ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԱԲԵԼՅԱՆ ՍԵՅՐԱՆ ՀՈՎՀԱՆՆԵՍԻ

ՎԵՑԵՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՄԱՍՆԱԿԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐՈՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ
ՀԱՄԱՐ ԴԻՐԻԽԼԵԻ ԽՆԴՐԻ ԱՐԴՅՈՒՆԱՎԵՏ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Ա.01.02 – “Դիֆերենցիալ հավասարումներ, մաթեմատիկական ֆիզիկա” մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ 2019

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ АРМЕНИИ

АБЕЛЯН СЕЙРАН ОГАНЕСОВИЧ

ЭФФЕКТИВНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – “Дифференциальные уравнения и математическая физика ”

ЕРЕВАН 2019

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀԱՊՀ –ի գիտական խորհրդի №.12 նիստում (16 սեպտեմբերի 2016թ.)

<u>Գիտական ղեկավար՝</u> ֆիզ-մաթ.գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր
Ա. Հ. ԲԱԲԱՅԱՆ

<u>Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝</u> ֆիզ-մաթ.գիտ. դոկտոր,պրոֆեսոր
Հ. Մ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ
ֆիզ-մաթ.գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր
Ա. Ն. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆՑ

<u>Առաջատար կազմակերպություն</u>՝Խ.Աբովյանի անվ. հայկական պետական մանկավարժական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2019թ. հունիսի 26 ժամը 15^{00}–ին Հայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարանում գործող մաթեմատիկայի 053 մասնագիտական խորհրդի նիստում:
Հասցե՝ ք. Երևան, 0009, փ. Տերյան 105, 12 մասնաշենք:
Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀԱՊՀ գրադարանում:
Սեղմագիրն առաքված է 2019թ. մայիսի 18–ին:

053 մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար
ֆիզ-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Ա.Հ. Բաբայան

Тема диссертации утверждена на заседании ученого совета НПУА № 12 (16 сентября 2016г.)

<u>Научный руководитель</u> доктор физ.-мат. наук, профессор
А.О.Бабаян

<u>Официальные оппоненты</u> доктор физ.-мат. наук, профессор
Г.М. Айрапетян
доктор физ.-мат. наук, профессор
А.Н. Карапетянц

<u>Ведущая организация</u> Армянский государственный педагогический университет им. Х.Абовяна

Защита диссертации состоится 26-го июня 2019г. в 15^{00} на заседании специализированного совета математики 053, действующем в Национальном политехническом университете Армении.
Адрес: г. Ереван 0009, ул. Теряна 105, 12-й корпус.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке НПУА.
Автореферат разослан 18 -го мая 2019г.

Ученый секретарь
специализированного совета 053
доктор физ.-мат.наук, профессор А.О. Бабаян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория краевых задач широко применяется при решении практических задач. При этом для эффективного применения этой теории необходимо определить, когда данная задача однозначно разрешима, или в более общей ситуации, определить дефектные числа (количество линейно независимых решений однородной задачи и количество линейно независимых условий разрешимости неоднородной задачи) задачи. В то время как вопросы нормальной разрешимости и вопрос вычисления индекса (разность дефектных чисел) в значительной мере решены (Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, А.В. Бицадзе, Н.Е. Товмасян, А.П. Солдатов и др.), работ, посвященных определению дефектных чисел, существенно меньше, например, в работах А.П. Солдатова и Н.Е. Товмасяна рассматривались вопросы однозначной разрешимости задачи, т.е. случай, когда дефектные числа равны нулю. При этом точные значения дефектных чисел были получены для уравнений, порядок которых не более четырех (Н.Е. Товмасян, А.О. Бабаян). В случае уравнений шестого порядка возникает ряд осложнений, которые, в первую очередь, связаны с тем, что кратность корней характеристического уравнения может быть более трёх. Этот случай ранее не изучался, поэтому задачи, рассмотренные в работе, представляются актуальными.

Цель работы.

1. Исследовать граничные задачи Дирихле для правильно и неправильно эллиптических уравнений шестого порядка.
2. Определить в явном виде линейно независимые решения однородной задачи Дирихле и условия разрешимости соответствующей неоднородной задачи.
3. При некотором расположении корней характеристического уравнения определить в явном виде дефектные числа задачи Дирихле.

Методы исследования. Применяются методы теории аналитических функций и теории граничных задач.

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Они обоснованы строгими математическими доказательствами.

Практическая значимость. Полученные теоретические результаты могут быть использованы при исследовании граничных задач, а также в теории упругости и в других областях, использующих методы теории граничных задач.

