НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ АРМЕНИИ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

На правах рукописи

АБЕЛЯН СЕЙРАН ОГАНЕСОВИЧ

ЭФФЕКТИВНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук
по специальности
01.01.02 « Дифференциальные уравнения и
математическая физика »

Научный руководитель-
доктор физ.-мат. наук,
профессор А. О. Бабаян

ЕРЕВАН - 2019

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Теория дифференциальных уравнений – один из важнейших разделов современной математики. Чтобы охарактеризовать ее место в математической науке, прежде всего, необходимо подчеркнуть основные особенности теории дифференциальных уравнений, состоящей из двух обширных областей математики: теории обыкновенных дифференциальных уравнений и теории уравнений с частными производными.

Основы этой науки были заложены трудами Даламбера, Эйлера, Бернулли, Лагранжа, Лапласа, Пуассона, Фурье и других ученых. Следует отметить, что они были не только математиками, но и астрономами, механиками, физиками. Соответственно, дифференциальные уравнения возникали как необходимый математический аппарат для решения технических проблем. В настоящее время теория дифференциальных уравнений все большее место занимает при изучении вопросов цифровой обработки сигналов, биологии, экологии, математического моделирования физических процессов в полупроводниках и т. д. [1], [2]. Поэтому со времен Эйлера и до настоящего времени теория дифференциальных уравнений занимает одно из главных мест в анализе. При этом, так как множество решений дифференциальных уравнений в частных производных, как правило, необозримо, то естественным представляется изучение данных уравнений с различными начальными или краевыми условиями, обеспечивающими или однозначную разрешимость, или конечномерность множества решений данной задачи. Разработанные идеи и методы для исследования конкретных задач математической физики оказались применимыми к изучению широких классов дифференциальных уравнений, что и послужило в конце XIX века основой для развития общей теории дифференциальных уравнений.

В работе исследованы граничные задачи для эллиптических дифференциальных уравнений. Такие уравнения естественно появляються при изучении стационарных физических процессов [3], [4], [5]. Уравнение Лапласа является модельным эллиптическим уравнением. К изучению уравнения Лапласа приводят самые многообразные физические задачи совершенно разной природы. Это уравнение встречается в задачах электростатики, теории потенциала, гидродинамики, теории теплопередачи и многих других разделах физики, а также в различных областях математического анализа. Физические задачи, которые приводятся к уравнению Лапласа, определяют граничные условия, которые обеспечивают корректность соответствующей граничной задачи: условия Дирихле, Неймана, Пуанкаре и т. д. [3]. Задача Дирихле является наиболее известной граничной задачей для эллиптических уравнений.

С исторической точки зрения появление задачи Дирихле связано со следующей проблемой: требуется найти функцию, гармоническую в некоторой области, непрерывную в замыкании этой области и совпадающую на границе с заданной непрерывной функцией. Далее, Пуассон в 1825г. доказал существование единственного решения поставленной задачи в случае, когда граница G является сферой или окружностью. Когда G является произвольной гладкой границей, решить задачу долго не удавалось. Лишь в начале XX века Фредгольм получил окончательное решение в своей фундаментальной работе об [6] интегральных уравнениях. Он использовал потенциалы, чтобы найти представление решения.

Далее, теория эллиптических уравнений начинает активно развиваться в различных направлениях (подробный обзор результатов, полученных до 1953 года, представлен в монографии К. Миранды [7]). В 1937 году И.Г. Петровский [8] выделил широкий класс систем уравнений в частных производных, характеризующихся тем, что достаточно гладкие решения этих систем аналитичны.

Впрочем, как оказалось, свойства разрешимости классических граничных задач для эллиптических по Петровскому систем существенно отличаются от случая одного уравнения. В 1948 году А.В. Бицадзе [9] привёл пример эллиптической по Петровскому системы двух уравнений второго порядка, для которой нарушается нетеровость задачи Дирихле. Эту систему можно записать в виде одного комплексного уравнения, которое теперь называется уравнением Бицадзе. Таким образом, стало понятно, что класс систем, для которых задача Дирихле корректна, должен характеризоваться некоторыми дополнительными ограничениями.

В работе [10] М.И. Вишик ввел понятие сильно эллиптической системы дифференциальных уравнений. Система

$$Lu = (-1)^m \sum_{(k)} A^{(k_1 \dots k_{2m})}\left(x\right) \frac{\partial^{2m} u(x)}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_{2m}}} + Tu = f(x), \tag{0.0.1}$$

называется сильно эллиптической в точке $x = (x_1, \dots, x_n)$, если матрица

$$\sum_{(k)} C^{(k_1 \dots k_{2m})}(x)\xi_{k_1} \dots \xi_{k_{2m}}, \qquad (0.0.2)$$

где $\sum_{(k)} C^{(k_1 \dots k_{2m})}(x)$ — симметрическая часть матрицы $A^{(k_1 \dots k_{2m})}(x)$, является положительно определенной для любых действительных чисел $\xi_1, \dots, \xi_n$, не обращающихся одновременно в нуль. На кососимметрические части матриц $A^{(k_1 \dots k_{2m})}(x)$, т. е. на $K^{(k_1 \dots k_{2m})}(x)$, и на коэффициенты при членах порядка $< 2m$ никаких ограничений не налагается. Система (0.0.1) называется сильно эллиптической в области D n - мерного эвклидова пространства, если она сильно эллиптична в каждой точке $x \in D.$ Сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений являются подклассом класса эллиптических систем в смысле И. Г. Петровского ([11], [12]). Как было показано в [10], для сильно эллиптических систем задача Дирихле является фредгольмовой. Следует отметить, что после того, как в тридцатых годах прошлого столетия появились работы С.Л. Соболева ([13]) о пространствах обобщенных функций W_p^l, теория этих пространств создала возможность широкого использования методов функционального анализа при решении краевых задач для эллиптических уравнений и заняла одно из центральных мест в теории дифференциальных уравнений.

Основополагающие результаты в теории эллиптических уравнений с двумя независимыми переменными принадлежат И. Н. Векуа. Он получил формулы, выражающие все регулярные решения уравнения

$$\Delta u + au_x + bu_y + cu = 0 \qquad (0.0.3)$$

(с аналитическими коэффициентами a, b, c) через аналитические функции одного комплексного переменного в односвязных и многосвязных областях. И. Н. Векуа получил также общее представление (в односвязной области) решения уравнения

$$\Delta^s u + \sum_{m=1}^{s} \sum_{p,q=0}^{p+q \le m} a_{p,q}^{(k)}(x,y) \frac{\partial^{p+q}\left(\Delta^{s-m} u\right)}{\partial^p \partial^q} = 0,$$

где $a_{p,q}^{(m)}$ аналитические функции действительных переменных x и y, и с помощью этого представления была исследована задача Дирихле. Эти результаты изложены в его монографии [14]. В этой же монографии получена формула общего решения $n-$

гармонического уравнения вне круга. Далее исследователи сосредоточили основное внимание на исследовании нормальной разрешимости и нетеровости краевых задач. В работах Б.Я. Лопатинского [15] и З.Я. Шапиро [16] был предложен метод, заключающийся в том, что граничная задача

$$\begin{cases} Lu = 0, \;\; x \in D \subset R^N, \\ B_j u = f_j, \;\; x \in \partial D, \end{cases} \tag{0.0.4}$$

где порядок граничных операторов B_j ниже порядка L ($D-$ выпуклая область), сводится к фредгольмовым интегральным уравнениям на границе области. Это возможно и, следовательно, задача (0.0.4) является нетеровой, если выполняется некоторое алгебраическое условие - условие Лопатинского. Приведение граничных задач для эллиптических уравнений к интегральным уравнениям (уравнениям Фредгольма или сингулярным интегральным уравнениям) с самого зарождения теории являлось одним из главных методов исследования. При этом ключевую роль играют различные интегральные представления искомых решений в виде потенциалов [17], [18], [19], [20]. Этот подход оказался также эффективным при изучении краевых задач на многообразиях [21].

