ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Դավիթ Անդրանիկի Գրիգորյան

ՏԻՊԻԶԱՑՎԱԾ ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ԾՐԱԳՐԵՐԻ ԻՐԱԿԱՆԱՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա.01.09 «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

Ս Ե Ղ Մ Ա Գ Ի Ր

ԵՐԵՎԱՆ - 2019

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Григорян Давит Андраникович

О РЕАЛИЗАЦИИ ТИПИЗИРОВАННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОГРАММ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 – “Математическая кибернетика и математическая логика”

ЕРЕВАН – 2019

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում:

Գիտական ղեկավար՝	ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր	Ս.Ա. Նիգիյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր	Յ.Մ. Մովսիսյան
	ֆիզ.մաթ. գիտ. թեկնածու	Ա.Հ. Առաքելյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտ

Ատենախոսության պաշտպանությունը կայանալու է 2019թ. հունիսի 12-ին, ժամը 16^{00}-ին, ԵՊՀ-ում գործող 044 ‹‹Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա›› մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2019թ. ապրիլի 29-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական
քարտուղար, ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր՝ Վ.Ժ. Դումանյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете.

Научный руководитель:	доктор физ.мат. наук	С.А. Нигиян
Официальные оппоненты:	доктор физ.мат. наук	Ю.М. Мовсисян
	кандидат физ.мат. наук	А.Г. Аракелян

Ведущая организация: Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА

Защита диссертации состоится 12-ого июня 2019г., в 16^{00} часов, на заседании специализированного совета 044 “Математическая кибернетика” действующего в ЕГУ, по адресу: 0025, Ереван, ул. А. Манукяна, 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.

Автореферат разослан 29-ого апреля 2019г.

Ученый секретарь специализированного
совета, доктор физ.мат. наук В.Ж. Думанян

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲՆՈՒԹԱԳԻՐԸ

Թեմայի արդիականությունը: Աշխատանքը նվիրված է ֆունկցիոնալ ծրագրավորման հիմունքներին: Հետազոտման առարկա են հանդիսանում տիպիզացված ֆունկցիոնալ ծրագրերը, իսկ հիմնական դիտարկվող խնդիրը՝ ծրագրի կողմից որոշվող ֆունկցիայի հաշվարկման ֆունդամենտալ խնդիրն է: Տիպիզացված ֆունկցիոնալ ծրագիրն իրենից ներկայացնում է հավասարումների համակարգ (անջատվող փոփոխականներով)՝ տիպիզացված λ-հաշվի մոնոտոն մոդելում [1,2]: Ծրագրի ցանկացած հավասարում ունի $F = t$ տեսքը, որտեղ F-ը փոփոխական է, t-ն՝ տիպիզացված λ-թերմ, որի տիպը համընկնում է F փոփոխականի տիպի հետ [1,3] : Մեր կողմից դիտարկվող տիպիզացված ֆունկցիոնալ ծրագրերը օգտագործում են կամայական կարգի փոփոխականներ և հաստատուններ, որոնց կարգը ≤ 1, որտեղ 1 կարգի հաստատունները խիստ հաշվարկելի, մոնոտոն արգումենտների անորոշ արժեքներով ֆունկցիաներ են [4]: Տիպիզացված ֆունկցիոնալ ծրագրի հիմնական սեմանտիկան հանդիսանում է արգումենտների անորոշ արժեքներով ֆունկցիա, որը նրա փոքրագույն լուծման գլխավոր կոմպոնենտն է [1]: Ծրագրի կողմից որոշվող ֆունկցիայի հաշվարկը՝ կոնկրետ մուտքային տվյալների դեպքում, իրականացնում է ինտերպրետացիայի ալգորիթմը: Ինտերպրետացիայի ալգորիթմները, որոնք հիմնված են փոփոխականների, որոշ ազատ մուտքերի փոխարեն, ծրագրի հավասարումների աջ մասերի տեղադրման, միաքայլ β-ռեդուկցիայի և միաքայլ δ-ռեդուկցիայի գործողությունների վրա, անհակասելի են այն իմաստով, որ, եթե ալգորիթմը կանգ է առնում, ապա նրա կողմից հաշվարկվող արժեքը համընկնում է ծրագրի կողմից որոշվող ֆունկցիայի արժեքի հետ [5]: Եթե որոշվող ֆունկցիայի արժեքը անորոշ է, ապա ինտերպրետացիայի ալգորիթմը կամ կանգ է առնում անորոշ արժեքով, կամ աշխատում է անվերջ: β-ռեդուկցիայի գաղափարը հանդիսանում է դասական գաղափար և նույնն է լեզվի կամայական ինտերպրետացիայի դեպքում, δ-ռեդուկցիայի գաղափարը կախված է ներդրված ֆունկցիաների բազմությունից և ֆունցիոնալ ծրագրավորման լեզվի կոնկրետ իրականացումից:

[6]Աշխատանքում դիտարկվել են տիպիզացված ֆունկցիոնալ ծրագրեր, որոնք օգտագործում են փոփոխականներ և հաստատուններ, որոնց կարգը ≤ 1, և չեն օգտագործում λ-աբստրակցիա: Հետազոտվել են այդպիսի ծրագրերի հաշվարկման

1 *Nigiyan S.A.* Functional Languages. // Programming and Computer Software, 1992, v. 17, № 5, p. 290-297.

2 *Barendregt H.P.* The lambda calculus. Its syntax and semantics. North-Holland Publishing Company, 1981.

3 *Nigiyan S.A.* On Interpretation of Functional Programming Languages. // Programming and Computer Software, 1993, v. 19, № 2, p. 71-78.

4 *Nigiyan S.A.* On Non-classical Theory of Computability. // Proceedings of the YSU. Physical and Mathematical Sciences, 2015, № 1, p. 52–60.

5 Акопян Р.Ю. О процедурных семантиках строго типизированных функциональных программ. // Ученые записки ЕГУ, 2008, № 3, p. 59-69.

6 *Manna Z.* Mathematical theory of computation. McGraw Hill Book Co, 1974.

կանոններ, որոնք օգտագործում են տեղադրում և թերմերի պարզեցում, կապված ներդրված ֆունկցիաների հետ (δ-ռեդուկցիա), սակայն δ-ռեդուկցիայի գաղափարը չի եղել ֆորմալիզացված:

δ-ռեդուկցիայի գաղափարն առաջին անգամ ֆորմալիզացվել է [1,2] աշխատանքներում: Ներմուծվել և հետազոտվել է, այսպես կոչված, բնական δ-ռեդուկցիայի գաղափարը, գտնվել է անհրաժեշտ և բավարար պայման, որին պետք է բավարարի բնական δ-ռեդուկցիայի գաղափարը, որպեսզի ցանկացած տիպիզացված λ-թերմի βδ-նորմալ ձևը լինի միակը [2]:

[3]Աշխատանքում սահմանվել է δ-ռեդուկցիայի ավելի լայն գաղափար, այսպես կոչված, կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափար (բնական δ-ռեդուկցիայի գաղափարը հանդիսանում է կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարի մասնավոր դեպք), որը δ-ռեդուկցիայի հենց այն գաղափարն է, որն օգտագործվում է իրական ֆունկցիոնալ ծրագրավորման լեզուներ իրականացնելիս: [3]Աշխատանքում ցույց է տրվել, որ ցանկացած խիստ հաշվարկելի, մոնոտոն, արգումենտների անորոշ արժեքներով ֆունկցիաների ռեկուրսիվ բազմության համար գոյություն ունի կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափար:

Բնականաբար հարց է առաջանում, թե ինչպիսի պայմանների պետք է բավարարի կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարը, որպեսզի ցանկացած տիպիզացված λ-թերմի βδ-նորմալ ձևը լինի միակը:

Մեր կողմից նշվել է, որ, եթե ծրագրի կողմից որոշվող ֆունկցիան որոշված չէ արգումենտների որոշ ֆիքսված արժեքների դեպքում, ապա ինտերպրետացիայի ալգորիթմը կամ կանգ է առնում անորոշ արժեքով, կամ աշխատում է անվերջ: Բնականաբար առաջանում է հարց ինտերպրետացիայի ալգորիթմների δ-ռեդուկցիայի գաղափարից ըստ անորոշ արժեքի կախվածության վերաբերյալ: Բնականաբար, նաև, առաջանում է հարց ինտերպրետացիայի ալգորիթմների ըստ անորոշ արժեքի համեմատելիության վերաբերյալ:

Մեր կողմից դիտարկվում են հայտնի յոթ ինտերպրետացիայի ալգորիթմները՝ *FS* (լրիվ տեղադրման), *PES* (զուգահեռ արտաքին տեղադրման), *LES* (ձախ արտաքին տեղադրման), *PIS* (զուգահեռ ներքին տեղադրման), *LIS* (ձախ ներքին տեղադրման), *PAS* (պասիվ), *ACT* (ակտիվ), և ուսումնասիրվում դրված խնդիրները այս ալգորիթմների համար:

Աշխատանքի նպատակն ու խնդիրները: Այս աշխատանքի հիմնական նպատակն ու խնդիրները հետևյալն են.