<u>Основные положения, выносимые на защиту</u>. На защиту выносятся следующие положения:

1. Случай правильно эллиптического уравнения:
   - если мнимая единица является трёхкратным корнем характеристического уравнения, задача однозначно разрешима.
   - если мнимая единица является двухкратным корнем, один корень с положительной мнимой частью простой, а корень с отрицательной мнимой частью трёхкратный, получаем, что дефектные числа могут быть равны или нулю или единице.
   - характеристическое уравнение имеет два различных корня (мнимая единица – простой корень, корень отличный от мнимой единицы - двухкратный) с положительной мнимой частью и один трёхкратный корень (не равный –i) с отрицательной мнимой частью. В этом случае имеем аналогичный результат.
   - рассмотрен случай, когда характеристическое уравнение имеет один трёхкратный корень, отличный от мнимой единицы, с положительной мнимой частью, а остальные корни простые. В этом случае получена новая формула для определения дефектных чисел.
2. Случай неправильно эллиптического уравнения:
   - определён класс граничных функций, в котором рассматриваемая задача нормально разрешима.
   - если мнимая единица имеет кратность не менее четырёх, то для разрешимости задачи необходимо, чтобы граничные функции аналитически продолжались внутрь круга, а также необходима функциональная зависимость граничных функций. Для каждого случая (когда кратность мнимой единицы равна четырем, пяти и шести) условия разрешимости определяются в явном виде.
   - если кратность мнимой единицы менее трёх, получены новые формулы для определения дефектных чисел.
   - если кратность мнимой единицы равна трем, то задача однозначно разрешима.

<u>Апробация полученных результатов</u>. Результаты диссертации неоднократно докладывались на научных семинарах кафедры прикладной математики НПУА, на годичных конференциях НПУА в 2016-2018 годах, на годичных конференциях Армянского математического общества (Ереван 2017), на конференции, посвященной 100-летию академика М.М. Джрбашяна (Ереван 2018). Результаты докладывались также на международных конференциях:

- Международная научная конференция “Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения VII”. Ростов-на-Дону, Россия, 23-28 апреля, 2017г.
- XXXI Международное расширенное заседание семинара Института прикладной математики имени Ильи Векуа, посвященное 110-летию со дня рождения академика Ильи Векуа. Тбилиси, Грузия, 19-21 апреля 2017 г.
- VII Международная конференция по гармоническую анализу и приближениям, посвященная 90-летию академика НАН Армении А.А. Талаляна. Цахкадзор, Армения, 16-22 сентября, 2018г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 5 научных статьях (список приведен в конце диссертации), опубликованных в рецензируемых журналах, входящих в перечень ВАК, одна из которых входит в базу данных “Scopus”. Материалы диссертации основаны на теоретических работах, выполненных в Национальном политехническом университете Армении.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, содержащих 7 параграфов, заключения и списка цитируемой литературы, включающего 80 наименований. Общий обьем диссертации составляет 104 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, дан краткий обзор предыстории затронутых в диссертации вопросов и полученных другими авторами результатов, а также изложено краткое содержание диссертации.

Пусть $D=\{z: z=x+iy,\ |z|<1\}$ единичный круг комплексной плоскости и $\Gamma=\partial D$, его граница. В области D рассмотрим правильно эллиптическое уравнение шестого порядка:

$$\sum_{k=0}^{6} E_k \frac{\partial^6 u}{\partial x^k \partial y^{6-k}}(x,y)=0 \qquad (x,y)\in D, \tag{1}$$

Здесь E_k- комплексные постоянные такие, что $E_0\neq 0$ и соответствующее характеристическое уравнение

$$\sum_{k=0}^{6} E_k \lambda^{6-k}=0 \tag{2}$$

не имеет действительных корней. В дальнейшем обозначим $\lambda_k \left(k = \overline{1,6}\right)-$ корни уравнения (2) и $\mu_j = \dfrac{i-\lambda_j}{i+\lambda_j}$, если $\Im\lambda_j > 0$; $\nu_j = \dfrac{i+\lambda_j}{i-\lambda_j}$, если $\Im\lambda_j < 0$.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения (1) в классической постановке, то есть следует определить решение принадлежащее классу $C^6(D)\cap C^{(2,\alpha)}(\bar{D})$ и на границе Γ удовлетворяющее условиям Дирихле:

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial r^j}\right|_{\Gamma} = f_j(x,y), \quad j=0,1,2; \quad (x,y)\in\Gamma. \tag{3}$$

Для точной формулировки полученных результатов представим граничные условия (3) в комплексной форме, используя операторы комплексного дифференцирования:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{4}$$

При этом граничные условия (3) заменяются эквивалентными условиями

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial z^j \partial \overline{z}^{2-j}}\right|_{\Gamma} = F_j(\theta) \quad j=0,1,2, \quad z = e^{i\theta}\in\Gamma, \tag{5}$$

$$u(1,0) = f_0(1,0), \quad u_r(1,0) = f_1(1,0), \quad u_\theta(1,0) = f_{0\theta}(1,0).$$

Здесь $F_j \in C^{(\alpha)}(\Gamma)$ функции, однозначно определяемые по граничным функциям $f_0,\ f_1,\ f_2$.

$$\begin{aligned} F_0(\theta) &= 0.25e^{2i\theta}\left(f_2 + 2if_1' - f_0'' - f_1 - 2if_0'\right),\\ F_1(\theta) &= 0.25\left(f_2 + f_1 + f_0''\right),\\ F_2(\theta) &= 0.25e^{-2i\theta}\left(f_2 - 2if_1' - f_0'' - f_1 + 2if_0'\right), \end{aligned} \tag{6}$$

В первой главе диссертации рассматриваются вспомогательные предложения, необходимые для дальнейшего.