Работы А. В. Бицадзе [22], [9], [23], [24] являются фундаментальным вкладом в теорию граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа. В работе [22] построено общее решение эллиптической системы с главной частью в виде оператора Лапласа и общая краевая задача для такой системы приведена к эквивалентной системе одномерных сингулярных уравнений с ядрами Коши. Отсюда, в частности, следует фредгольмовость задачи Дирихле (с гельдеровыми граничными данными).

В монографии А.В.Бицадзе [22] найдено общее решение эллиптической системы

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0 \tag{0.0.5}$$

с постоянными действительными коэффициентами ($A, B, C-$ постоянные действительные квадратные матрицы порядка n) в односвязных и многосвязных областях. На основе полученного представления введено условие слабой связанности системы (0.0.5), выполнение которого обеспечивает фредгольмовость задачи Дирихле в классе Гельдера.

Отметим, что хотя разные представления общего решения использовались ранее И.Н. Векуа [14], Б. Леви [25], систематическое и эффективное применение формул общего решения начинается с работ А.В. Бицадзе.

Общая граничная задача для эллиптических систем была рассмотрена А.И. Вольпертом [26].

$$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+au_x+bu_y+cu=f \tag{0.0.6}$$

Он доказал, что условие согласования коэффициентов A, B, C системы с коэффициентами α, β, γ граничного условия

$$\alpha u_x+\beta u_y+\gamma u=g \tag{0.0.7}$$

(условие Лопатинского), достаточное для нетеровости преведённой задачи, в ряде функциональных пространств является также и необходимым. Указан метод вычисления индекса этой задачи. В работе [27] им найдено условие на коэффициенты системы (0.0.6), при выполнении которого задача Дирихле сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма.

Начиная с работ И.Н. Векуа, краевые задачи теории аналитических функций – задачи типа Римана-Гильберта [28], [29], [30] – один из главных методов исследования в теории граничных задач для эллиптических дифференциальных уравнений в двухмерной области. Поскольку общее решение эллиптических уравнений с постоянными коэффициентами выражается через произвольные аналитические функции [22],[14],[29] то задача Дирихле для них приводится к граничной задаче сопряжения со сдвигом [28] относительно аналитических функций. Потребности теории дифференциальных уравнений привели к необходимости расширения теории сингулярных интегральных уравнений, а также теории краевых задач теории функций (А.П. Солдатов [31] [30], [32], [33], Н.Е. Товмасян [34]). Новые постановки в теории краевых задач позволили рассмотреть классические граничные задачи для эллиптических дифференциальных уравнений в классах функций, интегрируемых с весом (Г. М. Айрапетян [35], [36], [11]). Работы Б.В. Боярского [37], В.П. Бурского [38], А.И. Вольперта [39], Э.П. Меликсетяна [40], А. П. Солдатова [41, 42], Ш.Б. Халилова [43], и др. посвящены исследованию задачи Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка в различных классах функций. Во всех указанных работах исследована задача Дирихле в ограниченных односвязных областях. Задача Дирихле в многосвязных областях в различных классах функций рассмотрена в работах Н. Е. Товмасяна [44, 45], Н. Е. Товмасяна и В. С. Закаряна [46], Р.А. Алиханяна [12], В. Вольперта [47] и А. Вольперта [48] и др.

После этого исследования были продолжены для правильно эллиптического уравнения. В работе А. П. Солдатова [42] была исследована однозначная разрешимость задачи Дирихле для эллиптической системы второго порядка. Для правильно эллиптического уравнения четвертого порядка необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи были найдены в работах А. О. Бабаяна [49] и К.А. Буряченко [50]. Аналогичный результат для уравнения высокого порядка (если характеристическое уравнение имеет только простые корни) был получен в работах А. О.Бабаяна [51], Н. Е. Товмасяна [46], В.П. Бурского, Е.А. Буряченко[52]. Правильно эллиптическое уравнение, когда кратность корней уравнения не больше двух, было рассмотрено в работе В. А. Ирицяна [53]. Получены формулы для определения дефектных чисел по коэффициентам уравнения. В работе Н. Е. Товмасяна [46] задача Дирихле исследовалась в произвольной многосвязной области (она была сведена к уравнению Фредгольма второго рода). Во всех этих статьях предполагается, что кратность корней уравнения не больше двух. Эта связано с тем, что формулы представления общего решения уравнения (Бицадзе [22], Векуа [14], Товмасян [54]) не очень удобны в случае кратных корней характеристического уравнения. В работе А. О. Бабаяна[55] была получена формула общего решения дифференциального уравнения с частными производными вида в случае, когда D - единичный круг.

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \frac{\partial^n u}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = 0, \quad (x, y) \in D. \tag{0.0.8}$$

Используя это представление, была получена формула для определения дефектных чисел задачи Дирихле для правильно эллиптического уравнения. В дальнейших работах А.О. Бабаяна [49],[56] для уравнения четвертого порядка получены другие формулы для определения дефектных чисел по коэффициентам уравнения, которые позволили, в ряде случаев, точно определить эти числа. В этих работах были исследованы как правильно, так и неправильно эллиптические уравнения. Отметим, что случай неправильно эллиптических уравнений возможен, только когда число независимых переменных равно двум.

Для неправильно эллиптических уравнений или сильно связанных систем классические краевые задачи не являются ни фредгольмовыми ни нетеровыми [9]. Поэтому до 1968 года классические граничные задачи (Дирихле, Неймана, Пуанкаре) для неправильно эллиптических уравнений не рассматривались. В [57] эти задачи были исследованы для неправильно эллиптических уравнений второго порядка, где и был описан более узкий класс функций, в котором данные задачи являются нетеровыми. Вопросу однозначной разрешимости задачи Дирихле для однородного уравнения второго порядка посвящена работа [58], а та же задача для однородного неправильно эллиптического уравнения четвертого порядка рассмотрена в [50]. В [59] получены условия разрешимости граничных задачи для неоднородного полианалитического уравнения (рассмотренные задачи не являются нормально разрешимыми, соответственно возникают континуум линейно независимых условий, при которых данные граничные задачи имеют решение). В работе [60] А.О. Бабаян исследует однородную и неоднородную задачи Дирихле для неправильно эллиптических уравнений четвертого порядка. Определен функциональный класс граничных функций, в котором задача нормально разрешима.

Актуальность темы. Теория краевых задач широко применяется при решении практических задач. При этом для эффективного применения этой теории необходимо определить, когда данная задача однозначно разрешима, или в более общей ситуации, определить дефектные числа (количество линейно независимых решений однородной задачи и количество линейно независимых условий разрешимости неоднородной задачи) задачи. В то время как вопросы нормальной разрешимости и вопрос вычисления индекса (разность дефектных чисел) в значительной мере решены, работ, посвященных определению дефектных чисел существенно меньше. При этом точные значения дефектных чисел были получены для уравнений, порядок которых не более четырех. В случае уравнений шестого порядка возникает ряд осложнений, которые в первую очередь связаны с тем, что кратность корней характеристического уравнения может быть более трёх. Этот случай ранее не изучался, поэтому задачи рассмотренные, в работе представляются актуальными.

Цель работы.

1. Исследовать граничные задачи Дирихле для правильно и неправильно эллиптических уравнений шестого порядка.

2. Определить в явном виде линейно независимые решения однородной задачи Дирихле и условия разрешимости соответствующей неоднородной задачи.

3. При некотором расположении корней характеристического уравнения определить в явном виде дефектные числа задачи Дирихле.

Методы исследования. Применяются методы теории аналитических функций и теории граничных задач.

Научная новизна работы. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Они обоснованы строгими математическими доказательствами.