1. Պարզել, թե ինչպիսին պետք է լինի կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարը, որպեսզի ցանկացած տիպիզացված λ-թերմի βδ-նորմալ ձևը լինի միակը:

---

[1] *Budaghyan L.E.* Formalizing the Notion of δ-Reduction in Monotonic Models of Typed λ-Calculus. // Algebra, Geometry and Their Applications, vol. 1, p. 48-57, 2002.

[2] *Budaghyan L.E.* A Necessary and Sufficient Condition of Completeness of Computation Rule for Strong Typed Functional Programs. Proceedings of the Conference of CSIT, 2005, p. 16-19.

[3] *Nigiyan S.A.*, Khondkaryan T.V. On Canonical Notion of δ-reduction and on Translation of Typed λ-terms Into Untyped λ-terms. // Proceedings of the YSU. Physical and Mathematical Sciences, 2017, No 1, p. 46-52

2. Ուսումնասիրել ինտերպրետացիայի FS, PES, LES, PIS, LIS, PAS, ACT ալգորիթմների կախվածությունը կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարից ըստ անորոշ արժեքի:

3. Ուսումնասիրել ինտերպրետացիայի FS, PES, LES, PIS, LIS, PAS, ACT ալգորիթմների համեմատելիությունը ըստ անորոշ արժեքի:

Հետազոտման մեթոդները: Աշխատանքում օգտագործված հետազոտության մեթոդները ներառում են ֆունկցիոնալ ծրագրավորման, տիպիզացված λ-հաշվի, ալգորիթմների տեսության, հանրահաշվի մեթոդները:

Արդյունքների նորությունը: Աշխատանքում կատարված հետազոտությունների արդյունքում ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները.

1. Ցույց է տրվել, որ հիմնական կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարի դեպքում $\beta\delta$-ռեդուկցիայի գաղափարը օժտված է Չորչ-Ռոսսերի հատկությամբ, որից էլ բխում է, որ, հիմնական կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարի դեպքում, ցանկացած տիպիզացված λ-թերմի $\beta\delta$-նորմալ ձևը միակն է:

2. Կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարի համար, ներմուծվել է, այսպես կոչված, տեղադրելիության և ժառանգականության հատկությունը (ՏԺ-հատկությունը) և ցույց է տրվել, որ այն հանդիսանում է անհրաժեշտ և բավարար պայման՝ կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարի դեպքում, տիպիզացված λ-թերմերի $\beta\delta$-նորմալ ձևի միակության համար:

3. Ցույց է տրվել, որ ինտերպրետացիայի FS, PES, LES, PIS, LIS, PAS, ACT ալգորիթմները կախված են կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարից ըստ անորոշ արժեքի:

4. Ցույց է տրվել, որ ինտերպրետացիայի FS, PES, LES, PIS, LIS, PAS, ACT ալգորիթմները զույգ առ զույգ անհամեմատելի են ըստ անորոշ արժեքի:

Տեսական և կիրառական նշանակությունը: Աշխատանքում մշակված հետազոտության մեթոդները և ստացված արդյունքներն ունեն ինչպես տեսական, այնպես էլ կիրառական նշանակություն: Մասնավորապես, ֆունկցիոնալ ծրագրավորման նոր համակարգերի ստեղծման և արդեն իսկ գոյություն ունեցող համակարգերի ուսումնասիրության, արդյունավետության բարձրացման և այլ խնդիրների լուծման համար:

Ստացված արդյունքների ապրոբացիան: Ատենախոսության հիմնական արդյունքները զեկուցվել են ԵՊՀ Ծրագրավորման և ինֆորմացիոն տեխնոլոգիաների ամբիոնի սեմինարներում, ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի ընդհանուր սեմինարում, Մխիթար Ջրբաշյանի 100-ամյակին նվիրված միջազգային գիտաժողովում (Երևան, Հայաստան, հոկտեմբեր 22-24, 2018): Ատենախոսության հիմնական արդյունքներն ընդգրկված են հրատարակված վեց աշխատանքներում:

Աշխատանքի կառուցվածքն ու ծավալը: Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից, չորս գլխից, եզրակացությունից և օգտագործված գրականության ցանկից (37 անուն): Ատենախոսության ծավալը 91 էջ է:

Ներածությունում նկարագրվում է ատենախոսության հետազոտության հիմնական խնդիրներն ու նպատակը, հիմնավորվում է թեմայի արդիականությունը և նորությունը: Համառոտ կերպով ներկայացվում է ստացված արդյունքները, նրանց գիտական և կիրառական նշանակությունը:

Գլուխ 1-ում տրվում են անհրաժեշտ սահմանումները և արդյունքները, որոնք վերցված են [1,2,3,4,5] աշխատություններից: Առաջին գլուխը կազմված է երեք բաժնից:

1.1 բաժնում ներմուծվում են տիպի, տիպիզացված λ-թերմի, β-ռեդուկցիայի, կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարները:

Դիցուք M-ը մասնակի կարգավորված բազմություն է և այն պարունակում է անորոշ արժեքին համապատասխանող $\perp$ էլեմենտը, որը M-ի փոքրագույն էլեմենտն է և M բազմության ցանկացած էլեմենտ համեմատելի է միայն ինքն իր և $\perp$-ի հետ:

Սահմանում 1.1.1: (Տիպի սահմանում). Սահմանենք տիպերի $Types$ բազմությունը հետևյալ կերպ.

1. $M \in Types$,
2. եթե $\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in Types$ $(k > 0)$, ապա $\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_k$-ից β բոլոր մոնոտոն արտապատկերումների բազմությունը (նշ. $[\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_k \to \beta]$) պատկանում է $Types$:

Սահմանում 1.1.2: (Թերմի սահմանում). V_α-ով նշանակենք α տիպի փոփոխականների հաշվելի բազմությունը: Բոլոր փոփոխականների բազմությունը նշանակենք V-ով՝ $V = \bigcup_{\alpha \in Types} V_\alpha$: Թերմերի բազմությունը կնշանակենք $\Lambda = \bigcup_{\alpha \in Types} \Lambda_\alpha$, որտեղ Λ_α-ն α տիպի թերմերի բազմությունն է, որը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

1. եթե $c \in \alpha, \alpha \in Types$, ապա $c \in \Lambda_\alpha$,
2. եթե $x \in V_\alpha, \alpha \in Types$, ապա $x \in \Lambda_\alpha$,
3. եթե $t \in \Lambda_{[\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_k \to \beta]}, t_i \in \Lambda_{\alpha_i}, \beta, \alpha_i \in Types, i = 1, \ldots, k$ $(k > 0)$, ապա $t(t_1, \ldots, t_k) \in \Lambda_\beta$ (t-ն կանվանենք ապլիկատոր, իսկ $t_1, \ldots, t_k$-ն՝ ապլիկատորի ազդեցության տիրույթ),
4. եթե $t \in \Lambda_\beta, x_i \in V_{\alpha_i}, \beta, \alpha_i \in Types, i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j, i, j = 1, \ldots, k$ $(k > 0)$, ապա $\lambda x_1 \ldots x_k[t] \in \Lambda_{[\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_k \to \beta]}$ ($\lambda x_1 \ldots x_k$-ն կանվանենք աբստրակտոր, իսկ t-ն՝ աբստրակտորի ազդեցության տիրույթ):

Դիցուք $\varphi : \mathrm{M}^k \to \mathrm{M}, \mathrm{k} \geq 1$: Այդ դեպքում φ արտապատկերումը կանվանենք արգումենտի անորոշ արժեքներով ֆունկցիա:

---

[1] *Nigiyan S.A.* Functional Languages. // Programming and Computer Software, 1992, v. 17, No 5, p. 290-297.
[2] *Nigiyan S.A.* On Non-Classical Theory of Computability. // Proceedings of the YSU. Physical and Mathematical Sciences, 2015, No 1, p. 52-60.
[3] *Nigiyan S.A.*, Khondkaryan T.V. On Canonical Notion of δ-reduction and on Translation of Typed λ-terms Into Untyped λ-terms. // Proceedings of the YSU. Physical and Mathematical Sciences, 2017, No 1, p. 46-52
[4] *Barendregt H.P.* The lambda calculus. Its syntax and semantics. North-Holland Publishing Company, 1981.
[5] *Budaghyan L.E.* Formalizing the Notion of δ-reduction in Monotonic Models of Typed λ-calculus. // Algebra, Geometry and Their Applications, vol. 1, YSU press, p. 48-57.

