§4. Нежесткий контакт.....	72
§5. Общий интеграл внутренней задачи при заданном на плоскости раздела слоев закон распределения тангенциальных напряжений.....	76
§6. Взаимодействие слоев по закону сухого трения	77
§7. Частные решения.....	80
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	88
ЛИТЕРАТУРА	91

ВВЕДЕНИЕ

В современной технике составными элементами большинства конструкций являются однослойные и многослойные стержни, пластины и оболочки. Эти конструкции обычно состоят из анизотропных материалов, иногда с существенно различными физико-механическими свойствами. Контакт между контактирующими слоями, в зависимости от условий работы, может быть как полным, так и неполным. Усложнение условий их работы, применение материалов со сложными физико-механическими свойствами привело к необходимости изучения возможности использования старых моделей расчета в новых условиях, уточнения их погрешности и обоснования построения новых неклассических моделей расчета, которые позволяют проводить расчеты с необходимой точностью. В связи с этим разработка эффективных методов расчета элементов таких конструкций является актуальной. Ввиду важности этой проблемы ей посвящены много работ, ряд монографий. Большинство научных работ по этой проблеме посвящено разработке методов расчета изотропных, ортотропных или с наличием плоскости упругой симметрии однослойных и многослойных балок, пластин и оболочек.

Основы геометрически нелинейной теории упругости были заложены работой Маргерра (1938), хотя идейные вопросы этой теории были обсуждены еще раньше в работах Навье (1833), Тимошенко С.П. (1925) и Видено (1935) по прищелкиванию стержней и сферического купола [61].

К настоящему времени разработаны различные варианты физически и геометрически нелинейной теории упругости изотропных и анизотропных тел. Для создания новых эффективных методов решения различных классов задач представляют особый большой интерес. Дальнейшее развитие нелинейной теории упругости и особенно её приложений существенно зависит от наличия экспериментальной информации о функциях и константах, входящих в определяющие соотношения, от экспериментально обоснованного выбора этих

соотношений в той или иной конкретной ситуации. Создание прикладных методов расчета слоистых балок, пластин и оболочек из анизотропных материалов на основе линейной и нелинейной теории упругости, представляет большой теоретический и практический интерес.

Поскольку нахождение точного аналитического решения соответствующей трехмерной задачи сопряжено с почти непреодолимыми трудностями, были предложены различные прикладные методы сведения трехмерной задачи теории упругости к двумерным уравнениям теории пластин и оболочек

Одним из самых распространенных методов расчета тонкостенных конструкций является метод гипотез. Важный пример теории, построенной методом гипотез, представляет собой классическая теория, базирующаяся на предположениях типа гипотез Бернулли-Кирхгофа-Лява.

Основные уравнения тонкой упругой слоистой пластинки на основе гипотезы Кирхгофа-Лява для пакета в целом получены Лехницким С. Г. [80]. Теория анизотропных слоистых оболочек на основе гипотезы Кирхгофа-Лява для пакета в целом построена Амбарцумяном С. А. [25,27].

Уточненные теории анизотропных слоистых пластин и оболочек построены и развиты в известных трудах и монографиях Амбарцумяна С.А. [25-27]. Уточненная теория ортотропных пластин переменной толщины построено в [73].

Вариационный метод был применен для получения основных уравнений тонкой слоистой оболочки в работах Григолюка Э. И. и его учеников [59-63]. При этом, вместо гипотез Кирхгофа-Лява для пакета в целом была применена более общая система гипотез, позволяющая учесть сдвиг в заполнителях.

В работе [35,36] на основе вариационного принципа выведены уравнения изгиба упругих плит, состоящих из чередующихся «жестких» и «мягких» слоев, и соответствующие естественные граничные условия. В монографиях [37,38] изложены методы расчета многослойных конструкций на статические, динамические и температурные воздействия и на устойчивость.

Многие прикладные задачи для слоистых структур приводят к рассмотрению случаев неполного контакта между слоями. Например, для описания полей сейсмических волн, образующихся на тонких границах, используют граничные условия, отличные от условий жесткого контакта. В частности, условия, учитывающие скачок тангенциальных смещений, были использованы в работах [23,29,93].

Метод асимптотического осреднения применялся для вывода уравнений слоистой среды с нелинейными условиями обобщенного типа в работах [87,88].

Другой важный метод изучения напряженно-деформированных состояний балок, пластин и оболочек – метод разложения по параметру толщины. Этим методом все искомые величины представляются в виде произведения двух функций, первая из которых есть функция от поперечной координаты, вторая – от координат срединной поверхности. Чаще всего в качестве первой функции выбирают степенную функцию [72] или полиномы Лежандра [41]. В итоге получаются краевые задачи общего вида и все группы неизвестных приходится определять одновременно, решая для этого краевую задачу тем более высокого порядка, чем больше членов сохранено в разложении, то есть чем больше точность решения.

Краевые задачи при асимптотическом методе имеют итерационный характер. Процесс их решения заключается в решении краевых задач, различающихся между собой только смыслом известных функций, входящих в правые части уравнений и в граничные условия.

Математическая теория сингулярно возмущенных уравнений систематически изложена в монографиях В. Вазова [39], А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова [40], А.Х. Найфэ [86], С.А. Ломова [83], В.П. Маслова [85], А.М. Ильина [71], М.В. Федорюка [113] и др., а также в фундаментальных работах М.И. Вишика, Л.А. Люстерника [42,43], К.О. Фридрихса [132,133] и др. Сущность асимптотического метода заключается в представлении искомых величин в виде асимптотического ряда по степеням некоторого безразмерного

физического или геометрического малого (или большого) параметра и получением рекуррентных формул для вычисления неизвестных.

Асимптотический метод определения НДС произвольных изотропных пластин и оболочек разработан А.Л. Гольденвейзером и его учениками [50-58].

В.В. Понятовским [94-95] методом асимптотического интегрирования построены решения уравнений теории упругости для кривого стержня (бруса) с плоской осевой линией при произвольных статических граничных условиях на боковой поверхности.

В теории анизотропных пластин и оболочек асимптотический метод получил развитие в работах Л.А. Агаловяна и его учеников Р.С. Геворкяна, А.М. Хачатряна, М.Л. Агаловяна, Л.Г. Гулгазарян и др. Изучению взаимодействия пластин и оболочек с различными физическими полями с использованием асимптотического метода посвящены работы С.А. Амбарцумяна, Г.Е. Багдасаряна, М.В. Белубекяна, С.О. Саркисяна,

Л. А. Агаловян распространил асимптотический метод на анизотропные пластинки и оболочки, выявив характерные особенности, связанные с анизотропией [1-6]. В работе [2] найдена асимптотика напряжений и перемещений в случае первой краевой задачи для полосы (на продольных кромках заданы значения напряжений) и построен эффективный итерационный процесс для определения всех искомых величин, установлена связь с теорией балок Бернулли-Кулона-Эйлера, а также с принципом Сен-Венана. В [119] эти результаты распространены на случай анизотропной полосы. Асимптотический метод оказался эффективным также при решении второй и третьей краевых задач как для однослойных, так и для многослойных полос [1,3,5,10], при этом была доказана неприменимость гипотезы плоских сечений для решений этого класса задач. Установленная для искомых величин асимптотика оказалась принципиально отличной от асимптотики тех же величин при первой краевой задаче. Тем же методом решены соответствующие пространственные краевые задачи для анизотропных пластин и оболочек [1,4,10,49]. Рассмотрение этого

класса задач позволило установить тесную связь решений с расчетом оснований и фундаментов по модели сжимаемого слоя. Была установлена область применимости модели Винклера–Фусса и получена формула коэффициента постели для ортотропного основания, как однослойного, так и многослойного.

Многие прикладные задачи приводят к расчету таких тонкостенных элементов конструкций и сооружений, на лицевых поверхностях которых заданы условия, отличные от условий первой краевой задачи теории упругости. Такие задачи рассмотрены в работах [10-15,31,32].

В работах [19-22,119,120] асимптотическим методом исследованы напряженно-деформированные состояния однослойных анизотропных полос, пластин и цилиндрических оболочек, изготовленных из материалов, обладающих анизотропией общего вида. Построены решения как для внутреннего напряженного состояния, так и для пограничного слоя.

Асимптотический метод оказался весьма эффективным и при рассмотрении взаимодействий различных физических полей с тонкостенными конструкциями. Асимптотическая теория пьезокерамических пластин и оболочек была построена в работах [97-98].

Асимптотический метод применён для решения динамических задач для анизотропных однослойных и двухслойных полос, пластин и оболочек при различных вариантах граничных условий, заданных на лицевых поверхностях оболочки, в работах [122-129,136-138].

В работах [7-8,123,124] асимптотическим методом решены трёхмерные неклассические краевые задачи теории упругости для слоистого пакета из ортотропных пластин, которые имеют существенное значение в сейсмологии.

Первая краевая задача для анизотропной полосы и смешанные краевые задачи для анизотропной пластинки на основе геометрически нелинейной теории упругости асимптотическим методом решены в работах [22,91,118].

Для обоснования гипотез магнитоупругости тонких тел также был использован асимптотический метод [28].

Асимптотическая двухмерная теория магнитоупругости проводящих тонких пластинок и оболочек на основе несимметричной теории упругости, построена С.О. Саркисяном [109-112, 143-146].

Применению асимптотического метода в задачах теплопроводности и термоупругости посвящена монография И. Е. Зино и Э. А. Троппа [70].

Анализу классических уравнений динамики оболочек с использованием асимптотического метода посвящена монография [58].

Асимптотический и близкие к нему методы были разработаны в работах [130-135,139-142,147-149].

L. Reiss [140,141] методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости получил двухмерные уравнения изотропной цилиндрической оболочки. Был построен также пограничный слой.

О.Е.Widera и С.В.Chang методом асимптотического интегрирования построили исходное приближение внутренней задачи анизотропной пластинки и цилиндрической оболочки, соответствующие показателю изменчивости $1/2$ [148,149].

В.Novotny методом асимптотического интегрирования трехмерных (геометрически) нелинейных уравнений упругой среды построил двухмерные итерационные процессы для определения составляющих тензора напряжения и вектора смещения в тонких анизотропных оболочках [130,131].

Много подходов предложено и разработано для решения в основном плоских задач для изотропных сред. В частности, для решения плоских задач для изотропной полосы и прямоугольника использовались метод интегральных уравнений [47,139], метод ортогональных полиномов [139], метод однородных решений [44,84], метод начальных функций [48] и т.д. Смешанные задачи для изотропного слоя методом потенциала рассматривались в [79].

Сравнительно мало работ, посвященных анизотропной полосе [81]. Это объясняется тем, что вышеуказанные методы для анизотропного тела или непосредственно не применимы, или оказываются трудоемкими.

Для исследования кручения, изгиба в плоской задаче теории упругости однородных и неоднородных анизотропных тел, когда имеется плоскость упругой симметрии, а также в задачах изгиба, колебаний и устойчивости однородных и неоднородных анизотропных пластин и оболочек в классической постановке В.С. Саркисяном был использован малый геометрический и физический параметр [99-101].

Малый физический параметр был использован также в работе [78] для исследования некоторых плоских задач теории упругости для ортотропной среды.

Аппарат аналитических функций был использован в [24] для решения пространственных задач теории упругости.

Эффективные методы численного решения осесимметричных и трехмерных задач для слоистых упругих тел описаны в монографии [88]. В [121] решены плоские задачи сжатия и изгиба многослойных плит, состоящих из произвольного числа плоскопараллельных слоев с различными условиями контакта на их границах.

Для решения нелинейных задач строительной механики в большинстве случаев можно применять численные методы (метод конечных разностей, МКЭ, метод Бубнова - Галеркина, вариационные методы). Применение этих методов приводит к системам нелинейных алгебраических уравнений. Для решения нелинейных задач разработаны специальные методы линеаризации, которые сводят решение нелинейных задач к последовательному решению линейных задач [71].

Диссертационная работа посвящена проблеме определения и анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) в смешанной задаче для анизотропных слоистых полос и пластин по геометрически нелинейной теории

упругости при полном и неполном контактах между слоями. Материалы слоев обладают анизотропией самого общего вида. Предлагается асимптотический метод решения соответствующих уравнений теории упругости, показана эффективность выбранного метода расчета подобных элементов конструкций.

Работа состоит из введения, трех глав и заключения.

В первой главе методом асимптотического интегрирования двумерных уравнений геометрически нелинейной теории упругости получены уравнения и соотношения для определения и анализа НДС слоистой анизотропной полосы, слои которой в плоскости полосы обладают анизотропией общего вида. Считается, что на одной из продольных кромок полосы заданы нормальная компонента вектора перемещения и касательное напряжение, а на другой – условия первой краевой задачи теории упругости. На линии раздела слоев заданы условия полного или неполного контакта. Построены решения, соответствующее внутренней задаче [102-104].

В первом параграфе приведены исходные двумерные уравнения геометрически нелинейной теории упругости для анизотропных тел. Поставлены краевые задачи для анизотропной двухслойной полосы.

Во втором параграфе построено асимптотическое решение внутренней смешанной задачи двухслойной анизотропной полосы на основе геометрически нелинейной теории упругости. Полученное решение содержит неизвестные функции интегрирования, которые определяются последующем.

В третьем параграфе, используя полученное в предыдущем параграфе общее решение нелинейной теории упругости, после удовлетворения граничным условиям на продольных сторонах, а также условиям полного контакта на линиях раздела, все величины выражены через перемещение одного слоя, а для определения последнего получено обыкновенное дифференциальное уравнение. Все расчетные формулы исходного приближения совпадают с соответствующими формулами той же задачи в линейной постановке [102].

В четвертом параграфе приведено асимптотическое решение плоской задачи для анизотропной двухслойной полосы по геометрически нелинейной теории упругости при неполном контакте между слоями [103]. Более подробно анализировано решение, соответствующее случаю, когда слои взаимодействуют по модели нежесткого контакта.

В пятом параграфе рассмотрена плоская краевая задача для анизотропной двухслойной полосы при неполном контакте между слоями, когда на линии контакта задан закон распределения касательного напряжения. Более подробно рассмотрен частный случай, когда упругие слои взаимодействуют по закону сухого трения Кулона [104].

В шестом параграфе, в качестве иллюстрации, рассмотрены частные решения рассмотренных задач.

Во второй главе рассмотрен вопрос определения напряженно-деформированного состояния двухслойной анизотропной пластинки, слои которой обладают анизотропией общего вида. Из геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости асимптотическим методом выведены двумерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчета двухслойной анизотропной пластинки. Введены формулы для определения всех перемещений и напряжений. Показано, что выведенные уравнения и соотношения для нулевого приближения совпадают с уравнениями плоской задачи анизотропной двухслойной пластинки, когда для каждого слоя имеется плоскость упругой симметрии, параллельная срединной плоскости пластинки.

В первом параграфе приведены исходные трехмерные уравнения геометрически нелинейной теории упругости для анизотропных тел. Поставлена краевая задача для анизотропной двухслойной пластинки, когда на верхней лицевой плоскости пластинки заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, на нижней – смешанные условия теории упругости, а на плоскости раздела слоев – условия полного контакта [105].

Переходом к безразмерным координатам и перемещениям выведены сингулярно возмущенные геометрическим малым параметром уравнения относительно искомым величин.

Во втором параграфе выбрана асимптотика и построено общее решение внутренней задачи двухслойной анизотропной пластинки на основе геометрически нелинейной теории упругости. Получена система разрешающих уравнений в перемещениях, которая в нулевом приближении совпадает со системой плоской задачи слоистой пластинки, слои которой имеют плоскость упругой симметрии.

В третьем параграфе, используя общее решение нелинейной теории упругости, после удовлетворения граничным условиям на лицевых плоскостях, а также условиям полного контакта на линиях раздела, все величины выражены через перемещения одного слоя, а для определения последних получена система дифференциальных уравнений в частных производными. Определены также неизвестные функций интегрирования общего решения. Показано, что расчетные формулы исходного приближения совпадают с соответствующими формулами той же задачи в линейной постановке [105].

В четвёртом параграфе приведены расчетные формулы для двухслойной пластинки из ортотропных материалов.

В пятом параграфе, в качестве иллюстрации, приведены решения конкретных примеров для двухслойной пластинки, при полном контакте между слоями.

В третьей главе найдена асимптотика и из геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости выведены линейные двумерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчета двухслойной анизотропной пластинки, на верхней лицевой плоскости которой заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, а на нижней – смешанные условия теории упругости. На плоскости раздела слоев задан закон распределения разности (скачка) тангенциальных перемещений или

закон распределения тангенциальных напряжений, в частности, закон сухого трения Кулона.

Построено решение внутренней задачи. Показано, что поправки, обусловленные геометрически нелинейностью исходных уравнений, будут существенными особенно для материалов обладающих сильной анизотропией и в случае, когда внешние нагрузки имеют большую изменяемость [106-108].

В первом параграфе приведены постановки задач, сформулированы краевые задачи для анизотропной двухслойной пластинки при различных условиях неполного контакта.

Во втором параграфе для решения поставленных задач в трехмерных уравнениях геометрически нелинейной теории упругости снова перейдем к безразмерным переменным и безразмерным перемещениям и, как в смешанной задаче анизотропной двухслойной пластинки при полном контакте слоев, решение полученных уравнений ищем в виде суммы по степеням малого параметра. Выбрана асимптотика и построено общее решение внутренней задачи двухслойной анизотропной пластинки.

В третьем параграфе, используя общее решение, после удовлетворения граничным условиям на лицевых плоскостях, а также условиям неполного контакта на плоскости раздела слоёв, получена система разрешающих уравнений с частными производными относительно неизвестных перемещений. Показана, что эта система в частном случае, совпадает с соответствующей системой двухслойной пластинки при полном контакте между слоями [106].

В четвертом параграфе более подробно рассмотрен модель нежесткого контакта. В отличие полного контакта, неполный контакт приводит к повышению порядка разрешающих дифференциальных уравнений и, как следствие, увеличению числа произвольных констант в решении внутренней задачи. Показано, что нелинейность, как в случае полного контакта, высказывается начиная со второго приближения. Вклад последующих приближений будет существенным особенно для материалов обладающих

сильной анизотропией и в том случае, когда внешние нагрузки имеют большую изменяемость.

В пятом параграфе приведен общий интеграл внутренней задачи при заданном на плоскости раздела слоев законе распределения тангенциальных напряжений, в частности, закон сухого трения Кулона [107].

Однако, вместо двух уравнений, здесь имеем систему из четырёх уравнений. Система разрешающих уравнений в нулевом приближении распадается на две системы, которые совпадают с уравнениями обобщенной плоской задачи теории упругости, когда имеется плоскость упругой симметрии. Для последующих приближений, как в ранее рассмотренных задачах, меняются лишь правые части уравнений, куда входят коэффициенты, характеризующие общую анизотропию, а также члены, обусловленные геометрически нелинейностью уравнений теории упругости.

В шестом параграфе более подробно рассмотрен закон взаимодействия слоев по закону сухого трения. При этом рассмотрен два закона взаимодействия: закон постоянной силы трения и закон трения Кулона.

Показано, что когда упругие слои взаимодействуют по закону сухого трения Кулона, то это, в отличие первой краевой задачи теории упругости для двухслойной пластинки, не приводит к повышению порядка разрешающих дифференциальных уравнений [108].

В седьмом параграфе, в качестве иллюстрации, приведены решения конкретных примеров для двухслойной пластинки из ортотропных материалов при неполном контакте между слоями. Полученные решения сравниваются с решениями тех же задач в линейной постановке.

ГЛАВА I

СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ – ПРЯМОУГОЛЬНИКА ПО ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В этой главе рассматривается вопрос определения напряженно-деформированного состояния в плоской смешанной задаче для анизотропной двухслойной полосы по геометрически нелинейной теории упругости. Считается, что на одной из продольных кромок полосы заданы нормальная компонента вектора перемещения и касательное напряжение, а на другой – условия первой краевой задачи теории упругости. На линии раздела слоев заданы условия полного или неполного контакта [102-104].

Асимптотическим методом решены смешанные краевые задачи для анизотропной двухслойной полосы–прямоугольника по геометрически нелинейной теории упругости при различных условиях контакта между слоями. Построено решение, соответствующее внутренней задаче. Рассмотрены частные примеры.

§1. Основные соотношения и постановка задач

Рассматривается плоская нелинейная задача для анизотропной двухслойной полосы $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq l, -h_2 \leq y \leq h_1, h \ll l\}$ (рис.1). Будем считать, что слои имеют различные толщины h_k , коэффициенты упругости $a_{ij}^{(k)}$, где k – номер слоя и $k = 1, 2$, l – длина полосы. Общая толщина полосы равна $2h$ ($2h = h_1 + h_2$).

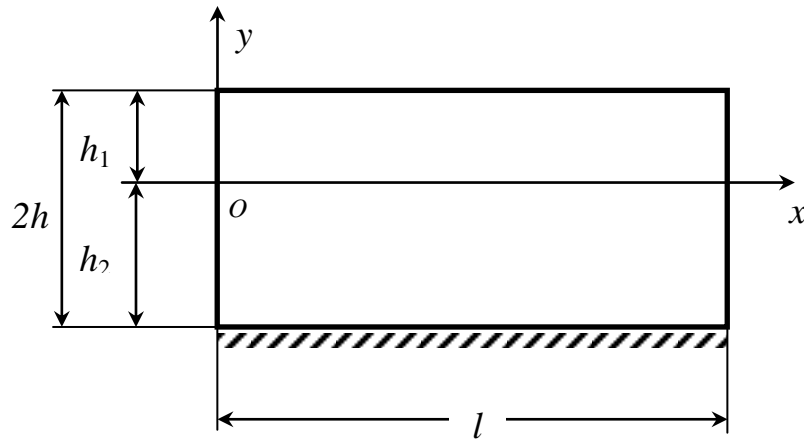


Рис.1

На нижней и верхней сторонах полосы заданы следующие условия для напряжений и перемещений [102-104]

$$\sigma_{xy}^{(1)} = \varepsilon^4 \sigma_{xy}^+(x), \quad \sigma_y^{(1)} = \varepsilon^3 \sigma_y^+(x), \quad \text{при } y = h_1 \quad (1.1)$$

$$\sigma_{xy}^{(2)} = \varepsilon^4 \sigma_{xy}^-(x), \quad v^{(2)} = \varepsilon^3 v^-(x), \quad \text{при } y = -h_2$$

где $\varepsilon = h/l$ малый геометрический параметр.

На линии раздела слоев задано одно из следующих условий контакта:

Задача 1. На линии раздела слоев $y = 0$ заданы условия полного контакта

[102]:

$$\sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)}, \quad \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)}, \quad (1.2)$$

$$v^{(1)} = v^{(2)}, \quad u^{(1)} = u^{(2)}$$

Задача 2. На линии раздела слоев $y = 0$ заданы следующие условия неполного контакта (*скользящий контакт*) [103]:

$$\sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)}, \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)}, \quad (1.3)$$

$$v^{(1)} = v^{(2)}, u^{(2)} - u^{(1)} = f(x)$$

Задача 3. На линии раздела слоев $y = 0$ заданы условия неполного контакта второго типа (*закон распределения тангенциальных напряжений*) [104]:

$$\sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)}, v^{(1)} = v^{(2)}, \quad (1.4)$$

$$\sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)} = f(x)$$

Функция $f(x)$ в (1.3) и в (1.4) считается заданным и в зависимости от выбранной модели контакта, может иметь различный вид.

Отметим некоторые законы взаимодействия упругих слоев: закон проскальзывания винклерского типа, нелинейный закон вязкого трения, закон нелинейного трения или закон сухого трения Кулона [23].

Ставится задача: найти решение уравнений геометрически нелинейной теории упругости для анизотропной двухслойной полосы, когда на нижней и верхней сторонах полосы заданы условия (1.1), а на линии раздела слоев – условия полного или неполного контакта (1.2) – (1.4).

Для решения поставленных задач будем исходить из двумерных уравнений геометрически нелинейной теории упругости [90,121]

Предполагается, что связь между напряжениями и деформациями соответствует закону Гука, а углы поворота настолько велики, что ими нельзя пренебрегать и при определении деформаций, и при написании уравнений равновесия.

Исходные уравнения геометрически нелинейной теории упругости для плоской задачи имеют вид

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} \right) \sigma_x^{(k)} + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} \sigma_{xy}^{(k)} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} \right) \sigma_{xy}^{(k)} + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} \sigma_y^{(k)} \right] = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v^{(k)}}{\partial x} \sigma_x^{(k)} + \left(1 + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial y} \right) \sigma_{xy}^{(k)} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial v^{(k)}}{\partial x} \sigma_{xy}^{(k)} + \left(1 + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial y} \right) \sigma_y^{(k)} \right] = 0 \\
& \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^{(k)}}{\partial x} \right)^2 \right] = a_{11}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{12}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{16}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)} \\
& \frac{\partial v^{(k)}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^{(k)}}{\partial y} \right)^2 \right] = a_{12}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{22}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{26}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)} \\
& \frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} \frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x} \frac{\partial v^{(k)}}{\partial y} = a_{16}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{26}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{66}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)} \\
& a_{ij}^{(k)} - \text{упругие коэффициенты деформации } (k = 1, 2).
\end{aligned} \tag{1.5}$$

§2. Асимптотическое решение внутренней смешанной задачи.

Для решения поставленных краевых задач преобразуем геометрически нелинейные уравнения теории упругости анизотропного тела (1.5), вводя безразмерную координатную систему $\xi = x/l$, $\zeta = y/h$, а также безразмерные перемещения $U^{(k)} = u^{(k)}/l$, $V^{(k)} = v^{(k)}/l$. В результате получим систему, содержащую малый параметр $\varepsilon = h/l$.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(1 + \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \xi} \right) \sigma_x^{(k)} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \zeta} \sigma_{xy}^{(k)} \right] + \\
& + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\left(1 + \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \xi} \right) \sigma_{xy}^{(k)} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \zeta} \sigma_y^{(k)} \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial V^{(k)}}{\partial \xi} \sigma_x^{(k)} + \left(1 + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V^{(k)}}{\partial \zeta} \right) \sigma_{xy}^{(k)} \right] + \\ & + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{\partial V^{(k)}}{\partial \xi} \sigma_{xy}^{(k)} + \left(1 + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V^{(k)}}{\partial \zeta} \right) \sigma_y^{(k)} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial U^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U^{(k)}}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial V^{(k)}}{\partial \xi} \right)^2 \right] = a_{11}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{12}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{16}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)}$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \varepsilon^{-2} \left[\left(\frac{\partial U^{(k)}}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial V^{(k)}}{\partial \zeta} \right)^2 \right] = a_{12}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{22}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{26}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)}$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{(k)}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \xi} \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V^{(k)}}{\partial \xi} \frac{\partial V^{(k)}}{\partial \zeta} = a_{16}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{26}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{66}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)}$$

Систему (2.1), благодаря наличию малого геометрического параметра ε , удобно решить асимптотическим методом.