Практическая и теоретическая ценность. Полученные теоретические результаты могут быть использованы при исследовании граничных задач, а также в теории упругости и в других областях, использующих методы теории граничных задач.

Апробация работы. Результаты диссертации неоднократно докладывались на научных семинарах кафедры прикладной математики НПУА, на годичных конференциях НПУА в 2016-2018 годах, на годичных конференциях Армянского математического общества (Ереван 2017), на конференции, посвященной 100-летию академика М.М. Джрбашяна (Ереван 2018). Результаты докладывались также на международных конференциях:

- VII Российско-Армянское международное совещание по Современным методы и проблемам теории операторов и гармонического анализа и их приложения. Ростов-на-Дону, Россия, 23-28 апреля, 2017г.
- XXXI Международное расширенное заседание семинара Института прикладной математики имени Ильи Векуа посвященное 110-летию со дня рождения академика Ильи Векуа. Тбилиси, Грузия, 19-21 апреля 2017 г.
- VII Международная конференция по Гармоническую анализу и приближениям, посвященная 90-летию академика НАН Армении А.А. Талаляна. Цахкадзор, Армения, 16-22 сентября, 2018г.

Публикации. Основные результаты диссертации представлены в 5 научных статьях опубликованных в рецензируемых журналах, входящих в перечень ВАК (список приведен в конце диссертации), одна из которых входит в базу данных “Scopus”. Материалы диссертации основаны на теоретических работах, выполненных в Национальном политехническом университете Армении.

Структура и объем диссертации. Диссертации состоит из введения, трех глав, содержащих 7 параграфов, заключения и списка цитируемой литературы, включающего 80 наименований. Общий обьем диссертации составляет 104 страниц.

ГЛАВА 1.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

В этой главе будут доказаны вспомогательные предложения, необходимые для дальнейшего. Пусть D - единичный круг комплексной плоскости. Если комплексное число μ удовлетворяет условию $|\mu|<1$, то обозначим

$$D_1(\mu)=\{z+\mu\overline{z} : z\in D\},\quad D_2(\mu)=\{\overline{z}+\mu z : z\in D\} \tag{1.0.1}$$

области, на которые отображается единичный круг D при отображениях $z\to z+\mu\overline{z}$ и $z\to\overline{z}+\mu z$ соответственно. Рассмотрим отображение $z\to z+\mu\overline{z}$. При этом отображении окружность $|z|=r<1$ переходит в кривую Γ, которая имеет следующий вид. Если $\mu=|\mu|e^{i\delta}$, то имеем

$$z+\mu\overline{z}=re^{i\varphi}+r|\mu|e^{i(\delta-\varphi)}=re^{i\frac{\delta}{2}}\left(e^{i\left(\varphi-\frac{\delta}{2}\right)}+|\mu|e^{-i\left(\varphi-\frac{\delta}{2}\right)}\right),\ z=re^{i\varphi},$$

то есть кривая Γ является эллипсом с полуосями $r\left(1\pm|\mu|\right)$ и с центром в нуле (рис.1).

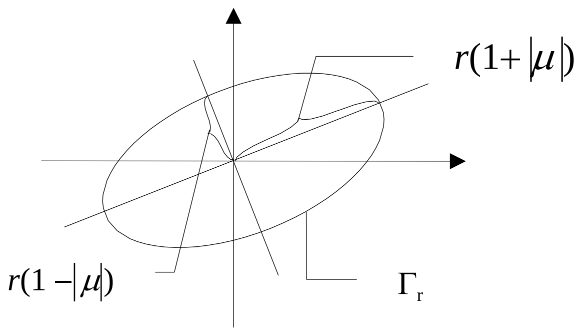


рис.1

Таким образом, $D_1(\mu)$ является внутренней частью эллипса с центром в нуле и полуосями $1\pm|\mu|$. Большая полуось этого эллипса образует угол 0.5δ с осью *Ox*. Аналогично, область $D_2(\mu)$ также является эллипсом. В последующих рассуждениях основную роль играет представление аналитических функций, полученное Н.Е. Товмасяном в 1968г. Для полноты изложения этот результат приводим вместе с доказательством.

Лемма 1.0.1 (Н.Е. Товмасян 1968 [57])

Пусть функция Φ аналитична в области $D_1(\mu)$ и $\Phi \in C^{(\alpha)}\left(\overline{D_1(\mu)}\right)$. Тогда на $\Gamma = \partial D$ выполняется равенство

$$\Phi(z + \mu\overline{z}) = \eta(z) + \eta(\mu\overline{z}), \quad |z| = 1, \tag{1.0.2}$$

где η аналитическая в круге D функция из класса $C^{(\alpha)}\left(\overline{D}\right)$. Если известна функция η, то функция Φ определяется по формуле

$$\Phi(\zeta) = \eta\left(\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4\mu}}{2}\right) + \eta\left(\frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 4\mu}}{2}\right), \quad \zeta \in D_1(\mu). \tag{1.0.3}$$

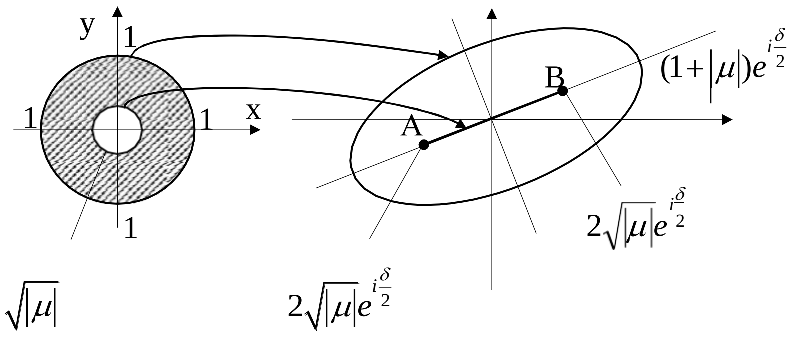
Здесь и далее берем такую ветвь корня $\sqrt{\zeta^2 - 4\mu}$, которая непрерывна вне отрезка с концами в точках $A = -2\sqrt{\mu},\ B = 2\sqrt{\mu}$ и удовлетворяет условию $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}\sqrt{t^2 - 4\mu} = 1.$

Доказательство леммы 1.0.1.

Пусть функция Φ аналитична в области $D_1(\mu)$. Рассмотрим функцию

$$\omega(z) = \Phi\left(z + \frac{\mu}{z}\right).$$

Так как отображение $\zeta(z) = z + \dfrac{\mu}{z}$ конформно отображает кольцо $\sqrt{|\mu|} < |z| < 1$ на область



Z рис. 2 ζ

$D_1(\mu)/AB$ (рис.2), то функция ω аналитична в кольце $\sqrt{|\mu|} < |z| < 1$. Следовательно, она разлагается в ряд Лорана, который сходится в этом кольце

$$\omega(z) = \Phi\left(z + \frac{\mu}{z}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \ \sqrt{|\mu|} < |z| < 1. \tag{1.0.4}$$

При этом, так как $\Phi \in C^{(\alpha)}\left(\overline{D_1(\mu)}\right)$, то ω непрерывно продолжается на границу кольца $\sqrt{|\mu|} < |z| < 1$ и $\omega \in C^{(\alpha)}\left(\sqrt{|\mu|} < |z| < 1\right)$. Пусть $|t| = 1$. Тогда из (1.0.4) следует, что $\omega\left(t\sqrt{\mu}\right) = \omega\left(t^{-1}\sqrt{\mu}\right)$, следовательно, в каждой точке единичной окружности:

$$\omega\left(t\sqrt{\mu}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k t^k \left(\sqrt{\mu}\right)^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k t^{-k} \left(\sqrt{\mu}\right)^k = \omega\left(t^{-1}\sqrt{\mu}\right), \quad |t| = 1.$$

Из единственности разложения в ряд Фурье следует, что $a_k\left(\sqrt{\mu}\right)^k = a_{-k}\left(\sqrt{\mu}\right)^{-k}$, или

$$a_{-k} = a_k \mu^k, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{1.0.5}$$

Таким образом, ряд (1.0.4) примет вид

$$\omega(z) = \Phi\left(z + \frac{\mu}{z}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k + \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu^k z^{-k} \equiv \eta(z) + \eta\left(\frac{\mu}{z}\right), \ \sqrt{|\mu|} < |z| < 1. \tag{1.0.6}$$

Легко видеть, что так определенная функция η аналитична в единичном круге и $\eta \in C^{(\alpha)}\left(\bar{D}\right)$. При $|z| = 1$ равенство (1.0.6) совпадает с (1.0.2). Далее, (1.0.3) на границе области $D_1(\mu)$ совпадет с (1.0.2), и так как правая и левая части (1.0.3) аналитичны в $D_1(\mu)$, то равенство (1.0.3) также верно. Лемма доказана.