Вторая глава диссертации посвящена рассмотрению задачи Дирихле в единичном круге для правильно эллиптических уравнений шестого порядка. Основная цель этой главы состоит в том, чтобы найти значение дефектных чисел задачи Дирихле и исследовать проблему однозначной разрешимости.

Будем использовать представления уравнения (1) с помощью операторов комплексного дифференцирования. В §2.1 пункте этой главы изучается следующее правильно эллиптическое уравнение шестого порядка:

$$\frac{\partial^3}{\partial \overline{z}^3}\left(\frac{\partial}{\partial z} - \nu\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^3 u = 0 \tag{7}$$

где мнимая единица является трёхкратным корнем характеристического уравнения. Для этого уравнения получается следующая теорема.

<u>Теорема 2.1.1.</u> Задача (7),(3) и, следовательно, исходная задача (1),(5) однозначно разрешима, т.е. решение задачи (1),(5) существует при любых граничных функциях f_j и это решение единственно.

В §2.2 пункте рассматривается задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения, когда мнимая единица является двухкратным корнем характеристического уравнения. В этом случае уравнение (1) примет вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial \overline{z}^2}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}-\mu\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}-\nu\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^3 u(x,y)=0, \tag{8}$$

Получен следующий результат.

<u>Теорема 2.2.1.</u> Пусть $z=\mu\nu$. Тогда задача Дирихле (8), (5) однозначно разрешима, если условия

$$P_n(z)=\sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2)z^k\neq 0,\quad n=1,2,... \tag{9}$$

выполняются. Если условия (9) не выполняются при некотором n_0, то однородная задача (8), (5) имеет одно нетривиальное решение, которое является многочленом порядка n_0+5. При этом для разрешимости соответствующей неоднородной задачи необходимо одно линейно независимое условие на граничные функции f_j. Условия (9) могут быть нарушены только для одного $n\geq 1$, и, следовательно, дефектные числа задачи (8), (5) могут быть равны только нулю и единице.

§2.3 посвящен исследованию задачи Дирихле для правильно эллиптического уравнения шестого порядка, когда i является простым корнем, один корень - двухкратный, и один – трёхкратный. Тогда уравнение (1) примет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}-\mu\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial z}-\nu\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^3 u=0. \tag{10}$$

В этой пункте для дефектных чисел получаем результат аналогичный предыдущему параграфу.

<u>Теорема 2.3.1</u>. Пусть $\zeta=\mu\nu$. Тогда задача Дирихле (10),(5) однозначно разрешима, если

$$\begin{aligned}Q_n(\zeta)=&\sum_{k=0}^{n-3}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)\zeta^k+\\&+\sum_{k=0}^{n-4}(n-k-3)(n-k-2)(n-k-1)\left(n^2+11n+8nk+k^2-k\right)\zeta^{n-2+k}\neq 0,\ n=4,5...,\end{aligned} \tag{11}$$

Если условия (11) не выполняются при некотором n_0, то однородная задача (10),(5) имеет нетривиальное решение, которое является полиномом порядка

n_0+2. При этом для разрешимости соответствующей неоднородной задачи необходимо одно линейно независимое условие на граничные функции f_j. Поэтому дефектные числа задачи (10),(5) равны количеству номеров $n \geq 4$, для которых $Q_n(\zeta)=0$.

В §2.4 рассматривается следующие два уравнения:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}-\mu\frac{\partial}{\partial z}\right)^3\left(\frac{\partial}{\partial z}-\nu_1\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}-\nu_2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}-\nu_3\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)u=0, \qquad (12)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}-\mu\frac{\partial}{\partial z}\right)^3\left(\frac{\partial}{\partial z}-\nu_1\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}-\nu_2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)\frac{\partial}{\partial \overline{z}}u=0, \qquad (13)$$

где корни характеристического уравнения для первого уравнения отличны от $\pm i$, а один из корней характеристического уравнения для второго уравнения равен $-i$. Получены следующие результаты.

<u>Теорема 2.4.1.</u> Пусть одним из корней характеристического уравнения (2) является число, комплексно сопряженное к мнимой единице, то есть $\nu_3=0$. Обозначим $\sigma=\mu\nu_2,\ \tau=\mu\nu_1$. Тогда при условии

$$S_l(\sigma,\tau)\equiv\sum_{p=1}^{l-2}\sum_{k=0}^{p-1}(p+1)(k+1)(p-k)\sum_{m=0}^{p-k-1}\tau^{m+k}\sigma^{p-m-1}\neq 0,\quad l=4,5,... \qquad (14)$$

задача Дирихле (13), (5) однозначно разрешима. Если при некотором q условия (14) нарушается, т.е. $S_q(\sigma,\tau)=0$, то однородная задача (13), (5) имеем ненулевое решение, которое является многочленом порядка $q+2$, а чтобы неоднородная задача имела решение необходимо, чтобы граничные функции удовлетворяли одному условию ортогональности. Таким образом, дефектные числа задачи (1), (3) равны количеству номеров q при которых нарушается условие (14).