Решение системы (2.1) ищем в виде суммы [1,10,50]

$$Q^{(k)} = \varepsilon^{q_k} \sum_{s=0}^S \varepsilon^s Q^{(k,s)}, \quad (2.2)$$

где $Q^{(k)}$ любое из напряжений или безразмерных перемещений, s – число приближений. Целое число q_k подбирается так, чтобы получилась непротиворечивая система для определения $Q^{(s)}$:

$$\begin{aligned} q_k &= 3 \text{ для } \sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, U^{(k)}, V^{(k)} \\ q_k &= 4 \text{ для } \sigma_{xy}^{(k)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Эта асимптотика, по сути, не отличается от той, что применялась для решения тех же задач в линейной теории упругости [17]. Однако здесь, чтобы получить итерационный процесс, асимптотическое представление (2.2)

необходимо начинать с положительных степеней малого параметра. Асимптотике (2.3) соответствует выбор представления (1.1).

Подставив (2.2) с учетом (2.3) в систему (2.1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x^{(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,s)}}{\partial \zeta} + \sigma_1^{*(k,s)} &= 0 \\
\frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_y^{(k,s)}}{\partial \zeta} + \sigma_2^{*(k,s)} &= 0 \\
\frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \xi} &= a_{11}^{(k)} \sigma_x^{(k,s)} + a_{12}^{(k)} \sigma_y^{(k,s)} + a_{16}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s-1)} - U_{\xi}^{(k,s-3)} \\
\frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial \zeta} &= a_{12}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{22}^{(k)} \sigma_y^{(k,s-2)} + a_{26}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s-2)} - V_{\zeta}^{(k,s-2)} \\
\frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \xi} &= a_{16}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{26}^{(k)} \sigma_y^{(k,s-1)} + a_{66}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s-2)} - U_{\xi\zeta}^{(k,s-3)}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где

$$\sigma_1^{*(k,s)} = \sigma_{11}^{(k,s-1)} + \sigma_{12}^{(k,s-3)},$$

$$\sigma_2^{*(k,s)} = \sigma_{21}^{(k,s-2)} + \sigma_{22}^{(k,s-4)}, \sigma_{12}^{(k,s)} \neq \sigma_{21}^{(k,s)}$$

$$\sigma_{11}^{(k,s)} = \sum_{i=0}^s \left(\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial \zeta} \frac{\partial \sigma_y^{(k,i)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 U^{(k,s-i)}}{\partial \zeta^2} \sigma_y^{(k,i)} \right)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{12}^{(k,s)} &= \sum_{i=0}^s \left(\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial \xi} \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,i)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial \zeta} \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,i)}}{\partial \xi} + \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{\partial^2 U^{(k,s-i)}}{\partial \xi \partial \zeta} \sigma_{xy}^{(k,i)} + \frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial \xi} \frac{\partial \sigma_x^{(k,i)}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U^{(k,s-i)}}{\partial \xi^2} \sigma_x^{(k,i)} \right)
\end{aligned}$$

$$\sigma_{21}^{(k,s)} = \sum_{i=0}^s \left(\frac{\partial V^{(k,s-i)}}{\partial \zeta} \frac{\partial \sigma_y^{(k,i)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 V^{(k,s-i)}}{\partial \zeta^2} \sigma_y^{(k,i)} \right)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{22}^{(k,s)} &= \sum_{i=0}^s \left(\frac{\partial V^{(k,s-i)}}{\partial \xi} \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,i)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{(k,s-i)}}{\partial \zeta} \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,i)}}{\partial \xi} + \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{\partial^2 V^{(k,s-i)}}{\partial \xi \partial \zeta} \sigma_{xy}^{(k,i)} + \frac{\partial V^{(k,s-i)}}{\partial \xi} \frac{\partial \sigma_x^{(k,i)}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 V^{(k,s-i)}}{\partial \xi^2} \sigma_x^{(k,i)} \right) \\
U_{\xi}^{(k,s)} &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^s \left(\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial \xi} \frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \xi} + \frac{\partial V^{(k,s-i)}}{\partial \xi} \frac{\partial V^{(k,i)}}{\partial \xi} \right) \\
V_{\zeta}^{(k,s)} &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^s \left(\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial \zeta} \frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{(k,s-i)}}{\partial \zeta} \frac{\partial V^{(k,i)}}{\partial \zeta} \right) \\
U_{\xi\zeta}^{(k,s)} &= \sum_{i=0}^s \left(\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial \xi} \frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{(k,s-i)}}{\partial \xi} \frac{\partial V^{(k,i)}}{\partial \zeta} \right)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Члены, обусловленные нелинейностью исходных уравнений (1.5), входят во величины $\sigma_1^{*(k,s)}$, $\sigma_2^{*(k,s)}$ и $U_{\xi}^{(k,s)}$, $V_{\zeta}^{(k,s)}$, $U_{\xi\zeta}^{(k,s)}$.

Система уравнений (2.4) в нулевом приближении совпадает с системой уравнений для задач в линейной постановке [5].

Интегрируя систему (2.4) по ζ , получим

$$\begin{aligned}
V^{(k,s)} &= v_0^{(k,s)}(\xi) + v^{*(k,s)}(\xi, \zeta) \\
U^{(k,s)} &= u_0^{(k,s)}(\xi) + u^{*(k,s)}(\xi, \zeta) \\
\sigma_y^{(k,s)} &= \sigma_{y0}^{(k,s)} + \sigma_y^{*(k,s)}(\xi, \zeta) \\
\sigma_x^{(k,s)} &= \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \frac{du_0^{(k,s)}}{d\xi} - \frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}} \sigma_{y0}^{(k,s)} + \sigma_x^{*(k,s)}(\xi, \zeta) \\
\sigma_{xy}^{(k,s)} &= \sigma_{xy0}^{(k,s)} + \left(\frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}} \frac{d\sigma_{y0}^{(k,s)}}{d\xi} - \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \frac{d^2 u_0^{(k,s)}}{d\xi^2} \right) \zeta + \sigma_{xy}^{*(k,s)}(\xi, \zeta)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Величины со звездочками известны для каждого приближения s , выражаются через предыдущие приближения и определяются по формулам

$$\sigma_y^{*(k,s)} = -\int_0^\zeta \left(\frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,s-2)}}{\partial \xi} + \sigma_2^{*(k,s)} \right) d\xi,$$

$$\sigma_{xy}^{*(k,s)} = -\int_0^\zeta \left(\frac{\partial \sigma_x^{*(k,s)}}{\partial \xi} + \sigma_1^{*(k,s)} \right) d\xi,$$

$$\sigma_x^{*(k,s)} = \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \frac{du^{*(k,s)}}{d\xi} - \frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}} \sigma_y^{*(k,s)} - \frac{a_{16}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}} \sigma_{xy}^{(k,s-1)} + \frac{1}{a_{11}^{(k)}} U_\xi^{(k,s-3)} \quad (2.7)$$

$$v_x^{*(k,s)} = \int_0^\zeta \left(a_{12}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{22}^{(k)} \sigma_y^{(k,s-1)} + a_{26}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s-2)} - V_\zeta^{(k,s-2)} \right) d\xi$$

$$u^{*(k,s)} = \int_0^\zeta \left(a_{16}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{26}^{(k)} \sigma_y^{(k,s-3)} + a_{66}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s-2)} - \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - U_{\xi\xi}^{(k,s-3)} \right) d\xi$$

Отметим, что для приближения s $Q^{(k,s-m)} \equiv 0$ при $s < m$.

$\sigma_{y0}^{(k,s)}(\xi)$, $\sigma_{xy0}^{(k,s)}(\xi)$, $u_0^{(k,s)}(\xi)$, $v_0^{(k,s)}(\xi)$ – неизвестные функции интегрирования и подлежат определению. Они определяются с помощью граничных условий (1.1) и условий контакта (1.2)–(1.4).

§3. Смешанная задача анизотропной двухслойной полосы при полном контакте между слоями

Рассмотрим вопрос определения напряженно-деформированного состояния в плоской краевой задаче для анизотропной слоистой полосы по геометрически нелинейной теории упругости при граничных условиях (1.1) и условиях полного контакта (1.2) между слоями (задача 1) [102].

Для решения поставленной задачи используем общее решение (2.6).
 Неизвестные функции интегрирования $\sigma_{y_0}^{(k,s)}(\xi)$, $\sigma_{xy_0}^{(k,s)}(\xi)$, $u_0^{(k,s)}(\xi)$, $v_0^{(k,s)}(\xi)$
 определяются с помощью граничных условий (1.1) и условий полного контакта
 (1.2).

Удовлетворив условиям полного контакта (1.2), получим

$$\begin{aligned}\sigma_{xy_0}^{(1,s)} &= \sigma_{xy_0}^{(2,s)}, \quad \sigma_{y_0}^{(1,s)} = \sigma_{y_0}^{(2,s)}, \\ v_0^{(1,s)} &= v_0^{(2,s)}, \quad u_0^{(1,s)} = u_0^{(2,s)}\end{aligned}\tag{3.1}$$

Удовлетворив граничным условиям (1.1), для неизвестных функций
 интегрирования $\sigma_{y_0}^{(k,s)}(\xi)$, $\sigma_{xy_0}^{(k,s)}(\xi)$, $v_0^{(k,s)}(\xi)$ получим

$$\begin{aligned}\sigma_{y_0}^{(1,s)} &= \sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1) \\ v_0^{(1,s)} &= v^{-(s)} - v^{*(2,s)}(\xi, \zeta_2)\end{aligned}\tag{3.2}$$

$$\sigma_{xy_0}^{(1,s)} = \sigma_{xy}^{+(s)}(\xi) - \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \zeta_1 \frac{d\sigma_{y_0}^{(1,s)}}{d\xi} + \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \zeta_1 \frac{d^2 u_0^{(1,s)}}{d\xi^2} - \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1)$$

Для определения $u_0^{(1,s)}$ получим следующее дифференциальное уравнение

$$C_{11} \frac{d^2 u_0^{(1,s)}}{d\xi^2} = p^{(s)}\tag{3.3}$$

где

$$C_{11} = \frac{\zeta_1}{a_{11}^{(1)}} - \frac{\zeta_2}{a_{11}^{(2)}} \quad \zeta_1 = \frac{h_1}{h}, \quad \zeta_2 = -\frac{h_2}{h}$$

$$\begin{aligned}p^{(s)} &= \sigma_{xy}^- - \sigma_{xy}^+ + \left(\frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \zeta_1 - \frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} \zeta_2 \right) \left(\frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi} - \frac{d\sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1)}{d\xi} \right) + \\ &+ \left(\sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1) - \sigma_{xy}^{*(2,s)}(\xi, \zeta_2) \right)\end{aligned}$$

Интегрируя уравнение (3.3), получим

$$u_0^{(1,s)} = \frac{1}{C_{11}} \int_0^\xi \int_0^\xi p^{(s)} d\xi d\xi + C_1^{(1,s)} \xi + C_2^{(1,s)} \quad (3.4)$$

где $C_1^{(1,s)}$ и $C_2^{(1,s)}$ произвольные постоянные интегрирования, которые должны определяться из торцевых условий.

Подставляя значения неизвестных функций из (3.2) и (3.4) в (2.6), решение задачи представим в следующем виде

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k,s)} &= \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \left(\frac{1}{C_{11}} \int_0^\xi p^{(s)} d\xi + C_1^{(1,s)} \right) - \frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}} \left(\sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1) \right) + \sigma_{xy}^{*(k,s)}(\xi, \zeta) \\ \sigma_{xy}^{(k,s)} &= \sigma_{xy}^{+(k,s)} + \left(\frac{\zeta_1}{a_{11}^{(1)}} - \frac{\zeta}{a_{11}^{(k)}} \right) \frac{p^{(s)}}{C_{11}} - \left(\frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \zeta_1 - \frac{a_{12}^{(k,s)}}{a_{11}^{(k)}} \zeta \right) \left(\frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi} - \frac{d\sigma_y^{*(k,s)}(\xi, \zeta_1)}{d\xi} \right) + \\ &\quad + \sigma_{xy}^{*(k,s)}(\xi, \zeta) - \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1) \\ \sigma_y^{(k,s)} &= \sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(k,s)}(\xi, \zeta_1) + \sigma_y^{*(k,s)}(\xi, \zeta) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$U^{(k,s)} = \frac{1}{C_{11}} \int_0^\xi \int_0^\xi p^{(s)} d\xi d\xi + C_1^{(1,s)} \xi + C_2^{(1,s)} + u^{*(k,s)}(\xi, \zeta)$$

$$V^{(k,s)} = v^{-(s)} - v^{*(k,s)}(\xi, \zeta_2) + v^{*(k,s)}(\xi, \zeta)$$

$$\sigma_{xy}^{\pm(0)} = \sigma_{xy}^\pm, \quad \sigma_y^{+(0)} = \sigma_y^+, \quad v^{-(0)} = v^-,$$

$$\sigma_{xy}^{\pm(s)} = \sigma_y^{+(s)} = 0, \quad v^{-(s)} = 0, \quad s > 0$$

Однослойная полоса. В уравнениях и полученных формулах полагая $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(2)} = a_{ij}$, $h_1 = h_2 = h$ получим решение смешанной краевой задачи для однослойной анизотропной полосы на основе геометрически нелинейной теории упругости. Имеем

$$\zeta_1 = -\zeta_2 = 1, \quad C_{11} = \frac{2}{a_{11}},$$

$$p^{(s)} = \sigma_{xy}^{-(s)} - \sigma_{xy}^{+(s)} + 2 \frac{a_{12}}{a_{11}} \left(\frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi} - \frac{d\sigma_y^{*(s)}(\xi, 1)}{d\xi} \right) + (\sigma_{xy}^{*(s)}(\xi, 1) - \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi, -1))$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^{(s)} &= \sigma_{xy}^{+(s)} + \frac{1}{2}(1 - \zeta)p^{(s)} - \frac{a_{12}}{a_{11}}(1 - \zeta) \left(\frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi} - \frac{d\sigma_y^{*(s)}(\xi, 1)}{d\xi} \right) + \\ &+ (\sigma_{xy}^{*(s)}(\xi, 1) - \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi, -1)) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$U^{(s)} = a_{11} \left(\int_0^\xi \int_0^\xi p^{(s)} d\xi d\xi + C_1^{(s)} \xi + C_2^{(s)} \right) + u^{*(s)}(\xi, \zeta)$$

$$\sigma_x^{(k,s)} = \int_0^\xi p^{(s)} d\xi - \frac{a_{12}}{a_{11}} (\sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(s)}(\xi, 1)) + \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi, \zeta) + C_1^{(s)}$$

$$\sigma_y^{(s)} = \sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(s)}(\xi, 1) + \sigma_y^{*(k,s)}(\xi, \zeta)$$

$$V^{(s)} = v^{-(s)} - v^{*(s)}(\xi, -1) + v^{*(s)}(\xi, \zeta)$$

Выведенные уравнения и соотношения в нулевом приближении совпадают с соответствующими уравнениями и соотношениями анизотропных полос при линейной постановке задачи [17].

Решение внутренней задачи (3.5) или (3.6) не содержит необходимое число произвольных постоянных, для точного удовлетворения торцевым условиям при $x = 0, l$. Для точного удовлетворения этим условиям необходимо построить также решение типа пограничного слоя и представить общий интеграл задачи в виде суммы решений внутренней задачи и пограничных слоев, соответствующее краям $x = 0, l$.

Отметим, что решение типа пограничного слоя в линейной задаче для однослойной анизотропной термоупругой полосы, когда на лицевых сторонах полосы заданы смешанные условия (1.1), построено в [17].

§4. Асимптотическое решение плоской задачи для двухслойной полосы с проскальзыванием

Рассмотрим плоскую краевую задачу для анизотропной двухслойной полосы по геометрически нелинейной теории упругости при граничных условиях (1.1) и при неполном контакте между слоями (1.3) (задача 2) [103].

Пользуясь решением (2.6) и удовлетворив условиям неполного контакта (1.3), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{xy0}^{(1,s)} &= \sigma_{xy0}^{(2,s)}, \quad \sigma_{y0}^{(1,s)} = \sigma_{y0}^{(2,s)}, \\ \nu^{(1,s)} &= \nu^{(2,s)} = \nu^{(s)}, \quad u^{(2,s)} = u^{(1,s)} + f^{(s)}(\xi) \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$f^{(0)}(\xi) = f\left(\frac{x}{l}\right), \quad f^{(s)}(\xi) = 0, \quad \text{при } s > 0.$$

Удовлетворив граничным условиям (1.1), получим следующее дифференциальное уравнение для определения перемещения $u_0^{(1,s)}$:

$$C \frac{d^2 u^{(1,s)}}{d\xi^2} + C_2 \frac{d^2 f^{(s)}}{d\xi^2} = p^{(s)} \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\zeta_1}{a_{11}^{(1)}}, \quad C_2 = -\frac{\zeta_2}{a_{11}^{(2)}}, \quad C = \frac{\zeta_1}{a_{11}^{(1)}} - \frac{\zeta_2}{a_{11}^{(2)}} \\ p^{(s)} &= \sigma_{xy}^- - \sigma_{xy}^+ + \left(\frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \zeta_1 - \frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} \zeta_2 \right) \left(\frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi} - \frac{d\sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1)}{d\xi} \right) + \\ &\quad + \left(\sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1) - \sigma_{xy}^{*(2,s)}(\xi, \zeta_2) \right) \end{aligned}$$

Для определения неизвестных функций интегрирования $\sigma_{y0}^{(k,s)}(\xi)$, $\sigma_{xy0}^{(k,s)}(\xi)$ и $\nu^{(k,s)}(\xi)$ получим формулы

$$\sigma_{y0}^{(1,s)} = \sigma_{y0}^{(2,s)} = \sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1),$$

$$\sigma_{xy0}^{(1,s)} = \sigma_{xy0}^{(2,s)} = \sigma_{xy}^{+(s)}(\xi) - \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \zeta_1 \frac{d\sigma_{xy0}^{(1,s)}}{d\xi} + \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \zeta \frac{d^2 u_0^{(1,s)}}{d\xi^2} - \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1) \quad (4.3)$$

$$v^{(1,s)} = v^{(2,s)} = v^{-(s)} - v^{*(2,s)}(\xi, \zeta_2)$$

$$\sigma_{xy}^{\pm(0)} = \sigma_{xy}^{\pm}, \quad \sigma_y^{+(0)} = \sigma_y^+, \quad v^{-(0)} = v^-,$$

$$\sigma_{xy}^{\pm(s)} = \sigma_y^{+(s)} = 0, \quad v^{-(s)} = 0, \quad s > 0$$

Более подробно остановимся на модели нежесткого контакта.

Модель нежесткого контакта интерпретируют как включение тонкого слоя с исчезающе малой сдвиговой жесткостью μ_0 (μ_0 - константа Ляме) между контактирующими средами. Толщина этого слоя $h_0 \rightarrow 0$, а отношение $\chi = \lim_{\substack{h_0 \rightarrow 0 \\ \mu_0 \rightarrow 0}} h_0 / \mu_0$ может принимать любое значение от 0 до ∞ .

Предельному случаю $\chi \rightarrow 0$ соответствует жесткий (полный) контакт, другому предельному случаю $\chi \rightarrow \infty$ - скользящий контакт $\sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)} = 0$.

Для промежуточного состояния принимается

$$u^{(2)} - u^{(1)} = \chi l / h \sigma_{xy}^{(1)} \Big|_{y=0} \quad (4.4)$$

Остальные же условия контакта (1.3) остаются неизменными. Принимая условие (4.4), тем самым, мы задаем функцию $f(x) = \chi l / h \sigma_{xy}^{(1)} \Big|_{y=0}$, что в свою очередь, последнее условие (4.1) превращает в условие

$$u^{(2,s)} = u^{(1,s)} + \chi \sigma_{xy0}^{(1,s)} \quad (4.5)$$

В итоге уравнение (4.2) принимает вид

$$C \frac{d^2 u^{(1,s)}}{d\xi^2} - \chi C_1 C_2 \frac{d^4 u^{(1,s)}}{d\xi^4} = \bar{p}^{(s)} \quad (4.6)$$

где

$$\bar{p}^{(s)} = p^{(s)} + \chi C_2 \left[\frac{d^2 \sigma_{xy}^{+(s)}}{d\xi^2} - \frac{d^2 \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1)}{d\xi^2} - \zeta \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \left(\frac{d^3 \sigma_y^{+(s)}}{d\xi^3} - \frac{d^3 \sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1)}{d\xi^3} \right) \right] \quad (4.7)$$

Заметим, что уравнение (4.6) при $\chi = 0$ совпадает с уравнением (3.3). Если $\chi \neq 0$, то уравнение (4.6) имеет четвертый порядок.

Общее решение дифференциального уравнения (4.6) имеет вид

$$u^{(s)} = C_1^{(s)} + C_2^{(s)} \xi + C_3^{(s)} e^{\sqrt{\frac{c}{\chi C_1 C_2}} \xi} + C_4^{(s)} e^{-\sqrt{\frac{c}{\chi C_1 C_2}} \xi} + \bar{u}^{(s)}(\xi, \zeta) \quad (4.8)$$

где $\bar{u}^{(s)}(\xi, \zeta)$ некоторое частное решение неоднородного уравнения, $C_i^{(s)}$ – произвольные постоянные интегрирования, $\chi \neq 0$. Окончательное решение задачи имеет вид

$$\begin{aligned} V^{(k,s)} &= v^{-(s)} + v^{*(k,s)}(\xi, \zeta) - v^{*(2,s)}(\xi, \zeta_2) \\ \sigma_y^{(k,s)} &= \sigma_y^{+(s)} + \sigma_y^{*(k,s)}(\xi, \zeta) - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$U^{(k,s)} = u^{(k,s)}(\xi) + u^{*(k,s)}(\xi, \zeta)$$

$$\sigma_x^{(k,s)} = \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \frac{du_0^{(k,s)}}{d\xi} - \frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}} \left(\sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\zeta_1) \right) + \sigma_x^{*(k,s)}(\xi, \zeta)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^{(k,s)} &= \sigma_{xy}^{+(s)}(\xi) - \left(\frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \zeta_1 - \frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}} \zeta \right) \frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi} + \left(\frac{1}{a_{11}^{(1)}} \zeta_1 - \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \zeta \right) \frac{d^2 u^{(1,s)}}{d\xi^2} + \\ &+ \left(\frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \zeta_1 - \frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}} \zeta \right) \frac{d\sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1)}{d\xi} + \sigma_{xy}^{*(k,s)}(\xi, \zeta) - \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^{(2,s)} &= u^{(1,s)} + \chi \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \frac{d^2 u^{(1,s)}}{d\xi^2} \zeta - \chi \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi} \zeta_1 + \chi \sigma_{xy}^{+(s)}(\xi) + \\ &+ \chi \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \frac{d\sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1)}{d\xi} - \chi \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1) \end{aligned}$$

где $u^{(1,s)}$ определяется по формуле (4.8).

§5. Решение плоской задачи, когда слои взаимодействуют по закону сухого трения

Рассмотрим плоскую краевую задачу для анизотропной двухслойной полосы при граничных условиях (1.1) и при неполном контакте между слоями (1.4), когда упругие слои взаимодействуют по закону сухого трения (задача 3) [104]. Закон сухого трения означает, что на контактной поверхности поставлены такие условия, при которых величина касательного напряжения определяются только величиной нормального напряжения.

Пользуясь решением (2.6) и удовлетворив условиям неполного контакта (1.4), получим

$$\begin{aligned}\sigma_{y0}^{(1,s)} &= \sigma_{y0}^{(2,s)}, v^{(1,s)} = v^{(2,s)}, \\ \sigma_{xy0}^{(1,s)} &= \sigma_{xy0}^{(2,s)} = f^{(s)}(\xi)\end{aligned}\tag{5.1}$$

где

$$f^{(0)}(\xi) = f\left(\frac{x}{l}\right), f^{(s)}(\xi) = 0, \text{ при } s > 0.$$

Удовлетворив граничным условиям (1.1), получим следующие формулы для определения неизвестных функций интегрирования:

$$\begin{aligned}\sigma_{y0}^{(1,s)} &= \sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1), \\ \sigma_{xy0}^{(1,s)} &= \sigma_{xy0}^{(2,s)} = f^{(s)}(\xi) \\ v^{(2,s)} &= v^{-(s)} - v^{*(2,s)}(\xi, \zeta_2)\end{aligned}\tag{5.2}$$

где

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}^{\pm(0)} &= \sigma_{xy}^{\pm}, \sigma_y^{+(0)} = \sigma_y^+, v^{-(0)} = v^-, \\ \sigma_{xy}^{\pm(s)} &= \sigma_y^{+(s)} = 0, v^{-(s)} = 0, f^{(s)}(x) = 0, \text{ при } s > 0.\end{aligned}$$

Для вычисления перемещения $u^{(k,s)}(\xi)$, получим дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$C_{kk} \frac{d^2 u^{(k,s)}}{d\xi^2} = f^{(s)}(\xi) + p_k^{(s)} \quad (5.3)$$

где

$$C_{11} = \frac{\zeta_1}{a_{11}^{(1)}}, C_{22} = \frac{\zeta_2}{a_{11}^{(2)}}$$

$$p_k^{(s)} = -\sigma_{xy}^{\pm(s)} + \frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}} \zeta_k \left(\frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi} - \frac{d\sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1)}{d\xi} \right) + \sigma_{xy}^{*(k,s)}(\xi, \zeta_k)$$

$$\sigma_{xy}^{\pm(0)} = \sigma_{xy}^{\pm}, \sigma_{xy}^{\pm(s)} = 0, s \neq 0$$

Уравнения (5.3) отличаются от соответствующих уравнений при полном контакте между слоями тем, что во-первых, вместо одного уравнения при полном контакте [102], здесь имеем два уравнения относительно двух перемещений $u^{(k,s)}(\xi)$, во-вторых, в правых частях уравнений (5.3) содержится функция $f^{(s)}(\xi)$, которая в зависимости от выбранной модели, может повысить порядок уравнений.

Взаимодействие слоев по закону постоянной силы трения.

Рассмотрим случай, когда упругие слои взаимодействуют по закону постоянной силы трения. Закон постоянной силы трения предполагает, что на контактной поверхности величина касательного напряжения постоянная, т.е. имеется [108].

$$\sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)} = \tau_s = const \quad (5.4)$$

Параметр τ_s можно интерпретировать как предел текучести контактного слоя.

Из (1.4) как следствие, получим

$$f^{(s)}(\xi, \eta) = \tau_s^{(s)} \quad (5.5)$$

где

$$\tau_s^{(0)} = \tau_s, \tau_s^{(s)} = 0 \text{ при } s > 0 \quad (5.6)$$

Тогда, как следствие, из (5.3), с учетом (5.5), получим

$$C_{kk} \frac{d^2 u^{(k,s)}}{d\xi^2} = \bar{p}_k^{(s)} \quad (5.7)$$

где

$$\bar{p}_k^{(s)} = p_k^{(s)} + \tau_s^{(s)}$$

Рассмотрим случай, когда упругие слои взаимодействуют по *закону сухого трения Кулона*. Тогда

$$\sigma_{xy0}^{(1)} = \sigma_{xy0}^{(2)} = \chi \sigma_{y0}^{(1)}, \quad (5.8)$$

$$f(x) = \chi \sigma_{y0}^{(1)} = \chi \left(\sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1) \right)$$

и, как следствие, из (5.3), с учетом (5.8), снова получим уравнение (5.7), где

$$\bar{p}_k^{(s)} = \chi \left(\sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1) \right) + p_k^{(s)} \quad (5.9)$$

Постоянная величина χ есть коэффициент трения. В частности, если $\chi = 0$, то отсутствует сила трения между слоями.