Аналогично доказывается, что если функция Ψ аналитична в области $D_2(\mu)$ и $\Psi \in C^{(\alpha)}\left(\overline{D_2(\mu)}\right)$, то существует и единственна функция σ из класса $C^{(\alpha)}\left(\overline{D}\right)$, аналитическая в единичном круге D, такая что выполняются соотношения

$$\Psi(\bar{z} + \mu z) = \sigma(\bar{z}) + \sigma(\mu z), \quad |z| = 1, \tag{1.0.7}$$

$$\Psi(\zeta) = \sigma\left(\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4\mu}}{2}\right) + \sigma\left(\frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 4\mu}}{2}\right), \quad \zeta \in D_2(\mu). \tag{1.0.8}$$

Следующее утверждение доказывается прямым вычислением.

Лемма 1.0.2

Пусть $\dfrac{\partial}{\partial \varphi}$ - оператор дифференцирования по аргументу комплексного числа $z = re^{i\varphi}$, а операторы $\dfrac{\partial}{\partial z}$ и $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ определяются таким образом:

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{1.0.9}$$

Тогда при любых неотрицательных целых k,l,m выполняется соотношение

$$\frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k \partial \overline{z}^m}\frac{\partial^l}{\partial \varphi^l}=\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}+\left(k-m\right)iI\right)^l\frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k \partial \overline{z}^m}, \tag{1.0.10}$$

где i - мнимая единица, а I - единичный оператор.

Построим общее решение уравнения (0.0.8), которое существенно облегчит исследование граничных задач в единичном круге D. Для этого докажем лемму 1.0.3.

Лемма 1.0.3 (Бабаян 2003 [55])

Пусть μ отличное от нуля комплексное число, $|\mu|<1$. Тогда в единичном круге общее решение уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}-\mu\frac{\partial}{\partial z}\right)^k u=0,\qquad (x,y)\in D \tag{1.0.11}$$

допускает представление

$$u=\sum_{n=0}^{k-1}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^n \Phi_n(z+\mu\overline{z}), \tag{1.0.12}$$

где Φ_n аналитические в области $D_1(\mu)$ функции.

Доказательство леммы 1.0.3.

При $k=1$ утверждение леммы верно (см. [22]). Предположим, что при k это утверждение также выполнено. Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}-\mu\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k+1} u=0$$

Так как при $k=1$ утверждение леммы верно, представим последнее уравнение в эквивалентной форме:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}-\mu\frac{\partial}{\partial z}\right)^k u=\Phi_k(z+\mu\overline{z}), \tag{1.0.13}$$

где Φ_k аналитическая в области $D_1(\mu)$ функция. Решение уравнения (1.0.13) представляется в виде $u=u_0+u^*$, где u_0 - решение соответствующего однородного уравнения (при $\Phi_k\equiv 0$), а u^* - некоторое частное решение уравнения (1.0.13). По предположению индукции u_0 допускает представление (1.0.12). Частное решение u^* будем искать в виде

$$u^* = \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^k F(z+\mu\overline{z}),$$

где F подлежащая определению аналитическая в $D_1(\mu)$ функция. Для определения F подставим функцию u^* в (1.0.13). Используя соотношения

$$z\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \quad \overline{z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \tag{1.0.14}$$

выразим оператор $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ с помощью комплексных операторов дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} = iz\frac{\partial}{\partial z} - i\overline{z}\frac{\partial}{\partial\overline{z}},$$

и затем выполним замену переменной $\varsigma = z+\mu\overline{z}$. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z}} - \mu\frac{\partial}{\partial z} = \left(1-|\mu|^2\right)\frac{\partial}{\partial\overline{\varsigma}},$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} = i\left(1-|\mu|^2\right)^{-1}\left(\left(\left(1+|\mu|^2\right)\varsigma - 2\mu\overline{\varsigma}\right)\frac{\partial}{\partial\varsigma} - \left(\left(1+|\mu|^2\right)\overline{\varsigma} - 2\overline{\mu}\varsigma\right)\frac{\partial}{\partial\overline{\varsigma}}\right), \tag{1.0.15}$$

следовательно, получим уравнение для определения неизвестной функции F :

$$i^k\left(\frac{\partial}{\partial\overline{\varsigma}}\right)^k\left(\left(\left(1+|\mu|^2\right)\varsigma - 2\mu\overline{\varsigma}\right)\frac{\partial}{\partial\varsigma} - \left(\left(1+|\mu|^2\right)\overline{\varsigma} - 2\overline{\mu}\varsigma\right)\frac{\partial}{\partial\overline{\varsigma}}\right)^k F(\varsigma) = \Phi_k(\varsigma).$$

Используя аналитичность функции F , последнее уравнение приводится к следующему равенству

$$\left(-2i\mu\right)^k k!F^{(k)}(\varsigma) = \Phi_k(\varsigma),$$

из которого определяем неизвестную функцию $F(\varsigma) = \frac{1}{\left(-2i\mu\right)^k k!}G_k(\varsigma),$ где $G_k^{(k)}(\varsigma) = \Phi_k(\varsigma).$

Итак, решение уравнения (1.0.13) допускает представление

$$u = \sum_{n=0}^{k-1}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^n \Phi_n(z+\mu\overline{z}) + \frac{1}{\left(-2i\mu\right)^k k!}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^k G_k(z+\mu\overline{z})$$

то есть имеет вид (1.0.12). Таким образом, утверждение леммы справедливо и при $k+1$. Лемма доказана.

Аналогично доказывается, что общее решение уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}-\nu\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k}u=0 \tag{2.0.16}$$

при $\nu\neq 0$ допускает представление

$$u=\sum_{n=0}^{k-1}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^{n}\Phi_{n}(\overline{z}+\nu z), \tag{1.0.17}$$

где Φ_n - аналитические в области $D_2(\nu)$ функции. При $\mu=0$ будем использовать следующее представление общего решения уравнения (1.0.11) (см. [54]):

$$u=\sum_{n=0}^{k-1}\left(1-z\overline{z}\right)^{n}\Phi_{n}(z)+\sum_{i=0}^{k-2}\overline{z}^{i+1}P_{j}(z), \tag{1.0.18}$$

где Φ_n - аналитические в D функции. Аналогично, решение уравнения (1.0.16) при $\nu=0$ имеет вид (1.0.18) с заменой $\Phi_n(z)$ на $\Phi_n(\overline{z})$. Теперь рассмотрим произведение операторов, участвующих в уравнениях (1.0.11) и (1.0.17). Для простоты изложения рассмотрим уравнение

$$R_1R_2u\equiv\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}-\mu\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}-\nu\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k}u=0$$

Используя лемму 1.0.3, приведем это уравнение к эквивалентной форме:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}-\nu\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k}u=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^{i}\Psi_{n}(z+\mu\overline{z}), \tag{1.0.19}$$