$\varphi: \mathrm{M}^k \to \mathrm{M}, \mathrm{k} \geq 1$ ֆունկցիան կոչվում է հաշվարկելի, եթե գոյություն ունի ալգորիթմ այնպիսին, որ կամայական $m_1, \dots, m_k \in \mathrm{M}$ համար կանգ է առնում $\varphi(m_1, \dots, m_k)$ արժեքով, եթե $\varphi(m_1, \dots, m_k) \neq \perp$, և կանգ է առնում $\perp$ արժեքով կամ աշխատում է անվերջ, եթե $\varphi(m_1, \dots, m_k) = \perp$:

$\varphi: \mathrm{M}^k \to \mathrm{M}, \mathrm{k} \geq 1$ ֆունկցիան կոչվում է խիստ հաշվարկելի, եթե գոյություն ունի ալգորիթմ այնպիսին, որը կանգ է առնում $\varphi(m_1, \dots, m_k)$ արժեքով բոլոր $m_1, \dots, m_k \in \mathrm{M}$ համար:

$\varphi: M^k \to \mathrm{M}$, $\mathrm{k} \geq 1$ ֆունկցիան կոչվում է բնական ընդլայնված, եթե ցանկացած $m_1, \dots, m_k \in M$ համար տեղի ունի հետևյալը. եթե $m_i = \perp$ որևէ i-ի համար, որտեղ $1 \leq i \leq k$, ապա $\varphi(m_1, \dots, m_k) = \perp$:

Այսուհետ կենթադրենք, որ M-ը ռեկուրսիվ բազմություն է և դիտարկվող թերմերը օգտագործում են կամայական կարգի փոփոխականներ և հաստատուններ, որոնց կարգը ≤ 1, որտեղ 1 կարգի հաստատունները խիստ հաշվարկելի, մոնոտոն արգումենտների անորոշ արժեքներով ֆունկցիաներ են:

Դիցուք $t \in \Lambda$ և $x \in V$: Այդ դեպքում x փոփոխականի ֆիքսած մուտքը t թերմում կանվանենք կապված, եթե այն կամ պատկանում է որևէ աբստրակտորի, կամ գտնվում է x փոփոխականն օգտագործող աբստրակտորի ազդեցության տիրույթում: Հակառակ դեպքում՝ x փոփոխականի ֆիքսած մուտքը t թերմում կանվանենք ազատ: Կասենք, որ x փոփոխականը t թերմում ազատ է, եթե այն ունի առնվազն մեկ ազատ մուտք: t թերմի ազատ փոփոխականների բազմությունը կնշանակենք $FV(t)$-ով:

$\sigma = \{t_1/x_1, \dots, t_n/x_n\}$ բազմությունը կանվանենք տեղադրում, որտեղ $x_i \in V_{\alpha_i}, t_i \in \Lambda_i, \alpha_i \in Types, i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j, i, j = 1, \dots, n, n \geq 0$:

Դիցուք $t \in \Lambda$ և $\sigma = \{t_1/x_1, \dots, t_n/x_n\}$-ն որևէ տեղադրում է: Այդ դեպքում $t\sigma$-ով կնշանակենք այն թերմը, որը ստացվում է t թերմում $x_1, \dots, x_n$ փոփոխականների բոլոր ազատ մուտքերը միաժամանակ փոխարինելով համապատասխանաբար $t_1, \dots, t_n$ թերմերով և կասենք, որ այդ թերմը ստացվել է t թերմից σ տեղադրման կիրառման արդյունքում: Կասենք, որ σ տեղադրման կիրառումը t թերմին թույլատրելի է, եթե $t_1, \dots, t_n$ թերմերի փոփոխականների ոչ մի ազատ մուտք ստացված $t\sigma$ թերմում չի կապվում:

Այսուհետ կդիտարկենք միայն տեղադրումների թույլատրելի կիրառումներ:

Կասենք, որ $t_1, t_2 \in \Lambda$ թերմերը կոնգրուենտ են (կնշանակենք $t_1 \equiv t_2$), եթե t_2 թերմը ստացվում է t_1 թերմից $\mathrm{n} \geq 0$ անգամ փոփոխականի վերանվանման միջոցով:

Այսուհետ կոնգրուենտ թերմերն իրարից չենք տարբերի:

Դիցուք τ_1, τ_2 -ը ենթաթերմերի ֆիքսած մուտքեր են t թերմում: Կասենք, որ այդ մուտքերը հատվող են, եթե τ_1 ենթաթերմի ֆիքսած մուտքը գտնվում է τ_2 ենթաթերմի ֆիքսած մուտքում, կամ τ_2 ենթաթերմի ֆիքսած մուտքը գտնվում է τ_1 ենթաթերմի ֆիքսած մուտքում: t թերմում իրար հետ զույգ առ զույգ չհատվող $\tau_1, \dots, \tau_k$ ենթաթերմերի մուտքերը ֆիքսելու համար կօգտվենք $t_{\tau_1, \dots, \tau_k}$ նշանակումից, որտեղ $t \in \Lambda, \tau_i \in \Lambda_{\alpha_i}, \alpha_i \in Types, i = 1, \dots, k, k \geq 1$, իսկ $t_{\tau'_1, \dots, \tau'_k}$-ով կնշանակենք թերմը, որը ստացվում է $t_{\tau_1,\dots,\tau_k}$ թերմից $\tau_1, \dots, \tau_k$ ենթաթերմերի ֆիքսած մուտքերը փոխարինելով համապատասխանաբար $\tau'_1, \dots, \tau'_k$ թերմերով, որտեղ $\tau'_i \in \Lambda_{\alpha_i}$:

Դիցուք $t \in \Lambda$, $FV(t) \subset \{y_1, \dots, y_n\}$, $y_i \in V_{\beta_i}$, $\bar{y}_0 = \langle y_1^0, \dots, y_n^0 \rangle$, $y_i^0 \in \beta_i$, $\beta_i \in Types$, $i = 1, \dots, n$ $(n \geq 0)$: Սահմանենք t թերմի արժեքը փոփոխականների $\bar{y}_0$ արժեքների համար, որը կնշանակենք $Val_{\bar{y}_0}(t)$:

1. եթե $t \equiv c, c \in \alpha, \alpha \in Types$, ապա $Val_{\bar{y}_0}(t) = c$,
2. եթե $t \equiv x$, որտեղ $x \in V_{\alpha_i}, x \equiv y_i, (1 \leq i \leq n)$, ապա $Val_{\bar{y}_0}(t) = y_i^0$,
3. եթե $t \equiv \tau(t_1, \dots, t_k) \in \Lambda_\beta$, $\tau \in \Lambda_{[\alpha_1 \times \dots \times \alpha_k \to \beta]}$, $t_i \in \Lambda_{\alpha_i}, \alpha_i \in Types, i = 1, \dots, k, k \geq 1$, ապա $Val_{\bar{y}_0}\big(\tau(t_1, \dots, t_k)\big) = Val_{\bar{y}_0}(\tau)\Big(Val_{\bar{y}_0}(t_1), \dots, Val_{\bar{y}_0}(t_k)\Big)$,
4. եթե $t \equiv \lambda x_1 \dots x_k[\tau] \in \Lambda_\alpha$, որտեղ $\alpha = [\alpha_1 \times \dots \times \alpha_k \to \beta], \tau \in \Lambda_\beta, x_i \in V_{\alpha_i}$, $\beta, \alpha_i \in Types, i = 1, \dots, k, k \geq 1$, ապա $Val_{\bar{y}_0}(\lambda x_i \dots x_k[\tau]) \in [\alpha_1 \times \dots \times \alpha_k \to \beta]$, և ցանկացած $\bar{x}_0 = \langle x_1^0, \dots, x_k^0 \rangle$, $x_j^0 \in \alpha_i$, $j = 1, \dots, k$ համար ունենք հետևյալը. $Val_{\bar{y}_0}(\lambda x_1 \dots x_k[\tau])(\bar{x}_0) = Val_{\bar{x}_0, \bar{y}'_0}(\tau)$, որտեղ $FV(\lambda x_1 \dots x_k[\tau]) = \{y_{i_1}, \dots, y_{i_s}\}, \bar{y}'_0 = \langle y_{i_1}^0, \dots, y_{i_s}^0 \rangle$, $0 \leq s \leq n$, $\bar{x}_0, \bar{y}'_0 = \langle x_1^0, \dots, x_k^0, y_{i_1}^0, \dots, y_{i_m}^0 \rangle$:

Դիցուք t_1, t_2-ը թերմեր են և $FV(t_1) \cup FV(t_1) = \{y_1, \dots, y_n\}$, $y_i \in V_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in Types$, $i = 1, \dots, n, n \geq 0$: t_1, t_2 թերմերը կանվանենք համարժեք $(t_1 \sim t_2)$, եթե ցանկացած $\bar{y}_0 = \langle y_1^0, \dots, y_n^0 \rangle$-ի համար, որտեղ $y_i^0 \in \alpha_i, i = 1, \dots, n$, տեղի ունի հետևյալը. $Val_{\bar{y}_0}(t_1) = Val_{\bar{y}_0}(t_2)$:

Սահմանում 1.1.3: β-ռեդուկցիայի գաղափար կանվանենք զույգերի հետևյալ բազմությունը.

$$\beta = \{(\lambda x_1 \dots x_k[\tau](t_1, \dots, t_k), \tau\{t_1/x_1, \dots, t_k/x_k\}) | \\ x_i \in V_{\alpha_i}, t_i \in \Lambda_{\alpha_i}, \tau \in \Lambda, \alpha_i \in Types, i = 1, \dots, k, k \geq 1\},$$

որտեղ $\lambda x_1 \dots x_k[\tau](t_1, \dots, t_k)$ թերմը կանվանենք β-ռեդեքս, իսկ $\tau\{t_1/x_1, \dots, t_k/x_k\}$ թերմը՝ նրա փաթեթ:

Կասենք, որ t' թերմը ստացվում է t թերմից միաքայլ β-ռեդուկցիայի միջոցով և կնշանակենք $t \to_\beta t'$, եթե $t \equiv t_\tau, t' \equiv t_{\tau'}$, որտեղ τ-ն β-ռեդեքս է, իսկ τ'-ը՝ նրա փաթեթը: Կասենք, որ t' թերմը ստացվում է t թերմից β-ռեդուկցիայի միջոցով և կնշանակենք $t \to\to_\beta t'$, եթե կամ $t \equiv t'$, կամ գոյություն ունի թերմերի վերջավոր հաջորդականություն $t_1, \dots, t_k, k \geq 0$ այնպիսին, որ $t \to_\beta t_1 \to_\beta \dots \to_\beta t_k \to_\beta t'$:

Սահմանում 1.1.4: δ-ռեդեքսը ունի $f(t_1, \dots, t_k)$ տեսքը, որտեղ $f \in [M^k \to M]$, $t_i \in \Lambda_M$, $i = 1, \dots, k, k \geq 1$: $f(t_1, \dots, t_k)$ δ-ռեդեքսի փաթեթը կամ $m \in M$ թերմն է և այդ դեպքում $f(t_1, \dots, t_k) \sim m$, կամ էլ $t_j (1 \leq j \leq k)$ ենթաթերմը և այդ դեպքում $f(t_1, \dots, t_k) \sim t_j$: (τ, τ') զույգերի բազմությունը, որտեղ τ-ն δ-ռեդեքս է, իսկ τ'-ը՝ նրա փաթեթը, կանվանենք δ-ռեդուկցիայի գաղափար:

Կասենք, որ t' թերմը ստացվում է t թերմից միաքայլ δ-ռեդուկցիայի միջոցով և կնշանակենք $t \to_\delta t'$, եթե $t \equiv t_\tau, t' \equiv t_{\tau'}$, որտեղ τ-ն δ-ռեդեքս է, իսկ τ'-ը՝ նրա փաթեթը: Կասենք, որ t' թերմը ստացվում է t թերմից δ-ռեդուկցիայի միջոցով և կնշանակենք $t \to\to_\delta t'$, եթե կամ $t \equiv t'$, կամ գոյություն ունի թերմերի վերջավոր հաջորդականություն $t_1, \dots, t_k, k \geq 0$ այնպիսին, որ $t \to_\delta t_1 \to_\delta \dots \to_\delta t_k \to_\delta t'$:

Կասենք, որ τ թերմը $\beta\delta$-ռեդեքս է, եթե այն կամ β-ռեդեքս է, կամ δ-ռեդեքս է: Կասենք, որ t' թերմը ստացվում է t թերմից միաքայլ $\beta\delta$-ռեդուկցիայի միջոցով և կնշանակենք $t \to t'$, եթե կամ $t \to_\beta t'$, կամ $t \to_\delta t'$: Կասենք, որ t' թերմը ստացվում է t թերմից $\beta\delta$-ռեդուկցիայի միջոցով և կնշանակենք $t \to\to t'$, եթե կամ $t \equiv t'$, կամ գոյություն ունի թերմերի վերջավոր հաջորդականություն $t_1, \dots, t_k, k \geq 0$ այնպիսին, որ $t \to t_1 \to \dots \to t_k \to t'$:

t թերմը կանվանենք β-նորմալ ձև, եթե նրանում չկա ենթաթերմ, որը β-ռեդեքս է: Բոլոր β-նորմալ ձևերի բազմությունը նշանակենք $\beta\text{-}NF$: t թերմը կանվանենք նորմալ ձև, եթե նրանում չկա ենթաթերմ, որը $\beta\delta$-ռեդեքս է: Բոլոր նորմալ ձևերի բազմությունը նշանակենք NF:

Կասենք, որ δ-ռեդուկցիայի գաղափարը էֆեկտիվ է, եթե գոյություն ունի ալգորիթմ այնպիսին, որ կամայական $f(t_1, \dots, t_k)$ թերմի համար, որտեղ $f \in [M^k \to M]$, $t_i \in \Lambda_M, i = 1, \dots, k, k \geq 1$, վերադարձնում է այդ թերմի փաթեթը, եթե այն δ-ռեդեքս է և կանգ է առնում "ոչ" պատասխանով՝ հակառակ դեպքում: Կասենք, որ δ-ն միարժեք δ-ռեդուկցիայի գաղափար է, եթե տեղի ունի հետևյալը. $(\tau, \tau'), (\tau, \tau'') \in \delta \Rightarrow \tau' \equiv \tau''$, որտեղ $\tau, \tau', \tau'' \in \Lambda_M$:

Սահմանում 1.1.5: Էֆեկտիվ, միարժեք δ-ռեդուկցիայի գաղափարը կանվանենք կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափար, եթե.

1. $t \in \beta\text{-}NF, t \sim m, m \in M\backslash\{\perp\} \Rightarrow t \to\to_\delta m,$
2. $t \in \beta\text{-}NF, FV(t) = \emptyset, t \sim \perp \Rightarrow t \to\to_\delta \perp$:

1.2 բաժնում սահմանվում են տիպիզացված ֆունկցիոնալ ծրագրերը:

Դիտարկենք հետևյալ P հավասարումների համակարգը.

$$P \begin{cases} F_1 = t_1 \\ \quad \dots \\ F_n = t_n, \end{cases} \qquad (1)$$

որտեղ $F_i \in V_{\alpha_i}, i \neq j \Rightarrow F_i \not\equiv F_j, t_i \in \Lambda_{\alpha_i}, FV(t_i) \subseteq \{F_1, \dots, F_n\}, \alpha_i \in Types, i, j = 1, \dots, n, n \geq 1, k \geq 1$:

Սահմանում 1.2.1. Դիտարկենք հավասարումների (1) համակարգին համապատասխանող հետևյալ $\Psi_P: \alpha_1 \times \dots \times \alpha_n \to \alpha_1 \times \dots \times \alpha_n$ արտապատկերումը, որը սահմանվում է հետևյալ կերպ. եթե $\bar{g} = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$, որտեղ $g_i \in \alpha_i, i = 1, \dots, n$, ապա $\Psi_P(\bar{g}) = \left(Val_{\bar{g}}(t_1), \dots, Val_{\bar{g}}(t_n)\right)$: Կասենք, որ $\bar{g} \in \alpha_1 \times \dots \times \alpha_n$ հանդիսանում է (1) հավասարումների համակարգի լուծում, եթե $\Psi_P(\bar{g}) = \bar{g}$, այսինքն՝ $\left(Val_{\bar{g}}(t_1), \dots, Val_{\bar{g}}(t_n)\right) = (g_1, \dots, g_n)$:

Թեորեմ 1.2.1: (1) տեսքի ցանկացած հավասարումների համակարգ ունի փոքրագույն լուծում:

Թեորեմ 1.2.1-ի ապացույցը բխում է [1] աշխատությունից :

Սահմանում 1.2.2: Հավասարումների (1) համակարգը կանվանենք

[1] *Nigiyan S.A.* Functional Languages. Programming and Computer Software, 1992, v. 17, No 5, p. 290-297.

տիպիզացված ֆունկցիոնալ ծրագիր, եթե $F_1 \in V_{[M^k \to M]}, k \geq 1$: $F_1 = t_1$ հավասարումը կոչվում է P ծրագրի գլխավոր հավասարում, իսկ $f_P = (\bar{f})_1$-ը՝ ծրագրի անշարժ կետի սեմանտիկա (հիմնական սեմանտիկա), որտեղ $\bar{f}$-ը ծրագրի փոքրագույն լուծումն է, իսկ $(\bar{f})_1$-ը՝ $\bar{f}$-ի առաջին կոմպոնենտը:

Այսուհետ տիպիզացված ֆունկցիոնալ ծրագիրը կանվանենք ուղղակի ծրագիր:

Դիցուք P-ն (1) տեսքի ծրագիր է և f_P-ն նրա անշարժ կետի սեմանտիկան է: Այդ դեպքում անշարժ կետի սեմանտիկային համապատասխանեցնենք $Fix(P)$ բազմություն, որը կսահմանենք հետևյալ կերպ.

$Fix(P) = \{(m_1, \dots, m_k, m) | \ f_P(m_1, \dots, m_k) = m$, որտեղ $m_1, \dots, m_k, m \in M, k \geq 1\}$:

1.3 բաժնում տրվում է ինտերպրետացիայի ալգորիթմի գաղափարը և ձևակերպվում անհակասելիության մասին թեորեմը:

Ֆիքսենք կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի ինչ-որ գաղափար և մտցնենք ինտերպրետացիայի A ալգորիթմի սահմանումը:

Սահմանում 1.3.1: Ինտերպրետացիայի A ալգորիթմը կիրառվում է (1) տեսքի P ծրագրի և $F_1(m_1, \dots, m_k)$ թերմի վրա, որտեղ $m_i \in M, i = 1, \dots, k, k > 0$, կամ կանգ է առնում $m \in M$ պատասխանով, կամ աշխատում է անվերջ: Ինտերպրետացիայի A ալգորիթմը օգտագործում է հետևյալ 3 գործողությունները.