После интегрирования уравнения (5.7) решение задачи примет вид:

$$\begin{aligned} U^{(k,s)} &= u^{(k,s)}(\xi) + u^{*(k,s)}(\xi, \zeta) \\ V^{(k,s)} &= \frac{v^{-(s)}}{l} + v^{*(k,s)}(\xi, \zeta) - v^{*(2,s)}(\xi, \zeta_2) \\ \sigma_y^{(k,s)} &= \sigma_y^{+(s)} + \sigma_y^{*(k,s)}(\xi, \zeta) - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1) \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\sigma_x^{(k,s)} = \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \frac{du^{(k,s)}}{d\xi} - \frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}} \left(\sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1) \right) + \sigma_x^{*(k,s)}(\xi, \zeta)$$

$$\sigma_{xy}^{(k,s)} = \frac{\zeta}{\zeta_k} \sigma_{xy}^{\pm} + \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_k}\right) \chi \left(\sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(k,s)}(\xi, \zeta_1) \right) + \\ + \sigma_{xy}^{*(k,s)}(\xi, \zeta) - \frac{\zeta}{\zeta_k} \sigma_{xy}^{*(k,s)}(\xi, \zeta_k)$$

В заключение заметим, что, используя общее решение (2.6), можно решать смешанные краевые задачи для анизотропных многослойных полос – прямоугольников по геометрически нелинейной теории упругости при различных условиях контакта между слоями.

§6. Частные решения

Рассмотрим некоторые частные решения рассмотренных в §3–§5 задач.

Пример 1. Пусть имеем однослойную ортотропную полосу, нагруженной силами

$$\sigma_{xy}^{-}(x) = \tau^{-} = const, \quad v^{-}(x) \equiv 0, \\ \sigma_{xy}^{+}(x) = \tau^{+} = const, \quad \sigma_y^{+}(x) = -p = const \quad (6.1)$$

Пользуясь решением (2.1) и формулами (1.7)–(1.9), вычисляя приближения до $s = 3$ включительно, получим:

$$\sigma_y = -p, \quad \sigma_{xy} = \frac{1}{2}(1 + \zeta)\tau^{+} - \frac{1}{2}(1 - \zeta)\tau^{-} \\ \sigma_x = \frac{1}{2}(\tau^{-} - \tau^{+})\xi + \frac{a_{12}}{a_{11}}p + C_1^{(0)} + (C_1^{(1)} + C_1^{(2)}\varepsilon)\varepsilon + \\ + \left[-\left(a_{12} + \frac{a_{66}}{2}\right)(\tau^{-} - \tau^{+})p\xi + a_{11}C_1^{(3)} - \right. \\ \left. - \left\{ \frac{1}{4}a_{12}(\tau^{-} - \tau^{+})\xi^2 + a_{11}C_1^{(0)}\xi \right\}(\tau^{-} - \tau^{+}) + \frac{1}{2}a_{12} \left\{ \frac{1}{2}(\tau^{-} - \tau^{+})\xi + C_1^{(0)} \right\}^2 \right] \varepsilon^3$$

$$\begin{aligned}
U &= a_{11} \left(\frac{1}{4} (\tau^- - \tau^+) \xi^2 + C_1^{(0)} \xi + C_2^{(0)} \right) + a_{11} (C_1^{(1)} \xi + C_2^{(1)}) \varepsilon + \\
&+ \left[\frac{a_{66}}{2} (\tau^+ + \tau^-) \xi - \frac{a_{66}}{2} (\tau^- - \tau^+) \frac{\xi^2}{2} + \right. \\
&+ a_{11} (C_1^{(2)} \xi + C_2^{(2)}) - \frac{1}{2} a_{12} (\tau^- - \tau^+) \xi \left(1 + \frac{\xi}{2} \right) \left. \right] \varepsilon^2 + \\
&+ \left\{ -a_{11} \left[\left(a_{12} + \frac{a_{66}}{2} \right) (\tau^- - \tau^+) p \frac{\xi^2}{2} + \right. \right. \\
&+ \left. \left. \left(\frac{a_{11}}{2} (\tau^- - \tau^+) \frac{\xi^3}{6} + \frac{a_{11} C_1^{(0)} \xi^3}{2} \right) (\tau^- - \tau^+) \right] \right\} \varepsilon^3 + (a_{11} C_1^{(3)} \xi + a_{11} C_2^{(3)}) \varepsilon^3 \\
V &= \left(\frac{1}{2} a_{12} (\tau^- - \tau^+) \xi (\zeta + 1) - \frac{1}{a_{11}} (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) p (\zeta + 1) + a_{12} C_1^{(0)} (\zeta + 1) \right) \varepsilon + \\
&+ a_{12} C_1^{(1)} (\zeta + 1) \varepsilon^2 + a_{12} C_1^{(2)} (\zeta + 1) \varepsilon^3
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Сравнивая решение (2.3) с решением той же задачи в линейной постановке [17], заметим, что претерпели изменения формулы для напряжения σ_x и перемещения U . Поправки, обусловленные нелинейностью задачи, проявляются начиная с приближения $s = 3$. Поправочные члены в (6.2) взяты в фигурные скобки. В остальных напряжениях и в перемещении V эти поправки будут проявляться в последующих приближениях. Заметим, что эти поправки будут существенными для сильно анизотропных материалов при большой изменяемости внешних нагрузок.

Пример 2. Рассмотрим другой пример. Пусть на нижней и верхней сторонах двухслойной полосы заданы следующие условия для напряжений и перемещений

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy}^+ &= \tau^+ = const, \quad \sigma_y^+ = -p = const \\
\sigma_{xy}^- &= \tau^- = const, \quad v^-(x) = 0
\end{aligned} \tag{6.3}$$

а на линии раздела слоев $y = 0$ заданы условия неполного контакта (1.3)

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}^{(1)} &= \sigma_{xy}^{(2)}, \quad \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)}, \\ v^{(1)} &= v^{(2)}, \quad u^{(2)} - u^{(1)} = f(x)\end{aligned}$$

где

$$f(x) = \chi l / h \sigma_{xy}^{(1)} \Big|_{y=0}$$

Пользуясь решением (4.9) и формулами (2.5) – (2.7) и вычисляя приближения до $s = 2$ включительно, получим:

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(k)} &= -p, \\ \sigma_{xy}^{(k)} &= \frac{1}{2}(\tau^+ + \tau^-) - \frac{1}{2}(\tau^- - \tau^+) \zeta \\ \sigma_x^{(k)} &= \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \left[C_2^{(0)} + C_3^{(0)} \chi_1 e^{\chi_1 \zeta} - C_4^{(0)} \chi_1 e^{-\chi_1 \zeta} + \frac{\zeta}{C} (\tau^- - \tau^+) \right] + \frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}} p + \\ &+ \left[\frac{1}{a_{11}^{(k)}} (C_2^{(1)} + C_3^{(1)} \chi_1 e^{\chi_1 \zeta} - C_4^{(1)} \chi_1 e^{-\chi_1 \zeta}) \right] \varepsilon + \\ &+ \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \left\{ C_2^{(2)} + C_3^{(2)} \chi_1 e^{\chi_1 \zeta} - C_4^{(2)} \chi_1 e^{-\chi_1 \zeta} + \right. \\ &+ \frac{\zeta}{C} \frac{a_{12}^{(k)}}{(a_{11}^{(k)})^2} \times \left((C_3^{(1)} \chi_1^4 e^{\chi_1 \zeta} + C_4^{(1)} \chi_1^4 e^{-\chi_1 \zeta}) \left(\frac{\zeta_1^3 - \zeta_2^3}{6} + \frac{\zeta_1^2 - \zeta_2^2}{2} \right) - \right. \\ &- \chi C_2 (C_3^{(1)} \chi_1^8 e^{\chi_1 \zeta} + C_4^{(1)} \chi_1^8 e^{-\chi_1 \zeta}) \left(\frac{\zeta_1^3}{6} + \frac{\zeta_1^2}{2} \right) \Big) + \\ &+ \frac{\zeta^2}{2C} \frac{a_{12}^{(k)}}{(a_{11}^{(k)})^2} \left((C_3^{(1)} \chi_1^5 e^{\chi_1 \zeta} - C_4^{(1)} \chi_1^5 e^{-\chi_1 \zeta}) \left(\frac{\zeta_1^3 - \zeta_2^3}{6} + \frac{\zeta_1^2 - \zeta_2^2}{2} \right) - \right. \\ &- \chi C_2 (C_3^{(1)} \chi_1^9 e^{\chi_1 \zeta} - C_4^{(1)} \chi_1^9 e^{-\chi_1 \zeta}) \times \left(\frac{\zeta_1^3}{6} + \frac{\zeta_1^2}{2} \right) \Big) \Big\} \varepsilon^2 + \\ &+ \frac{a_{12}^{(k)}}{(a_{11}^{(k)})^2} (C_3^{(1)} \chi_1^3 e^{\chi_1 \zeta} - C_4^{(1)} \chi_1^3 e^{-\chi_1 \zeta}) \left(\frac{\zeta^2}{2} + \zeta \right) \varepsilon^2\end{aligned}\tag{6.4}$$

$$\begin{aligned}
U^{(k)} = & C_1^{(0)} + C_2^{(0)}\xi + C_3^{(0)}e^{\chi_1\xi} + C_4^{(0)}e^{-\chi_1\xi} + \frac{\xi^2}{2C}(\tau^- - \tau^+) + \\
& + \left(C_1^{(1)} + C_2^{(1)}\xi + C_3^{(1)}e^{\chi_1\xi} + C_4^{(1)}e^{-\chi_1\xi} \right) \varepsilon + \\
& + \left\{ \frac{a_{66}^{(k)}}{2}(\tau^+ + \tau^-)\xi - \frac{a_{66}^{(k)}}{4}(\tau^- - \tau^+)\xi^2 - \right. \\
& \left. - \frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}} \left(C_3^{(1)}\chi_1^2 e^{\chi_1\xi} + C_4^{(1)}\chi_1^2 e^{-\chi_1\xi} + \frac{\tau^- - \tau^+}{C} \right) \left(\frac{\xi^2}{2} + \xi \right) \right\} + \\
& + C_1^{(2)} + C_2^{(2)}\xi + C_3^{(2)}e^{\chi_1\xi} + C_4^{(2)}e^{-\chi_1\xi} + \\
& + \frac{\xi^2}{2C} \frac{a_{12}^{(k)}}{\left(a_{11}^{(k)} \right)^2} \left(\left(C_3^{(1)}\chi_1^4 e^{\chi_1\xi} + C_4^{(1)}\chi_1^4 e^{-\chi_1\xi} \right) \left(\frac{\xi_1^3 - \xi_2^3}{6} + \frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{2} \right) - \right. \\
& \left. - \chi C_2 \left(C_3^{(1)}\chi_1^8 e^{\chi_1\xi} + C_4^{(1)}\chi_1^8 e^{-\chi_1\xi} \right) \left(\frac{\xi_1^3}{6} + \frac{\xi_1^2}{2} \right) \right) \left. \right\} \varepsilon^2 \\
V^{(k)} = & \left\{ \frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}} \left(C_2^{(0)} + C_3^{(0)}\chi_1 e^{\chi_1\xi} - C_4^{(0)}\chi_1 e^{-\chi_1\xi} + \frac{\xi}{C}(\tau^- - \tau^+) \right) (\xi + 1) + \right. \\
& \left. + \frac{\left(a_{12}^{(k)} \right)^2 - a_{11}^{(k)} a_{21}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}} p(\xi + 1) \right\} \varepsilon \\
& + \left\{ \frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}} \left(C_2^{(1)} + C_3^{(1)}\chi_1 e^{\chi_1\xi} - C_4^{(1)}\chi_1 e^{-\chi_1\xi} \right) (\xi + 1) \right\} \varepsilon^2
\end{aligned}$$

где

$$\chi_1 = \sqrt{\frac{C}{\chi C_1 C_2}}$$

В рассмотренном примере, как видно из формул (6.4), поправки, обусловленные нелинейностью задачи ещё не появились. Они проявляются начиная с приближения $s = 3$. Эти поправки будут существенными для сильно анизотропных материалов при большой изменяемости внешних нагрузок.

Пример 3. В задаче 3 также рассмотрен частный пример.

Пусть на нижней и верхней сторонах двухслойной полосы заданы условия (6.3), а на линии раздела слоев $y = 0$ заданы условия неполного контакта (1.4)

$$\sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)}, \quad \nu^{(1)} = \nu^{(2)},$$

$$\sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)} = f(x)$$

где

$$f(x) = \chi \sigma_{y0}^{(1)} = \chi \left(\sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1) \right)$$

Пользуясь решением (1.12) и формулами (1.6)–(1.8) и вычисляя приближения до $s = 3$ включительно, получим:

$$\sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)} = -p$$

$$\sigma_{xy}^{(1)} = -\chi p \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_1} \right) + \tau^+$$

$$\sigma_{xy}^{(2)} = -\chi p \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_2} \right) + \tau^-$$

$$\sigma_x^{(1)} = \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} p - \frac{1}{\zeta_1} (\chi p + \tau^+) \xi - \left\{ \frac{(\chi p + \tau^+) \xi^2}{2\zeta_1} \times \right.$$

$$\times \left(\frac{5(\chi p + \tau^+)}{2\zeta_1} - 1 \right) + \frac{\xi}{\zeta_1} \left(\frac{a_{12}^{(1)} (\chi p + \tau^-)}{a_{11}^{(1)}} p - \right.$$

$$\left. - (\chi p + \tau^+) \left(\frac{C_1^{(1,0)}}{\zeta_1} + \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} p \right) \right) +$$

$$+ \frac{C_1^{(1,0)}}{a_{11}^{(1)}} \left(1 - \frac{\chi p + \tau^+}{\zeta_1} \right) \xi \left. \right\} \varepsilon^3 - \frac{C_1^{(1,3)}}{a_{11}^{(1)}} \varepsilon^3 +$$

$$+ \frac{a_{11}^{(1)}}{4\zeta_1^2} (\chi p + \tau^+)^2 \xi^2 \varepsilon^3 + \frac{C_1^{(1,0)}}{\zeta_1} + \frac{C_1^{(1,1)}}{\zeta_1} \varepsilon + \frac{C_1^{(1,2)}}{\zeta_1} \varepsilon^2$$

(6.5)

Для перемещений имеем

$$\begin{aligned}
U^{(1)} = & \frac{a_{11}^{(1)}}{\zeta_1} \left(-(\chi p + \tau^+) \frac{\xi^2}{2} + C_1^{(1,0)} \xi + C_2^{(1,0)} \right) + \\
& + \frac{a_{11}^{(1)}}{\zeta_1} (C_1^{(1,1)} \xi + C_2^{(1,1)}) \varepsilon + \left(\frac{a_{11}^{(1)}}{\zeta_1} \bar{C} - \frac{a_{12}^{(1)}}{2\zeta_1} (\chi p + \tau^+) \zeta^2 - \right. \\
& - a_{12}^{(2)} (\chi p + \tau^-) \zeta \varepsilon^2 - \left. \left\{ \frac{(a_{11}^{(1)})^2}{6\zeta_1^2} (\chi p + \tau^+) \xi^3 \times \right. \right. \\
& \times \left(\frac{5(\chi p + \tau^+)}{2\zeta_1} - 1 \right) + \frac{a_{11}^{(1)}}{2\zeta_1} \xi^2 \left(\frac{a_{12}^{(1)}}{\zeta_1} (\chi p + \tau^-) p + \left(1 - \frac{\chi p + \tau^+}{\zeta_1} \right) C_1^{(1,0)} - \right. \\
& \left. \left. - \frac{a_{11}^{(1)}}{\zeta_1} (\chi p + \tau^+) \left(\frac{C_1^{(1,0)}}{\zeta_1} + \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} p \right) \right) \right\} \zeta \varepsilon^3 + \frac{a_{11}^{(1)}}{\zeta_1} \bar{\bar{C}} \varepsilon^3
\end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned}
V^{(1)} = & \left[-\frac{a_{11}^{(1)} a_{22}^{(1)} - (a_{12}^{(1)})^2}{a_{11}^{(1)}} p \zeta - \frac{a_{12}^{(1)}}{\zeta_1} (\chi p + \tau^+) \xi \zeta - \right. \\
& \left. - (a_{12}^{(2)} (\chi p + \tau^-) \xi - \frac{a_{11}^{(1)} a_{22}^{(1)} - (a_{12}^{(1)})^2}{a_{11}^{(1)}} p \zeta_2) \right] \varepsilon + \\
& + \left[\frac{a_{12}^{(1)} C_1^{(1,1)}}{\zeta_1} \zeta + a_{12}^{(2)} C_1^{(2,1)} \right] \varepsilon^2 + \left(\frac{a_{12}^{(1)} C_1^{(1,2)}}{\zeta_1} \zeta + a_{12}^{(2)} C_1^{(2,2)} \right) \varepsilon^3
\end{aligned}$$

На этом примере поправки, обусловленные нелинейностью задачи, проявляются, начиная с приближения $s \geq 3$.

Из (6.5) видно, что линейный член в формуле для $\sigma_x^{(1)}$ имеет порядок $O(\chi p + \tau^+)$, а нелинейный член – порядка $O(\varepsilon^3 (\chi p + \tau^+)^2)$. Из выражения (6.6) для перемещения $U^{(1)}$ видно, что они имеют соответственно порядки $O(a_{11}^{(1)} (\chi p + \tau^+))$ и $O(\varepsilon^3 (a_{11}^{(1)})^2 (\chi p + \tau^+)^2)$.

ГЛАВА II

О ДВУХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЯХ ДВУХСЛОЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Рассмотрен вопрос определения напряженно-деформированного состояния двухслойной анизотропной пластинки, слои которой обладают анизотропией общего вида. Найдена асимптотика решения сингулярно возмущенной системы уравнений. Из геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости выведены двухмерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчета двухслойной анизотропной пластинки. Введены формулы для определения всех перемещений и напряжений. Предполагается, что на верхней лицевой плоскости пластинки заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, на нижней – смешанные условия теории упругости, а на плоскости раздела слоев – условия полного контакта [105].

Показано, что выведенные асимптотическим методом уравнения и соотношения для нулевого приближения совпадают с уравнениями плоской задачи анизотропной двухслойной пластинки, когда для каждого слоя имеется плоскость упругой симметрии, параллельная срединной плоскости пластинки.

§1. Постановка задачи и основные уравнения.

Рассмотрим тонкую двухслойную пластинку длины a , ширины b , составленную из однородных анизотропных материалов. Слои имеют различные толщины h_k , коэффициенты упругости $a_{ij}^{(k)}$, k – номер слоя и $k = 1, 2$. Общая толщина пластинки – $2h$ (рис. 2).

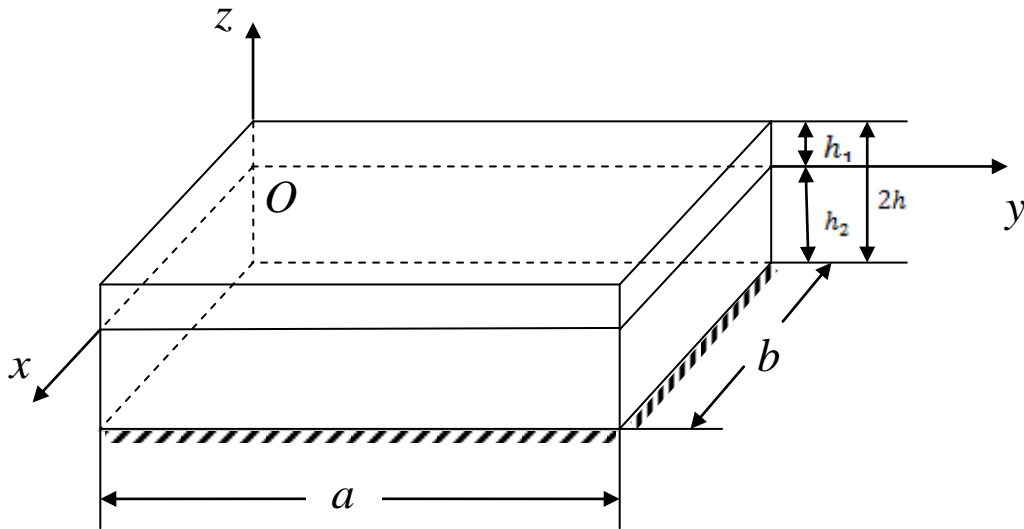


Рис. 2

Постановка задачи: найти решение геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости анизотропного тела:

уравнения равновесия [25,26,81]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sigma_x + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial u}{\partial z} \sigma_{xz} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sigma_{xy} + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_y + \frac{\partial u}{\partial z} \sigma_{yz} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sigma_{xz} + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{yz} + \frac{\partial u}{\partial z} \sigma_z \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \sigma_x + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sigma_{xy} + \frac{\partial v}{\partial z} \sigma_{xz} \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \sigma_{xy} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sigma_y + \frac{\partial v}{\partial z} \sigma_{yz} \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \sigma_{xz} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sigma_{yz} + \frac{\partial v}{\partial z} \sigma_z \right] = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial w}{\partial y} \sigma_{xy} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \sigma_{xz} \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial w}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial w}{\partial x} \sigma_y + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \sigma_{yz} \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial w}{\partial y} \sigma_{yz} + \frac{\partial w}{\partial x} \sigma_{xz} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \sigma_z \right] = 0
\end{aligned} \tag{1.1}$$

соотношения упругости (обобщенный закон Гука)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^{(k)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^{(k)}}{\partial x} \right)^2 \right] = \\
& + a_{11}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{12}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{13}^{(k)} \sigma_z^{(k)} + a_{14}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)} + a_{15}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)} + a_{16}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)} \\
& \frac{\partial v^{(k)}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^{(k)}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^{(k)}}{\partial y} \right)^2 \right] = \\
& = a_{12}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{22}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{23}^{(k)} \sigma_z^{(k)} + a_{24}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)} + a_{25}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)} + a_{26}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)} \\
& \frac{\partial w^{(k)}}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^{(k)}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^{(k)}}{\partial z} \right)^2 \right] = \\
& = a_{13}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{23}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{33}^{(k)} \sigma_z^{(k)} + a_{34}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)} + a_{35}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)} + a_{36}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial v^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} \frac{\partial u^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial y} \frac{\partial v^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(k)}}{\partial y} \frac{\partial w^{(k)}}{\partial z} =$$

$$= a_{14}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{24}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{34}^{(k)} \sigma_z^{(k)} + a_{44}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)} + a_{45}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)} + a_{46}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)}$$

$$\frac{\partial u^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} \frac{\partial u^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x} \frac{\partial v^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(k)}}{\partial x} \frac{\partial w^{(k)}}{\partial z} =$$

$$= a_{15}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{25}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{35}^{(k)} \sigma_z^{(k)} + a_{46}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)} + a_{55}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)} + a_{66}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)}$$

$$\frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} \frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x} \frac{\partial v^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial w^{(k)}}{\partial x} \frac{\partial w^{(k)}}{\partial y} =$$

$$+ a_{16}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{26}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{36}^{(k)} \sigma_z^{(k)} + a_{46}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)} + a_{56}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)} + a_{66}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)}$$

в области $\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h_2 \leq z \leq h_1\}$ при условиях на лицевых плоскостях пластинки $z = h_k$

$$\sigma_{xz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{xz}^+(x, y), \sigma_{yz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{yz}^+(x, y), \sigma_z = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_z^+(x, y), \quad z = h_1$$

$$w = \left(\frac{h}{l}\right)^3 w^-(x, y), \sigma_{xz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{xz}^-(x, y), \sigma_{yz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{yz}^-(x, y), \quad z = -h_2$$

и условиях полного контакта между слоями. Плоскость отсчета Oxy совпадает с плоскостью раздела слоев, параллельна лицевым плоскостям пластинки (рис.2).

Условия полного контакта имеют вид

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)}, \quad \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, \quad \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)}$$

$$u^{(1)} = u^{(2)}, \quad v^{(1)} = v^{(2)}, \quad w^{(1)} = w^{(2)}$$

Краевые условия на торцах $x = 0, a$ и $y = 0, b$ пока произвольные.

§2. Выбор асимптотики и вывод двумерных уравнений.

Для решения поставленной краевой задачи (1.1) –(1.4) в уравнениях (1.1) и (1.2) введем безразмерные координаты $\xi = x/l$, $\eta = y/l$, $\zeta = z/h$ и безразмерные перемещения $U^{(k)} = u^{(k)}/l$, $V^{(k)} = v^{(k)}/l$, $W^{(k)} = w^{(k)}/l$, где l –характерный тангенциальный размер пластинки ($h \ll l$), k указывает номер слоя и $k = 1, 2$. В результате уравнения равновесия в безразмерных координатах примут вид

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(1 + \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \xi} \right) \sigma_x + \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \eta} \sigma_{xy} + \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \zeta} \sigma_{xz} \right] + \\
 & + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(1 + \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \xi} \right) \sigma_{xy} + \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \eta} \sigma_y + \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \zeta} \sigma_{yz} \right] + \\
 & + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\left(1 + \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \xi} \right) \sigma_{xz} + \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \eta} \sigma_{yz} + \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \zeta} \sigma_z \right] = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial V^{(k)}}{\partial \xi} \sigma_x + \left(1 + \frac{\partial V^{(k)}}{\partial \eta} \right) \sigma_{xy} + \frac{\partial V^{(k)}}{\partial \zeta} \sigma_{xz} \right] + \\
 & + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial V^{(k)}}{\partial \xi} \sigma_{xy} + \left(1 + \frac{\partial V^{(k)}}{\partial \eta} \right) \sigma_y + \frac{\partial V^{(k)}}{\partial \zeta} \sigma_{yz} \right] + \\
 & + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{\partial V^{(k)}}{\partial \xi} \sigma_{xz} + \left(1 + \frac{\partial V^{(k)}}{\partial \eta} \right) \sigma_{yz} + \frac{\partial V^{(k)}}{\partial \zeta} \sigma_z \right] = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial W^{(k)}}{\partial \xi} \sigma_x + \frac{\partial W^{(k)}}{\partial \eta} \sigma_{xy} + \left(1 + \frac{\partial W^{(k)}}{\partial \zeta} \right) \sigma_{xz} \right] + \\
 & + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial W^{(k)}}{\partial \eta} \sigma_{xy} + \frac{\partial W^{(k)}}{\partial \xi} \sigma_y + \left(1 + \frac{\partial W^{(k)}}{\partial \zeta} \right) \sigma_{yz} \right] + \\
 & + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{\partial W^{(k)}}{\partial \xi} \sigma_{xz} + \frac{\partial W^{(k)}}{\partial \eta} \sigma_{yz} + \left(1 + \frac{\partial W^{(k)}}{\partial \zeta} \right) \sigma_z \right] = 0
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Соотношения упругости в новых координатах примут вид

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U^{(k)}}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial V^{(k)}}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial W^{(k)}}{\partial \xi} \right)^2 \right] = \\
& = a_{11}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{12}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{13}^{(k)} \sigma_z^{(k)} + a_{14}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)} + a_{15}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)} + a_{16}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)} \\
& \frac{\partial V^{(k)}}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U^{(k)}}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial V^{(k)}}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial W^{(k)}}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \\
& = a_{12}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{22}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{23}^{(k)} \sigma_z^{(k)} + a_{24}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)} + a_{25}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)} + a_{26}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)} \\
& \frac{\partial W^{(k)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U^{(k)}}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial V^{(k)}}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial W^{(k)}}{\partial \zeta} \right)^2 \right] = \\
& = a_{13}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{23}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{33}^{(k)} \sigma_z^{(k)} + a_{34}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)} + a_{35}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)} + a_{36}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)} \\
& \frac{\partial V^{(k)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(k)}}{\partial \eta} + \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \eta} \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{(k)}}{\partial \eta} \frac{\partial V^{(k)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(k)}}{\partial \eta} \frac{\partial W^{(k)}}{\partial \zeta} = \\
& = a_{14}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{24}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{34}^{(k)} \sigma_z^{(k)} + a_{44}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)} + a_{45}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)} + a_{46}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)} \\
& \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \xi} \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{(k)}}{\partial \xi} \frac{\partial V^{(k)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(k)}}{\partial \xi} \frac{\partial W^{(k)}}{\partial \zeta} = \\
& = a_{15}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{25}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{35}^{(k)} \sigma_z^{(k)} + a_{46}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)} + a_{55}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)} + a_{66}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)} \\
& \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \xi} \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(k)}}{\partial \xi} \frac{\partial V^{(k)}}{\partial \eta} + \frac{\partial W^{(k)}}{\partial \xi} \frac{\partial W^{(k)}}{\partial \eta} = \\
& = a_{16}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{26}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{36}^{(k)} \sigma_z^{(k)} + a_{46}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)} + a_{56}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)} + a_{66}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где k – номер слоя.