Также получено, что дефектные числа могут быть равны нулю или единице, при этом условие разрешимости неоднородной системы имеет вид:

$$\frac{46}{\mu^2}\int_{-\pi}^{\pi}F_0(\theta)e^{-4i\theta}d\theta+\int_{-\pi}^{\pi}F_1(\theta)\left(\frac{5}{\mu^5}e^{4i\theta}-\frac{53}{\mu}e^{-4i\theta}\right)d\theta+\int_{-\pi}^{\pi}F_2(\theta)\left(18e^{-4i\theta}-\frac{16}{\mu^4}e^{4i\theta}\right)d\theta=0. \qquad (15)$$

<u>Теорема 2.4.2.</u> Пусть корни характеристического уравнения (2) не равны $\pm i$ то есть в (12) $\nu_j\neq 0$. Обозначим $\sigma_j=\mu\nu_j,\ j=1,2,3.$ Тогда при условии

$$T_l(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\equiv\det\sum_{p=0}^{l-1}\begin{pmatrix}\sigma_1^p & \sigma_2^p & \sigma_3^p\\ p\sigma_1^p & p\sigma_2^p & p\sigma_3^p\\ p^2\sigma_1^p & p^2\sigma_2^p & p^2\sigma_3^p\end{pmatrix}\neq 0,\quad l=4,5,... \qquad (16)$$

задача (12), (5) однозначно разрешима. Если при некотором q условие (16) нарушается, т.е. $T_q(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=0$, то однородная задача (12), (5) имеет ненулевое решение, которое является многочленом порядка $q+2$. А чтобы неоднородная задача имела решение, необходимо, чтобы граничные функции удовлетворяли одному условию ортогональности. Таким образом, дефектные числа задачи (1),(3) равны количеству номеров $q,$ при которых нарушается условие (16).

Третья глава диссертации посвящена исследованию задачи Дирихле в единичном круге для неправильно эллиптических уравнений шестого порядка. Основная цель этой главы состоит в том, чтобы найти значение дефектных чисел, также определить класс граничных функций, в котором задача нормально разрешима.

В §3.1 пункте этой главы рассматриваются следующие неправильно эллиптические уравнения шестого порядка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}-\mu\frac{\partial}{\partial z}\right)^5\left(\frac{\partial}{\partial z}-\nu\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\right)U=0\,, \tag{17}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}-\mu\frac{\partial}{\partial z}\right)^4\left(\frac{\partial}{\partial z}-\nu\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\right)^2U=0 \tag{18}$$

В этих уравнениях мнимая единица не является корнем характеристического уравнения.

<u>Определение 3.1.1.</u> Пусть $\rho\in(0,1)$ заданное число. Обозначим $A^{(m,\alpha)}(\rho)$ класс функций, аналитических в кольце $\rho<|z|<1$ и непрерывных по Гельдеру вплоть до границы с производными до $m-$го порядка включительно.

Доказаны следующие теоремы:

<u>Теорема 3.1.1.</u> Рассмотрим краевую задачу Дирихле (17),(5). Если граничные функции $F_j\ (j=0,1,2)$ принадлежат классу $A^{(2,\alpha)}(|\mu|)$, то задача (17), (5) имеет решение, и это решение единственное.

<u>Теорема 3.1.2.</u> Обозначим $\sigma=\mu\nu.$ Если граничные функции $F_j\ (j=0,1,2)$ принадлежат классу $A^{(2,\alpha)}(|\mu|)$ тогда задача (18), (5) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$\Omega_l(\sigma)=\left(\sum_{j=0}^{l-2}(j+1)(j+2)\sigma^j S_{l,j}\right)\neq 0\quad l=4,5,... \tag{19}$$

Здесь $S_{l,j}-$матрица

$$S_{l,j}=\begin{pmatrix}1 & l-j-2\\ l-j-1 & 0.5(l-j-1)(l-j-2)\end{pmatrix}. \tag{20}$$

Если при некотором q условие (19) нарушается, то однородная задача (18),(5) имеет ненулевое решение, которое является многочленом порядка $q+2,$ и неоднородная задача имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется одно условие ортогональности на граничные функции. Таким образом, дефектные числа задачи (18),(5) равны количеству номеров q при которых нарушается условие (19), то есть для которых $\Omega_l(\sigma)=0$.