1. $F_1, \dots, F_n$ փոփոխականների որոշ ազատ մուտքերի փոխարինում համապատասխանաբար $t_1, \dots, t_n$ թերմերով,
2. միաքայլ β-ռեդուկցիա,
3. միաքայլ δ-ռեդուկցիա:

Սահմանում 1.3.2: Դիցուք A-ն ինտերպրետացիայի որևէ ալգորիթմ է և P-ն (1) տեսքի ծրագիր: Ինտերպրետացիայի A ալգորիթմի վրա հիմնված պրոցեդուրային սեմանտիկային համապատասխանող $Proc_A(P)$ բազմությունը սահմանենք հետևյալ կերպ.

$Proc_A(P) = \{(m_1, \dots, m_k, m) | \ A$ ալգորիթմը P-ի և $F_1(m_1, \dots, m_k)$-ի վրա կանգ է առնում m պատասխանով, որտեղ $m_1, \dots, m_k, m \in M, k \geq 1\}$:

Սահմանում 1.3.3: Կասենք, որ ինտերպրետացիայի A ալգորիթմը անհակասելի է, եթե ցանկացած կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարի և ցանկացած P ծրագրի համար տեղի ունի հետևյալը. $Proc_A(P) \subset Fix(P)$:

Թեորեմ 1.3.1: Ինտերպրետացիայի ցանկացած ալգորիթմ անհակասելի է:

Թեորեմ 1.3.1-ի ապացույցը բխում է [1] աշխատությունից:

Գլուխ 2-ում ուսումնասիրվում է կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարի դեպքում βδ-ռեդուկցիայի գաղափարը: Երկրորդ գլուխը բաղկացած է երեք բաժնից:

2.1 բաժնում ուսումնասիրվում է հիմնական կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարի դեպքում տիպիզացված λ-թերմի βδ-նորմալ ձևի միակությունը:

Սահմանում 2.1.1: Դիցուք C-ն խիստ հաշվարկելի, մոնոտոն արգումենտների անորոշ արժեքներով ֆունկցիաների ռեկուրսիվ բազմություն է: Սահմանենք

---

[1] Акопян Р.Ю. О процедурных семантиках строго типизированных функциональных программ. // Ученые записки ЕГУ, 2008, № 3, р. 59-69.

հետևյալ δ-ռեդուկցիայի գաղափարը, որին պատկանում են միայն հետևյալ զույգերը՝ կամայական $f \in C, f: M^k \to M, k \geq 1$ համար ունենք.

1. եթե $f(m_1, \ldots, m_k) = m$, որտեղ $m, m_1, \ldots, m_k \in M, m \neq \perp$, ապա $(f(\tau_1, \ldots, \tau_k), m) \in \delta$, որտեղ $\tau_i = m_i$, եթե $m_i \neq \perp$ և $\tau_i \equiv t_i$, $t_i \in \Lambda_M$, եթե $m_i = \perp$, $i = 1, \ldots, k, k \geq 1$,
2. եթե $f(m_1, \ldots, m_k) = \perp$, որտեղ $m_1, \ldots, m_k \in M$, ապա $(f(m_1, \ldots, m_k), \perp) \in \delta$:

[1]Աշխատանքից հետևում է, որ սահմանված δ-ռեդուկցիայի գաղափարը կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափար է, որը կանվանենք հիմնական կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափար:

Թեորեմ 2.1.1. Հիմնական կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարի համար տեղի ունի հետևյալը.

$$\forall t \in \Lambda(t \to\to t', t \to\to t'', t', t'' \in NF \Rightarrow t' \equiv t''):$$

Նախքան Թեորեմ 2.1.1-ն ապացուցելը, տրվում է Սահմանում 2.1.2-ը և ապացուցվում Թեորեմ 2.1.2-ը:

Սահմանում 2.1.2. Կասենք, որ $\beta\delta$-ռեդուկցիայի գաղափարը օժտված է Չորչ-Ռոսսերի հատկությամբ, եթե կամայական $t \in \Lambda_\alpha, \alpha \in$ Types, թերմի համար տեղի ունի հետևյալը. եթե $t \to\to t_1$ և $t \to\to t_2$, որտեղ $t_1, t_2 \in \Lambda_\alpha$, ապա գոյություն ունի $t' \in \Lambda_\alpha$ թերմ այնպիսին, որ $t_1 \to\to t'$ և $t_2 \to\to t'$:

Թեորեմ 2.1.2. Հիմնական կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարի դեպքում $\beta\delta$-ռեդուկցիայի գաղափարը օժտված է Չորչ-Ռոսսերի հատկությամբ:

Թեորեմ 2.1.2-ն ապացուցելու համար ապացուցվում են Լեմմա 2.1.1-ը և Լեմմա 2.1.2-ը:

Լեմմա 2.1.1. Դիցուք δ-ն հիմնական կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափար է և $t \in \Lambda_\alpha, \alpha \in Types$: Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալը. եթե $t \to t', t \to t'', t', t'' \in \Lambda_\alpha$, ապա գոյություն ունի $t''' \in \Lambda_\alpha$ թերմ այնպիսին, որ $t' \to\to t'''$ և $t'' \to\to t'''$:

Դիցուք $t \in \Lambda_\alpha, \alpha \in Types$ և $t \equiv t_1 \to \ldots \to t_n, n \geq 1$, որտեղ $t_i \in \Lambda_\alpha, i = 1, \ldots, n$, ապա $t_1, \ldots, t_n$ հաջորդականությունը կոչվում է t_n թերմի արտածում t թերմից, իսկ n-ը կոչվում է արտածման երկարություն:

Լեմմա 2.1.2. Կամայական $t \in \Lambda$ թերմից նորմալ ձևի արտածումների քանակը վերջավոր է:

Օգտվելով Թեորեմ 2.1.2-ից և կատարելով ինդուկտիվ ենթադրություն ապացուցվում է Թեորեմ 2.1.1-ը:

2.2 բաժնում ներմուծվում է տեղադրելիության և ժառանգականության հատկությունը (ՏԺ-հատկության) և ապացուցվում ՏԺ-հատկության՝ կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարի դեպքում տիպիզացված λ-թերմի նորմալ ձևի միակության համար, անհրաժեշտ և բավարար պայման լինելը:

Սահմանում 2.2.1: Կասենք, որ կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարը օժտված է տեղադրելիության հատկությամբ (Տ-հատկությամբ), եթե $(f(t_1, \ldots, t_k), \tau) \in \delta$,

---

[1] *Nigiyan S.A.*, Khondkaryan T.V. On Canonical Notion of δ-reduction and on Translation of Typed λ-terms Into Untyped λ-terms. // Proceedings of the YSU. Physical and Mathematical Sciences, 2017, No 1, p. 46-52.

որտեղ $t_1,\dots,t_k,\tau \in \Lambda_M, f \in [M^k \to M], FV\big(f(t_1,\dots,t_k)\big) \neq \emptyset, k \geq 1$, և տեղի ունի հետևյալ դեպքերից որևէ մեկը.

S1. $f(t_1,\dots,t_k)$ ոչ հաստատուն թերմ է և $\tau \equiv t_j$, $1 \leq j \leq k$, կամ

S2. $f(t_1,\dots,t_k) \sim\perp$ և $\tau \equiv t_j$, $1 \leq j \leq k$, կամ

S3. $f(t_1,\dots,t_k) \sim\perp$ և $\tau \equiv\perp$,

ապա կամայական $\sigma = \{\tau_1/x_1,\dots,\tau_n/x_n\}$ տեղադրության թույլատրելի կիրառման համար, որտեղ $\tau_i \in \Lambda_{\alpha_i}, x_i \in V_{\alpha_i}, \alpha_i \in Types, i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j, i,j = 1,\dots,n, n \geq 0$, գոյություն ունեն $t_1',\dots,t_k'$ թերմեր այնպիսին, որ $t_1\sigma \to\to t_1',\dots,t_k\sigma \to\to t_k'$ և եթե $\tau \equiv t_j$, ապա $\big(f(t_1',\dots,t_k'),t_j'\big) \in \delta$, և եթե $\tau \equiv\perp$, ապա $(f(t_1',\dots,t_k'),\perp) \in \delta$:

Սահմանում 2.2.2: Կասենք, որ կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարը օժտված է ժառանգականության հատկությամբ (Ժ-հատկությամբ), եթե $(f(t_1,\dots,t_k),\tau) \in \delta$, որտեղ $t_1,\dots,t_k,\tau \in \Lambda_M$, $f \in [M^k \to M]$, $FV\big(f(t_1, \dots,t_k)\big) \neq \emptyset, k \geq 1$ և $t_i \equiv t_{i_r}, 1 \leq i \leq k$, r-ը $\beta\delta$-ռեդեքս է, և տեղի ունի հետևյալ դեպքերից որևէ մեկը.