Решение внутренней задачи ищется в виде [9-12]

$$Q^{(k)} = \varepsilon^{q_k} \sum_{s=0}^S \varepsilon^s Q^{(k,s)}, \tag{2.3}$$

где $Q^{(k)}$ любое из напряжений или безразмерных перемещений, s – номер приближения, k – номер слоя, S – количество приближений. Целое число q_k подбирается так, чтобы получилась непротиворечивая система для определения $Q^{(k,s)}$ [12,118]:

$$\begin{aligned} q_k = 3 & \text{ для } \sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_z^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}, U^{(k)}, V^{(k)}, W^{(k)} \\ q_k = 2 & \text{ для } \sigma_{xz}^{(k)}, \sigma_{yz}^{(k)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Эта асимптотика, по сути не отличается от той, что применялась для решения той же задачи в линейной теории упругости [12,18]. В нелинейной задаче, чтобы получить итерационный процесс, асимптотический ряд (2.3) необходимо начинать с положительных степеней малого параметра [12]. Поэтому, было принято $q = q_0 + 4$, где q_0 – значение асимптотики, соответствующее задаче в линейной теории упругости.

Асимптотике (2.3), (2.4) соответствует выбор представления (1.1).

Подставив (2.3) в преобразованные, введением безразмерных координат и безразмерных компонент вектора перемещения, уравнения теории упругости анизотропного тела (2.1), (2.2), с учетом (2.4), получим систему для определения $Q^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta)$.

$$\frac{\partial \sigma_x^{(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s)}}{\partial \zeta} + \sigma_1^{*(k,s)} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_y^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k,s)}}{\partial \zeta} + \sigma_2^{*(k,s)} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k,s-2)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_z^{(k,s)}}{\partial \zeta} + \sigma_3^{*(k,s)} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \xi} + U_\xi^{(k,s-3)} + V_\xi^{(k,s-3)} + W_\xi^{(k,s-1)} = a_{11} \sigma_x^{(k,s)} + a_{12} \sigma_y^{(k,s)} + a_{13} \sigma_z^{(k,s-2)} + \\ + a_{14} \sigma_{yz}^{(k,s-1)} + a_{15} \sigma_{xz}^{(k,s-1)} + a_{16} \sigma_{xy}^{(k,s)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial \eta} + U_{\eta}^{(k,s-3)} + V_{\eta}^{(k,s-3)} + W_{\eta}^{(k,s-1)} &= a_{12}\sigma_x^{(k,s)} + a_{22}\sigma_y^{(k,s)} + a_{23}\sigma_z^{(k,s-2)} + \\ &+ a_{24}\sigma_{yz}^{(k,s-1)} + a_{25}\sigma_{xz}^{(k,s-1)} + a_{26}\sigma_{xy}^{(k,s)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial \zeta} + U_{\zeta}^{(k,s-3)} + V_{\zeta}^{(k,s-3)} + W_{\zeta}^{(k,s-1)} &= a_{13}\sigma_x^{(k,s-2)} + a_{23}\sigma_y^{(k,s-2)} \\ &+ a_{33}\sigma_z^{(k,s-4)} + a_{34}\sigma_{yz}^{(k,s-3)} + a_{35}\sigma_{xz}^{(k,s-3)} + a_{36}\sigma_{xy}^{(k,s-2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial \zeta} + U_{\eta\zeta}^{(k,s-4)} + V_{\eta\zeta}^{(k,s-4)} + W_{\eta\zeta}^{(k,s-4)} &= a_{14}\sigma_x^{(k,s-1)} + a_{24}\sigma_y^{(k,s-1)} + \\ &+ a_{34}\sigma_z^{(k,s-3)} + a_{44}\sigma_{yz}^{(k,s-2)} + a_{54}\sigma_{xz}^{(k,s-2)} + a_{64}\sigma_{xy}^{(k,s-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \zeta} + U_{\xi\zeta}^{(k,s-4)} + V_{\xi\zeta}^{(k,s-4)} + W_{\xi\zeta}^{(k,s-4)} &= a_{15}\sigma_x^{(k,s-1)} + a_{25}\sigma_y^{(k,s-1)} + \\ &+ a_{35}\sigma_z^{(k,s-3)} + a_{45}\sigma_{yz}^{(k,s-2)} + a_{55}\sigma_{xz}^{(k,s-2)} + a_{56}\sigma_{xy}^{(k,s-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial \xi} + U_{\xi\eta}^{(k,s-3)} + V_{\xi\eta}^{(k,s-3)} + W_{\xi\eta}^{(k,s-3)} &= a_{16}\sigma_x^{(k,s)} + a_{26}\sigma_y^{(k,s)} + \\ &+ a_{36}\sigma_z^{(k,s-2)} + a_{46}\sigma_{yz}^{(k,s-1)} + a_{56}\sigma_{xz}^{(k,s-1)} + a_{66}\sigma_{xy}^{(k,s)} \end{aligned}$$

где

$$\sigma_1^{*(k,s)} = \sigma_{11}^{(k,s-3)} + \sigma_{12}^{(k,s-2)}, \sigma_2^{*(k,s)} = \sigma_{22}^{(k,s-3)} + \sigma_{21}^{(k,s-2)}, \sigma_3^{*(k,s)} = \sigma_{33}^{(k,s-4)} + \sigma_{13}^{(k,s-2)}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(k,s)} &= \sum_{i=0}^s \left[\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \sigma_x^{(k,s-i)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,s-i)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s-i)}}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,s-i)}}{\partial \xi} + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{\partial \sigma_y^{(k,s-i)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k,s-i)}}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s-i)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k,s-i)}}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial^2 U^{(k,i)}}{\partial \xi^2} \sigma_x^{(k,s-i)} + \\ &+ \left. \frac{\partial^2 U^{(k,i)}}{\partial \eta^2} \sigma_y^{(k,s-i)} + 2 \frac{\partial^2 U^{(k,i)}}{\partial \xi \partial \eta} \sigma_{xy}^{(k,s-i)} + 2 \frac{\partial^2 U^{(k,i)}}{\partial \xi \partial \zeta} \sigma_{xz}^{(k,s-i)} + 2 \frac{\partial^2 U^{(k,i)}}{\partial \eta \partial \zeta} \sigma_{yz}^{(k,s-i)} \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

(1,2,3:U,V,W:ξ,η,ζ)

$$\sigma_{12}^{(k,s)} = \sum_{i=1}^s \left[\frac{\partial^2 U^{(k,i)}}{\partial \zeta^2} \sigma_z^{(k,s-i)} + \frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \zeta} \frac{\partial \sigma_z^{(k,s-i)}}{\partial \zeta} \right]$$

$$\sigma_{21}^{(k,s)} = \sum_{i=1}^s \left[\frac{\partial^2 V^{(k,i)}}{\partial \zeta^2} \sigma_z^{(k,s-i)} + \frac{\partial V^{(k,i)}}{\partial \zeta} \frac{\partial \sigma_z^{(k,s-i)}}{\partial \zeta} \right] \sigma_{13}^{(k,s)} = \sum_{i=1}^s \left[\frac{\partial^2 W^{(k,i)}}{\partial \zeta^2} \sigma_z^{(k,s-i)} + \frac{\partial W^{(k,i)}}{\partial \zeta} \frac{\partial \sigma_z^{(k,s-i)}}{\partial \zeta} \right]$$

$$U_{\xi}^{(k,s)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \xi} \frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial \xi}, \quad U_{\xi\eta}^{(k,s)} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \xi} \frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial \eta} \quad (U, V, W)$$

$$U_{\eta}^{(k,s)} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^s \frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \eta} \frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial \eta}, \quad U_{\zeta\eta}^{(k,s)} = \sum_{i=0}^s \frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \zeta} \frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial \eta}, \quad (U, V, W)$$

$$U_{\zeta}^{(k,s)} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^s \frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \zeta} \frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial \zeta}, \quad U_{\xi\xi}^{(k,s)} = \sum_{i=0}^s \frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \xi} \frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial \xi} \quad (U, V, W).$$

Решив систему (2.5), получим

$$\sigma_z^{(k,s)} = \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_z^{*(k,s)},$$

$$U^{(k,s)} = u^{(k,s)} + u^{*(k,s)},$$

$$V^{(k,s)} = v^{(k,s)} + u^{*(k,s)},$$

$$W^{(k,s)} = w^{(k,s)} + u^{*(k,s)},$$

$$\sigma_x^{(k,s)} = B_{11}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \xi} + B_{12}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \eta} + B_{16}^{(k)} \left(\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \xi} \right) + a_3^{(k)} \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_x^{*(k,s)},$$

$$\sigma_y^{(k,s)} = B_{12}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \xi} + B_{22}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \eta} + B_{26}^{(k)} \left(\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \xi} \right) + b_3^{(k)} \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_y^{*(k,s)},$$

$$\sigma_{xy}^{(k,s)} = B_{16}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \xi} + B_{26}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \eta} + B_{66}^{(k)} \left(\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \xi} \right) + c_3^{(k)} \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_{xy}^{*(k,s)}, \quad (2.7)$$

$$\sigma_{xz}^{(k,s)} = -[L_{11}(B_{ij}^{(k)})u^{(k,s)} + L_{12}(B_{ij}^{(k)})v^{(k,s)}] \zeta - \left(a_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \xi} + c_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \eta} \right) \zeta + \sigma_{xz0}^{(k,s)} + \sigma_{xz}^{*(k,s)},$$

$$\sigma_{yz}^{(k,s)} = -[L_{12}(B_{ij}^{(k)})u^{(k,s)} + L_{22}(B_{ij}^{(k)})v^{(k,s)}] \zeta - \left(b_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \eta} + c_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \xi} \right) \zeta + \sigma_{yz0}^{(k,s)} + \sigma_{yz}^{*(k,s)}$$

где дифференциальные операторы $L_{ij}(B_{ij}^{(k)})$ определяются по известным формулам [1,9,26]:

$$\begin{aligned}
 L_{11}(B_{ij}^{(k)}) &= B_{11}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2B_{16}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + B_{66}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \\
 L_{22}(B_{ij}^{(k)}) &= B_{22}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2B_{16}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + B_{66}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\
 L_{12}(B_{ij}^{(k)}) &= B_{16}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (B_{12}^{(k)} + B_{66}^{(k)}) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + B_{26}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

а коэффициенты $B_{ij}^{(k)}$ и $a_i^{(k)}, b_i^{(k)}, c_i^{(k)}$ по формулам

$$\begin{aligned}
 B_{11}^{(k)} &= \left(a_{22}^{(k)} a_{66}^{(k)} - (a_{26}^{(k)})^2 \right) / \Omega_k, \quad B_{22}^{(k)} = \left(a_{11}^{(k)} a_{66}^{(k)} - (a_{16}^{(k)})^2 \right) / \Omega_k, \\
 B_{12}^{(k)} &= \left(a_{12}^{(k)} a_{26}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{66}^{(k)} \right) / \Omega_k, \quad B_{16}^{(k)} = \left(a_{12}^{(k)} a_{26}^{(k)} - a_{16}^{(k)} a_{22}^{(k)} \right) / \Omega_k, \\
 B_{26}^{(k)} &= \left(a_{12}^{(k)} a_{16}^{(k)} - a_{26}^{(k)} a_{11}^{(k)} \right) / \Omega_k, \quad B_{66}^{(k)} = \left(a_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} - (a_{12}^{(k)})^2 \right) / \Omega_k
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
 \Omega_k &= \left(a_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} - (a_{12}^{(k)})^2 \right) a_{66}^{(k)} + 2a_{12}^{(k)} a_{16}^{(k)} a_{26}^{(k)} - a_{11}^{(k)} (a_{26}^{(k)})^2 - a_{22}^{(k)} (a_{16}^{(k)})^2 \\
 a_i^{(k)} &= - \left(a_{1i}^{(k)} B_{11}^{(k)} + a_{2i}^{(k)} B_{12}^{(k)} + a_{i6}^{(k)} B_{16}^{(k)} \right) \\
 b_i^{(k)} &= - \left(a_{1i}^{(k)} B_{12}^{(k)} + a_{2i}^{(k)} B_{22}^{(k)} + a_{i6}^{(k)} B_{26}^{(k)} \right) \\
 c_i^{(k)} &= - \left(a_{1i}^{(k)} B_{61}^{(k)} + a_{2i}^{(k)} B_{26}^{(k)} + a_{i6}^{(k)} B_{66}^{(k)} \right) \quad (i=1,2,\dots,6)
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Неизвестные функции интегрирования $\sigma_{xz0}^{(k,s)}, \sigma_{yz0}^{(k,s)}, \sigma_{z0}^{(k,s)}, u^{(k,s)}, v^{(k,s)}, w^{(k,s)}$ будут определены ниже, с помощью условий (1.3) и (1.4).

Величины со звездочками, входящие в формулы (2.7), как обычно, известны для каждого приближения s поскольку выражаются через предыдущие приближения. Сюда же входят члены, обусловленные

геометрически нелинейностью поставленной задачи. Эти величины определяются по формулам:

$$\sigma_z^{*(k,s)} = -\int_0^\zeta \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k,s-2)}}{\partial \eta} + \sigma_3^{*(k,s)} \right) d\zeta ,$$

$$u^{*(k,s)} = \int_0^\zeta \left(a_{15} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{25} \sigma_y^{(k,s-1)} + a_{35} \sigma_z^{(k,s-1)} + a_{45} \sigma_{yz}^{(k,s-2)} + a_{55} \sigma_{xz}^{(k,s-2)} + a_{56} \sigma_{xy}^{(k,s-1)} - \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - U_{\xi\xi}^{(k,s-3)} - V_{\xi\xi}^{(k,s-3)} - W_{\xi\xi}^{(k,s-3)} \right) d\zeta$$

$$v^{*(k,s)} = \int_0^\zeta \left(a_{14} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{24} \sigma_y^{(k,s-1)} + a_{34} \sigma_z^{(k,s-1)} + a_{44} \sigma_{yz}^{(k,s-2)} + a_{45} \sigma_{xz}^{(k,s-2)} + a_{46} \sigma_{xy}^{(k,s-1)} - \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \eta} - U_{\eta\xi}^{(k,s-3)} - V_{\eta\xi}^{(k,s-3)} - W_{\eta\xi}^{(k,s-3)} \right) d\zeta$$

$$w^{*(k,s)} = \int_0^\zeta \left(a_{13} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{23} \sigma_y^{(k,s-1)} + a_{33} \sigma_z^{(k,s-1)} + a_{34} \sigma_{yz}^{(k,s-2)} + a_{35} \sigma_{xz}^{(k,s-2)} + a_{36} \sigma_{xy}^{(k,s-1)} - U_\zeta^{(s-2)} - V_\zeta^{(s-2)} - W_\zeta^{(s-2)} \right) d\zeta ,$$

$$\sigma_x^{*(k,s)} = B_{11}^{(k)} \varepsilon_1^{*(k,s)} + B_{12}^{(k)} \varepsilon_2^{*(k,s)} + B_{16}^{(k)} \omega^{*(k,s)} + a_3^{(k)} \sigma_z^{*(k,s)} + a_4^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-1)} + a_5^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-1)} ,$$

$$\sigma_y^{*(k,s)} = B_{12}^{(k)} \varepsilon_1^{*(k,s)} + B_{22}^{(k)} \varepsilon_2^{*(k,s)} + B_{26}^{(k)} \omega^{*(k,s)} + b_3^{(k)} \sigma_z^{*(k,s)} + b_4^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-1)} + b_5^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-1)} ,$$

$$\sigma_{xy}^{*(k,s)} = B_{16}^{(k)} \varepsilon_1^{*(k,s)} + B_{26}^{(k)} \varepsilon_2^{*(k,s)} + B_{66}^{(k)} \omega^{*(k,s)} + c_3^{(k)} \sigma_z^{*(k,s)} + c_4^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-1)} + c_5^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-1)} ,$$

$$\sigma_{xz}^{*(k,s)} = -\int_0^\zeta \left(\frac{\partial \sigma_x^{*(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{*(k,s)}}{\partial \eta} + \sigma_1^{*(k,s)} \right) d\zeta , \tag{2.11}$$

$$\sigma_{yz}^{*(k,s)} = -\int_0^\zeta \left(\frac{\partial \sigma_y^{*(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{*(k,s)}}{\partial \xi} + \sigma_1^{*(k,s)} \right) d\zeta$$

$$\varepsilon_1^{*(k,s)} = \frac{\partial u^{*(k,s)}}{\partial \xi} + U_{\xi}^{(k,s-3)} + V_{\xi}^{(k,s-3)} + W_{\xi}^{(k,s-3)},$$

$$\varepsilon_2^{*(k,s)} = \frac{\partial v^{*(k,s)}}{\partial \eta} + U_{\eta}^{(k,s-3)} + V_{\eta}^{(k,s-3)} + W_{\eta}^{(k,s-3)},$$

$$\omega^{*(k,s)} = \frac{\partial u^{*(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{*(k,s)}}{\partial \xi} + U_{\xi\eta}^{(k,s-3)} + V_{\xi\eta}^{(k,s-3)} + W_{\xi\eta}^{(k,s-3)}.$$

Предполагается, что $Q^{(k,s-m)} \equiv 0$, если $s < m$.

§3. Общий интеграл внутренней задачи

После того как нашли общее асимптотическое решение геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости анизотропного тела нам остаётся определить неизвестные функции интегрирования.

Для определения неизвестных функций интегрирования $\sigma_{xz0}^{(k,s)}, \sigma_{yz0}^{(k,s)}, \sigma_{z0}^{(k,s)}, u^{(k,s)}, v^{(k,s)}, w^{(k,s)}$ будем использовать решение (2.7), поверхностные условия (1.3) и условия контакта (1.4).

Удовлетворив условиям полного контакта (1.4), получим

$$\begin{aligned} w^{(1,s)} = w^{(2,s)} = w^{(s)}, \quad u^{(1,s)} = u^{(2,s)} = u^{(s)}, \quad v^{(1,s)} = v^{(2,s)} = v^{(s)} \\ \sigma_{z0}^{(1,s)} = \sigma_{z0}^{(2,s)}, \quad \sigma_{xz0}^{(1,s)} = \sigma_{xz0}^{(2,s)}, \quad \sigma_{yz0}^{(1,s)} = \sigma_{yz0}^{(2,s)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

С учетом (3.1) удовлетворив поверхностным условиям (1.3), получим следующую систему дифференциальных уравнений с частными производными относительно неизвестных перемещений $u^{(s)}, v^{(s)}$

$$\begin{aligned} L_{11}(C_{ij})u^{(s)} + L_{12}(C_{ij})v^{(s)} = p_1^{(s)} \\ L_{12}(C_{ij})u^{(s)} + L_{22}(C_{ij})v^{(s)} = p_2^{(s)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Обобщенные нагрузки $p_1^{(s)}$ и $p_2^{(s)}$ определяются по формулам

$$\begin{aligned}
p_1^{(s)} = & -(\sigma_{xz}^{+(s)} - \sigma_{xz}^{-(s)}) - (a_3^{(1)}\zeta_1 - a_3^{(2)}\zeta_2) \left[\frac{\partial \sigma_z^{+(1,s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \xi} \right] - \\
& - (c_3^{(1)}\zeta_1 - c_3^{(2)}\zeta_2) \left[\frac{\partial \sigma_z^{+(1,s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \eta} \right] + \\
& + (\sigma_{xz}^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) - \sigma_{xz}^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_2)), \\
p_2^{(s)} = & -(\sigma_{yz}^{+(s)} - \sigma_{yz}^{-(s)}) - (b_3^{(1)}\zeta_1 - b_3^{(2)}\zeta_2) \left[\frac{\partial \sigma_z^{+(1,s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \eta} \right] - \\
& - (c_3^{(1)}\zeta_1 - c_3^{(2)}\zeta_2) \left[\frac{\partial \sigma_z^{+(1,s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \xi} \right] + \\
& + (\sigma_{yz}^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) - \sigma_{yz}^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_2))
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Неизвестные функции интегрирования $\sigma_{xz0}^{(k,s)}$, $\sigma_{yz0}^{(k,s)}$, $\sigma_{z0}^{(k,s)}$, $w^{(s)}$ определяются по формулам

$$\begin{aligned}
w^{(s)} &= w^{-(s)} - w^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_2), \\
\sigma_{z0}^{(k,s)} &= \sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\sigma_{xz0}^{(1,s)} = \sigma_{xz}^{+(s)}(\xi, \eta) + (L_{11}(B_{ij}^{(1)})u^{(s)} + L_{12}(B_{ij}^{(1)})v^{(s)})\zeta_1 - \sigma_{xz}^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)$$

$$\sigma_{yz0}^{(1,s)} = \sigma_{yz}^{+(s)}(\xi, \eta) + (L_{12}(B_{ij}^{(1)})u^{(s)} + L_{22}(B_{ij}^{(1)})v^{(s)})\zeta_1 - \sigma_{yz}^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)$$

где

$$\sigma_{xz}^{\pm(0)} = \sigma_{xz}^{\pm}, \sigma_{yz}^{\pm(0)} = \sigma_{yz}^{\pm}, \sigma_z^{\pm(0)} = \sigma_z^{\pm}; w^{-(0)} = w^{-};$$

$$\sigma_{xz}^{\pm(s)} = \sigma_{yz}^{\pm(s)} = \sigma_z^{\pm(s)} = 0, w^{-(s)} = 0, s > 0$$

$$\zeta_1 = h_1/h, \zeta_2 = -h_2/h, h = (h_1 + h_2)/2$$

Операторы $L_{ij}(C_{ij}^{(k)})$ определяются по формулам

$$\begin{aligned}
L_{11}(C_{ij}^{(k)}) &= C_{11}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2C_{16}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + C_{66}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\
L_{22}(C_{ij}^{(k)}) &= C_{22}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2C_{26}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + C_{66}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\
L_{12}(C_{ij}^{(k)}) &= C_{16}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (C_{12}^{(k)} + C_{66}^{(k)}) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + C_{26}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Жесткости определяются следующим образом

$$C_{ij}^{(k)} = (-1)^{k+1} B_{ij}^{(k)} \zeta_k, C_{ij} = C_{ij}^{(1)} + C_{ij}^{(2)}, \tag{3.6}$$

Легко убедиться, что при $s = 0$ система уравнений (3.2), как в той же задаче для однослойной пластинки [17,118], совпадает с уравнениями обобщенной плоской задачи, когда имеется плоскость упругой симметрии [80]. Для приближений $s > 0$ меняются лишь правые части уравнений, куда входят коэффициенты, характеризующие общую анизотропию, а также члены, обусловленные геометрически нелинейностью уравнений теории упругости. Вклад последующих приближений будет существенным особенно для материалов обладающих сильной анизотропией и в том случае, когда внешние нагрузки имеют большую изменчивость.

Систему уравнений (3.2) можно свести к решению одного уравнения четвертого порядка. Для этого применим к обеим частям первого уравнения оператор L_{22} , а ко второму $-(-L_{12})$ и сложим, в результате получим уравнение

$$(L_{11}L_{22} - L_{12}^2)u^{(s)} = L_{22}p_1^{(s)} - L_{12}p_2^{(s)} \tag{3.7}$$

или

$$\begin{aligned}
&C_{11}C_{66} \frac{\partial^4 u^{(s)}}{\partial \xi^4} + [(C_{11}C_{22} + C_{66}^2) - (C_{12} + C_{66})^2] \frac{\partial^4 u^{(s)}}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + C_{22}C_{66} \frac{\partial^4 u^{(s)}}{\partial \eta^4} = \\
&= C_{22}^{(k)} \frac{\partial^2 p_1^{(s)}}{\partial \eta^2} + 2C_{26}^{(k)} \frac{\partial^2 p_1^{(s)}}{\partial \xi \partial \eta} + C_{66}^{(k)} \frac{\partial^2 p_1^{(s)}}{\partial \xi^2} - C_{11}^{(k)} \frac{\partial^2 p_2^{(s)}}{\partial \xi^2} - 2C_{16}^{(k)} \frac{\partial^2 p_2^{(s)}}{\partial \xi \partial \eta} - C_{66}^{(k)} \frac{\partial^2 p_2^{(s)}}{\partial \eta^2}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Аналогичное уравнение можно написать для перемещения $v^{(s)}$.