<u>Замечание 3.1.1.</u> Следует отметить, что условия $F_j \in A^{(2,\alpha)}(|\mu|)$, достаточные для разрешимости неоднородной задачи (17), (5), в некотором отношении не очень далеки от необходимых. Предположим, что A_{mk} - коэффициенты Фурье функции непрерывной по Гёльдеру и применяя оценку Лоренца для коэффициентов Фурье функции непрерывной по Гёльдеру, получим:

$$\left(\sum_{l=n}^{\infty}|A_{ml}|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{C}{n^{\alpha+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}},\ \ \alpha > \frac{1}{p}-\frac{1}{2},\ \ 0<p\le 2. \tag{21}$$

Рассмотрим граничную функцию $F_0=\sum_{l=1}^{\infty} l^{-1-x} z^{-l}\mu^{l}$, где x- некоторое положительное число. Для этой функции (предполагая, что $F_1=F_2=0$), вычисляя A_{0l} и применяя асимптотические оценки

$$B_l \approx E\mu^{-l-2}+\frac{3\mu^{-l-2}}{(1-\sigma)^2 l}\left(d_{-l2}\mu^2-d_{-l0}+(1-\sigma)E\right),\ \ A_{0l}\approx -\frac{3E_1 l}{\mu^{l+2}},$$

$$A_{1l}\approx iE_2 l\mu^{-l-2},\ \ A_{2l}\approx -\frac{2E_1}{l\mu^{l+2}},\ \ A_{3l}\approx -i\frac{E_2}{l^2\mu^{l+2}},\ \ A_{4l}\approx \frac{E_1}{l^3\mu^{l+2}}, \tag{22}$$

где $E,\ E_1,\ E_2$ определяются из равенств:

$$E=\frac{d_{-l0}-2d_{-l1}\mu+d_{-l2}\mu^2}{(1-\sigma)^2},\ \ E_1=\frac{d_{-l2}\mu^2-d_{-l0}}{32}+\frac{(\sigma^2-3\sigma+2)E}{64}\ \ E_2=\frac{d_{-l2}\mu^2-d_{-l0}}{16}+\frac{(1-\sigma)E}{16}.$$

мы получаем, что $x>\alpha+0.5$. Таким образом, для $\alpha>0.5$, мы получаем, что функция должна принадлежать классу $A^{(2,\beta)}(|\mu|)$ для $\beta>0$.

<u>Замечание 3.1.2.</u> Мы видим, что, что класс $A^{(2,\beta)}(\rho)$ естественный класс для задачи Дирихле для неправильного уравнения шестого порядка. Мы можем сравнить эти результаты с результатами, полученными А.В. Бицадзе. Получено, что для разрешимости неоднородной задачи Дирихле для бианалитического уравнения граничная функция должна быть аналитической в $\{z:0<|z|<1\}$. Показано (Н.Е. Товмасян, 1968), что для неправильного уравнения второго порядка соответствующий класс равен $A^{(0,\alpha)}(\rho)\equiv A^{(\alpha)}(\rho)$. Для уравнения четвертого порядка был использован класс граничных функций $A^{(1,\alpha)}(\rho)$. Таким образом, можно предположить, что аналогичные результаты могут быть верны для неправильного уравнения произвольного порядка.

В следующем §3.2 пункте рассматривается следующее неправильно эллиптическое уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial \overline{z}^2}\prod_{k=j}^{4}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}-\mu_j\frac{\partial}{\partial z}\right)u=0, \qquad j=1,2,3,4. \tag{23}$$

В этом случае i является двухкратным корнем характеристического уравнения. Доказываются следующие теоремы. Первый случай.

Теорема 3.2.1. Предположим, что $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3\neq\lambda_4$. Если граничные функции $F_j\in A^{(2,\alpha)}(|\mu_1|)$ и $\sigma=\mu_4\mu_1^{-1}$, то при условии

$$S_{l-3}(\sigma)=\sum_{m=0}^{l-3}(m+1)(m+2)\sigma^m\neq 0,\ \ l=4,5,... \tag{24}$$

задача (23), (5) однозначно разрешима. Если при некотором q условие (24) нарушается, то однородная задача (23),(5) имеет ненулевое решение, которое является многочленом порядка $q+2$. При этом, чтобы неоднородная задача имела решение, необходимо, чтобы граничные функции удовлетворяли одному условию ортогональности. Условие (24) может нарушиться только при одном значении l. Таким образом, дефектные числа задачи (1), (3) могут быть равны нулю или единице.

Второй случай. Предположим, что в (23) имеем $|\mu_4|\le|\mu_3|\le|\mu_2|\le|\mu_1|<1,\ \mu_k\neq\mu_j$.