Ժ1. $f(t_1,\dots,t_k)$ ոչ հաստատուն թերմ է և $\tau \equiv t_j$, $1 \leq j \leq k$, կամ

Ժ2. $f(t_1,\dots,t_k) \sim\perp$ և $\tau \equiv t_j$, $1 \leq j \leq k$, կամ

Ժ3. $f(t_1,\dots,t_k) \sim\perp$ և $\tau \equiv\perp$,

ապա գոյություն ունեն $t_1',\dots,t_k' \in \Lambda_M$ թերմեր այնպիսին, որ $t_1 \to\to t_1',\dots,t_{i_{r'}} \to\to t_i',\dots,$ $t_k \to\to t_k'$, որտեղ r'-ը r $\beta\delta$-ռեդեքսի փաթեթն է, և եթե $\tau \equiv t_j$, ապա $\big(f(t_1',\dots,t_k'),t_j'\big) \in \delta$, և եթե $\tau \equiv\perp$, ապա $(f(t_1',\dots,t_k'),\perp) \in \delta$:

Սահմանում 2.2.3: Կասենք, որ կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարը օժտված է տեղադրելիության և ժառանգականության հատկությամբ (ՏԺ-հատկությամբ), եթե այն օժտված է Տ-հատկությամբ և Ժ-հատկությամբ:

Թեորեմ 2.2.1: Ցանկացած կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարի համար տեղի ունի հետևյալը.

$\forall t \in \Lambda(t \to\to t', t \to\to t'', t', t'' \in NF \Rightarrow t' \equiv t'') \Leftrightarrow$ կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարը օժտված է ՏԺ-հատկությամբ:

Նախքան Թեորեմ 2.2.1-ն ապացուցելը, ապացուցվում է Լեմմա 2.2.1-ը:

Լեմմա 2.2.1. Կամայական կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարի համար, որն օժտված է ՏԺ-հատկությամբ և կամայական $t \in \Lambda_\alpha, \alpha \in Types$ թերմի համար տեղի ունի հետևյալը. եթե $t \to t', t \to t''$, $t', t'' \in \Lambda_\alpha$, ապա գոյություն ունի $t''' \in \Lambda_\alpha$ թերմ այնպիսին, որ $t' \to\to t'''$ և $t'' \to\to t'''$:

Լեմմա 2.2.1-ն ապացուցվում է Պնդում 2.2.1-ի և Պնդում 2.2.2-ի միջոցով:

Օգտվելով Լեմմա 2.2.1-ից ապացուցվում է Թեորեմ 2.2.1-ի բավարարությունը, իսկ անհրաժեշտությունն ապացուցվում է կատարելով հակասող ենթադրություն:

2.3 բաժնում ուսումնասիրվում է ՏԺ-հատկությունը՝ ՏԺ-հատկության յուրաքանչյուր կետի համար, բերվում է կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարի օրինակ, որի դեպքում բավարարվում են ՏԺ-հատկության բոլոր կետերը՝ բացի նշված կետից, և ցույց է տրվում, որ այդ կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարի դեպքում գոյություն ունի թերմ, որի համար խախտվում է $\beta\delta$-նորմալ ձևի միակությունը: Դրա համար ապացուցվում են Պնդում 2.3.1-2.3.6-ները:

Գլուխ 3-ում ներմուծվում են ինտերպրետացիայի FS (full substitution), PES (parallel external substitution), LES (left external substitution), PIS (parallel internal substitution), LIS (left internal substitution), PAS (pasive), ACT (active) ալգորիթմները և ուսումնասիրվում է նրանց կախվածությունը կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարից ըստ անորոշ արժեքի: Երրորդ գլուխը բաղկացած է երկու բաժնից:

3.1 բաժնում ներմուծվում են ինտերպրետացիայի FS, PES, LES, PIS, LIS, PAS, ACT ալգորիթմները:

Սահմանում 3.1.1: F փոփոխականի ազատ մուտքը t թերմում կանվանենք արտաքին, եթե այն չի գտնվում այնպիսի ապլիկատորի ազդեցության տիրույթում, որը պարունակում է որևէ փոփոխականի ազատ մուտք (t թերմում):

Սահմանում 3.1.2: F փոփոխականի ազատ մուտքը t թերմում կանվանենք ներքին, եթե այն չի մտնում այնպիսի τ ապլիկատորի մեջ, որի ազդեցության տիրույթը պարունակում է որևէ փոփոխականի ազատ մուտք (t թերմում):

Դիցուք $A \in \{FS, PES, LES, PIS, LIS, PAS, ACT\}$: Ինտերպրետացիայի A ալգորիթմը մուտքում ստանում է (1) տեսքի P ծրագիր և $t \in \Lambda$ թերմ, և կանգ է առնում $A(P,t)$ պատասխանով, որտեղ $A(P,t) \in NF$, $FV\big(FS(P,t)\big) \cap \{F_1, \dots, F_n\} = \emptyset$, կամ աշխատում է անվերջ:

FS - *Լրիվ տեղադրման ինտերպրետացիայի ալգորիթմ.*

Քայլ 1. եթե $t \in NF$ և $FV(t) \cap \{F_1, \dots, F_n\} = \emptyset$, ապա t, հակառակ դեպքում, եթե $t \notin NF$, ապա անցնել Քայլ 2-ին, հակառակ դեպքում անցնել Քայլ 3-ին,

Քայլ 2. եթե $t \equiv t_\tau$ և τ-ն t թերմում ամենաձախ $\beta\delta$-ռեդեքսն է, ապա $FS(P, t_{\tau'})$, որտեղ τ'-ն τ $\beta\delta$-ռեդեքսի փաթեթն է,

Քայլ 3. $FS(P, t\{t_1/F_1, \dots, t_n / F_n\})$:

PES - *Զուգահեռ արտաքին տեղադրման ինտերպրետացիայի ալգորիթմ.*

Քայլ 1. եթե $t \in NF$ և $FV(t) \cap \{F_1, \dots, F_n\} = \emptyset$, ապա t, հակառակ դեպքում, եթե $t \notin NF$, ապա անցնել Քայլ 2-ին, հակառակ դեպքում անցնել Քայլ 3-ին,

Քայլ 2. եթե $t \equiv t_\tau$ և τ-ն t թերմում ամենաձախ $\beta\delta$-ռեդեքսն է, ապա $PES(P, t_{\tau'})$, որտեղ τ'-ն τ $\beta\delta$-ռեդեքսի փաթեթն է,

Քայլ 3. եթե $t \equiv t_{F_{i_1},\dots,F_{i_k}}$, որտեղ $1 \le i_j \le n, j = 1, \dots, k, k \ge 1$ և $t_{F_{i_1},\dots,F_{i_k}}$-ն t թերմն է, որում ֆիքսված են $F_1, \dots, F_n$ փոփոխականների բոլոր արտաքին ազատ մուտքերը, ապա $PES\left(P, t_{t_{i_1},\dots,t_{i_k}}\right)$:

LES - Ձախ արտաքին տեղադրման ինտերպրետացիայի ալգորիթմ.

Քայլ 1. եթե $t \in NF$ և $FV(t) \cap \{F_1, \dots, F_n\} = \emptyset$, ապա t, հակառակ դեպքում, եթե $t \notin NF$, ապա անցնել Քայլ 2-ին, հակառակ դեպքում անցնել Քայլ 3-ին,

Քայլ 2. եթե $t \equiv t_\tau$ և τ-ն t թերմում ամենաձախ $\beta\delta$-ռեդեքսն է, ապա $LES(P, t_{\tau'})$, որտեղ τ'-ն τ $\beta\delta$-ռեդեքսի փաթեթն է,

Քայլ 3. եթե $t \equiv t_{F_i}$, որտեղ $1 \le i \le n$, և t_{F_i}-ն t թերմն է, որում ֆիքսված է $F_1, \dots, F_n$ փոփոխականների ամենաձախ արտաքին ազատ մուտքը, ապա $LES\big(P, t_{t_i}\big)$:

PIS - Զուգահեռ ներքին տեղադրման ինտերպրետացիայի ալգորիթմ.

Քայլ 1. եթե $t \in NF$ և $FV(t) \cap \{F_1, \dots, F_n\} = \emptyset$, ապա t, հակառակ դեպքում, եթե $t \notin NF$, ապա անցնել Քայլ 2-ին, հակառակ դեպքում անցնել Քայլ 3-ին,

Քայլ 2. եթե $t \equiv t_\tau$ և τ-ն t թերմում ամենաձախ $\beta\delta$-ռեդեքսն է, ապա $PIS(P, t_{\tau'})$, որտեղ τ'-ն τ $\beta\delta$-ռեդեքսի փաթեթն է,

Քայլ 3. եթե $t \equiv t_{F_{i_1},\dots,F_{i_k}}$, որտեղ $1 \le i_j \le n, j = 1, \dots, k, k \ge 1$ և $t_{F_{i_1},\dots,F_{i_k}}$-ն t թերմն է, որում ֆիքսված են $F_1, \dots, F_n$ փոփոխականների բոլոր ներքին ազատ մուտքերը, ապա $PIS\left(P, t_{t_{i_1},\dots,t_{i_k}}\right)$:

LIS - Ձախ ներքին տեղադրման ինտերպրետացիայի ալգորիթմ.

Քայլ 1. եթե $t \in NF$ և $FV(t) \cap \{F_1, \dots, F_n\} = \emptyset$, ապա t, հակառակ դեպքում, եթե $t \notin NF$, ապա անցնել Քայլ 2-ին, հակառակ դեպքում անցնել Քայլ 3-ին,

Քայլ 2. եթե $t \equiv t_\tau$ և τ-ն t թերմում ամենաձախ $\beta\delta$-ռեդեքսն է, ապա $LIS(P, t_{\tau'})$, որտեղ τ'-ն τ $\beta\delta$-ռեդեքսի փաթեթն է,

Քայլ 3. եթե $t \equiv t_{F_i}$, որտեղ $1 \le i \le n$, և t_{F_i}-ն t թերմն է, որում ֆիքսված է $F_1, \dots, F_n$ փոփոխականների ամենաձախ ներքին ազատ մուտքը, ապա $LIS(P, t_{t_i})$:

PAS - Պասիվ ինտերպրետացիայի ալգորիթմ.