§4. Ортоотропная двухслойная пластинка

Если пластинка состоит из ортоотропных материалов, то все уравнения и расчетные формулы упрощаются. В итоге имеем следующее решение системы (2.5)

$$\begin{aligned}
 \sigma_z^{(k,s)} &= \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_z^{*(k,s)}, \\
 U^{(k,s)} &= u^{(k,s)} + u^{*(k,s)}, \\
 V^{(k,s)} &= v^{(k,s)} + u^{*(k,s)}, \\
 W^{(k,s)} &= w^{(k,s)} + u^{*(k,s)}, \\
 \sigma_x^{(k,s)} &= B_{11}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \xi} + B_{12}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \eta} + a_3^{(k)} \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_x^{*(k,s)}, \\
 \sigma_y^{(k,s)} &= B_{12}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \xi} + B_{22}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \eta} + b_3^{(k)} \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_y^{*(k,s)}, \\
 \sigma_{xy}^{(k,s)} &= B_{66}^{(k)} \left(\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \xi} \right) + \sigma_{xy}^{*(k,s)}, \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

$$\sigma_{xz}^{(k,s)} = -[L_{11}(B_{ij}^{(k)})u^{(k,s)} + L_{12}(B_{ij}^{(k)})v^{(k,s)}]\zeta - \left(a_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \xi} \right) \zeta + \sigma_{xz0}^{(k,s)} + \sigma_{xz}^{*(k,s)},$$

$$\sigma_{yz}^{(k,s)} = -[L_{12}(B_{ij}^{(k)})u^{(k,s)} + L_{22}(B_{ij}^{(k)})v^{(k,s)}]\zeta - \left(b_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \eta} \right) \zeta + \sigma_{yz0}^{(k,s)} + \sigma_{yz}^{*(k,s)}$$

где дифференциальные операторы $L_{ij}(B_{ij}^{(k)})$ определяются по известным формулам

$$L_{11}(B_{ij}^{(k)}) = B_{11}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + B_{66}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2},$$

$$L_{22}(B_{ij}^{(k)}) = B_{22}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + B_{66}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \quad (4.2)$$

$$L_{12}(B_{ij}^{(k)}) = (B_{12}^{(k)} + B_{66}^{(k)}) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}$$

а коэффициенты $B_{ij}^{(k)}$ и $a_i^{(k)}, b_i^{(k)}, c_i^{(k)}$ по формулам

$$B_{11}^{(k)} = \frac{a_{22}^{(k)}}{\Omega_{0k}}, \quad B_{22}^{(k)} = \frac{a_{11}^{(k)}}{\Omega_{0k}}, \quad B_{12}^{(k)} = \frac{a_{12}^{(k)}}{\Omega_{0k}}, \quad B_{66}^{(k)} = \frac{1}{a_{66}^{(k)}} \quad (4.3)$$

$$\Omega_{0k} = a_{22}^{(k)} a_{66}^{(k)} - (a_{12}^{(k)})^2$$

$$a_i^{(k)} = -(a_{1i}^{(k)} B_{11}^{(k)} + a_{2i}^{(k)} B_{12}^{(k)}), \quad b_i^{(k)} = -(a_{1i}^{(k)} B_{12}^{(k)} + a_{2i}^{(k)} B_{22}^{(k)}) \quad (i=1,2,3) \quad (4.4)$$

$$a_i^{(k)} = b_i^{(k)} = 0 \quad (i=4,5,6); \quad c_i^{(k)} = 0 \quad (i=1,2,\dots,6)$$

Операторы $L_{ij}(C_{ij}^{(k)})$ определяются по формулам

$$L_{11}(C_{ij}^{(k)}) = C_{11}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + C_{66}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$L_{22}(C_{ij}^{(k)}) = C_{22}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + C_{66}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \quad (4.5)$$

$$L_{12}(C_{ij}^{(k)}) = (C_{12}^{(k)} + C_{66}^{(k)}) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}$$

Формулы для определения величин со звездочками, входящие в формулы (2.7), также упрощаются:

$$\sigma_z^{*(k,s)} = -\int_0^\zeta \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k,s-2)}}{\partial \eta} + \sigma_3^{*(k,s)} \right) d\xi,$$

$$u^{*(k,s)} = \int_0^\zeta \left(a_{55}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-2)} - \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - U_{\xi\xi}^{(k,s-3)} - V_{\xi\xi}^{(k,s-3)} - W_{\xi\xi}^{(k,s-3)} \right) d\xi$$

$$\begin{aligned}
v^{*(k,s)} &= \int_0^{\zeta} \left(a_{44}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-2)} - \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \eta} - U_{\eta\zeta}^{(k,s-3)} - V_{\eta\zeta}^{(k,s-3)} - W_{\zeta}^{(k,s-3)} \right) d\zeta \\
w^{*(k,s)} &= \int_0^{\zeta} \left(a_{13} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{23} \sigma_y^{(k,s-1)} + a_{33} \sigma_z^{(k,s-1)} - U_{\zeta}^{(s-2)} - V_{\zeta}^{(s-2)} - W_{\zeta}^{(s-2)} \right) d\zeta \\
\sigma_x^{*(k,s)} &= B_{11}^{(k)} \varepsilon_1^{*(k,s)} + B_{12}^{(k)} \varepsilon_2^{*(k,s)} + a_3^{(k)} \sigma_z^{*(k,s)}, \\
\sigma_y^{*(k,s)} &= B_{12}^{(k)} \varepsilon_1^{*(k,s)} + B_{22}^{(k)} \varepsilon_2^{*(k,s)} + b_3^{(k)} \sigma_z^{*(k,s)}, \\
\sigma_{xy}^{*(k,s)} &= B_{66}^{(k)} \omega^{*(k,s)}, \\
\sigma_{xz}^{*(k,s)} &= - \int_0^{\zeta} \left(\frac{\partial \sigma_x^{*(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{*(k,s)}}{\partial \eta} + \sigma_1^{*(k,s)} \right) d\zeta, \\
\sigma_{yz}^{*(k,s)} &= - \int_0^{\zeta} \left(\frac{\partial \sigma_y^{*(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{*(k,s)}}{\partial \xi} + \sigma_1^{*(k,s)} \right) d\zeta \\
\varepsilon_1^{*(k,s)} &= \frac{\partial u^{*(k,s)}}{\partial \xi} + U_{\xi}^{(k,s-3)} + V_{\xi}^{(k,s-3)} + W_{\xi}^{(k,s-3)}, \\
\varepsilon_2^{*(k,s)} &= \frac{\partial v^{*(k,s)}}{\partial \eta} + U_{\eta}^{(k,s-3)} + V_{\eta}^{(k,s-3)} + W_{\eta}^{(k,s-3)}, \\
\omega^{*(k,s)} &= \frac{\partial u^{*(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{*(k,s)}}{\partial \xi} + U_{\xi\eta}^{(k,s-3)} + V_{\xi\eta}^{(k,s-3)} + W_{\xi\eta}^{(k,s-3)}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Упрощаются также формулы обобщенных нагрузок $p_1^{(s)}$ и $p_2^{(s)}$ (3.3). Там необходимо положить $c_3^{(k)} = 0$.

Формулы (2.6), (3.4) и (3.6), а также уравнения (3.2) и (3.7) остаются неизменными.

§5. Частные решения

В качестве иллюстрации приведем решения двух задач для двухслойной пластинки из ортотропных материалов.

Пример 1. Пусть пластинка нагружена только тангенциальными силами

$$\sigma_{xz}^+ = \tau_1 \sin \frac{\pi}{a} x = \tau_1 \sin \frac{\pi l}{a} \xi \quad (5.1)$$

$$\sigma_{yz}^+ = \tau_2 \sin \frac{\pi}{b} y = \tau_2 \sin \frac{\pi l}{b} \eta$$

$$\sigma_{xz}^- = \sigma_{yz}^- = \sigma_z^+ = 0, w^- = 0$$

Граничные условия:

$$u = 0, w = 0 \quad \text{при } x = 0, x = a \quad (5.2)$$

$$v = 0, w = 0 \quad \text{при } y = 0, y = b$$

Тогда из (3.3), с учетом (4.2), при $s = 0$ получим

$$p_1^{(0)} = -\tau_1^{(0)} \sin \frac{\pi}{a} x = -\tau_1^{(0)} \sin \frac{\pi l}{a} \xi \quad (5.3)$$

$$p_2^{(0)} = -\tau_2^{(0)} \sin \frac{\pi}{b} y = -\tau_2^{(0)} \sin \frac{\pi l}{b} \eta$$

где $\tau_1^{(0)} = \tau_1, \tau_2^{(0)} = \tau_2$.

Решение системы (3.2) при $s = 0$ ищем в виде функций

$$u^{(0)} = u_0 \sin \frac{\pi l}{a} \xi \quad (5.4)$$

$$v^{(0)} = v_0 \sin \frac{\pi l}{b} \eta$$

где коэффициенты u_0 и v_0 неизвестные пока постоянные.

Подставив (5.4) в систему (3.2) и приравнявая коэффициенты при $\sin \frac{\pi l}{a} \xi$

и $\sin \frac{\pi l}{b} \eta$, получим систему алгебраических уравнений относительно

неизвестных постоянных u_0 и v_0 , решив которую, получим

$$u_0 = \frac{1}{C_{11}} \left(\frac{a}{\pi l} \right)^2 \tau_1^{(0)}, \quad (5.5)$$

$$v_0 = \frac{1}{C_{22}} \left(\frac{b}{\pi l} \right)^2 \tau_2^{(0)}$$

и, следовательно,

$$u^{(0)} = \frac{1}{C_{11}} \left(\frac{a}{\pi l} \right)^2 \tau_1^{(0)} \sin \frac{\pi l}{a} \xi, \quad (5.6)$$

$$v^{(0)} = \frac{1}{C_{22}} \left(\frac{b}{\pi l} \right)^2 \tau_2^{(0)} \sin \frac{\pi l}{b} \eta$$

Тогда учитывая, что $Q^{*(k,0)} = 0$, в нулевом приближении получим решение

$$\begin{aligned} U^{(k,0)} &= \frac{1}{C_{11}} \left(\frac{a}{\pi l} \right)^2 \tau_1^{(0)} \sin \frac{\pi l}{a} \xi \\ V^{(k,0)} &= \frac{1}{C_{22}} \left(\frac{b}{\pi l} \right)^2 \tau_2^{(0)} \sin \frac{\pi l}{b} \eta \\ W^{(k,0)} &= 0, \sigma_{xy}^{(k,0)} = \sigma_z^{(k,0)} = 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\sigma_x^{(k,0)} = \frac{B_{11}^{(k)}}{C_{11}} \left(\frac{a}{\pi l} \right) \tau_1^{(0)} \cos \frac{\pi l}{a} \xi + \frac{B_{12}^{(k)}}{C_{22}} \left(\frac{b}{\pi l} \right) \tau_2^{(0)} \cos \frac{\pi l}{b} \eta$$

$$\sigma_y^{(k,0)} = \frac{B_{12}^{(k)}}{C_{11}} \left(\frac{a}{\pi l} \right) \tau_1^{(0)} \cos \frac{\pi l}{a} \xi + \frac{B_{22}^{(k)}}{C_{22}} \left(\frac{b}{\pi l} \right) \tau_2^{(0)} \cos \frac{\pi l}{b} \eta$$

$$\sigma_{xz}^{(1,0)} = \sigma_{xz}^+ - L_{11} (B_{ij}^{(1)}) \mu^{(0)} (\zeta - \zeta_1) = \left[1 + \frac{B_{11}^{(1)}}{C_{11}} (\zeta - \zeta_1) \right] \tau_1^{(0)} \sin \frac{\pi l}{a} \xi$$

$$\sigma_{yz}^{(1,0)} = \sigma_{yz}^+ - L_{22} (B_{ij}^{(1)}) \nu^{(0)} (\zeta - \zeta_1) = \left[1 + \frac{B_{22}^{(1)}}{C_{22}} (\zeta - \zeta_1) \right] \tau_2^{(0)} \sin \frac{\pi l}{b} \eta$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(2,0)} &= \sigma_{xz}^{+(s)}(\xi, \eta) - L_{11} (B_{ij}^{(2)}) \mu^{(0)} \zeta + L_{11} (B_{ij}^{(1)}) \mu^{(0)} \zeta_1 = \\ &= \left[1 + \frac{B_{11}^{(2)}}{C_{11}} \zeta - \frac{B_{11}^{(1)}}{C_{11}} \zeta_1 \right] \tau_1^{(0)} \sin \frac{\pi l}{a} \xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^{(2,0)} &= \sigma_{yz}^{+(s)}(\xi, \eta) - L_{22} (B_{ij}^{(2)}) \nu^{(0)} \zeta + L_{22} (B_{ij}^{(1)}) \nu^{(0)} \zeta_1 = \\ &= \left[1 + \frac{B_{22}^{(2)}}{C_{22}} \zeta - \frac{B_{22}^{(1)}}{C_{22}} \zeta_1 \right] \tau_2^{(0)} \sin \frac{\pi l}{b} \eta \end{aligned}$$

Граничные условия (5.2) в нулевом приближении удовлетворены.

При $s=1$ из формул (2.6) и (4.6) следует, что $Q^{*(k,1)} \equiv 0$. Следовательно и $p_1^{(1)} = p_2^{(1)} = 0$. Тогда решение однородной системы (3.2), удовлетворяющее граничным условиям (5.2), тоже равно нулю ($u^{(1)} = v^{(1)} = 0$) и, как следствие, $Q^{(k,1)} \equiv 0$.

При $s=2$ из формул (2.6) получим

$$\sigma_1^{*(k,2)} = \sigma_2^{*(k,2)} = \sigma_3^{*(k,2)} = 0,$$

Из формул (4.6) получим

$$\begin{aligned} \sigma_z^{*(k,2)} &= -f_{1z}^{(k,2)}(\zeta)\tau_1^{(0)} \frac{\pi l}{a} \cos \frac{\pi l}{a} \xi - f_{2z}^{(k,2)}(\zeta)\tau_2^{(0)} \frac{\pi l}{b} \cos \frac{\pi l}{b} \eta \\ u^{*(k,2)} &= -a_{55}^{(k)} f_{1z}^{(k,2)}(\zeta)\tau_1^{(0)} \sin \frac{\pi l}{a} \xi, \\ v^{*(k,2)} &= -a_{44}^{(k)} f_{2z}^{(k,2)}(\zeta)\tau_2^{(0)} \sin \frac{\pi l}{a} \eta \\ w^{*(k,2)} &= 0, \quad \sigma_{xy}^{*(k,2)} = 0 \\ \sigma_x^{*(k,2)} &= \frac{\pi l}{a} (a_{55}^{(k)} B_{11}^{(k)} + a_3^{(k)}) f_{1z}^{(k,2)}(\zeta)\tau_1^{(0)} \cos \frac{\pi l}{a} \xi \\ &\quad + \frac{\pi l}{b} (a_{44}^{(k)} B_{12}^{(k)} + a_3^{(k)}) f_{2z}^{(k,2)}(\zeta)\tau_2^{(0)} \cos \frac{\pi l}{b} \eta \\ \sigma_y^{*(k,2)} &= \frac{\pi l}{a} (a_{55}^{(k)} B_{12}^{(k)} + b_3^{(k)}) f_{1z}^{(k,2)}(\zeta)\tau_1^{(0)} \cos \frac{\pi l}{a} \xi \\ &\quad + \frac{\pi l}{b} (a_{44}^{(k)} B_{22}^{(k)} + b_3^{(k)}) f_{2z}^{(k,2)}(\zeta)\tau_2^{(0)} \cos \frac{\pi l}{b} \eta \\ \sigma_{xz}^{*(k,2)} &= -\left(\frac{\pi l}{a}\right)^2 (a_{55}^{(k)} B_{11}^{(k)} + a_3^{(k)}) f_{1xz}^{(k,2)}(\zeta)\tau_1^{(0)} \sin \frac{\pi l}{a} \xi \\ \sigma_{yz}^{*(k,2)} &= -\left(\frac{\pi l}{b}\right)^2 (a_{44}^{(k)} B_{22}^{(k)} + b_3^{(k)}) f_{2yz}^{(k,2)}(\zeta)\tau_2^{(0)} \sin \frac{\pi l}{b} \eta \end{aligned} \tag{5.8}$$

где

$$f_{1z}^{(1,2)}(\zeta) = \frac{B_{11}^{(1)}}{2C_{11}} \zeta^2 + \left(1 - \frac{B_{11}^{(1)}}{C_{11}} \zeta_1\right) \zeta,$$

$$f_{2z}^{(1,2)}(\zeta) = \frac{B_{22}^{(1)}}{2C_{11}} \zeta^2 + \left(1 - \frac{B_{11}^{(1)}}{C_{11}} \zeta_1\right) \zeta$$

$$f_{1z}^{(2,2)}(\zeta) = \frac{B_{11}^{(2)}}{2C_{11}} \zeta^2 + \left(1 - \frac{B_{11}^{(1)}}{C_{11}} \zeta_1\right) \zeta,$$

$$f_{2z}^{(1,2)}(\zeta) = \frac{B_{22}^{(2)}}{2C_{11}} \zeta^2 + \left(1 - \frac{B_{22}^{(1)}}{C_{11}} \zeta_1\right) \zeta$$

$$f_{1xz}^{(k,2)}(\zeta) = \int_0^\zeta f_{1z}^{(k,2)}(\zeta) d\zeta = \frac{B_{11}^{(k)}}{6C_{11}} \zeta^3 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{B_{11}^{(k)}}{C_{11}} \zeta_1\right) \zeta^2$$

$$f_{1yz}^{(k,2)}(\zeta) = \int_0^\zeta f_{2z}^{(k,2)}(\zeta) d\zeta = \frac{B_{22}^{(k)}}{6C_{11}} \zeta^3 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{B_{22}^{(k)}}{C_{11}} \zeta_1\right) \zeta^2$$

Из (3.3), принимая $s = 2$, получим

$$p_1^{(2)} = -\tau_1^{(2)} \sin \frac{\pi l}{a} \xi \tag{5.9}$$

$$p_2^{(2)} = -\tau_2^{(2)} \sin \frac{\pi l}{b} \eta$$

где

$$\tau_1^{(2)} = -\left(\frac{\pi l}{a}\right)^2 \left[(a_{55}^{(1)} B_{11}^{(1)} + a_3^{(1)}) f_{xz}^{(1,2)}(\zeta_1) - (a_{55}^{(2)} B_{11}^{(2)} + a_3^{(1)}) f_{xz}^{(2,2)}(\zeta_2) \right] \tau_1^{(0)} \tag{5.10}$$

$$\tau_2^{(2)} = -\left(\frac{\pi l}{b}\right)^2 \left[(a_{44}^{(1)} B_{22}^{(1)} + b_3^{(1)}) f_{yz}^{(1,2)}(\zeta_1) - (a_{44}^{(2)} B_{22}^{(2)} + b_3^{(1)}) f_{yz}^{(2,2)}(\zeta_2) \right] \tau_2^{(0)}$$

Решение системы (3.2) при $s = 2$, удовлетворяющее граничным условиям (5.2), будет

$$u^{(2)} = u_2 \sin \frac{\pi l}{a} \xi, \tag{5.11}$$

$$v^{(2)} = v_2 \sin \frac{\pi l}{b} \eta$$

где

$$u_2 = \frac{1}{C_{11}} \left(\frac{a}{\pi l} \right)^2 \tau_1^{(2)}, \quad (5.12)$$

$$v_2 = \frac{1}{C_{22}} \left(\frac{b}{\pi l} \right)^2 \tau_2^{(2)}$$

Остальные величины второго приближения будут определяться по формулам (5.8), необходимо лишь заменить $\tau_1^{(0)}$ и $\tau_2^{(0)}$ на $\tau_1^{(2)}$ и $\tau_2^{(2)}$.

Таким образом при заданных нагрузках эффект обусловленный геометрически нелинейностью исходных уравнений теории упругости при $s = 2$ не проявляется.

Рассмотрим следующее приближение. При $s = 3$ из формул (2.6) будем иметь

$$\sigma_{12}^{(k,1)} = \sigma_{21}^{(k,1)} = \sigma_{13}^{(k,1)} = 0,$$

$$\sigma_{11}^{(k,0)} = -\frac{B_{11}^{(k)}}{C_{11}^2} \frac{a}{\pi l} \tau_1^2 \sin \frac{\pi l}{a} \xi \cos \frac{\pi l}{a} \xi -$$

$$-\frac{B_{12}^{(k)}}{C_{11} C_{22}} \frac{b}{\pi l} \tau_1 \tau_2 \sin \frac{\pi l}{a} \xi \cos \frac{\pi l}{b} \eta$$

$$\sigma_{22}^{(k,0)} = -\frac{B_{22}^{(k)}}{C_{11}^2} \frac{b}{\pi l} \tau_2^2 \sin \frac{\pi l}{b} \eta \cos \frac{\pi l}{b} \eta -$$

$$-\frac{B_{12}^{(k)}}{C_{11} C_{22}} \frac{a}{\pi l} \tau_1 \tau_2 \sin \frac{\pi l}{b} \eta \cos \frac{\pi l}{a} \xi$$

$$U_{\xi}^{(k,0)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U^{(k,0)}}{\partial \xi} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{C_{11}^2} \left(\frac{a}{\pi l} \right)^2 (\tau_1^{(0)})^2 \cos^2 \frac{\pi l}{a} \xi$$

$$V_{\eta}^{(k,0)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V^{(k,0)}}{\partial \eta} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{C_{22}^2} \left(\frac{b}{\pi l} \right)^2 (\tau_2^{(0)})^2 \cos^2 \frac{\pi l}{b} \eta$$

$$U_{\eta}^{(k,0)} = U_{\zeta}^{(k,0)} = V_{\xi}^{(k,0)} = V_{\zeta}^{(k,0)} = W_{\xi}^{(k,0)} = W_{\eta}^{(k,0)} = W_{\zeta}^{(k,0)} = 0$$

$$U_{\xi\eta}^{(k,0)} = U_{\xi\zeta}^{(k,0)} = U_{\eta\zeta}^{(k,0)} = 0 \quad (U; V; W)$$

Следовательно

$$\sigma_1^{*(k,1)} = \sigma_{11}^{(k,0)}, \quad \sigma_2^{*(k,1)} = \sigma_{22}^{(k,0)}, \quad \sigma_3^{*(k,1)} = 0$$

$$\begin{aligned}
\sigma_z^{*(k,3)} &= -\int_0^\zeta \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k,1)}}{\partial \eta} + \sigma_3^{*(k,3)} \right) d\zeta = 0 \\
u^{*(k,3)} &= \int_0^\zeta \left(a_{55} \sigma_{xz}^{(k,1)} - \frac{\partial W^{(k,2)}}{\partial \xi} \right) d\zeta = 0 \\
v^{*(k,3)} &= \int_0^\zeta \left(a_{44} \sigma_{yz}^{(k,1)} - \frac{\partial W^{(k,2)}}{\partial \eta} \right) d\zeta = 0
\end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}
w^{*(k,3)} &= \int_0^\zeta \left(a_{13} \sigma_x^{(k,2)} + a_{23} \sigma_y^{(k,2)} + a_{33} \sigma_z^{(k,2)} \right) d\zeta = \\
&= a_{13}^{(k)} \left[\frac{\pi l}{a} \left(a_{55}^{(k)} B_{11}^{(k)} + a_3^{(k)} \right) f_{1z}^{(k,3)}(\zeta) \tau_1^{(0)} \cos \frac{\pi l}{a} \xi + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\pi l}{b} \left(a_{44}^{(k)} B_{12}^{(k)} + a_3^{(k)} \right) f_{2z}^{(k,3)}(\zeta) \tau_2^{(0)} \cos \frac{\pi l}{b} \eta \right] \\
&+ a_{23}^{(k)} \left[\frac{\pi l}{b} \left(a_{55}^{(k)} B_{11}^{(k)} + b_3^{(k)} \right) f_{1z}^{(k,3)}(\zeta) \tau_1^{(0)} \cos \frac{\pi l}{a} \xi + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\pi l}{b} \left(a_{44}^{(k)} B_{12}^{(k)} + a_3^{(k)} \right) f_{2z}^{(k,3)}(\zeta) \tau_2^{(0)} \cos \frac{\pi l}{b} \eta \right]
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
f_{1z}^{(k,3)}(\zeta) &= \int_0^\zeta f_{1z}^{(k,2)}(\zeta) d\zeta = \frac{B_{11}^{(k)}}{6C_{11}} \zeta^3 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{B_{11}^{(k)}}{C_{11}} \zeta_1 \right) \zeta^2 \\
f_{2z}^{(k,3)}(\zeta) &= \int_0^\zeta f_{2z}^{(k,2)}(\zeta) d\zeta = \frac{B_{22}^{(k)}}{6C_{11}} \zeta^3 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{B_{22}^{(k)}}{C_{11}} \zeta_1 \right) \zeta^2 \\
\sigma_x^{*(k,3)} &= B_{11}^{(k)} \varepsilon_1^{*(k,3)} + B_{12}^{(k)} \varepsilon_2^{*(k,3)} + a_3 \sigma_z^{*(k,3)} = B_{11}^{(k)} U_\xi^{(k,0)} + B_{12}^{(k)} V_\eta^{(k,0)} = \\
&= \frac{1}{2} \frac{B_{11}^{(k)}}{C_{11}^2} \left(\frac{a}{\pi l} \right)^2 \left(\tau_1^{(0)} \right)^2 \cos^2 \frac{\pi l}{a} \xi + \frac{1}{2} \frac{B_{12}^{(k)}}{C_{22}^2} \left(\frac{b}{\pi l} \right)^2 \left(\tau_2^{(0)} \right)^2 \cos^2 \frac{\pi l}{b} \eta , \\
\sigma_y^{*(k,3)} &= B_{12}^{(k)} \varepsilon_1^{*(k,3)} + B_{22}^{(k)} \varepsilon_2^{*(k,3)} + b_3 \sigma_z^{*(k,3)} = B_{12}^{(k)} U_\xi^{(k,0)} + B_{22}^{(k)} V_\eta^{(k,0)} = \\
&= \frac{1}{2} \frac{B_{12}^{(k)}}{C_{11}^2} \left(\frac{a}{\pi l} \right)^2 \left(\tau_1^{(0)} \right)^2 \cos^2 \frac{\pi l}{a} \xi + \frac{1}{2} \frac{B_{22}^{(k)}}{C_{22}^2} \left(\frac{b}{\pi l} \right)^2 \left(\tau_2^{(0)} \right)^2 \cos^2 \frac{\pi l}{b} \eta ,
\end{aligned}$$

$$\sigma_{xy}^{*(k,3)} = B_{66} \omega^{*(k,3)} = 0, \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{*(k,3)} &= -\int_0^{\zeta} \left(\frac{\partial \sigma_x^{*(k,3)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{*(k,3)}}{\partial \eta} + \sigma_1^{*(k,3)} \right) d\zeta = \\ &= 2 \frac{B_{11}^{(k)}}{C_{11}^2} \left(\frac{a}{\pi l} \right) \left(\tau_1^{(0)} \right)^2 \zeta \cos \frac{\pi l}{a} \xi \sin \frac{\pi l}{a} \xi - \frac{B_{12}^{(k)}}{C_{11} C_{22}} \frac{b}{\pi l} \tau_1 \tau_2 \zeta \sin \frac{\pi l}{a} \xi \cos \frac{\pi l}{b} \eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^{*(k,s)} &= -\int_0^{\zeta} \left(\frac{\partial \sigma_y^{*(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{*(k,s)}}{\partial \xi} + \sigma_1^{*(k,s)} \right) d\zeta = \\ &= \frac{1}{2} \frac{B_{12}^{(k)}}{C_{11}^2} \left(\frac{a}{\pi l} \right)^2 \left(\tau_1^{(0)} \right)^2 \zeta \cos^2 \frac{\pi l}{a} \xi + \frac{1}{2} \frac{B_{22}^{(k)}}{C_{22}^2} \left(\frac{b}{\pi l} \right)^2 \left(\tau_2^{(0)} \right)^2 \zeta \cos^2 \frac{\pi l}{b} \eta \end{aligned}$$

Из формул (3.3) с учетом (3.6) и (5.14) получим

$$\begin{aligned} p_1^{(3)} &= \frac{2}{C_{11}^2} \left(\frac{a}{\pi l} \right) \left(\tau_1^{(0)} \right)^2 \left(C_{11}^{(1)} \zeta_1 + C_{11}^{(2)} \zeta_2 \right) \cos \frac{\pi l}{a} \xi \sin \frac{\pi l}{a} \xi - \\ &- \frac{1}{C_{11} C_{22}} \frac{b}{\pi l} \tau_1 \tau_2 \left(C_{12}^{(1)} \zeta_1 + C_{12}^{(2)} \zeta_2 \right) \sin \frac{\pi l}{a} \xi \cos \frac{\pi l}{b} \eta = \\ &= \frac{2}{C_{11}} \left(\frac{a}{\pi l} \right) \left(\tau_1^{(0)} \right)^2 \cos \frac{\pi l}{a} \xi \sin \frac{\pi l}{a} \xi - \frac{C_{12}}{C_{11} C_{22}} \frac{b}{\pi l} \tau_1 \tau_2 \sin \frac{\pi l}{a} \xi \cos \frac{\pi l}{b} \eta \end{aligned} \quad (5.15)$$

Аналогично пишется формула для $p_2^{(3)}$.