Теорема 3.2.2. Обозначим $\sigma=\mu_1^{-1}\mu_2,\ \tau=\mu_1^{-1}\mu_3,\ \rho=\mu_1^{-1}\mu_4$. Если граничные функции $F_j\in A^{(2,\alpha)}(|\mu_1|)$ и тогда при условии

$$T_l(\sigma,\tau,\rho)\equiv\mu_1^{3l+s}\sigma^2\tau^2\rho^2\begin{pmatrix}1 & \sigma^l & \tau^l & \rho^l\\ 1 & \sigma^{l-1} & \tau^{l-1} & \rho^{l-1}\\ 1 & \sigma^{l-2} & \tau^{l-2} & \rho^{l-2}\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\neq 0,\ \ l=4,5,... \tag{25}$$

задача (23), (5) однозначно разрешима. Если при некотором p условие (25) нарушается, т.е. $T_l(\sigma,\tau,\rho)=0$, то однородная задача (23), (5) имеет ненулевое решение, которое является многочленом порядка $p+2$. А чтобы неоднородная задача имела решение, необходимо, чтобы граничные функции удовлетворяли одному условию ортогональности. Таким образом, дефектные числа задачи (1), (3) равны количеству номеров p, при которых нарушается условие (25).

Теперь рассмотрим третий случай.

Теорема 3.2.3. Предположим, что $\mu_1=\mu_2\neq\mu_j,\ j=3,4$ и $\mu_3\neq\mu_4$. Обозначим $\sigma=\mu_1\mu_3^{-1},\ \tau=\mu_1\mu_4^{-1}$. Если граничные функции $F_j\in A^{(2,\alpha)}(|\mu|),\ (\mu=\min|\mu_j|,\ j=1,3,4)$, тогда при условии

$$\Omega_l(\sigma,\tau)=\sum_{j=1}^{l-2}(l-j-1)\sum_{m=0}^{j-1}\sigma^m\tau^{j-1-m}\neq 0\quad l=4,5...... \tag{26}$$

задача (23), (5) однозначно разрешима. Если при некотором n условие (26) нарушается, то однородная задача (23), (5) имеет ненулевое решение, которое является многочленом порядка $n+2$. А чтобы неоднородная задача имела решение, необходимо, чтобы граничные функции удовлетворяли одному условию ортогональности. Таким образом, дефектные числа задачи ((1), (3) равны количеству номеров n, при которых нарушается условие (26).

В §3.3 пункте рассматриваются случаи, когда мнимая единица является корнем характеристического уравнения кратности не менее трёх:

$$\prod_{p=1}^{6}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}-\mu_p\frac{\partial}{\partial z}\right)U=0 \qquad (27)$$

Используя функциональный класс, определённый в 3.2.1, можем сформулировать полученные результаты:

<u>Теорема 3.3.1.</u> Рассмотрим краевую задачу Дирихле (1), (3) в случае, когда все корни характеристического уравнения (2) равны мнимой единице i. В этом случае общее решение однородной задачи можно представить в виде:

$$U_0(x,y)=(1-z\overline{z})^3\nu_3(x,y), \qquad (28)$$

где функция ν_3 - произвольная трианалитическая функция (то есть $\nu_{3\overline{z}\overline{z}\overline{z}}=0$). Неоднородная задача имеет решение тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия на граничные функции $f_j\ (j=0,1,2)$:

$$\begin{gathered}\int_{-\pi}^{\pi} f_j(\theta)e^{li\theta}d\theta=0,\quad l=-6,-7,\ldots,\ j=0,1,2,\\ 20\int_{-\pi}^{\pi} f_0(\theta)e^{5i\theta}d\theta=4\int_{-\pi}^{\pi} f_1(\theta)e^{5i\theta}d\theta=\int_{-\pi}^{\pi} f_2(\theta)e^{5i\theta}d\theta,\\ 5\int_{-\pi}^{\pi} f_1(\theta)e^{4i\theta}d\theta=-8\int_{-\pi}^{\pi} f_0(\theta)e^{4i\theta}d\theta=\int_{-\pi}^{\pi} f_2(\theta)e^{4i\theta}d\theta,\end{gathered} \qquad (29)$$

<u>Теорема 3.3.2.</u> Если пять корней характеристического уравнения (2) равны мнимой единице i и $\lambda_6\neq i$ и $\Im\lambda_6>0$, то общее решение однородной задачи (27), (5) можно представить в виде:

$$U_0(x,y)=(1-z\overline{z})^3\nu_2(x,y), \qquad (30)$$

где функция ν_2 - произвольная бианалитическая функция (то есть $\nu_{2\overline{z}\overline{z}}=0$). Неоднородная задача Дирихле (27), (5) имеет решение тогда и только тогда, когда граничные функции $F_j(j=0,1,2)$ принадлежат классу $A^{(2,\alpha)}\left(|\mu_6|\right)$ (μ_6 определено в (26)) и выполняется равенство:

$$\mu_6^2G_2^-(\theta)\equiv\mu_6G_1^-(\theta)\equiv G_0^-(\theta) \qquad (31)$$

Здесь $G_j^-(\theta)=\sum_{k=5}^{\infty}a_{-kj}\varsigma^{-k}$, если

$$F_j(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{kj}\varsigma^k, \ \varsigma = e^{i\theta} \in \Gamma.$$