Քայլ 1. եթե $t \in NF$ և $FV(t) \cap \{F_1, \dots, F_n\} = \emptyset$, ապա t, հակառակ դեպքում անցնել Քայլ 2-ին,

Քայլ 2. եթե $t \equiv t_{F_i}(1 \le i \le n)$, որտեղ t_{F_i}-ն t թերմն է, որում ֆիքսված է $F_1, \dots, F_n$ փոփոխականների ամենաձախ ազատ մուտքը և այդ մուտքը գտնվում է t թերմի ամենաձախ $\beta\delta$-ռեդեքսից ձախ, ապա $PAS(P, t_{\tau_i})$, հակառակ դեպքում անցնել Քայլ 3-ին,

Քայլ 3. եթե $t \equiv t_{\lambda x_1 \dots x_k[\tau](\tau_1,\dots,\tau_k)}$ և $\lambda x_1, \dots, x_k[\tau](\tau_1, \dots, \tau_k)$-ը t թերմում ամենաձախ $\beta\delta$-ռեդեքսն է, որը β-ռեդեքս է, ապա $PAS(P, t_{\tau\{\tau_1/x_1,\dots,\tau_k/x_k\}})$, հակառակ դեպքում անցնել Քայլ 4-ին,

Քայլ 4. եթե $t \equiv t_\tau$ և τ-ն t թերմում ամենաձախ δ-ռեդեքսն է, ապա $PAS(P, t_{\tau'})$, որտեղ τ'-ն τ δ-ռեդեքսի փաթեթն է:

ACT - Ակտիվ ինտերպրետացիայի ալգորիթմ.

Քայլ 1. եթե $t \in NF$ և $FV(t) \cap \{F_1, \dots, F_n\} = \emptyset$, ապա t, հակառակ դեպքում անցնել Քայլ 2-ին,

Քայլ 2. եթե $t \equiv t_{F_i}$, որտեղ $1 \le i \le n$ և t_{F_i}-ն t թերմն է, որում ֆիքսված է $F_1, \dots, F_n$ փոփոխականների ամենաձախ ազատ մուտքը, և այդ մուտքը գտնվում է t թերմի ամենաձախ $\beta\delta$-ռեդեքսից ձախ, ապա $ACT(P, t_{t_i})$, հակառակ դեպքում անցնել Քայլ 3-ին,

Քայլ 3. եթե $t \equiv t_{\lambda x_1 \dots x_k[\tau](\tau_1,\dots,\tau_k)}$ և $\lambda x_1 \dots x_k[\tau](\tau_1, \dots, \tau_k)$-ը t թերմում ամենաձախ $\beta\delta$-ռեդեքսն է, որը β-ռեդեքս է, ապա $ACT\left(P, t_{\tau\{ACT(P,\tau_1)/x_1,\dots,ACT(P,\tau_k)/x_k\}}\right)$, հակառակ դեպքում անցնել Քայլ 4-ին,

Քայլ 4. եթե $t \equiv t_\tau$ և τ-ն t թերմում ամենաձախ δ-ռեդեքսն է, ապա $ACT(P, t_{\tau'})$, որտեղ τ'-ն τ δ-ռեդեքսի փաթեթն է:

3.2 բաժնում ուսումնասիրվում է ինտերպրետացիայի FS, PES, LES, PIS, LIS, PAS, ACT ալգորիթմների կախվածությունը կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարից ըստ անորոշ արժեքի:

Սահմանում 3.2.1: Կասենք, որ ինտերպրետացիայի A ալգորիթմը կախված է կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարից ըստ անորոշ արժեքի, եթե գոյություն ունեն δ_1, δ_2 կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարներ, P ծրագիր և $m_1, \dots, m_k \in M, k \geq 1$ այնպիսին, որ δ_1-ի դեպքում $(m_1, \dots, m_k, \perp) \in Proc_A(P)$, իսկ δ_2-ի դեպքում $(m_1, \dots, m_k, \perp) \notin Proc_A(P)$:

Թեորեմ 3.2.1: Ինտերպրետացիայի $FS, PES, LES, PIS, LIS, PAS, ACT$ ալգորիթմները կախված են կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարից ըստ անորոշ արժեքի:

Գլուխ 4-ում ուսումնասիրվում են ինտերպրետացիայի FS, PES, LES, PIS, LIS, PAS, ACT ալգորիթմների համեմատելիությունը ըստ անորոշ արժեքի: Չորրորդ գլուխը բաղկացած է մեկ բաժնից:

Սահմանենք ինտերպրետացիայի ալգորիթմների բազմության վրա $\prec_\perp$ բինար հարաբերություն: Դիցուք A-ն և B-ն ինտերպրետացիայի ալգորիթմներ են: Այդ դեպքում $A \prec_\perp B$, եթե ցանկացած կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարի, P ծրագրի և ցանկացած $m_1, \dots, m_k \in M, k \geq 1$ համար տեղի ունի հետևյալը. եթե $(m_1, \dots, m_k, \perp) \in Proc_A(P)$, ապա $(m_1, \dots, m_k, \perp) \in Proc_B(P)$:

Սահմանում 4.1.1: Կասենք, որ ինտերպրետացիայի A և B ալգորիթմները համեմատելի են ըստ անորոշ արժեքի, եթե $A \prec_\perp B$ կամ $B \prec_\perp A$, հակառակ դեպքում, եթե $A \nprec_\perp B$ և $B \nprec_\perp A$, ապա կասենք, որ A և B ալգորիթմները անհամեմատելի են ըստ անորոշ արժեքի:

Թեորեմ 4.1.1. Ինտերպրետացիայի FS, PES, LES, PIS, LIS, PAS, ACT ալգորիթմները զույգ առ զույգ անհամեմատելի են ըստ անորոշ արժեքի:

Թեորեմ 4.1.1-ն ապացուցելու համար դիտարկվում է ալգորիթմների 21 զույգ, որոնք ներառված են Պնդում 4.1.1—4.1.13-ներում:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԱՐԴՅՈՒՆՔՆԵՐԸ

1. Ցույց է տրվել, որ հիմնական կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարի դեպքում $\beta\delta$-ռեդուկցիայի գաղափարը օժտված է Չորչ-Ռոսսերի հատկությամբ, որից էլ բխում է, հիմնական կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարի դեպքում, տիպիզացված λ-թերմերի $\beta\delta$-նորմալ ձևի միակությունը [3], [4]:
2. Ցույց է տրվել, որ տեղադրելիության և ժառանգականության հատկությունը (ՏԺ-հատկությունը) հանդիսանում է անհրաժեշտ և բավարար պայման կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարի դեպքում տիպիզացված λ-թերմերի $\beta\delta$-նորմալ ձևի միակության համար [5], [6]:
3. Ցույց է տրվել, որ ինտերպրետացիայի FS, PES, LES, PIS, LIS, PAS, ACT ալգորիթմները կախված են կանոնիկ δ-ռեդուկցիայի գաղափարից ըստ անորոշ արժեքի [1]:
4. Ցույց է տրվել, որ ինտերպրետացիայի FS, PES, LES, PIS, LIS, PAS, ACT ալգորիթմները զույգ առ զույգ անհամեմատելի են ըստ անորոշ արժեքի [2]:

ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅԱՆ ԾՐՋԱՆԱԿՆԵՐՈՒՄ ՀՐԱՏԱՐԱԿՎԱԾ ԱՇԽԱՏԱՆՔՆԵՐԻ ՑԱՆԿԸ

1. *Grigoryan D.A.*, On Dependence of Interpretation Algorithms of Typed Functional Programs on Canonical Notion of δ-Reduction. // Mathematical Problems of Computer Science, 2018, v. 49, p. 103-109.
2. *Grigoryan D.A.*, On Incomparability of Interpretation Algorithms of Typed Functional Programs with Respect to Undefined Value. // Proceedings of the YSU, Physical and Mathematical Science, 2018, v. 52, № 2, p. 109-118.
3. *Grigoryan D.A.*, On Main Canonical Notion of δ-Reduction. // Proceedings of the YSU, Physical and Mathematical Science, 2018, v. 52, № 3, p. 191-199.
4. *Grigoryan D.A.*, On Church-Rosser Property of Notion of βδ-Reduction for Canonical Notion of δ-Reduction. // Mathematical Problems of Computer Science, 2018, v. 50, p. 81-87.
5. *Budaghyan L.E., Grigoryan D.A., Torosyan L.H.*, A Necessary and Sufficient Condition for the Uniqueness of $\beta\delta$-Normal Form of Typed λ-Terms for the Canonical Notion of δ-Reduction. // Proceedings of the YSU, Physical and Mathematical Science, 2019, v. 53, № 1, p. 28-36.
6. *Grigoryan D.A.*, On the Uniqueness of $\beta\delta$-Normal Form of Typed λ-Terms for the Canonical Notion of δ-Reduction. // Proceedings of the YSU, Physical and Mathematical Science, 2019, v. 53, № 1, p. 37-46.