Пример 2. Пусть пластинка нагружена только тангенциальными силами

$$\sigma_{xz}^+ = \tau_1 \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \quad (5.16)$$

$$\sigma_{yz}^+ = \tau_2 \cos \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{b} y$$

$$\sigma_{xz}^- = \sigma_{yz}^- = \sigma_z^+ = 0, \quad w^- = 0.$$

В формулах (5.16) вводя безразмерные переменные $\xi = x/l, \eta = y/l$, получим

$$\sigma_{xz}^+ = \tau_1 \sin \frac{\pi d}{a} \xi \sin \frac{\pi d}{b} \eta \quad (5.17)$$

$$\sigma_{yz}^+ = \tau_2 \cos \frac{\pi d}{a} \xi \cos \frac{\pi d}{b} \eta$$

Тогда из (3.3) с учетом (5.16) при $s = 0$ получим

$$p_1^{(0)} = -\tau_1 \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \quad (5.18)$$

$$p_2^{(0)} = -\tau_2 \cos \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{b} y$$

Решение системы (2.3) ищется в виде функций

$$u^{(s)} = u_s \sin \frac{\pi d}{a} \xi \sin \frac{\pi d}{b} \eta \quad (5.19)$$

$$v^{(s)} = v_s \cos \frac{\pi d}{a} \xi \cos \frac{\pi d}{b} \eta$$

где коэффициенты u_s и v_s неизвестные пока постоянные.

Подставив (5.19) в систему (2.3) и приравнявая коэффициенты при $\sin \frac{\pi d}{a} \xi \sin \frac{\pi d}{b} \eta$ и $\cos \frac{\pi d}{a} \xi \cos \frac{\pi d}{b} \eta$, в нулевом приближении получим следующую систему алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных u_0 и v_0

$$-(C_{11}b^2 + C_{66}a^2)u_0 + ab(C_{12} + C_{66})v_0 = -\left(\frac{ab}{\pi d}\right)\tau_1 \quad (5.20)$$

$$ab(C_{12} + C_{66})u_0 - (C_{22}a^2 + C_{66}b^2)v_0 = -\left(\frac{ab}{\pi d}\right)\tau_2$$

Решение системы (5.20) имеет вид

$$u_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad v_0 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \left[(C_{11}b^2 + C_{66}a^2)(C_{22}a^2 + C_{66}b^2) - a^2b^2(C_{12} + C_{66})^2 \right]$$

$$\Delta_1 = \left(\frac{ab}{\pi d}\right) \left[(C_{22}a^2 + C_{66}b^2)\tau_1 + ab(C_{12} + C_{66})\tau_2 \right] \quad (5.21)$$

$$\Delta_2 = \left(\frac{ab}{\pi l} \right) \left[(C_{11}b^2 + C_{66}a^2)\tau_2 + ab(C_{12} + C_{66})\tau_1 \right]$$

Если ограничиться нулевым приближением, то будем иметь

$$U^{(k,0)} = \frac{\Delta_1}{\Delta} \sin \frac{\pi l}{a} \xi \sin \frac{\pi l}{b} \eta$$

$$V^{(k,0)} = \frac{\Delta_2}{\Delta} \cos \frac{\pi l}{a} \xi \cos \frac{\pi l}{b} \eta$$

$$W^{(k,0)} = 0$$

$$\sigma_z^{(k,0)} = 0$$

$$\sigma_x^{(k,0)} = \frac{2\pi l}{ab} \left(\frac{\Delta_1}{\Delta} bB_{11}^{(k)} - \frac{\Delta_2}{\Delta} aB_{12}^{(k)} \right) \cos \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta$$

$$\sigma_y^{(k,0)} = \frac{2\pi l}{ab} \left(\frac{\Delta_1}{\Delta} bB_{12}^{(k)} - \frac{\Delta_2}{\Delta} aB_{22}^{(k)} \right) \cos \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta$$

$$\sigma_{xy}^{(k,0)} = B_{66}^{(k)} \frac{2\pi l}{ab} \left(a \frac{\Delta_1}{\Delta} - b \frac{\Delta_2}{\Delta} \right) \sin \frac{2\pi l}{a} \xi \cos \frac{2\pi l}{b} \eta$$

(5.22)

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(1,0)} = \sigma_{xz}^- + \frac{1}{\Delta} \left(L_{11} \left(B_{ij}^{(1)} \right) \chi_1 \Delta_1 \cos \frac{2\pi l}{a} \xi \cos \frac{2\pi l}{b} \eta + \right. \\ \left. + L_{12} \left(B_{ij}^{(1)} \right) \chi_2 \Delta_2 \sin \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta \right) (\zeta - \zeta_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(2,0)} = \sigma_{xz}^- - \frac{1}{\Delta} \left(L_{11} \left(B_{ij}^{(2)} \right) \chi_1 \Delta_1 \cos \frac{2\pi l}{a} \xi \cos \frac{2\pi l}{b} \eta + \right. \\ \left. + L_{12} \left(B_{ij}^{(2)} \right) \chi_2 \Delta_2 \sin \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta \right) (\zeta - \zeta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^{(1,0)} = \sigma_{yz}^- + \frac{1}{\Delta} \left(L_{12} \left(B_{ij}^{(1)} \right) \chi_1 \Delta_1 \cos \frac{2\pi l}{a} \xi \cos \frac{2\pi l}{b} \eta + \right. \\ \left. + L_{22} \left(B_{ij}^{(1)} \right) \chi_2 \Delta_2 \sin \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta \right) (\zeta - \zeta_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^{(2,0)} = \sigma_{yz}^- - \frac{1}{\Delta} \left(L_{12} \left(B_{ij}^{(2)} \right) \chi_1 \Delta_1 \cos \frac{2\pi l}{a} \xi \cos \frac{2\pi l}{b} \eta + \right. \\ \left. + L_{22} \left(B_{ij}^{(2)} \right) \chi_2 \Delta_2 \sin \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta \right) (\zeta - \zeta_2) \end{aligned}$$

Последующие приближения вычисляются аналогичным образом.

При заданных нагрузках эффект обусловленный геометрически нелинейностью исходных уравнений теории упругости также проявляется начиная с приближения $s = 3$.

ГЛАВА III
О ДВУХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЯХ ДВУХСЛОЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ
ПЛАСТИНКИ НА ОСНОВЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ НЕПОЛНОМ КОНТАКТЕ
МЕЖДУ СЛОЯМИ

Найдена асимптотика и из геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости выведены линейные двухмерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчета двухслойной анизотропной пластинки, на верхней лицевой плоскости которой заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, а на нижней – смешанные условия теории упругости. На плоскости раздела слоев задан закон распределения разности (скачка) тангенциальных перемещений или закон нелинейного трения или закон сухого трения Кулона [106-108].

Построено решение внутренней задачи и показано, что когда на плоскости раздела слоев задан закон распределения разности тангенциальных перемещений, то это приводит к повышению порядка разрешающих дифференциальных уравнений. Также показано, что члены, обусловленные геометрически нелинейностью исходных уравнений, проявляются в последующих приближениях и будут существенными особенно для материалов обладающих сильной анизотропией и в случае, когда внешние нагрузки имеют большую изменчивость.

§1. Постановка задач и исходные уравнения

Рассмотрим тонкую двухслойную пластинку $\Omega = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h_2 \leq z \leq h_1\}$, где a длина, b ширина, составленную из однородных анизотропных материалов. Слои имеют различные толщины h_k , коэффициенты упругости $a_{ij}^{(k)}$, k – номер слоя и $k=1,2$. Общая толщина полосы $-2h$. Плоскость отсчета Oxy совпадает с плоскостью раздела слоев, которая параллельна лицевым плоскостям пластинки (рис. 2). Условия на лицевых плоскостях задаются формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{xz}^+(x, y), \sigma_{yz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{yz}^+(x, y), \sigma_z = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_z^+(x, y), \quad z = h_1 \\ \sigma_{xz} &= \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{xz}^-(x, y), \sigma_{yz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{yz}^-(x, y), w = \left(\frac{h}{l}\right)^3 w^-(x, y), \quad z = -h_2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

На плоскости раздела слоев $z=0$ заданы одно из следующих условий неполного контакта.

Задача 1. На плоскости раздела слоев задан закон распределения разности (скачка) тангенциальных перемещений [106].

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(1)} &= \sigma_{xz}^{(2)}, \quad \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, \quad \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)}, \quad w^{(1)} = w^{(2)} \\ u^{(2)} &= u^{(1)} + f_1(x, y), \quad v^{(2)} = v^{(1)} + f_2(x, y), \end{aligned} \quad (1.2)$$

Задача 2. На плоскости раздела слоев задан закон распределения тангенциальных напряжений [107,108].

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(1)} &= \sigma_z^{(2)}, \quad w^{(1)} = w^{(2)}, \\ \sigma_{xz}^{(1)} &= \sigma_{xz}^{(2)} = f_1(x, y), \quad \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)} = f_2(x, y) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Требуется найти решение геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости анизотропного тела (уравнения равновесия (1.1) и закон Гука (1.2) главы 2) при граничных условиях (1.1),

условиях неполного контакта слоев (1.2) или (1.3) и условиях на торцах пластинки $x = 0, a$ и $y = 0, b$, которые пока не конкретизируются.

§2. Выбор асимптотики и вывод двумерных уравнений

Для решения поставленных задач в трехмерных уравнениях геометрически нелинейной теории упругости снова перейдем к безразмерным переменным $\xi = x/l, \eta = y/l, \zeta = z/h$ и безразмерным перемещениям $U^{(k)} = u^{(k)}/l, V^{(k)} = v^{(k)}/l, W^{(k)} = w^{(k)}/l$, где l – характерный тангенциальный размер пластинки ($h \ll l$).

Как в смешанной задаче анизотропной двухслойной пластинки при полном контакте слоев, решение вновь полученных уравнений ищется в виде суммы

$$Q^{(k)} = \varepsilon^{q_k} \sum_{s=0}^S \varepsilon^s Q^{(k,s)}, \quad (2.1)$$

где целое число q_k подбирается так, чтобы получилась непротиворечивая система для определения всех искомым величин $Q^{(k)}(\xi, \eta, \zeta)$. Они совпадают с значениями (2.4) главы 2 и равны

$$q_k = 3 \text{ для } \sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_z^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}, U^{(k)}, V^{(k)}, W^{(k)} \quad (2.2)$$

$$q_k = 2 \text{ для } \sigma_{xz}^{(k)}, \sigma_{yz}^{(k)}$$

Эта асимптотика, по сути, не отличается от той, что применялась для решения той же задачи в линейной теории упругости [17]. В нелинейной задаче, чтобы получить итерационный процесс, асимптотический ряд (2.1) необходимо начинать с положительных степеней малого параметра [22,118]. Поэтому, было принято $q = q_0 + 4$, где q_0 – значение асимптотики, соответствующее задаче в линейной теории упругости [106].

Подставив (2.1), с учетом (2.2), в преобразованные, введением безразмерных координат и безразмерных компонент вектора перемещения, нелинейные уравнения теории упругости анизотропного тела, для определения $Q^{(k)}(\xi, \eta, \zeta)$ получим систему (2.5) главы 2, решив которую, получим

$$\sigma_z^{(k,s)} = \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_z^{*(k,s)},$$

$$U^{(k,s)} = u^{(k,s)} + u^{*(k,s)},$$

$$V^{(k,s)} = v^{(k,s)} + v^{*(k,s)},$$

$$W^{(k,s)} = w^{(k,s)} + w^{*(k,s)},$$

$$\sigma_x^{(k,s)} = B_{11}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \xi} + B_{12}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \eta} + B_{16}^{(k)} \left(\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \xi} \right) + a_3^{(k)} \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_x^{*(k,s)},$$

$$\sigma_y^{(k,s)} = B_{12}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \xi} + B_{22}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \eta} + B_{26}^{(k)} \left(\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \xi} \right) + b_3^{(k)} \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_y^{*(k,s)},$$

$$\sigma_{xy}^{(k,s)} = B_{16}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \xi} + B_{26}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \eta} + B_{66}^{(k)} \left(\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \xi} \right) + c_3^{(k)} \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_{xy}^{*(k,s)} \quad (2.3)$$

$$\sigma_{xz}^{(k,s)} = - \left[L_{11} \left(B_{ij}^{(k)} \right) u^{(k,s)} + L_{12} \left(B_{ij}^{(k)} \right) v^{(k,s)} \right] \zeta - \left(a_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \xi} + c_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \eta} \right) \zeta + \sigma_{xz0}^{(k,s)} + \sigma_{xz}^{*(k,s)}$$

$$\sigma_{yz}^{(k,s)} = - \left[L_{12} \left(B_{ij}^{(k)} \right) u^{(k,s)} + L_{22} \left(B_{ij}^{(k)} \right) v^{(k,s)} \right] \zeta - \left(b_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \eta} + c_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \xi} \right) \zeta + \sigma_{yz0}^{(k,s)} + \sigma_{yz}^{*(k,s)}$$

где дифференциальные операторы $L_{11}(B_{ij}^{(k)})$, коэффициенты $B_{ij}^{(k)}$ и $a_i^{(k)}, b_i^{(k)}, c_i^{(k)}$ определяются по формулам (2.9), (2.10) главы 2.

Неизвестные функции интегрирования $\sigma_{xz0}^{(k,s)}, \sigma_{yz0}^{(k,s)}, \sigma_{z0}^{(k,s)}, u_0^{(k,s)}, v_0^{(k,s)}, w_0^{(k,s)}$ будут определены с помощью поверхностных условий (1.1) и условий контакта (1.2) или (1.3).

Величины со звездочками, входящие в формулы (2.3), как обычно, известны для каждого приближения \mathbf{s} , поскольку выражаются через предыдущие приближения. Сюда же входят члены, обусловленные

геометрически нелинейностью поставленной задачи. Эти величины определяются по формулам (2.6) главы 2.

§3. Общий интеграл внутренней задачи, когда на плоскости раздела слоев задан закон распределения разности тангенциальных перемещений

Для решения краевой задачи (1.1) и (1.2) (задача 1) будем использовать общее решение (2.3).

Входящие в решение (2.3) неизвестные функции интегрирования $\sigma_{xz0}^{(k,s)}, \sigma_{yz0}^{(k,s)}, \sigma_{z0}^{(2,s)}, u_0^{(k,s)}, v_0^{(k,s)}, w_0^{(k,s)}$ определяются из условий (1.1) и (1.2).

Удовлетворив условиям неполного контакта (1.2), получим [106]

$$\begin{aligned} \sigma_{z0}^{(1,s)} &= \sigma_{z0}^{(2,s)}, \quad \sigma_{xz0}^{(1,s)} = \sigma_{xz0}^{(2,s)}, \quad \sigma_{yz0}^{(1,s)} = \sigma_{yz0}^{(2,s)} \\ w^{(1,s)} &= w^{(2,s)} = w^{(s)}, \\ u^{(2,s)} &= u^{(1,s)} + f_1^{(s)}(\xi, \eta), \quad v^{(2,s)} = v^{(1,s)} + f_2^{(s)}(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$f_k^{(0)}(\xi, \eta) = f_k(x/l, y/l), \quad f_k^{(s)}(\xi, \eta) = 0 \quad s > 0, \quad k = 1, 2.$$

С учетом (3.1) удовлетворив поверхностным условиям (1.1), получим следующую систему дифференциальных уравнений с частными производными относительно неизвестных перемещений $u^{(s)}, v^{(s)}$

$$\begin{aligned} L_{11}(C_{ij})u^{(1,s)} + L_{12}(C_{ij})v^{(1,s)} + L_{11}(C_{ij}^{(2)})f_1^{(s)}(\xi, \eta) + L_{12}(C_{ij}^{(2)})f_2^{(s)}(\xi, \eta) &= p_1^{(s)} \\ L_{12}(C_{ij})u^{(1,s)} + L_{22}(C_{ij})v^{(1,s)} + L_{12}(C_{ij}^{(2)})f_1^{(s)}(\xi, \eta) + L_{22}(C_{ij}^{(2)})f_2^{(s)}(\xi, \eta) &= p_2^{(s)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Обобщенные нагрузки $p_1^{(s)}$ и $p_2^{(s)}$ определяются по формулам

$$\begin{aligned}
p_1^{(s)} = & -(\sigma_{xz}^{+(s)} - \sigma_{xz}^{-(s)}) - (a_3^{(1)}\zeta_1 - a_3^{(2)}\zeta_2) \left[\frac{\partial \sigma_z^{+(1,s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \xi} \right] - \\
& - (c_3^{(1)}\zeta_1 - c_3^{(2)}\zeta_2) \left[\frac{\partial \sigma_z^{+(1,s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \eta} \right] + \\
& + (\sigma_{xz}^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) - \sigma_{xz}^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_2)),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
p_2^{(s)} = & -(\sigma_{yz}^{+(s)} - \sigma_{yz}^{-(s)}) - (b_3^{(1)}\zeta_1 - b_3^{(2)}\zeta_2) \left[\frac{\partial \sigma_z^{+(1,s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \eta} \right] - \\
& - (c_3^{(1)}\zeta_1 - c_3^{(2)}\zeta_2) \left[\frac{\partial \sigma_z^{+(1,s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \xi} \right] + \\
& + (\sigma_{yz}^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) - \sigma_{yz}^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_2)),
\end{aligned}$$

Система уравнений (3.2) при $f_1(\xi, \eta) = f_2(\xi, \eta) = 0$ совпадает с соответствующей системой двухслойной пластинки с поверхностными условиями (1.1) при полном контакте между слоями (система уравнений (3.2) главы 2).

Удовлетворив поверхностным условиям (1.1) также получим формулы для определения неизвестных функций интегрирования $\sigma_{xz0}^{(k,s)}$, $\sigma_{yz0}^{(k,s)}$, $\sigma_{z0}^{(k,s)}$, $w^{(s)}$:

$$w^{(s)} = \frac{1}{l} w^{-(s)} - w^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_2),$$

$$\sigma_{z0}^{(k,s)} = \sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz0}^{(1,s)} = & \sigma_{xz}^{+(s)}(\xi, \eta) - \sigma_{xz}^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + (L_{11}(C_{ij}^{(1)}) u^{(1,s)} + L_{12}(C_{ij}^{(1)}) v^{(1,s)}) + \\
& + a_3^{(1)}\zeta_1 \left[\frac{\partial \sigma_z^{+(1,s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \xi} \right] + \\
& + c_3^{(1)}\zeta_1 \left[\frac{\partial \sigma_z^{+(1,s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \eta} \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{yz0}^{(1,s)} &= \sigma_{yz}^{+(s)}(\xi, \eta) - \sigma_{yz}^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + \left(L_{22}(C_{ij}^{(1)}) v^{(1,s)} + L_{12}(C_{ij}^{(1)}) u^{(1,s)} \right) + \\
&+ b_3^{(1)} \zeta_1 \left[\frac{\partial \sigma_z^{+(1,s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \eta} \right] + \\
&+ c_3^{(1)} \zeta_1 \left[\frac{\partial \sigma_z^{+(1,s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \xi} \right]
\end{aligned} \tag{3.4}$$

где

$$\sigma_{xz}^{\pm(0)} = \sigma_{xz}^{\pm}, \sigma_{yz}^{\pm(0)} = \sigma_{yz}^{\pm}, \sigma_z^{\pm(0)} = \sigma_z^{\pm}; w^{-(0)} = w^{-};$$

$$\sigma_{xz}^{\pm(s)} = \sigma_{yz}^{\pm(s)} = \sigma_z^{\pm(s)} = 0, w^{-(s)} = 0, s > 0$$

$$\zeta_1 = h_1/h, \zeta_2 = -h_2/h, h = (h_1 + h_2)/2$$

Операторы $L_{ij}(C_{ij}^{(k)})$ определяются по формулам

$$\begin{aligned}
L_{11}(C_{ij}^{(k)}) &= C_{11}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2C_{16}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + C_{66}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\
L_{22}(C_{ij}^{(k)}) &= C_{11}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2C_{26}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + C_{66}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$L_{12}(C_{ij}^{(k)}) = C_{16}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (C_{12}^{(k)} + C_{66}^{(k)}) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + C_{26}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

В свою очередь жесткости $C_{ij}^{(k)}$ определяются следующим образом

$$C_{ij}^{(k)} = (-1)^{k+1} B_{ij}^{(k)} \zeta_k, C_{ij} = C_{ij}^{(1)} + C_{ij}^{(2)} \tag{3.6}$$

§4. Нежесткий контакт

Остановимся более подробно на модели нежесткого контакта. Суть этой модели состоит в следующем: принимается, что существует тонкий слой толщиной h_0 с исчезающе малой сдвиговой жесткостью G_0 между

контактирующими средами. Отношение $\chi = \lim_{\substack{h_0 \rightarrow 0 \\ G_0 \rightarrow 0}} \frac{h_0}{G_0}$ может принимать любое значение от 0 до ∞ . Предельному случаю $\chi = 0$ соответствует жесткий контакт, другому предельному случаю $\chi \rightarrow \infty$ – скользящий контакт.

Для промежуточного состояния принимаются [29,93]

$$\begin{aligned} u^{(2)} - u^{(1)} = f_1(\xi, \eta) &= \chi_1 \frac{l}{h} \sigma_{xz}^{(1)} \Big|_{z=0}, \\ v^{(2)} - v^{(1)} = f_2(\xi, \eta) &= \chi_2 \frac{l}{h} \sigma_{yz}^{(1)} \Big|_{z=0} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Постоянные χ_1, χ_2 имеют размерность м³/Н и для анизотропных материалов имеют, вообще говоря, разные количественные значения. Для трансверсально-изотропных материалов с плоскостью изотропии $z = const$ и изотропных материалов имеет место соотношение $\chi_1 = \chi_2$.

Остальные условия контакта (1.2) остаются неизменными. Тогда из (3.1) и (4.1) следует

$$f_1^{(s)}(\xi, \eta) = \chi_1 \sigma_{xz0}^{(k,s)}, \quad f_2^{(s)}(\xi, \eta) = \chi_2 \sigma_{yz0}^{(k,s)}. \quad (4.2)$$

Подставив значения $f_1^{(s)}(\xi, \eta)$ и $f_2^{(s)}(\xi, \eta)$ из (4.2) в (3.2) с учетом (3.4), получим систему дифференциальных уравнений с частными производными для определения $u^{(1,s)}$ и $v^{(1,s)}$.

$$\begin{aligned} \bar{L}_{11}(C_{ij})u^{(1,s)} + \bar{L}_{12}(C_{ij})v^{(1,s)} &= \bar{p}_1^{(s)} \\ \bar{L}_{21}(C_{ij})u^{(1,s)} + \bar{L}_{22}(C_{ij})v^{(1,s)} &= \bar{p}_2^{(s)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

где операторы $\bar{L}_{ij}(C_{ij}^{(k)})$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} \bar{L}_{11}(C_{ij}) &= [L_{11}(C_{ij}) + \chi_1 L_{11}(C_{ij}^{(2)})L_{11}(C_{ij}^{(1)}) + \chi_2 L_{12}(C_{ij}^{(2)})L_{12}(C_{ij}^{(1)})] \\ \bar{L}_{12}(C_{ij}) &= [L_{12}(C_{ij}) + \chi_1 L_{11}(C_{ij}^{(2)})L_{12}(C_{ij}^{(1)}) + \chi_2 L_{12}(C_{ij}^{(2)})L_{22}(C_{ij}^{(1)})] \\ \bar{L}_{21}(C_{ij}) &= [L_{21}(C_{ij}) + \chi_1 L_{12}(C_{ij}^{(2)})L_{12}(C_{ij}^{(1)}) + \chi_2 L_{22}(C_{ij}^{(2)})L_{22}(C_{ij}^{(1)})] \end{aligned} \quad (4.4)$$

Обобщенные нагрузки $\bar{p}_1^{(s)}$ и $\bar{p}_2^{(s)}$ определяются по формулам

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_1^{(s)} = & p_1^{(s)} - [\chi_1 L_{11}(C_{ij}^{(2)})\sigma_{xz}^{+(s)}(\xi, \eta) + \chi_2 L_{12}(C_{ij}^{(2)})\sigma_{yz}^{+(s)}(\xi, \eta)] + \\
 & + [\chi_1 L_{11}(C_{ij}^{(1)})\sigma_{xz}^{*(s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + \chi_2 L_{12}(C_{ij}^{(1)})\sigma_{yz}^{*(s)}(\xi, \eta, \zeta_1)] - \\
 & - \chi_1 L_{11}(C_{ij}^{(2)}) \left(a_3^{(1)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + c_3^{(1)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \zeta_1 - \\
 & - \chi_2 L_{12}(C_{ij}^{(2)}) \left(b_3^{(1)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + c_3^{(1)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) \zeta_1 \\
 \bar{p}_2^{(s)} = & p_2^{(s)} - [\chi_2 L_{22}(C_{ij}^{(2)})\sigma_{yz}^{+(s)}(\xi, \eta) + \chi_1 L_{12}(C_{ij}^{(2)})\sigma_{xz}^{+(s)}(\xi, \eta)] + \\
 & + [\chi_2 L_{22}(C_{ij}^{(1)})\sigma_{yz}^{*(s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + \chi_1 L_{12}(C_{ij}^{(1)})\sigma_{xz}^{*(s)}(\xi, \eta, \zeta_1)] - \\
 & - \chi_2 L_{22}(C_{ij}^{(2)}) \left(b_3^{(1)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + c_3^{(1)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) \zeta_1 - \\
 & - \chi_1 L_{12}(C_{ij}^{(2)}) \left(a_3^{(1)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + c_3^{(1)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \zeta_1
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Заметим, что если операторы $L_{ij}(C_{ij})$, $(i, j = 1, 2)$ второго порядка, то операторы $\bar{L}_{ij}(C_{ij})$ имеют четвертый порядок. Таким образом, в отличие случаев полного контакта, контакт (1.2) приводит повышению порядка разрешающих дифференциальных уравнений и, как следствие, увеличению числа произвольных констант в решении внутренней задачи. Значения этих постоянных могут быть определены из граничных условий при $x=0, a$ и $y=0, b$ с привлечением решения пограничного слоя. Для удовлетворения граничных условий можно употреблять приближенные методы, например, метод наименьших квадратов, метод Трефтца и др. [84].

В случае, когда коэффициенты $\chi_1 = \chi_2 = 0$ система уравнений (4.3) совпадает со системой соответствующей той же задаче для двухслойной пластинки при полном контакте слоев [105].