Теорема 3.3.3. Предположим, что четыре корня характеристического уравнения (2) равны мнимой единице i и $\lambda_k \neq i$ и $\Im\lambda_k > 0 (k = 5,6)$, $\lambda_5 \neq \lambda_6$. В этом случае общее решение однородной задачи Дирихле (27), (5) можно представить в виде:

$$U_0(x,y) = (1 - z\bar{z})^3 \Phi(z), \tag{32}$$

где функция Φ произвольная аналитическая функция. Предполагая, что $|\mu_5| \leq |\mu_6|$, получаем, что неоднородная задача Дирихле (1), (3) имеет решение тогда и только тогда, когда граничные функции $F_j(j = 0,1,2)$ принадлежат классу $A^{(2,\alpha)}(|\mu_5|)$ и выполняется соотношение:

$$E_0^-(\theta) - (\mu_5 + \mu_6)E_1^-(\theta) \equiv -\mu_5\mu_6 E_2^-(\theta) \tag{33}$$

Здесь $E_j^-(\theta) = \sum_{k=4}^{\infty} a_{-kj}\varsigma^{-k}$, если

$$F_j(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{kj}\varsigma^k, \ \varsigma = e^{i\theta} \in \Gamma.$$

Теорема 3.3.4. Предположим, что три корня характеристического уравнения (2) равны мнимой единице i и $\lambda_j \neq i, \lambda_j \neq \lambda_k \ \Im\lambda_j > 0 (j = 4,5,6, j \neq k)$. Если $|\mu_4| \leq |\mu_5| \leq |\mu_6|$ и граничные функции $F_j \in A^{(2,\alpha)}(|\mu_4|)$, то задача Дирихле (1), (5) однозначно разрешима.

Выражаю искреннюю благодарность своему научному руководителю доктору физ.-мат. наук, профессору А.О. Бабаяну за постановку задач и полезные замечания.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Babayan A.H., Abelyan S.H., On an Efective Solution of the Dirichlet Problem for Sixth Order Partial Differential Equation// Seventh International Scientific Conference “Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis VII”, Differential Equations and Mathematical Physics, Abstracts.-Rostov-on-Don.-2017.-pp 70-71.
2. Бабаян А.О., Абелян С.О., О задаче Дирихле для одного правильно эллиптического уравнения шестого порядка в единичном круге// Вестник (НПУА).Сборник научных статей.-2017,№1.-С.14-18.
3. Babayan A.H., Abelyan S.H., On a Dirichlet Problem for One Sixth Order Elliptic Equation// Reports of Enlarged Sessions of the Seminar of I. Vekua

Institute of Applied Mathematics, Tbilisi.-2017.-31, pp 7-10.
4. Бабаян А.О., Абелян С.О., О задаче Дирихле для правильно эллиптического уравнения шестого порядка в единичном круге// Системный анализ, управление и обработка информации: тр. VII междунар. семинара, ДГТУ.-Ростов-на-Дону.-2016.-С. 114-115.
5. Абелян С.О., Об эффективном решении задачи Дирихле в единичном круге// ДОКЛАДЫ НАН Армении.-2018.-118, №1.-С.15-19.
6. Babayan A.H., Abelyan S.H., On Defect Numbers of the Dirichlet Problem// Annual Session of ARMENIAN MATHEMATICAL UNION, Abstracts.-Yerevan, Armenia.-2017.-pp 13-14.
7. Абелян С.О., Дефектные числа задачи Дирихле для одного уравнения в частных производных шестого порядка// Вестник (НПУА).Сборник научных статей.-2018,№1.-С.28-33.
8. Babayan A.H., Abelyan S.H., Defect Numbers of the Dirichlet Problem for a Properly Elliptic Sixth Order Equation// Mathematical Notes.-2018-104, №3.-pp 339-347.
9. Babayan A. and Abelyan S., On an Effective Solution of the Boundary Value Problem for One Improperly Elliptic Equation// Harmonic Analysis and Approximations, VII, Abstracts.-2018.-pp 22-23.
10. Babayan A.H., Abelyan S.H., On a Dirichlet Problem for One Improperly Elliptic Equation// International conference Dedicated to the 100th anniversary of Mkhitar Djrbashyan, Abstracts.-Yerevan, Armenia.-2018.-pp 16-17.

Ա Մ Փ Ո Փ ՈՒ Մ

Աբեյան Սեյրան Հովհաննեսի

ՎԵՑԵՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՄԱՍՆԱԿԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐՈՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԴԻՐԻԽԼԵԻ ԽՆԴՐԻ ԱՐԴՅՈՒՆԱՎԵՏ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Ատենախոսությունը նվիրված է վեցերորդ կարգի էլիպսական հավասարումների համար Դիրիխլեի խնդրի ուսումնասիրմանը միավոր շրջանում: Օգտագործելով ընդհանուր լուծման ներկայացումը, խնդիրը բերվել է անվերջ բազմության գծային հանրահաշվական հավասարումների ուսումնասիրմանը, որը թույլ է տալիս արդյունավետ լուծել դիտարկվող եզրային խնդիրը: Խնդրի դեֆեկտային թվերը (համասեռ խնդրի գծորեն անկախ լուծումների քանակը և անհամասեռ հավասարման գծորեն անկախ լուծելիության պայմանների քանակը) որոշվում են բացահայտ տեսքով հավասարումների գործակիցների միջոցով: Ստացվել են հետևյալ արդյունքները.