РЕЗЮМЕ

Григорян Давит Андраникович

“О Реализации Типизированных Функциональных Программ”

Работа посвящена проблемам функционального программирования. Объектом исследования являются типизированные функциональные программы, а основной рассматриваемой проблемой – фундаментальная задача вычисления, определяемой программой функции. Типизированная функциональная программа представляет собой систему уравнений (с отделяющимися переменными) в монотонной модели типового λ-исчисления. Каждое уравнение программы имеет вид $F = t$, где F – переменная, t – типизированный λ-терм, тип которого совпадает с типом переменной F. Рассматриваемые нами типизированные функциональные программы используют переменные любых порядков и константы порядок которых ≤1, где константы порядка 1 являются строго вычислимыми, монотонными функциями с неопределенными значениями аргументов. Основной семантикой типизированной функциональной программы является функция с неопределенными значениями аргументов, которая представляет собой главную компоненту ее наименьшего решения. Вычисление определяемой программой функции для конкретных входных данных, осуществляет алгоритм интерпретации. Алгоритмы интерпретации, основанные на подстановке правых частей уравнений программы вместо некоторых свободных вхождений переменных, одношаговой β-редукции и одношаговой δ-редукции являются непротиворечивыми в том смысле, что, если алгоритм останавливается, то вычисленное им значение совпадает со значением определяемой программой функции. Если значение определяемой функции является неопределенным, то алгоритм интерпретации либо останавливается с неопределенным значением, либо функционирует бесконечно. Понятие β-редукции является классическим понятием и является одним и тем же при любой интерпретации языка, понятие же δ-редукции зависит от множества встроенных функций и от конкретной реализации функционального языка программирования.

В работе З. Манны рассматривались типизированные функциональные программы, использующие переменные и константы порядков ≤1 и не использующие λ-абстракцию. Исследовались вопросы интерпретации таких программ, использующие подстановку и упрощения термов, относящиеся к встроенным функциям (δ-редукция), однако понятие δ-редукции не было формализовано.

Впервые понятие δ-редукции было формализовано в работах Л. Будагян. Было введено и исследовано, так называемое, естественное понятие δ-редукции, было найдено необходимое и достаточное условие, которому должно удовлетворять естественное понятие δ-редукции, для того чтобы каждый типизированный λ-терм имел единственную βδ-нормальную форму.

В работе С. Нигияна было определено более широкое понятие δ-редукции, так называемое, каноническое понятие δ-редукции (естественное понятие δ-редукции является частным случаем канонического понятие δ-редукции), это именно то понятие δ-редукции, которое используется при реализации реальных функциональных языков программирования. В работе С. Нигияна было показано, что для любого рекурсивного множества строго вычислимых, монотонных функций с

неопределенными значениями аргументов, существует каноническое понятие δ-редукции.

Естественно встает вопрос: каким условиям должно удовлетворять каноническое понятие δ-редукции, чтобы каждый типизированный λ-терм имел единственную βδ-нормальную форму.

Нами было отмечено, что если определяемая программой функция не определена при некоторых фиксированных значениях аргументов, то алгоритм интерпретации либо останавливается с неопределенным значением, либо работает бесконечно. Естественно встает вопрос о зависимости алгоритма интерпретации от канонического понятия δ-редукции относительно неопределенного значения. Естественно, также, встает вопрос о сравнимости алгоритмов интерпретации относительно неопределенного значения.

Нами рассматриваются семь известных алгоритмов интерпретации: FS (полной подстановки), PES (параллельной внешней подстановки), LES (левой внешней подстановки), PIS (параллельной внутренней подстановки), LIS (левой внутренней подстановки), ACT (активный алгоритм), PAS (пассивный алгоритм) и исследуются поставленные вопросы для этих алгоритмов.

Целью диссертационной работы является:

1. Определить, каким должно быть каноническое понятие δ-редукции для того, чтобы βδ-нормальная форма типизированного λ-терма была единственной.
2. Исследовать зависимость алгоритмов интерпретации типизированных функциональных программ FS, PES, LES, PIS, LIS, PAS, ACT от канонического понятия δ-редукции относительно неопределенного значения.
3. Исследовать сравнимость алгоритмов интерпретации типизированных функциональных программ FS, PES, LES, PIS, LIS, PAS, ACT относительно неопределенного значения.

В результате исследований, проведенных в данной работе, были получены следующие основные результаты:

1. Доказано, что для основного канонического понятия δ-редукции понятие $\beta\delta$-редукции обладает свойством Чёрч-Россера, из чего следует единственность $\beta\delta$-нормальной формы для любого типизированного λ-терма.
2. Доказано, что, так называемое, свойство подстановочности и наследуемости (ПН-свойство) является необходимым и достаточным условием единственности $\beta\delta$-нормальной формы типизированных λ-термов в случае канонического понятия δ-редукции.
3. Доказано, что любой из алгоритмов интерпретации FS, PES, LES, PIS, LIS, PAS, ACT зависит от канонического понятия δ-редукции относительно неопределенного значения.
4. Доказано, что алгоритмы интерпретации FS, PES, LES, PIS, LIS, PAS, ACT попарно несравнимы относительно неопределенного значения.

ABSTRACT

Davit A. Grigoryan

"On Interpreters of Typed Functional Programs"

The thesis is devoted to the problems of functional programming. The object of the research is typed functional programs, and the main problem under consideration is the fundamental task of computation of the function determined by the program. A typed functional program is a system of equations (with separable variables) in a monotonic model of typed λ-calculus. Each program equation has the form $F = t$, where F is a variable, t is a typed λ-term, the type of which coincides with the type of the variable F. We consider that typed functional programs use variables of any order and constants of order ≤1, where constants of order 1 are strong computable, monotonic functions with undefined values of arguments. The main semantic of a typed functional program is a function with undefined values of arguments, which is the main component of the least solution. The computation of a function, determined by a program, for specific input data is performed by an interpretation algorithm. The Interpretation algorithms that based on substitution of the right parts of the program equations instead of some free occurrences of variables, one-step β-reduction and one-step δ-reduction, are consistent in the sense that if the algorithm stops, then the value it calculates coincides with the value of the function determined by the program. If the value of the function being determined is undefined, then the interpretation algorithm either stops with an undefined value or functions infinitely. The notion of β-reduction is a classical notion and is the same for any interpretation of a language. The notion of δ-reduction depends on a set of built-in functions and on the specific implementation of a functional programming language.

In Z. Mann's work, typed functional programs that use variables and constants of order ≤1 and do not use λ-abstraction were considered. The questions of interpretation of such programs using the substitution and simplifications of terms related to built-in functions (δ -reduction) were investigated, but the notion of δ-reduction was not formalized.

For the first time the notion of δ-reduction was formalized in L. Budagian's works. A so-called natural notion of δ-reduction was introduced and a necessary and sufficient condition was found that the natural notion of δ-reduction must satisfy in order for each typed λ-term to have a unique $\beta\delta$-normal form.

In S. Nigiyan's work, the broader notion of δ-reduction, the so-called canonical notion of δ-reduction, was defined (the natural notion of δ-reduction is a partial case of the canonical notion of δ-reduction), which is used in real functional programing languages. In S. Nigiyan's work, it was shown that for any recursive set of strong computable, monotonic functions with indefinite values of arguments, there exists a canonical notion of δ-reduction.

The question naturally arises: what conditions must the canonical notion of δ-reduction satisfy so that each typed λ-term has a single $\beta\delta$-normal form.

We noted that if the function determined by a program is not defined for some fixed

values of the arguments, the interpretation algorithm either stops with an undefined value or works infinitely. The question naturally arises about the dependence of the interpretation algorithm on the canonical notion of δ-reduction with respect to undefined value. Naturally, there is also the question of the comparability of interpretation algorithms with respect to undefined value.

We consider seven well-known interpretation algorithms: FS (full substitution), PES (parallel external substitution), LES (left external substitution), PIS (parallel internal substitution), LIS (left internal substitution), PAS (passive), ACT (active) and investigate the questions for these algorithms.

The main topics of the thesis are:

1. Determine, for what canonical notions of δ-reduction the typed λ-terms have unique $\beta\delta$-normal form.
2. Study the dependency of FS, PES, LES, PIS, LIS, PAS, ACT interpretation algorithms of typed functional programs on canonical notion of δ-reduction with respect to undefined value.
3. Study the comparability of FS, PES, LES, PIS, LIS, PAS, ACT interpretation algorithms of typed functional programs with respect to undefined value.

The research carried out in the thesis has produced the following main results.

1. It is proved that for main canonical notion of δ-reduction the notion of $\beta\delta$-reduction has Church-Rosser property, from which follows the uniqueness of $\beta\delta$-normal form of typed λ-terms.
2. It is proved that the substitution and inheritance property (SI-property) is the necessary and sufficient condition for the uniqueness of $\beta\delta$-normal form of typed λ-terms for canonical notion of δ-reduction.
3. It is proved that any interpretation algorithm FS, PES, LES, PIS, LIS, PAS, ACT depends on canonical notion of δ-reduction with respect to undefined value.
4. It is proved that interpretation algorithms FS, PES, LES, PIS, LIS, PAS, ACT are incomparable with respect to undefined value.