где Ψ_i - аналитические в $D_1(\mu)$ функции. Решение этого уравнения имеет вид $u=u_0+\sum_{i=0}^{n-1}u_i^{*}$,

где u_0 - общее решение уравнения (1.0.16), а u_i^{*} - некоторое решение неоднородного уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}-\nu\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k}u=\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^{i}\Psi_{i}(z+\mu\overline{z}),\quad i=0,...,n-1. \tag{1.0.20}$$

Функция u_0 имеет вид (1.0.17), а частное решение u_i^{*} будем искать в виде

$$u_i^{*}=\sum_{q=0}^{i}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^{q}G_{qi}(z+\mu\overline{z}), \tag{1.0.21}$$

где G_{qi} - аналитические в $D_1(\mu)$ функции, подлежащие определению. Подставим функцию (1.0.21) в (1.0.19), и выполним замену переменной $\varsigma = z + \mu\bar{z}$. Учитывая соотношение $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \nu\frac{\partial}{\partial z} = (1-\mu\nu)\frac{\partial}{\partial\varsigma} + (\bar{\mu}-\nu)\frac{\partial}{\partial\bar{\varsigma}}$, а также (1.0.15) приводим уравнение (1.0.19) к следующей форме:

$$\left((1-\mu\nu)\frac{\partial}{\partial\varsigma} + (\bar{\mu}-\nu)\frac{\partial}{\partial\bar{\varsigma}}\right)^k \times$$

$$\times\sum_{q=0}^{i}\left(i\left(1-|\mu|^2\right)^{-1}\left(\left(\left(1+|\mu|^2\right)\varsigma - 2\mu\bar{\varsigma}\right)\frac{\partial}{\partial\varsigma} - \left(\left(1+|\mu|^2\right)\bar{\varsigma} - 2\bar{\mu}\varsigma\right)\frac{\partial}{\partial\bar{\varsigma}}\right)\right)^q G_{qi}(\varsigma) =$$

$$= \left(i\left(1-|\mu|^2\right)^{-1}\left(\left(\left(1+|\mu|^2\right)\varsigma - 2\mu\bar{\varsigma}\right)\frac{\partial}{\partial\varsigma} - \left(\left(1+|\mu|^2\right)\bar{\varsigma} - 2\bar{\mu}\varsigma\right)\frac{\partial}{\partial\bar{\varsigma}}\right)\right)^i \Psi_i(\varsigma).$$

При каждом i, используя аналитичность функций Ψ_i и G_{qi}, из последнего уравнения получаем треугольную систему уравнений, которая позволяет определить функции G_{qi}. Таким образом, общее решение (1.0.19), представляется в виде суммы решений вида (1.0.17) и (1.0.12).

Аналогично, суммируя (1.0.12), (1.0.17) и (1.0.18), мы получим общее решение уравнения (0.0.8)

$$u = \sum_{k=1}^{p}\sum_{b=0}^{l_k-1}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^b \Phi_{1kb}\left(z+\mu_k\bar{z}\right) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{b=0}^{n_i-1}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^b \Phi_{2kb}\left(\bar{z}+\nu_i z\right), \tag{1.0.22}$$

которое и будем использовать в дальнейшем. Здесь Φ_{1kb} и Φ_{2ib} - функции, аналитические в областях $D_1(\mu_k)$ и $D_2(\nu_k)$ соответственно.

Замечание 1.0.1 Функции Φ_{1kb} и Φ_{2ib}, с помощью которых записывается общее решение уравнения (1.0.15), определяются по этому решению с точностью до многочлена порядка $N-2$.

Лемма 1.0.4

Пусть $P_n(z,\bar{z})$ - многочлен порядка n. Если этот многочлен на единичной окружности Γ удовлетворяет условиям

$$\left.\frac{\partial^k P_n}{\partial r^k}\right|_{\Gamma} = 0, \quad k = 0,1,\dots,m-1, \tag{1.0.23}$$

то он допускает представление

$$P_n(z,\overline{z}) = (z\overline{z} - 1)^m P_{n-2m}(z,\overline{z}),$$

если $n > 2m$. Здесь P_{n-2m} - многочлен порядка $n-2m$. В случае $n < 2m$ из (1.0.23) следует, что $P_n \equiv 0$.

Доказательство леммы 1.0.4.

Эта лемма может быть доказана прямым вычислением, но она также следует из [61] (стр. 74, теорема 5.1), где доказывается, что произвольный многочлен P_n допускает представление $P_n(z,\overline{z}) = (1 - z\overline{z})L_{n-2}(z,\overline{z}) + Q(P_n)(z,\overline{z})$, где $Q(P_n)$ - гармонический многочлен, совпадающий на границе Γ с многочленом P_n . В нашем случае, из первого условия (1.0.23), имеем $Q(P_n) \equiv 0$, поэтому, применяя эту теорему, получим $P_n(z,\overline{z}) = (1 - z\overline{z})L_{n-2}(z,\overline{z})$. Используя аналогичные рассуждения для многочлена L_{n-2} , с использованием условий (1.0.23), завершаем доказательство леммы.

ГЛАВА 2.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

В этой главе мы будем рассматривать задачу Дирихле в единичном круге для эллиптических уравнений шестого порядка. Основная цель этой главы состоит в том, чтобы найти значение дефектных чисел задачи Дирихле и исследовать проблему однозначной разрешимости. Для случая правильно эллиптического уравнении доказано, что задача Дирихле фредгольмова. Эллиптическое уравнение второго порядка впервые изучено Н. Е. Товмасяном [57]. Он доказал, что задача однозначно разрешима и дефектные числа равны нулю.

Далее, в работе А.О. Бабаяна [49] была исследована задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения четвертого порядка и в работе получено, что дефектные числа могут отличаться от нуля. Также для уравнения четвертого порядка нетривиальная разрешимость однородной задачи Дирихле была исследована в работе Е.А. Буряченко [50]. Затем, полное исследование задачи Дирихле для правильно эллиптических уравнений было проведено в [62], в случае, когда характеристическое уравнение имеет простые корни, а в [55] для случая произвольного расположения корней. Затем, в работе В.П. Бурского и Е.А. Буряченко [52] была рассмотрена однозначная разрешимость однородной задачи Дирихле для уравнения четного порядка.

Пусть $D=\{z: z=x+iy, |z|<1\}$ единичный круг комплексной плоскости и $\Gamma=\partial D$, его граница. В области D рассмотрим дифференциальное уравнение шестого порядка:

$$\sum_{k=0}^{6} E_k \frac{\partial^6 u}{\partial x^k \partial y^{6-k}}(x,y)=0, \quad (x,y)\in D. \qquad (2.0.1)$$

Здесь E_k - комплексные постоянные такие, что $E_0 \neq 0$. Три корня соответствующего характеристического уравнения (2.0.1)

$$\sum_{k=0}^{6} E_k \lambda^{6-k} = 0 \qquad (2.0.2)$$

находятся в верхней полуплоскости, а три – в нижней.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения (2.0.1) в классической постановке, то есть искомое решение принадлежат классу $C^6(D)\cap C^{(2,\alpha)}(\bar{D})$ и на границе Г удовлетворяет условиям Дирихле:

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial r^j}\right|_\Gamma = f_j(x,y), \quad j=0,1,2; \quad (x,y)\in\Gamma. \tag{2.0.3}$$

Граничные условия (2.0.3) заменим эквивалентными условиями

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial z^j \partial \bar{z}^{2-j}}\right|_\Gamma = F_j(\theta) \quad j=0,1,2, \quad z=e^{i\theta}\in\Gamma, \tag{2.0.4}$$

$$u(1,0)=f_0(1,0), \quad u_r(1,0)=f_1(1,0), \quad u_\theta(1,0)=f_{0\theta}(1,0).$$

Здесь $F_j \in C^{(\alpha)}(\Gamma)$ функции, однозначно определяемые по граничным функциям f_0, f_1, f_2:

$$\begin{aligned} F_0(\theta) &= 0.25e^{2i\theta}\left(f_2+2if_1'-f_0''-f_1-2if_0'\right),\\ F_1(\theta) &= 0.25\left(f_2+f_1+f_0''\right),\\ F_2(\theta) &= 0.25e^{-2i\theta}\left(f_2-2if_1'-f_0''-f_1+2if_0'\right), \end{aligned} \tag{2.0.5}$$

Как известно, (см. [54],[63]) задача (2.0.1), (2.0.3) фредгольмова. Общая формула для определения дефектных чисел этой задачи была найдена в [55]. После этого было показано, что могут быть получены более точные результаты. В [56] исследовалось уравнение четвертого порядка, и для некоторого расположения корней характеристического уравнения было доказано, что дефектные числа не могут быть больше единицы.