1. Ճշգրիտ էլիպսական հավասարման դեպք.

- եթե կեղծ միավորը բնութագրիչ հավասարման եռապատիկ արմատ է, ապա խնդիրը միարժեքորեն լուծելի է:
- եթե բնութագրիչ հավասարումն ունի երեք իրարից տարբեր արմատներ, որոնցից երկուսը (կեղծ միավորը կրկնապատիկ արմատ է, մյուսը՝ պարզ արմատ (i – ից տարբեր)) դրական կեղծ մասով, իսկ երրորդը՝ եռապատիկ արմատ է (i – ից տարբեր) բացասական կեղծ մասով: Այս դեպքում ստացվել է, որ դեֆեկտային թվերը կարող են լինել զրո կամ մեկ:
- եթե բնութագրիչ հավասարումն ունի երեք իրարից տարբեր արմատներ, որոնցից երկուսը (կեղծ միավորը պարզ արմատ է, մյուսը՝ կրկնապատիկ արմատ (i – ից տարբեր)) դրական կեղծ մասով, իսկ երրորդը եռապատիկ արմատ է ($-i$ – ից տարբեր) բացասական կեղծ

մասով: Այս դեպքում ստացվել է նախորդին նման արդյունք:

- եթե բնութագրիչ հավասարումն ունի մի եռապատիկ արմատ (i – ից տարբեր) դրական կեղծ մասով իսկ մնացած երեքը պարզ արմատներ են: Այս դեպքում ստացվել է բանաձև դեֆեկտային թվերը որոշելու համար:

2. Ոչ ճշգրիտ էլիպսական հավասարման դեպք.

- սահմանվել է եզրային ֆունկցիաների դաս, որտեղ դիտարկվող խնդիրը նորմալ լուծելի է:
- եթե կեղծ միավորի պատիկությունը նվազագույնը չորս է, այդ դեպքում խնդրի լուծելիության համար անհրաժեշտ է, որ եզրային ֆունկցիաները անալիտիկ շարունակվեն դեպի շրջանի ներս, ինչպես նաև անհրաժեշտ է եզրային ֆունկցիաների միջև ֆունկցիոնալ կախվածություն: Ամեն դեպքի համար (երբ կեղծ միավորի պատիկությունը հավասար է չորս, հինգ և վեց) լուծելիության պայմանը որոշվում է բացահայտ տեսքով:
- եթե կեղծ միավորի պատիկությունը երեքից փոքր է, ստացվել են նոր բանաձևեր դեֆեկտային թվերը որոշելու համար:
- եթե կեղծ միավորի պատիկությունը հավասար է երեքի, այդ դեպքում խնդիրը միարժեքորեն լուծելի է:

S U M M A R Y

Abelyan Seyran

EFFECTIVE SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS DERIVATIVES OF THE SIXTH ORDER

The dissertation is devoted to the research of the Dirichlet problem for elliptic equations of the sixth order in the unit disk. Using the general solution representation, the problem is reduced to the research of an infinite set of linear algebraic equations, which makes it possible to solve the considered boundary value problem effectively. Defect numbers of problem (the number of linearly independent solutions of a homogeneous problem and the number of linearly independent solvability conditions for an inhomogeneous problem) are determined in explicit form by the coefficients of the equation. The following results were obtained:

1. The case of a properly elliptic equation:

• if the imaginary unit is a triple root of the characteristic equations, then the problem is uniquely solvable.

•if the characteristic equation has three different roots and two of them (imaginary unit is a double root, the other one is a simple root (not equal i)) has positive imaginary part and the third one is a triple root with negative imaginary part. We get that the defect numbers can be equal to zero or one.

• if the characteristic equation has three different roots and two of them (imaginary unit is a simple root, the other one is a double root (not equal i)) has positive imaginary part and the third one is a triple root (not equal $-i$) with negative imaginary part. In this case a similar result is obtained.

• if the characteristic equation has one triple root different from the imaginary unit with a positive imaginary part, and the rest of the roots are simple.

In this case a new formula has been obtained to determine defect numbers.

2. The case of an improperly elliptic equation:

• a class of boundary functions is defined in which the problem under consideration is normally solvable.

• if the imaginary unit has multiplicity of at least four, then for solvability of the problem it is necessary that the boundary functions continue analytically inside the disc, as well as the necessary functional dependence of the boundary functions. For each case (when the multiplicity of the imaginary unit is four, five and six) the solvability conditions are determined explicitly.

• if the multiplicity of an imaginary unit is less than three, new formulas for determining defect numbers have been obtained.

• if the multiplicity of an imaginary unit is three, then the problem is uniquely solvable.