Отметим, что при $s=0$ правые части системы уравнений (4.3), т.е. обобщенные нагрузки $\bar{p}_1^{(0)}$ и $\bar{p}_2^{(0)}$, не содержат члены обусловленные геометрически нелинейностью поставленной задачи. Для приближений $s > 0$ меняются лишь правые части уравнений (4.3), куда входят коэффициенты, характеризующие общую анизотропию, а также члены, обусловленные геометрически нелинейностью исходных уравнений. Как видно из формул (2.6) главы 2 нелинейность, как в случае полного контакта, высказывается начиная с приближения $s \geq 2$. Вклад последующих приближений будет существенным особенно для материалов обладающих сильной анизотропией и в том случае, когда внешние нагрузки имеют большую изменчивость.

Систему уравнений (4.3), как систему уравнений (3.7) главы 2, можно свести к решению одного уравнения восьмого порядка. Для этого применим к обеим частям первого уравнения оператор \bar{L}_{22} , а ко второму $-(\bar{L}_{12})$ и сложим, в результате получим уравнение

$$(\bar{L}_{11}\bar{L}_{22} - \bar{L}_{12}^2)u^{(s)} = \bar{L}_{22}\bar{p}_1^{(s)} - \bar{L}_{12}\bar{p}_2^{(s)} \quad (4.6)$$

§5. Общий интеграл внутренней задачи при заданном на плоскости раздела слоев закон распределения тангенциальных напряжений

Рассмотрим задачу 2, поставленную в параграфе 1. Требуется найти решение геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости анизотропного тела при граничных условиях (1.1) и условиях неполного контакта слоев (1.3) [107,108].

Для решения краевой задачи (1.1) и (1.3) вновь будем использовать общее решение (2.3).

Представив функции $f_k(x, y)$ в виде рядов по степеням малого параметра ε и удовлетворив условиям неполного контакта (1.3), получим

$$\begin{aligned}
w^{(1,s)} &= w^{(2,s)} = w^{(s)}, \quad \sigma_{z0}^{(1,s)} = \sigma_{z0}^{(2,s)}, \\
\sigma_{xz0}^{(1,s)} &= \sigma_{xz0}^{(2,s)} = f_1^{(s)}(\xi, \eta), \\
\sigma_{yz0}^{(1,s)} &= \sigma_{yz0}^{(2,s)} = f_2^{(s)}(\xi, \eta),
\end{aligned} \tag{5.1}$$

$$f_k^{(0)}(\xi, \eta) = f_k(x/l, y/l), \quad f_k^{(s)}(\xi, \eta) = 0, \quad s > 0, \quad k = 1, 2;$$

С учетом (5.1) удовлетворив поверхностным условиям (1.1), получим следующие формулы для определения неизвестных функций интегрирования $\sigma_{z0}^{(k,s)}, w^{(k,s)}$

$$\begin{aligned}
w^{(s)} &= w^{-(s)} - w^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_2), \\
\sigma_{z0}^{(k,s)} &= \sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)
\end{aligned} \tag{5.2}$$

а также систему дифференциальных уравнений с частными производными относительно неизвестных перемещений $u^{(k,s)}, v^{(k,s)}$

$$\begin{aligned}
L_{11}(C_{ij}^{(k)})u^{(k,s)} + L_{12}(C_{ij}^{(k)})v^{(k,s)} - f_1^{(s)}(\xi, \eta) &= p_1^{(k,s)} \\
L_{12}(C_{ij}^{(k)})u^{(k,s)} + L_{22}(C_{ij}^{(k)})v^{(k,s)} - f_2^{(s)}(\xi, \eta) &= p_2^{(k,s)}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Обобщенные нагрузки $p_1^{(k,s)}$ и $p_2^{(k,s)}$ определяются по формулам

$$\begin{aligned}
p_1^{(k,s)} &= -\sigma_{xz}^{\pm(s)}(\xi, \eta) - \sigma_{xz}^{*(k,s)}(\xi, \eta, \zeta_k) - \left(a_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \xi} + c_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \eta} \right) \zeta_k \\
p_2^{(k,s)} &= -\sigma_{yz}^{\pm(s)}(\xi, \eta) - \sigma_{yz}^{*(k,s)}(\xi, \eta, \zeta_k) - \left(b_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \eta} + c_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \xi} \right) \zeta_k
\end{aligned} \tag{5.4}$$

где, как обычно,

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz}^{\pm(0)} &= \sigma_{xz}^{\pm}, \quad \sigma_{yz}^{\pm(0)} = \sigma_{yz}^{\pm}, \quad \sigma_z^{+(0)} = \sigma^+, \quad w^{-(0)} = w^-; \\
\sigma_{xz}^{\pm(s)} &= \sigma_{yz}^{\pm(s)} = \sigma_z^{+(s)} = 0, \quad w^{-(s)} = 0, \quad s > 0 \\
\zeta_1 &= h_1/h, \quad \zeta_2 = -h_2/h, \quad h = (h_1 + h_2)/2
\end{aligned}$$

Операторы $L_{ij}(C_{ij}^{(k)})$ определяются по формулам (3.5). В свою очередь, жесткости $C_{ij}^{(k)}$ определяются по формулам

$$C_{ij}^{(k)} = (-1)^{k+1} \zeta_k B_{ij}^{(k)} \quad (5.5)$$

Система уравнений (5.3) при $s=0$ распадается на две системы относительно $u^{(1,0)}, v^{(1,0)}$ и $u^{(2,0)}, v^{(2,0)}$, которые совпадают с уравнениями обобщенной плоской задачи, теории упругости, когда имеется плоскость упругой симметрии [26,80]. Однако, вместо двух уравнений, здесь имеем *систему из четырёх уравнений*. Для приближений $s > 0$, как в ранее рассмотренных задачах, меняются лишь правые части уравнений, куда входят коэффициенты, характеризующие общую анизотропию, а также члены, обусловленные геометрически нелинейностью уравнений теории упругости.

§6. Взаимодействие слоев по закону сухого трения

Закон сухого трения (трение без смазки) означает, что на контактной поверхности поставлены такие условия, при которых величина касательных напряжений определяются только величиной нормальных напряжений. К простейшим вариантам математического моделирования процесса трения следует отнести однопараметрические законы. Первое соотношение – закон постоянной силы трения, второе – закон трения Кулона. Указанные законы трения исследованы теоретически [23,67] и широко применяются в расчетах.

Закон постоянной силы трения достаточно точно описывает закономерности внешнего трения в зонах высоких нормальных напряжений, но дает значительные погрешности в области с нормальными напряжениями близкими к нулю. Закон трения Кулона применим при малых значениях нормального напряжения (давления) [23,67].

Взаимодействие слоев по закону постоянной силы трения.

Рассмотрим случай, когда упругие слои взаимодействуют по закону постоянной силы трения. Закон постоянной силы трения предполагает, что на контактной поверхности величина касательных напряжений постоянная, т.е. имеется [108].

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)} = \tau_{1s} = const, \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)} = \tau_{2s} = const \quad (6.1)$$

Параметры τ_{ks} ($k=1,2$) можно интерпретировать как предел текучести КОНТАКТНОГО СЛОЯ.

Из (5.1), как следствие, получим

$$f_k^{(s)}(\xi, \eta) = \tau_{ks}^{(s)}, \quad (k=1,2) \quad (6.2)$$

где

$$\tau_{ks}^{(0)} = \tau_{ks}, \tau_{ks}^{(s)} = 0, \quad (k=1,2) \text{ при } s > 0 \quad (6.3)$$

Подставив значения $f_k^{(s)}(\xi, \eta)$ из (6.2), с учетом (6.3), в (5.3), получим новую систему дифференциальных уравнений с частными производными

$$\begin{aligned} L_{11}(C_{ij}^{(k)})u^{(k,s)} + L_{12}(C_{ij}^{(k)})v^{(k,s)} &= \bar{p}_1^{(k,s)} \\ L_{12}(C_{ij}^{(k)})u^{(k,s)} + L_{22}(C_{ij}^{(k)})v^{(k,s)} &= \bar{p}_2^{(k,s)} \end{aligned} \quad (6.4)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{p}_1^{(k,s)} &= p_1^{(k,s)} + \tau_{1s}^{(s)} \\ \bar{p}_2^{(k,s)} &= p_2^{(k,s)} + \tau_{2s}^{(s)} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Взаимодействие слоев по закону сухого трения Кулона.

Рассмотрим случай, когда упругие слои взаимодействуют по закону сухого трения Кулона. Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)} &= \chi_1 \frac{l}{h} \sigma_z(x, y, 0), \\ \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)} &= \chi_2 \frac{l}{h} \sigma_z(x, y, 0) \end{aligned} \quad (6.6)$$

и, как следствие, получим

$$f_k^{(s)}(\xi, \eta) = \chi_k f^{(s)}(\xi, \eta), \quad k=1,2, \quad (6.7)$$

где

$$f^{(s)}(\xi, \eta) = \sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) \quad (6.8)$$

Коэффициенты χ_k постоянные величины. В частности, если χ_1 или χ_2 равны нулю, то это означает, что отсутствует сила трения между слоями по направлению Ox или Oy . Если одновременно χ_1, χ_2 равны нулю, то силы трения отсутствуют по всей плоскости контакта.

Подставив значения $f_k^{(s)}(\xi, \eta)$ из (6.2), с учётом (6.3), в (5.3), снова получим систему дифференциальных уравнений (6.4), где обобщенные

$$\begin{aligned}\bar{p}_1^{(k,s)} &= p_1^{(k,s)} + \chi_k \left(\sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) \right) \\ \bar{p}_2^{(k,s)} &= p_2^{(k,s)} + \chi_k \left(\sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) \right)\end{aligned}\tag{6.9}$$

Заметим, что когда упругие слои взаимодействуют по закону сухого трения Кулона, то при условиях на лицевых плоскостях (1.1), в отличие первой краевой задачи [9], не происходит повышение порядка разрешающих дифференциальных уравнений. Сравнивая систему разрешающих уравнений (6.4), (6.9) с разрешающими уравнениями (3.2) главы 2, заметим, что при $\chi_1 \neq 0, \chi_2 \neq 0$ в правых частях системы (6.4), то есть в формулах (6.9), появилась внешняя нагрузка σ_z^+ .

В случае, когда коэффициенты $\chi_1 = \chi_2 = 0$, в системе уравнений (6.4) меняются правые части, куда уже не входит внешняя нагрузка $\sigma_z^{+(s)}$.

Значения произвольных постоянных, появившихся при интегрировании системы (6.4), могут быть определены из граничных условий при $x=0, a$ и $y=0, b$ с привлечением решения пограничного слоя. Для удовлетворения граничным условиям следует применить приближенные методы.

Отметим, что при $s=0$ правые части системы уравнений (6.4), т.е. обобщенные нагрузки $\bar{p}_1^{(0)}$ и $\bar{p}_2^{(0)}$ не содержат члены, обусловленные геометрически нелинейностью поставленной задачи. Для приближений $s > 0$ меняются лишь правые части уравнений, куда входят коэффициенты, характеризующие общую анизотропию, а также члены, обусловленные

геометрически нелинейностью исходных уравнений. Как видно из формул (2.6) главы 2 нелинейность проявляется начиная с приближения $s \geq 2$. Вклад последующих приближений будет существенным особенно для материалов, обладающих сильной анизотропией и в том случае, когда внешние нагрузки имеют большую изменчивость.

В заключение заметим, что, используя общее решение (2.3), можно решать смешанные краевые задачи для анизотропных многослойных пластин по геометрически нелинейной теории упругости при различных условиях контакта между слоями.

§7. Частные решения

Рассмотрим частные решения задач для двухслойной пластинки из ортотропных материалов при различных условиях неполного контакта между слоями [108].

Пример 1. Пусть двухслойная пластинка нагружена только тангенциальными силами

$$\sigma_{xz}^+ = \tau_1 \sin \frac{\pi}{a} x = \tau_1 \sin \frac{\pi l}{a} \xi \tag{7.1}$$

$$\sigma_{yz}^+ = \tau_2 \sin \frac{\pi}{b} y = \tau_2 \sin \frac{\pi l}{b} \eta$$

$$\sigma_{xz}^- = \sigma_{yz}^- = \sigma_z^+ = 0, w^- = 0$$

Граничные условия:

$$u = 0, w = 0 \quad \text{при } x = 0, x = a \tag{7.2}$$

$$v = 0, w = 0 \quad \text{при } y = 0, y = b$$

Предполагаем, что на плоскости раздела слоев $z = 0$ заданы условия неполного контакта (1.2).

Тогда из (4.5), с учетом (3.4) и (7.1), будем иметь

$$\begin{aligned}\bar{p}_1^{(0)} &= p_1^{(0)} - \left[\chi_1 L_{11} \left(C_{ij}^{(2)} \right) \sigma_{xz}^{+(s)}(\xi, \eta) + \chi_2 L_{12} \left(C_{ij}^{(2)} \right) \sigma_{yz}^{+(s)}(\xi, \eta) \right] = \\ &= -\tau_1 \left(1 + \chi_1 C_{11}^{(2)} \left(\frac{\pi l}{a} \right)^2 \right) \sin \frac{\pi l}{a} \xi\end{aligned}\tag{7.3}$$

$$\begin{aligned}\bar{p}_2^{(s)} &= p_2^{(s)} - \left[\chi_2 L_{22} \left(C_{ij}^{(2)} \right) \sigma_{yz}^{+(s)}(\xi, \eta) + \chi_1 L_{12} \left(C_{ij}^{(2)} \right) \sigma_{xz}^{+(s)}(\xi, \eta) \right] \\ &= -\tau_2 \left(1 + \chi_2 C_{22}^{(2)} \left(\frac{\pi d}{b} \right)^2 \right) \sin \frac{\pi d}{b} \eta\end{aligned}$$

Решение системы (4.3) при $s = 0$ ищем в виде функций

$$u^{(1,0)} = u_0 \sin \frac{\pi l}{a} \xi, \quad v^{(1,0)} = v_0 \sin \frac{\pi d}{b} \eta\tag{7.4}$$

где коэффициенты u_0 и v_0 неизвестные пока постоянные.

Подставив (5.4) в систему (3.2) и приравнявая коэффициенты при $\sin \frac{\pi l}{a} \xi$ и $\sin \frac{\pi d}{b} \eta$, получим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных u_0 и v_0 , решив которую, получим

$$u_0 = u'_0 \tau_1, \quad v_0 = v'_0 \tau_2\tag{7.5}$$

где

$$\begin{aligned}u'_0 &= \frac{\left(1 + \chi_1 C_{11}^{(2)} \left(\frac{\pi l}{a} \right)^2 \right)}{C_{11} \left(\frac{\pi l}{a} \right)^2 + \chi_1 C_{11}^{(1)} C_{11}^{(2)} \left(\frac{\pi l}{a} \right)^4}, \\ v'_0 &= \frac{\left(1 + \chi_2 C_{22}^{(2)} \left(\frac{\pi d}{b} \right)^2 \right)}{C_{22} \left(\frac{\pi d}{b} \right)^2 + \chi_2 C_{22}^{(1)} C_{22}^{(2)} \left(\frac{\pi d}{b} \right)^4}\end{aligned}$$

Для второго слоя будем иметь

$$u^{(2,0)} = u_0'' \tau_1 \sin \frac{\pi l}{a} \xi, \quad v^{(2,0)} = v_0'' \tau_2 \sin \frac{\pi l}{b} \eta \quad (7.6)$$

где

$$u_0'' = u_0' + \chi_1 \left(1 + C_{11}^{(1)} \left(\frac{\pi l}{a} \right)^2 u_0' \right),$$

$$v_0'' = v_0' + \chi_2 \left(1 + C_{22}^{(1)} \left(\frac{\pi l}{b} \right)^2 v_0' \right)$$

Тогда учитывая, что $Q^{*(k,0)} = 0$, в нулевом приближении получим решение

$$U^{(1,0)} = u_0' \tau_1 \sin \frac{\pi l}{a} \xi,$$

$$V^{(1,0)} = v_0' \tau_2 \sin \frac{\pi l}{b} \eta$$

$$U^{(2,0)} = u_0' \tau_1 \sin \frac{\pi l}{a} \xi + \chi_1 \left(1 + C_{11}^{(1)} \left(\frac{\pi l}{a} \right)^2 u_0' \right) \tau_1 \sin \frac{\pi l}{a} \xi$$

$$V^{(2,0)} = v_0' \tau_2 \sin \frac{\pi l}{b} \eta + \chi_2 \left(1 + C_{11}^{(1)} \left(\frac{\pi l}{b} \right)^2 v_0' \right) \tau_2 \sin \frac{\pi l}{b} \eta$$

$$W^{(k,0)} = 0, \quad \sigma_{xy}^{(k,0)} = \sigma_z^{(k,0)} = 0$$

$$\sigma_x^{(1,0)} = B_{11}^{(1)} u_0' \left(\frac{\pi l}{a} \right) \tau_1 \cos \frac{\pi l}{a} \xi + B_{12}^{(1)} v_0' \left(\frac{\pi l}{b} \right) \tau_2 \cos \frac{\pi l}{b} \eta$$

$$\sigma_y^{(1,0)} = B_{12}^{(1)} u_0' \left(\frac{\pi l}{a} \right) \tau_1 \cos \frac{\pi l}{a} \xi + B_{22}^{(1)} v_0' \left(\frac{\pi l}{b} \right) \tau_2 \cos \frac{\pi l}{b} \eta$$

$$\sigma_x^{(2,0)} = B_{11}^{(2)} u_0' \left(\frac{\pi l}{a} \right) \tau_1 \cos \frac{\pi l}{a} \xi + B_{12}^{(2)} v_0' \left(\frac{\pi l}{b} \right) \tau_2 \cos \frac{\pi l}{b} \eta +$$

$$+ \chi_1 \left(1 + C_{11}^{(1)} \left(\frac{\pi l}{a} \right)^2 u_0' \right) \tau_1 \sin \frac{\pi l}{a} \xi +$$

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(2,0)} &= B_{12}^{(1)} u_0' \left(\frac{\pi d}{a} \right) \tau_1 \cos \frac{\pi d}{a} \xi + B_{22}^{(1)} v_0' \left(\frac{\pi d}{b} \right) \tau_2 \cos \frac{\pi d}{b} \eta + \\ &+ \chi_2 \left(1 + C_{11}^{(1)} \left(\frac{\pi d}{b} \right)^2 v_0' \right) \tau_2 \sin \frac{\pi d}{b} \eta\end{aligned}$$

$$\sigma_{xz}^{(1,0)} = \sigma_{xz}^+ - L_{11} (B_{ij}^{(1)}) \mu^{(1,0)} (\zeta - \zeta_1) = \left[1 + B_{11}^{(1)} \left(\frac{\pi d}{a} \right)^2 u_0' (\zeta - \zeta_1) \right] \tau_1 \sin \frac{\pi d}{a} \xi$$

$$\sigma_{yz}^{(1,0)} = \sigma_{yz}^+ - L_{22} (B_{ij}^{(1)}) \nu^{(1,0)} (\zeta - \zeta_1) = \left[1 + B_{22}^{(1)} \left(\frac{\pi d}{b} \right)^2 v_0' (\zeta - \zeta_1) \right] \tau_2 \sin \frac{\pi d}{b} \eta$$

$$\sigma_{xz}^{(2,0)} = \sigma_{xz}^{+(s)} (\xi, \eta) - L_{11} (B_{ij}^{(2)}) \mu^{(2,0)} \zeta + L_{11} (B_{ij}^{(1)}) \mu^{(1,0)} \zeta_1$$

$$\sigma_{yz}^{(2,0)} = \sigma_{yz}^{+(s)} (\xi, \eta) - L_{22} (B_{ij}^{(2)}) \nu^{(2,0)} \zeta + L_{22} (B_{ij}^{(1)}) \nu^{(1,0)} \zeta_1$$

Решение в нулевом приближении (7.7) удовлетворяет граничным условиям (7.2).

Заметим, что в формулах (7.3) – (7.7) полагая $\chi_1 = \chi_2 = 0$, получим соответствующие формулы примера 1 главы 2 (полный контакт). Аналогичным этого примера образом можно вычислить следующие приближения.

Пример 2. Пусть двухслойная пластинка из ортотропных материалов, нагружена на лицевых поверхностях следующим образом:

$$\sigma_{xz}^+ = \sigma_{xz}^- = \tau_1 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b},$$

$$\sigma_{yz}^+ = \sigma_{yz}^- = \tau_2 \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \tag{7.8}$$

$$\sigma_z^+ = 0, \quad w^- = 0$$

Предполагаем, что на плоскости раздела слоев $z=0$ заданы условия неполного контакта и что по всей плоскости контакта отсутствуют силы трения.

Тогда в (6.9) полагая χ_1, χ_2 равны нулю, для обобщенных нагрузок $\bar{p}_1^{(s)}$ и $\bar{p}_2^{(s)}$ в нулевом приближении будут иметь

$$\begin{aligned}\bar{p}_1^{(0)} &= \tau_1 \sin \pi \xi \cos m \eta, \\ \bar{p}_2^{(0)} &= \tau_2 \cos \pi \xi \sin m \eta, \quad m = \frac{a}{b}\end{aligned}\tag{7.9}$$

где τ_1 и τ_2 постоянные величины.

Решение системы (6.4) в нулевом приближении будем искать в следующем виде

$$\begin{aligned}u^{(k,0)} &= f_u^{(k,0)} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} = f_u^{(k,0)} \sin \pi \xi \cos m \eta \\ v^{(k,0)} &= f_v^{(k,0)} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} = f_v^{(k,0)} \cos \pi \xi \sin m \eta, \quad m = \frac{a}{b}\end{aligned}\tag{7.10}$$

где $f_u^{(k,0)}$ и $f_v^{(k,0)}$ неизвестные постоянные.

Подставив (7.9) и (7.10) в систему (6.4), приравнявая коэффициенты при $\sin \pi \xi \cos m \eta$ и $\cos \pi \xi \sin m \eta$ получим систему алгебраических уравнений относительно $f_u^{(k,0)}$ и $f_v^{(k,0)}$, решив которую, получим

$$f_u^{(k,0)} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad f_v^{(k,0)} = \frac{\Delta_2}{\Delta}\tag{7.11}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta &= (C_{11} + m^2 C_{66})(m^2 C_{22} + C_{66}) - m^2 (C_{12} + C_{66})^2 \\ \Delta_1 &= (m^2 C_{12} + C_{66})\tau_1 - m(C_{12} + C_{66})\tau_2, \\ \Delta_2 &= (C_{11} + m^2 C_{66})\tau_2 - m(C_{12} + C_{66})\tau_1\end{aligned}\tag{7.12}$$

Подставив значения перемещений из (7.10) в формулы (1.8) для остальных величин получим

$$\begin{aligned}\sigma_z^{(k,0)} &= 0, \quad W^{(k,0)} = 0, \\ \sigma_x^{(k,0)} &= (f_u^{(k,0)} B_{11}^{(k)} + m f_v^{(k,0)} B_{12}^{(k)}) \cos \pi \xi \cos m \eta, \\ \sigma_y^{(k,0)} &= (m f_v^{(k,0)} B_{22}^{(k)} + f_u^{(k,0)} B_{12}^{(k)}) \cos \pi \xi \cos m \eta,\end{aligned}$$

$$\sigma_{xy}^{(k,0)} = B_{66}^{(k)} (m f_u^{(k,0)} + f_v^{(k,0)}) \sin \pi \xi \sin m \eta \quad (7.13)$$

$$\sigma_{xz}^{(k,0)} = - \left[(B_{11}^{(k)} + m^2 B_{66}^{(k)}) f_u^{(k,0)} + m (B_{12}^{(k)} + B_{66}^{(k)}) f_v^{(k,0)} \right] \xi \sin \pi \xi \cos m \eta$$

$$\sigma_{yz}^{(k,0)} = - \left[(B_{12}^{(k)} + m^2 B_{22}^{(k)}) f_v^{(k,0)} + m (B_{12}^{(k)} + B_{66}^{(k)}) f_u^{(k,0)} \right] \xi \cos \pi \xi \sin m \eta$$

Пример 3. Пусть пластина нагружена только нормальной нагрузкой $\sigma_z^+(x, y)$, меняющиеся по синусоидальному закону, а упругие слои взаимодействуют по закону сухого трения Кулона (2.9). Имеем

$$\sigma_z^+ = q_0 \sin \lambda \xi, \quad \xi = \frac{\pi l}{a} \quad (7.14)$$

$$\sigma_{xz}^\pm = \sigma_{yz}^\pm = 0, \quad w^- = 0$$

Тогда по формулам (5.2), получим

$$\sigma_{z0}^{(1,0)} = \sigma_{z0}^{(2,0)} = \sigma_z^+ = q_0 \sin \lambda \xi, \quad (7.15)$$

$$w^{(1,0)} = w^{(2,0)} = 0$$

а из (5.1), (6.7)

$$\sigma_{xz0}^{(k,0)} = \chi_1 q_0 \sin \lambda \xi, \quad (7.16)$$

$$\sigma_{yz0}^{(k,0)} = \chi_2 q_0 \sin \lambda \xi$$

Из (5.4) и (6.9) получим

$$\bar{p}_1^{(k,0)} = -a_3^{(k)} \lambda q_0 \cos \lambda \xi + \chi_1 q_0 \sin \lambda \xi, \quad (7.17)$$

$$\bar{p}_2^{(k,0)} = \chi_2 q_0 \sin \lambda \xi$$

Решение системы (6.4) ищем в виде функций

$$u^{(k,0)} = u_{01}^{(k,0)} \sin \lambda \xi + u_{02}^{(k,0)} \cos \lambda \xi, \quad (7.18)$$

$$v^{(k,0)} = v_0^{(k,0)} \sin \lambda \xi$$

где $u_{01}^{(k,0)}$, $u_{02}^{(k,0)}$, $v_0^{(k,0)}$ неизвестные коэффициенты.