В первом пункте этой главы изучается следующее правильно эллиптическое уравнение шестого порядка

$$\frac{\partial^3}{\partial \bar{z}^3}\left(\frac{\partial}{\partial z}-\mu\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^3 u = 0,$$

где мнимая единица является трёхкратным корнем. В этом случае доказывается, что задача однозначно разрешима, т.е. решение задачи существует при любых граничных функциях f_j и это решение единственно.

Во втором пункте рассматривается задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения, когда мнимая единица является двухкратным корнем.

$$\frac{\partial^2}{\partial \overline{z}^2}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}-\mu\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}-\nu\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^3 u(x,y)=0,$$

В этом случае по коэффициентам уравнения (μ и ν) получены условия однозначной разрешимости задачи Дирихле. Показано, что если эти условия нарушаются, то однородная задача имеет одно линейно независимое решение, а для разрешимости соответствующей неоднородной задачи необходимо одно линейно независимое условие. То есть дефектные числа задачи могут быть равны нулю или единице.

Третий пункт посвящен исследованию задачи Дирихле для правильно эллиптического уравнения шестого порядка, когда i является простым корнем, один корень - двухкратный, и один – трёхкратный. Тогда уравнение примет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}-\mu\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial z}-\nu\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^3 u=0.$$

В этой пункте для дефектных чисел мы получили тот же результат, что и в предыдущем параграфе. Таким образом, дефектные числа в задаче Дирихле для правильно эллиптического уравнения шестого порядка не превышают одного.

В четвёртом пункте рассматриваются следующие два уравнения:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}-\mu\frac{\partial}{\partial z}\right)^3\left(\frac{\partial}{\partial z}-\nu_1\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}-\nu_2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}-\nu_3\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)u=0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}-\mu\frac{\partial}{\partial z}\right)^3\left(\frac{\partial}{\partial z}-\nu_1\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}-\nu_2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)\frac{\partial}{\partial \overline{z}}u=0,$$

где корни характеристического уравнения для первого уравнения отличны от $\pm i$, а один из корней характеристического уравнения для второго уравнения равен $-i$. В случае второго уравнения доказано, что дефектные числа могут быть равны двум.

§2.1 Задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения шестого порядка, когда мнимая единица является трехкратным корнем характеристического уравнения

Теорема 2.1.1. Пусть характеристическое уравнение имеет два различных трехкратных корня, один из которых – мнимая единица, то есть уравнение (2.0.1) примет вид:

$$\frac{\partial^3}{\partial \overline{z}^3}\left(\frac{\partial}{\partial z}-\mu\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^3 u=0\,, \tag{2.1.1}$$

Здесь $\mu-$ постоянное число, такое, что $0<|\mu|<1$. Задача (2.1.1),(2.0.4) и, следовательно, исходная задача (2.0.1),(2.0.3) однозначно разрешима, т.е. решение задачи (2.0.1),(2.0.3) существует при любых граничных функциях $f_j \in C^{(2-j,\alpha)}(\Gamma)$, $j=0,1,2$ и это решение единственно.

Доказательство теоремы 2.1.1.

Предполагается, что искомое решение $u-$ шесть раз непрерывно дифференцируемо в D, и вместе с производными второго порядка удовлетворяет условию Гельдера вплоть до границы, т.е. $u\in C^{(2,\alpha)}\left(\overline{D}\right)$. Для уравнения (2.1.1) рассматриваем задачу Дирихле в классической постановке. На границе $\Gamma=\partial D$ неизвестная функция u удовлетворяет условиям Дирихле (2.0.3). Заданные функции f_j принадлежат классу $C^{(2-j,\alpha)}\left(\Gamma\right)$. В [55] было доказано, что условия (2.0.3) эквивалентны условиям (2.0.4). $F_k\in C^{(\alpha)}\left(\Gamma\right)$ заданные функции, однозначно определяемые по функциям f_0, f_1, f_2 (2.0.5).

В [55] было показано, что общее решение уравнения (2.1.1) представляется в виде:

$$u=\Phi_1(z)+\overline{z}\Phi_2(z)+\overline{z}^2\Phi_3(z)+\Psi_1(\overline{z}+\mu z)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\Psi_2(\overline{z}+\mu z)+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Psi_3(\overline{z}+\mu z) \tag{2.1.2}$$

где Φ_j и Ψ_j $\left(j=0,1\right)$ - функции аналитические в областях D и $D_1\left(\mu\right)=\left\{\overline{z}+\mu z\middle| z\in D\right\}$ соответственно, которые необходимо определить. Подставим функцию (2.1.2) в граничные равенства (2.0.3). Используя операторное тождество (1.0.10) получим:

$$2\Phi_3(z)+\Psi_1''(\overline{z}+\mu z)+\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}-2iI\right)\Psi_2''(\overline{z}+\mu z)+\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}-2iI\right)^2\Psi_3''(\overline{z}+\mu z)=F_0\,.$$

$$\Phi_2'(z)+2\,\overline{z}\,\Phi_3'(z)+\mu\Psi_1''(\overline{z}+\mu z)+\mu\frac{\partial}{\partial\varphi}\Psi_2''(\overline{z}+\mu z)+\mu\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Psi_3''(\overline{z}+\mu z)=\mathrm{F}_1\,,$$

$$\Phi_1''(z)+\bar z\Phi_2''(z)+\bar z^2\,\Phi_3''(z)+\mu^2\Psi_1''(\bar z+\mu z)+\mu^2\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}+2iI\right)\Psi_2''(\bar z+\mu z)+$$

$$+\mu^2\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}+2iI\right)^2\Psi_3''(\bar z+\mu z)=F_2.$$

Используем представление, полученное в [54] для функции Ψ''_j:

$$\Psi''_j\left(\bar z+\mu z\right)=\psi_j\left(\bar z\right)+\psi_j\left(\mu z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}A_{kj}\bar z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{kj}\mu^k z^k,\ \ j=0,1,\ \ z\in\Gamma, \tag{2.1.3}$$

а также разложим функции Φ_j в ряд Тейлора $\Phi_j\left(z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}B_{kj}z^k$.Так как подлежащие определению функции Φ_j и ψ_j аналитичны в круге D, то они определяются своими коэффициентами Тейлора A_{kj} и B_{kj}. Разложим функции F_0, F_1, F_2 на окружности Γ в ряд Фурье

$$F_j\left(z\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_{jk}z^k,\qquad j=0,1,2 \tag{2.1.4}$$