Подставив (7.17) и (7.18) в систему (6.4) и приравнявая коэффициенты при $\sin \lambda \xi$ и $\cos \lambda \xi$, получим

$$u_{01}^{(k)} = -\frac{\chi_1 q_0}{C_{11}^{(k)} \lambda^2}, u_{02}^{(k)} = \frac{a_3^{(k)} q_0}{C_{11}^{(k)} \lambda}, v_0^{(k)} = -\frac{\chi_2 q_0}{C_{66}^{(k)} \lambda^2} \quad (7.19)$$

По формулам (2.3) вычислим напряжения и перемещения в нулевом приближении.

$$U^{(k,0)} = \frac{q_0}{C_{11}^{(k)} \lambda^2} \left(\chi_1 \sin \lambda \xi + a_3^{(k)} \lambda \cos \lambda \xi \right) \quad (7.20)$$

$$V^{(k,0)} = -\frac{\chi_2 q_0}{C_{66}^{(k)} \lambda^2} \sin \lambda \xi, W^{(k,0)} = 0$$

$$\sigma_x^{(k,0)} = q_0 \frac{\chi_1}{\lambda} \frac{B_{11}^{(k)}}{C_{11}^{(k)}} \cos \lambda \xi + a_3^{(k)} q_0 \left(1 - \frac{B_{11}^{(k)}}{C_{11}^{(k)}} \right) \sin \lambda \xi$$

$$\sigma_y^{(k,0)} = -q_0 \frac{\chi_1}{\lambda} \frac{B_{12}^{(k)}}{C_{11}^{(k)}} \cos \lambda \xi + q_0 \left(b_3^{(k)} - \frac{B_{11}^{(k)}}{C_{11}^{(k)}} a_3^{(k)} \right) \sin \lambda \xi \quad (7.21)$$

$$\sigma_{xy}^{(k,0)} = -q_0 \frac{\chi_2}{\lambda} \frac{B_{66}^{(k)}}{C_{66}^{(k)}} \sin \lambda \xi$$

$$\sigma_z^{(k,0)} = q_0 \sin \lambda \xi,$$

$$\sigma_{xz}^{(k,0)} = q_0 \left(1 - \frac{B_{11}^{(k)}}{C_{11}^{(k)}} \zeta \right) \left(\chi_1 \sin \lambda \xi - a_3^{(k)} \lambda \cos \lambda \xi \right) \quad (7.22)$$

$$\sigma_{yz}^{(k,0)} = \chi_2 q_0 \left(1 - \frac{B_{11}^{(k)}}{C_{11}^{(k)}} \zeta \right) \sin \lambda \xi$$

Отметим, что в этом параграфе при рассмотрении частных примеров, мы ограничились лишь нулевым приближением. Аналогичным примера 1 главы 2 образом можно вычислить следующие приближения. Отметим, что при неполном контакте эффект обусловленной геометрически нелинейностью также проваливается начиная с третьего приближения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Асимптотический метод интегрирования распространен для расчета анизотропных двухслойных полос и пластин при полном и неполном контактах между слоями. Методом асимптотического интегрирования двумерных уравнений геометрически нелинейной теории упругости получены одномерные и двумерные уравнения, рекуррентные формулы и соотношения для определения и анализа НДС двухслойных анизотропных полос и пластин, слои которой обладают анизотропией общего вида. Считается, что на верхней лицевой линии полосы и на верхней лицевой плоскости пластинки заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, а на нижней – смешанные условия теории упругости. На линии (плоскости) раздела слоев заданы условия полного или неполного контакта. Построено решение, соответствующее внутренней задаче. Рассмотрены конкретные примеры. Проведено сравнение с решением по линейной теории.

В диссертационной работе, в частности, получены следующие новые результаты.

1. Асимптотическим методом построено решение внутренней задачи двухслойных анизотропных полос по геометрически нелинейной теории упругости, когда на одной из продольных кромок полосы заданы условия первой краевой задачи теории упругости, а на другой – нормальная компонента вектора перемещения и касательное напряжение, между слоями имеется полный контакт. Выведенные уравнения и соотношения в нулевом приближении совпадают с соответствующими уравнениями и соотношениями анизотропных полос при линейной постановке задачи.

2. Рассмотрена плоская краевая задача для анизотропной двухслойной полосы по геометрически нелинейной теории упругости на одной из её продольных кромок заданы нормальная компонента вектора перемещения и касательное напряжение, а на другой – условия первой краевой задачи теории

упругости, когда на линии контакта задан закон распределения разности (скачка) тангенциального перемещения, в частности – модель нежесткого контакта.

3. Рассмотрена плоская краевая задача для анизотропной двухслойной полосы по геометрически нелинейной теории упругости на одной из её продольных кромок заданы нормальная компонента вектора перемещения и касательное напряжение, а на другой – условия первой краевой задачи теории упругости, когда на линии контакта задан закон распределения касательного напряжения, в частности – закон сухого трения Кулона.

4. Асимптотическим методом из геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости выведены двухмерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчета двухслойной анизотропной пластинки (21 упругая постоянная), на верхней лицевой плоскости которой заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, а на нижней – смешанные условия теории упругости. На плоскости раздела слоев пластинки заданы условия полного контакта, а на её торцах могут быть заданы различные краевые условия теории упругости.

5. Асимптотическим методом из геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости выведены линейные двухмерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчета двухслойной анизотропной пластинки, на верхней лицевой плоскости которой заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, а на нижней – смешанные условия теории упругости. На плоскости раздела слоев задан закон распределения разности (скачка) тангенциальных перемещений.

6. Асимптотическим методом из геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости выведены двухмерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчета двухслойной анизотропной пластинки, на верхней лицевой плоскости которой заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, а на

нижней – смешанные условия теории упругости. На плоскости раздела слоев заданы законы распределения тангенциальных напряжений, в частности, закон сухого трения Кулона.

7. Показана эффективность асимптотического метода при расчете анизотропных двухслойных полос и пластин по геометрически нелинейной теории упругости при полном и неполном контактах между слоями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука. 1997. 414 с.
2. Агаловян Л.А. О характере взаимодействия погранслоя с внутренним напряженно-деформированным состоянием полосы// Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1977. Т.30. №5. С.48-62.
3. Агаловян Л.А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела// Межвуз. сборник научн. Тр. ЕГУ. Механика. 1982. Вып.2. С.7-12.
4. Агаловян Л.А. К теории изгиба ортотропных пластин// МТТ. 1966. №6. С.116-121.
5. Агаловян Л.А. К определению напряженно-деформированного состояния двухслойной полосы и о справедливости гипотезы Винклера// Тр. XIII Всес. конф. по теории пластин и оболочек. Таллин. 1983. С.13-18.
6. Агаловян Л.А. О погранслое пластинок// Докл. АН Арм. ССР. 1972. Т.55. №3. С.149-155.
7. Агаловян Л.А., Агаловян М.Л. О динамическом поведении литосферных плит земли на основе данных сейсмостанций и GPS систем// Topical problems of continuum mechanics, 2012, pp.42-46.
8. Агаловян Л.А., Агаловян М.Л., Тагворян В.В. О решениях динамических трёхмерных задач теории упругости по моделированию землетрясений. Изв. НАН РА. Механика. 2018. Т.71. №4. С.17-29.
9. Агаловян Л.А., Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. К определению напряженно деформированного состояния пластин с анизотропией общего вида// Изв. НАН РА. Механика. 1996. Т.49. №3. С. 10-22.

10. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА. 2005. 468с.
11. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией. В сб.: Механика констр. Из композиционных материалов. Новосибирск. Наука. 1984. С.105-110.
12. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. О неклассических краевых задачах трехслойных термоупругих пластин и некоторых приложениях. В сб.: Тр. XIV Всес. конф. по теории пластин и оболочек. Тбилиси. Изд-во Тбилисск. ун-та. I том. 1987. С.28-34.
13. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок// ПММ. 1986. Т.50. Вып.2. С.271-278.
14. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении неклассических краевых задач для двухслойных анизотропных термоупругих оболочек// Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1989. Т.42. №3. С.28-36.
15. Агаловян М.Л., Геворкян Р.С. Асимптотическое решение одного класса неклассических краевых задач термоупругости для пакета из ортотропных пластин переменной толщины// Известия НАН Армении. Механика. 2014, Т. 67(1), С.35-44.
16. Агаловян Л.А., Тагворян В.В. Об одном классе неклассических трёхмерных задач теории упругости по прогнозу землетрясений. Изв. НАН РА. Механика. 2018. Т.71. №3. С.8-20.
17. Агаловян Л.А., Товмасын А.Б. Об асимптотическом решении смешанной краевой задачи для двухслойной термоупругой полосы// Материалы Всес. научн. семинара. Ереван. 1991. С.5-10.

18. Агаловян Л.А., Товмасян А.Б. Асимптотическое решение смешанной трёхмерной внутренней задачи для анизотропной термоупругой пластинки// Изв. НАН Армении. Механика. 1993. Т.46. №3-4. С. 3-11.
19. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. Асимптотический анализ напряженно-деформированном состоянии анизотропной слоистой балки// Изв. АН Арм ССР. Механика. 1986. Т.39. №2. С.3-14.
20. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. О двух задачах анизотропной двухслойной полосы при неполном контакте между слоями// Изв. АН РА. Механика. 1997. Т.50. №3-4. 34-41.
21. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. О двумерных уравнениях двухслойной анизотропной пластинки при неполном контакте между слоями. В сб. «Контактные и смешанные граничные задачи механики деформируемого твердого тела». Ереван. 1999. 152 с.
22. Агаловян Л. А., Хачатрян А.М. К решению первой краевой задачи для анизотропной полосы на основе геометрически нелинейной теории упругости// Изв. Северо-Кавказского центра высшей школы. Сер. естест. Наук. 2001. Спец. выпуск. С.16-18.
23. Алексеев А.Е. Нелинейные законы сухого трения в контактных задачах линейной теории упругости. ПМТФ. 2002.Т.43. №4.С. 161-169.
24. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Наука. 1978. 464 с.
25. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз. 1961. 384 с.
26. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 1987. 360 с.
27. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука. 1974. 446 с.

28. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука. 1977. 272 с.
29. Анисимов А.А., Ермаков С.Ю., Фролова Е.Н., Яновская Т.Б. Исследование отражения-преломления упругих волн на границе нежесткого контакта и контакта с трением// Росс. АН. Физика земли. 1993. №11. С.37-44.
30. Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. К определению напряженно-деформированного состояния двухслойной балки с проскальзыванием// Материалы Всес. науч. семинара «Актуальные проблемы неоднородной механики». Ереван. 1991. 390 с.
31. Барсегян В.М. Асимптотическое решение трехмерной внутренней задачи для двухслойных анизотропных пластинок при неполном контакте между слоями// Изв. НАН РА. Механика. 1998. Т.51. №1. С.43-50.
32. Барсегян В.М. Хачатрян А.М. Об асимптотическом решении смешанной задачи для трехслойной полосы при различных условиях контакта слоев// Изв. НАН РА. Механика. 2001. Т.54. №1. С.17-25.
33. Бахвалов Н.С. Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстроосциллирующими коэффициентами// Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1975. Т.221. №3. С.516-519.
34. Бердичевский В.Л. Об осреднении периодических структур// ПММ. 1977. Т.41. №6. С.993-1006.
35. Болотин В.В. К теории слоистых плит// Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. №3. С.65-72.
36. Болотин В.В. Об изгибе плит, состоящих из большого числа слоев. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1994. №1. С.61-66.

37. Болотин В.В. Прочность, устойчивость и колебания многослойных пластин// В кн.: Расчеты на прочность. М.: Машиностроение. 1965. Вып.11. С.31-63.
38. Болотин В.В. Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение. 1980. 375 с.
39. Вазов В. Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений. М.: Мир. 1968. 464 с.
40. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука. 1973. 272с.
41. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука. 1982. 288 с.
42. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром// УМН. 1957. Т.12. №5. С.3-122.
43. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений// УМН. 1960. Т.15. №3. С.3-93.
44. Ворович И.И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек. В сб. Тр. II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике (29 января-5 февраля). Вып. 3. М.: Наука. 1966. 414 с.
45. Ворович И.И., Малкина О.С. Асимптотический метод решения задачи теории упругости о толстой плите. Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука. 1966. С.251-254.
46. Ворович И.И., Кодомцев И.Г., Устинов Ю.А. К теории неоднородных по толщине плит// Изв. АН СССР. МТТ. 1975. №3. С.119-130.

47. Ворович И.И., Копасенко В.В. Некоторые задачи теории упругости для полуполосы// ПММ. 1966. Т.30. Вып.1. С.109-115.
48. Власов В.В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. М.: Стройиздат. 1975. 224 с.
49. Геворкян Р.С. О двух смешанных краевых задачах для двухслойных анизотропных пластин// Межвуз. сб. ЕГУ. Механика. 1986. Вып.4. С. 189-196.
50. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости// ПММ. 1962. Т.26. Вып.4. С.668-686.
51. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости// ПММ. 1963. Т.27. Вып.4. С.593-608.
52. Гольденвейзер А.Л. О двумерных уравнениях общей линейной теории тонких упругих оболочек. В сб.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. М.: Наука. 1969. 692 с.
53. Гольденвейзер А.Л. Погранслои и его взаимодействие с внутренним напряженным состоянием упругой тонкой оболочки// ПММ. 1969. Т.33. Вып.6. С.996-1028.
54. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 512с.
55. Гольденвейзер А.Л., Колос А.В. К построению двумерных уравнений теории упругих тонких пластинок// ПММ. 1965. Т.29. Вып.1. С.141-145.
56. Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В. Асимптотический анализ и уточнение теорий пластин и оболочек типа Тимошенко-Рейсснера// Изв. АН СССР. МТТ. 1990. №6. С.124-138.

57. Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д. Динамический погранслои в задачах колебаний оболочек// Изв. АН СССР. МТТ. 1988. №4. С.152-162.
58. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука. 1979. 384 с.
59. Григолюк Э.И. Уравнения трехслойных оболочек с легким наполнителем// Изв. АН СССР. ОТН. 1957. №1. С.77-84.
60. Григолюк Э.И. Конечные прогибы трехслойных оболочек с жестким наполнителем// Изв. АН СССР. ОТН. 1958. №1. С.26-34.
61. Григолюк Э.И. Устройство оболочек. М.: 1978. 360 с.
62. Григолюк Э.И., Коган Ф.А. Современное состояние теории многослойных оболочек// ПМ. 1972. Т.8. Вып. 6. С.3-17.
63. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Общая теория упругих трехслойных оболочек большого прогиба// В сб.: Динамика и прочность машин. Рига: 1963. Вып. 10. С.95-108.
64. Гулгазарян Л.Г. Вынужденные колебания ортотропных оболочек при наличии вязкого сопротивления// Прикладная математика и механика (ПММ), 2015, Т. 79(3), С.405-419.
65. Гулгазарян Л.Г. О характере собственных колебаний ортотропных оболочек при наличии вязкого сопротивления// Межд. Научно-технический журнал «Механика машин, механизмов и материалов». Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси. Минск. 2013. 4(25), С.20-26.
66. Гулгазарян Л.Г. Собственные колебания двухслойных ортотропных оболочек при неполном контакте между слоями// Вестник Фонда фундаментальных исследований. Минск. 2013, 3(65), С.51-69.
67. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука. 1980. 84 с.

68. Зволинский Н.В. Некоторые точные решения задач о слоистой упругой среде с проскальзыванием// Изв. АН СССР. МТТ. 1990. №3. С.64-73.
69. Зволинский Н.В., Шхинек К.Н. Континуальная модель слоистой среды// Изв. АН СССР. МТТ. 1984. №1. С.5-14.
70. Зино И.Е., Тропп Э.А. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Л.: ЛГУ. 1978. 224 с.
71. Ильин В.П., Карпов В.В., Масленников А.М. Численные методы решения задач в строительной механике. Высшэйшая школа. Минск. 1990. 349с.
72. Кильчевский Н.А. Анализ различных методов приведения трехмерных задач теории упругости к двумерным и исследование постановки краевых задач теории оболочек. К.: 1962. 58 с.
73. Киракосян Р.М. Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов. Ер.: Гитутюн. 2000. 122 с.
74. Колос А.В. Методы уточнения классической теории изгиба и растяжения пластинок// ПММ. 1965. Т.29. Вып.4. С.771-781.
75. Колос А.В. Об уточнении классической теории изгиба круглых пластинок// ПММ. 1964. Т.28. Вып.3. С.582-589
76. Композиционные материалы. Т.2. Механика композиционных материалов// Под ред. Сендецки Д.М.: Мир. 1978. 564 с.
77. Композиционные материалы. Т.6. Технологические напряжения и деформации в материалах// Под ред. Шульги Н.А. и Томашевского В.Т. Киев: ПТОО "А.С.К.". 1997. 394 с.
78. Корнишин М.С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. М.: Наука. 1964. 192 с.

79. Купрадзе В.Д., Гегелия Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука. 1976. 662 с.
80. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат 1957. 463 с.
81. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука. 1977. 416 с.
82. Литл Р. Задача о полуполосе с заделанными краями. Прикладная механика. №2. М.: Мир. 1969. С.184-186.
83. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука. 1981. 398 с.
84. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука. 1970. 939 с.
85. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во МГУ. 1965. 549 с.
86. Найфэ А.Х. Методы возмущений. М.: Мир. 1976. 455 с.
87. Никитин И.С. Осредненные уравнения слоистой среды с нелинейными условиями взаимодействия на контактных границах// Изв. АН СССР. МТТ. 1987.№5. С.80-86.
88. Никитин В.С., Шапиро Г.С. Задачи теории упругости для многослойных сред. М.: Наука. 1973. 131 с.
89. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир. 1970. 256 с.
90. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Л.-М., ОГИЗ, 1948. 211 с.
91. Петросян Г.А., Хачатрян А.М., Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной пластинки на основе геометрически

нелинейной теории упругости// Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т. 64. №1. С. 50-57.

92. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ 1984. 336 с.

93. Подъяпольский С.Г. Отрожения и преломление на границе двух упругих сред в случае нежесткого контакта// Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1963. №4. С. 525-531.

94. Понятовский В.В. К теории изгиба анизотропных пластинок// ПММ. 1964. Т.28. Вып.6. С.1033-1039.

95. Понятовский В.В. Асимптотические разложения в линейной теории плоских стержней// Проблемы механики твердого тела. Л.: Судостроение. 1970. 512 с.

96. Прочность. Устойчивость. Колебания. Т.1. Справочник в трех томах. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение. 1968. 831с.

97. Рогачева Н.Н. Уточненная теория пьезокерамических оболочек// Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1981. Т.34. №1. С.55-64.

98. Рогачева Н.Н. Уточненная теория термоупругих оболочек// В сб.: Тр. X Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Тбилиси. Мецниереба. 1975. С.251-259.

99. Саркисян В.С. Некоторые задачи об изгибе анизотропных призматических стержней с сечением в виде удлиненных профилей// Докл. АН Арм. ССР. 1961. Т.32. №3. С.139-148.

100. Саркисян В.С. О решении задачи изгиба анизотропных (неортоотропных) пластин// Изв. АН СССР. МТТ. 1966. №1. С.147-150.

101. Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела// Изд-во ЕГУ. 1976. 536 с.

102. Саркисян Н. С. Об одной смешанной краевой задаче анизотропной двухслойной полосы-прямоугольника по геометрически нелинейной теории упругости. Ученые записки АрГУ, 2013, 1(27). С. 116-123.
103. Саркисян Н. С. Об одной смешанной краевой задаче анизотропной двухслойной полосы-прямоугольника по геометрически нелинейной теории упругости при неполном контакте между слоями. Труды межд. школы-конф. молодых ученых, посв. 70-летию НАН Армении. Цахкадзор, 1-4 октября, 2013. Ереван 2013, С. 222-226
104. Саркисян Н. С. Асимптотическое решение одной плоской задачи для двухслойной балки с проскальзыванием. Тр. VIII Межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Горис- Степанакерт, 22-26 сентября, 2014. Ереван 2014. С. 384-388.
105. Саркисян Н. С., Хачатрян А. М. О двухмерных уравнениях двухслойной анизотропной пластинки по нелинейной теории упругости// Изв. НАН Армении. Механика. 2017. Т. 70. № 1. С. 64-73.
106. Саркисян Н.С., Хачатрян А.М. О двухмерных уравнениях двухслойной анизотропной пластинки на основе геометрически нелинейной теории упругости при неполном контакте между слоями. Изв. НАН Армении. Механика. 2018. Т.71. № 3. С.44-54.
107. Саркисян Н.С., Хачатрян А.М. О двухмерных уравнениях двухслойной анизотропной пластинки при заданных тангенциальных напряжениях на плоскости раздела слоев. Тр. IX Межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Горис.01-06 октября 2018. Ереван 2018. С. 268-272.
108. Саркисян Н. С., Хачатрян А.М. О двухмерных уравнениях двухслойной анизотропной пластинки когда слои взаимодействуют по закону сухого трения.// Изв. НАН Армении. Механика. 2019. Т. 72. № 2. С.56-65.

109. Саркисян С.О. Асимптотический анализ уравнений, граничных и начальных условий в магнитоупругости тонких пластинок конечных размеров// Межвуз. сборник. Механика. Изд-во ЕГУ. Механика. 1982. Вып.2. С.126-133.
110. Саркисян С.О. К построению в целом двумерной теории колебаний проводящей тонкой анизотропной оболочки методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений магнитоупругости// Материалы II Всес. конф. «Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов». Ереван. Изд-во ЕГУ. 1984. С.130-135.
111. Саркисян С.О. Построение асимптотической двумерной теории магнитоупругости проводящих тонких оболочек, находящихся в неоднородном и нестационарном магнитном поле// Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1989. Т.42. №5. С.25-34.
112. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван. Изд-во АН Армении. 1992. 235 с.
113. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1983. 352 с.
114. Хачатрян А.М. О пограничном слое слоистых балок// Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1987. Т. 40. №2. С. 19-25.
115. Хачатрян А.М. Об уравнениях двухслойной анизотропной пластинки при нежестком контакте слоев// ДНАН РА. 1999. Т.99. №2. С. 159-165.
116. Хачатрян А.М. К выводу двумерных уравнений двухслойных цилиндрических оболочек при неполном контакте между слоями// Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ер.2002.С. 329-340.
117. Хачатрян А.М. Изгиб шарнирно опертой двухслойной ортотропной пластинки синусоидальной нагрузкой при нежестком контакте слоев// Современные проблемы механики сплошной среды. Труды VI Межд конф. г.

Ростов-на-Дону, 19-23 июня 2000 г. Т.1. Ростов-на-Дону. Изд. СКНЦ ВШ. 2001. 258 с.

118. Хачатрян А.М., Товмасян А.Б. Асимптотическое решение трехмерной внутренней задачи анизотропной термоупругой пластинки на основе геометрически нелинейной теории упругости// Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №1. С. 42-49.

119. Хачатрян Ш.М. К определению напряженно -деформированного состояния анизотропной полосы// Изв. АН Арм. ССР, Механика. 1976. Т. 29. №6. С. 19-32.

120. Хачатрян Ш.М. О напряженных состояниях и их определяющих уравнениях цилиндрических оболочек с общей анизотропией// Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1979. Т. 32. №3. с. 26-41.

121. Черных К.Ф., Литвиненкова З.Н. Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд. ЛГУ. 1988. 216 с.

122. Aghalovyan L.A. Aghalovyan M.L. On Characteristic Properties of a Layered Packet Base-Foundation on the Base of the Analysis of the Solutions of the Corresponding Three-Dimensional Dynamic Problems of Elasticity Theory// Embodying Intelligence in Structures and Integrated Systems: Selected, peer reviewed papers from the CIMTEC 2012 - 4th International Conference §Smart Materials, Structures and Systems¹, 2013, 28-37.

123. Aghalovyan L.A. Aghalovyan M.L. On One Method of Monitoring of Stress-strain States of Constructions Foundations and Bases in Seismoactive Zones of the Earth// 6th World Conference on Structural Control and Monitoring- 6WCSCM, 2014. pp. 1571-1578.

124. Aghalovyan L.A. Aghalovyan M.L. Monitoring of stress-strain state of plate-like packet of base foundation constructions on the base of the data of seismic

stations and GPS systems// 5th European Conference on Structural Control, 2012, pp. 9-16.

125. Aghalovyan L.A. Aghalovyan M.L. // On Asymptotic Theory of Beams, Plates and Shells / Curved and Layered Structures. 2016, 3(1), pp.74-81.

126. Aghalovyan L.A., Gevorgyan R.S., Aghalovyan M.L. // Asymptotic solution of the electroelasticity problem for thickness-polarized piezoceramic shells / Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Russia, 2015, 79(3), pp. 293-303.

127. Aghalovyan L.A., Ghulghazaryan L.G. // Forced vibrations of two-layered orthotropic shell in the presence viscous resistance // Topical problems of continuum mechanics, 2017, pp. 17-18.

128. Aghalovyan L.A., Ghulghazaryan L.G. Forced vibrations of a two-layered shell in the case of viscous resistance. 2018. *J. Phys.: Conf. Ser.* 991(2018) 012002 [.https://doi.org/10.1088/1742-6596/991/1/012002](https://doi.org/10.1088/1742-6596/991/1/012002)

129. Aghalovyan M.L. // On Dynamic Problems of Anisotropic Strip - Beam and Plates// International Conference on Shells, Plates and Beams (SPB 2015), 2015. pp. 71-72.

130. Bohuslav Novotny. On the asymptotic integration of the three-dimensional non-linear equations of thin elastic shells and plates// *Int. J. Solids and Structures*. 1970. Vol.6. pp.443-451.

131. Bohuslav Novotny. Method of asymptotic integration in the theory of thin shells on variable thickness. Bratislava. 1972. *Rocnik XX Cislo 3*.

132. Friedrichs K.O. Kirchhoff's boundary conditions and the edge effect for elastic plates// *Proc. Symp. Appl. Math.* 3. Amer. Math. Soc. N.Y. 1950.

133. Friedrichs K.O. Asymptotic phenomena in mathematical Physics// *Bull. Amer. Math. Soc.* 1955. Vol.61. pp.485-504.

134. Green A.E. On the linear theory of thin elastic shells// Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1962. Vol.266. N 1325.
135. Green A.E. Boundary layer equations in the linear theory of thin elastic shells// Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1962. Vol.269. №1339.
136. Ghulghazaryan L.G. Asymptotics of forced vibrations of orthotropic shells in the presence of viscous resistance //The problems of dynamics of interaction of deformable media. 2014.pp. 192-196.
137. Ghulghazaryan L.G. Free vibrations of orthotropic shells in the presence viscous resistance// Shell and Membrane Theories in Mechanics and Biology (SMT in MB 2013). 2013.pp. 69-71.
138. Ghulghazaryan L.G., Barseghyan M. The forced vibrations of two-layered orthotropic shell with full contact between layers// Topical problems of continuum mechanics. 2015. pp. 176-181.
139. Horway G., Born J.S. Some mixed boundary value problems of the semi-infinite stripe// J. Appl. Mech. Trans. ASME. 1957. Vol.24. №2. pp.261-268.
140. Reiss E.L. A theory for small rotationally symmetric deformation of cylindrical shells// Comn. Pure and Appl. Math. 1960. Vol.13. №3. pp.531-550.
141. Reiss E.L. On the theory of cylindrical shells// Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1962. Vol.15. №3. pp.325-338.
142. Rutten H.S. Asymptotic approximation in the three-dimensional theory of thin and thick elastic shells. Nederlands boekdrul industrie. N.Y. 1971
143. Sargsyan S.H. Boundary-value problems of asymmetric theory of elasticity for thin plates// Journal of applied mathematics and Mechanics.-2008. Vol. 72. pp. 77-86.
144. Sargsyan S.H. Mathematical models of micropolar elastic thin shells//Advanced structured materials. Shell-like structures. Non-classical theories and applications. Springer. 2011. Vol. 15. pp. 91-100.

145. Sargsyan S.H. Mathematical models of micropolar elastic thin plates and their strength and stiffness Characteristics// Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2012. Vol.53. №2. pp. 275-282.
146. Sargsyan S.H. The theory of micropolar thin elastic shells// Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2012. Vol. 76. №2. P. 235-249.
147. Westerbook D.R. A linear asymptotic theory for anisotropic shells// J. of Eng.Math. Vol.6.№4. 1972. pp.305-312.
148. Widera O.E. An Asymptotic Theory for the Moderately Large Reflections of Anisotropic plates// Jour. of Engineering Mathematics. 1969. Vol. 3. №3. July pp.239-244.
149. Widera O.E., Chung S.W. A Theory for Non-homogeneous, Anisotropic Cylindrical Shells// J. Compos. Mater. Jan. 1972. Vol.6. pp.14-30.