и для определения коэффициентов Тейлора A_{kj} и B_{kj}, подставим разложения (2.1.3) и (2.1.4) в граничные условия (2.0.3):

$$2\sum_{k=0}^{\infty}B_{3k}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{1k}\bar z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{1k}\mu^k z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k}\left(-ik-2i\right)\bar z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k}\left(ik-2i\right)\mu^k z^k+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}A_{3k}\left(-ik-2i\right)\bar z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{3k}\left(ik-2i\right)\mu^k z^k=\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_{0k}z^k,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}B_{2k}kz^{k-1}+2\sum_{k=1}^{\infty}B_{3k}kz^{k-2}+\sum_{k=0}^{\infty}\mu A_{1k}\bar z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{1k}\mu^{k+1}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k}\mu\left(-ik\right)\bar z^k+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k}\mu^{k+1}\left(ik\right)z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{3k}\mu\left(-ik\right)^2\bar z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{3k}\mu^{k+1}\left(ik\right)^2z^k=\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_{1k}z^k,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}B_{1k}k\left(k-1\right)z^{k-2}+\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k}k\left(k-1\right)z^{k-3}+\sum_{k=0}^{\infty}B_{3k}k\left(k-1\right)z^{k-4}+\sum_{k=0}^{\infty}A_{1k}\mu^2\bar z^k+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}A_{1k}\mu^{k+2}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k}\left(-ik+2i\right)\mu^2\bar z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k}\left(ik+2i\right)\mu^{k+2}z^k+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}A_{3k}\left(-ik-2i\right)^2\mu^2\bar z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{3k}\left(ik+2i\right)^2\mu^{k+2}z^k=\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_{2k}z^k.$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях z и $\bar z$. Получим системы для определения неизвестных A_{kj}. При $k\ge 1$ получаем систему трех уравнений относительно неизвестных A_{kj}:

$$\begin{aligned}
&A_{1k} + (-ik-2i)A_{2k} + (ik-2i)^2 A_{3k} = d_{-0k}\\
&\mu A_{1k} + \mu(-ik)A_{2k} + \mu(-ik)^2 A_{3k} = d_{-1k}\\
&\mu^2 A_{1k} + \mu^2(-ik+2i)A_{2k} + \mu^{k+2}(-ik+2i)A_{3k} = d_{-2k}
\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Определитель основной матрицы системы (2.1.5) имеет вид:

$$\Omega_k = \det \tilde{\Omega}_k \equiv \det \begin{pmatrix} 1 & -i(k+2) & (-ik-2i)^2 \\ \mu & (-ik)\mu & (-ik)^2\mu \\ \mu^2 & -i(k-2)\mu^2 & (-ik+2i)^2\mu^2 \end{pmatrix} \tag{2.1.6}$$

После преобразований получим:

$$\Omega_k = \begin{vmatrix} 1 & -i(k+2) & (-ik-2i)^2 \\ \mu & (-ik)\mu & (-ik)^2\mu \\ \mu^2 & -i(k-2)\mu^2 & (-ik+2i)^2\mu^2 \end{vmatrix} = -i\mu^3 \begin{vmatrix} 1 & k+2 & (k+2)^2 \\ 1 & k & k^2 \\ 1 & k-2 & (k-2)^2 \end{vmatrix} =$$

$$= i\mu^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4k+4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -4k+4 \end{vmatrix} = i\mu^3(-8k+8+8k+8) = 16i\mu^3 \neq 0$$

Так как $\mu \neq 0$, то при $k > 3$ детерминант (2.1.6) отличен от нуля. Следовательно, коэффициенты A_k, B_k при $k > 3$ определены единственным образом. Остальные коэффициенты (при $k \leq 3$) определяются неоднозначно, однако это не влияет на однозначную разрешимость исходной задачи. Таким образом, теорема 2.1.1 доказана.

§2.2 Задача Дирихле, когда мнимая единица является двухкратным корнем характеристического уравнения

В этом пункте рассматривается задача Дирихле в единичном круге для правильно эллиптического уравнения шестого порядка, когда i – двухкратный корень. Предполагается, что характеристическое уравнение имеет три различных корня и один из корней мнимая единица. Корни характеристическое уравнение удовлетворяют условию

$$\lambda_1 = \lambda_2 = i,\ \lambda_3 \neq i,\ \Im\lambda_3 > 0,\ \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6,\ \Im\lambda_j < 0,\ j = 4,5,6. \tag{2.2.1}$$

Уравнение (2.0.1) примет вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial\overline{z}^2}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}-\mu\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}-\nu\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\right)^3 u(x,y)=0,\qquad (x,y)\in D. \tag{2.2.2}$$

где $\mu,\,\nu$ – постоянные числа такие, что

$$\mu=\frac{i-\lambda_3}{i+\lambda_3},\ \ \nu=\frac{i+\lambda_4}{i-\lambda_4}$$

удовлетворяют условиям $0<|\mu|<1,\quad 0<|\nu|<1.$

Доказываются следующие теоремы.

Теорема 2.2.1. Пусть $\zeta=\mu\nu$. Тогда задача Дирихле (2.2.2), (2.0.4) однозначно разрешима, если выполняются условия

$$P_n(\zeta)=\sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2)\zeta^k\neq 0,\quad n=1,2,... \tag{2.2.3}$$

Если условия (2.2.3) не выполняются при некотором n_0, то однородная задача (2.2.2), (2.0.4) имеет одно нетривиальное решение, которое является многочленом порядка n_0+5. При этом для разрешимости соответствующей неоднородной задачи необходимо одно линейно независимое условие на граничные функции f_j. Условия (2.2.3) могут быть нарушены только для одного $n\geq 1$, и, следовательно, дефектные числа задачи (2.0.1), (2.0.3) могут принимать значение ноль и единица.

Доказательство теоремы 2.2.1.

В [55] было показано, что общее решение уравнения (2.2.2) представляется в виде:

$$u(z,\overline{z})=\Phi_1(z)+\overline{z}\,\Phi_2(z)+\Phi_3(z+\nu\,z)+\Psi_1(\overline{z}+\nu z)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\Psi_2(\overline{z}+\nu z)+\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2\Psi_3(\overline{z}+\nu z) \tag{2.2.4}$$

где Φ_1, Φ_2 аналитичны в D. Функции Φ_3 и Ψ_j $(j=1,2,3)$– аналитичны в областях $D_1(\mu)=\{z+\mu\overline{z}|\,z\in D\}$ и $D_2(\nu)=\{\overline{z}+\nu z|\,z\in D\}$ соответственно. Подставим функцию (2.2.4) в граничные равенства (2.0.3). Используя операторное тождество (1.0.10) получим

$$\mu^2\Phi_3''(z+\mu\,\overline{z})+\Psi_1''(\overline{z}+\nu\,z)+\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}-2i\right)\Psi_2''(\overline{z}+\nu\,z)+\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}-2i\right)^2\Psi_3''(\overline{z}+\nu\,z)=F_0 \tag{2.2.5}$$

$$\Phi_2'(z)+\mu\,\Phi_3''(z+\mu\,\overline{z})+\nu\,\Psi_1''(\overline{z}+\nu\,z)+\nu\frac{\partial}{\partial\varphi}\Psi_2''(\overline{z}+\nu\,z)+\nu\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Psi_3''(\overline{z}+\nu\,z)=F_1 \tag{2.2.6}$$

$$\Phi_1''(z)+\bar{z}\Phi_2''(z)+\Phi_3''(z+\mu\bar{z})+\nu^2\Psi_1''(\bar{z}+\nu z)+\nu^2\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}+2i\right)\Psi_2''(\bar{z}+\nu z)+$$

$$+\nu^2\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}+2i\right)^2\Psi_3''(\bar{z}+\nu z)=F_2 \qquad (2.2.7)$$

Представим Φ_j'' и Ψ_j'' на окружности Γ ([54], стр. 189-190):

$$\Phi_j(z)=\sum_{k=0}^{\infty}A_{jk}z^k,\quad j=1,2;\ \Phi_3''(z+\mu\bar{z})=\varphi_3(z)+\varphi_3(\mu\bar{z})=\sum_{k=0}^{\infty}A_{3k}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{3k}\mu^k z^{-k},$$

$$\Psi_j''(\bar{z}+\nu z)=\psi_j(\bar{z})+\psi_j(\nu z)=\sum_{k=0}^{\infty}B_{jk}z^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty}B_{jk}\nu^k z^k,\quad z=e^{i\theta},\quad j=1,2,3., \qquad (2.2.8)$$

Здесь аналитические в круге функции φ_3 и ψ_j представлены в виде соответствующих рядов Тейлора. Используем также разложения граничных функции F_j (2.1.4) и для определения коэффициентов Тейлора A_{jk} и B_{jk}, подставим разложения (2.2.8) и (2.1.4) в граничные условия (2.0.4) получим:

$$\sum_{k=2}^{\infty}A_{1k}k(k-1)z^{k-2}+\sum_{k=2}^{\infty}A_{2k}k(k-1)z^{k-3}+\sum_{k=0}^{\infty}A_{3k}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{3k}\mu^k\bar{z}^k+\nu^2\sum_{k=0}^{\infty}B_{1k}\bar{z}^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{1k}\nu^{k+2}z^k+$$
$$+\nu^2\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k}(-ik+2i)\bar{z}^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k}(ik+2i)\nu^{k+2}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{3k}(-ik+2i)^2\nu^2\bar{z}^k+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}B_{3k}(ik+2i)^2\nu^{k+2}z^k=\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_{0k}z^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k}kz^{k-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\mu A_{3k}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{3k}\mu^{k+1}\bar{z}^k+\nu\sum_{k=0}^{\infty}B_{1k}\bar{z}^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{1k}\nu^{k+1}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k}\nu(-ik)\bar{z}^k+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k}(ik)\nu^{k+1}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}\nu B_{3k}(-ik)^2\bar{z}^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{3k}(ik)^2\nu^{k+1}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_{1k}z^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}A_{3k}\mu^2z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{3k}\mu^{k+2}\bar{z}^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{1k}\bar{z}^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{1k}\nu^k z^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k}(-ik-2i)\bar{z}^k+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k}(ik-2i)\nu^k z^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{3k}(-ik-2i)^2\bar{z}^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{3k}(ik-2i)^2\nu^k z^k=\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_{2k}z^k$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях z и $\bar{z}$, при $k\geq 1$ получаем систему четырёх уравнений относительно неизвестных A_{3k} и B_{jk}:

$$\begin{aligned}
&\mu^{k+2}A_{3k}+B_{1k}-i(k+2)B_{3k}-(k+2)^2B_{3k}=d_{-0k}\\
&\mu^{k+1}A_{3k}+\nu B_{1k}-ik\nu B_{2k}-\nu(k)^2B_{3k}=d_{-1k}\\
&\mu^kA_{3k}+\nu^2B_{1k}-i(k-2)\nu^2B_{2k}-\nu^2(k-2)^2B_{3k}=d_{-2k}\\
&\mu^2A_{3k}+\nu^kB_{1k}+i(k-2)\nu^kB_{2k}-\nu^k(k-2)^2B_{3k}=d_{0k}
\end{aligned} \qquad (2.2.9)$$

Рассмотрим детерминант этой системы

$$\begin{vmatrix} \mu^{k+2} & 1 & -i(k+2) & -(k+2)^2 \\ \mu^{k+1} & \nu & -ik\nu & -\nu(k)^2 \\ \mu^{k} & \nu^2 & -i(k-2)\nu^2 & -\nu^2(k-2)^2 \\ \mu^{2} & \nu^k & i(k-2)\nu^k & -\nu^k(k-2)^2 \end{vmatrix} = i\nu^{k+3} \begin{vmatrix} \mu^{k+2} & 1 & k+2 & (k+2)^2 \\ \mu^{k+1}\nu^{-1} & 1 & k & k^2 \\ \mu^{k}\nu^{-2} & 1 & k-2 & (k-2)^2 \\ \mu^{2}\nu^{-k} & 1 & 2-k & (k-2)^2 \end{vmatrix} =$$

$$= i\nu \begin{vmatrix} z^{k+2} & 1 & 2 & 4k+4 \\ z^{k+1} & 1 & 0 & 0 \\ z^{k} & 1 & -2 & -4k+4 \\ z^{2} & 1 & 2-2k & -4k+4 \end{vmatrix} = 8i\nu \begin{vmatrix} z^{k+2} & 1 & 1 & k+1 \\ z^{k+1} & 1 & 0 & 0 \\ z^{k} & 1 & -1 & 1-k \\ z^{2} & 1 & 1-k & 1-k \end{vmatrix} =$$

$$= 8i\nu \begin{vmatrix} z^{k+2}-z^{k+1} & 0 & 1 & k+1 \\ z^{k+1} & 1 & 0 & 0 \\ z^{k}-z^{k+1} & 0 & -1 & 1-k \\ z^{2}-z^{k+1} & 0 & 1-k & 1-k \end{vmatrix} = 8i\nu \begin{vmatrix} z^{k+2}-z^{k+1} & 1 & k+1 \\ z^{k}-z^{k+1} & -1 & 1-k \\ z^{2}-z^{k+1} & 1-k & 1-k \end{vmatrix} =$$

$$= 8i\nu\left[\left(z^{k+2}-z^{k+1}\right)\left(-1+k-1+2k-k^2\right)-\left(z^{k}-z^{k+1}\right)\left(1-k+k^2-1\right)+\left(z^{2}-z^{k+1}\right)\left(1-k+k+1\right)\right]=$$
$$= 8i\nu\left[z^{k+2}\left(3k-k^2-2\right)+z^{k+1}\left(k^2-k+2+k^2-k-2\right)-z^{k}\left(k^2-k\right)+2z^2\right]=$$

$$8i\nu\left[-z^{k+2}(k-1)(k-2)+2z^{k+1}(k-2)k-z^{k}k(k-1)+2z^2\right]=$$
$$= -z^2(k-1)(k-2)k\left[\frac{z^k}{k}-2\frac{z^{k-1}}{k-1}+\frac{z^{k-2}}{k-2}-\frac{2}{k(k-1)(k-2)}\right]=0$$

Обозначим

$$\varphi(z)\equiv\frac{z^k-1}{k}-2\frac{z^{k-1}-1}{k-1}+\frac{z^{k-2}-1}{k-2}=0 \qquad (2.2.10)$$

Детерминант системы (2.2.10) обращается в нуль тогда и только тогда, когда $\varphi(z)=0$, следовательно, задача приводится к определению нулей фунции φ. Легко видеть, что $\varphi(1)=\varphi'(1)=\varphi''(1)=0.$

Поделив обе части уравнения (2.2.11) на $z-1$, получим

$$\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1}z^l-\frac{2}{k-1}\sum_{l=0}^{k-2}z^l-\frac{1}{k-2}\sum_{l=0}^{k-3}z^l=0$$

или

$$\frac{1}{k}\left(z^{k-1}+z^{k-2}\right)-\frac{2}{k-1}z^{k-2}+\sum_{l=0}^{k-3}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k-1}+\frac{1}{k-2}\right)z^{l}=0.$$

Используя тождество $\frac{1}{k}-\frac{2}{k-1}+\frac{1}{k-2}=\frac{2}{k\left(k-1\right)\left(k-2\right)}$

получим

$$\frac{\left(k-1\right)\left(k-2\right)}{2}z^{k-1}+z^{k-2}\left(\frac{\left(k-1\right)\left(k-2\right)}{2}-k\left(k-2\right)\right)+\sum_{l=0}^{k-3}z^{l}=0$$

или

$$\frac{\left(k-1\right)\left(k-2\right)}{2}\left(z^{k-1}-1\right)-\frac{k^{2}-k-2}{2}\left(z^{k-2}-1\right)+\sum_{l=1}^{k-3}\left(z^{l}-1\right)=0.$$

Еще раз поделим на $z-1$. Имеем

$$\frac{\left(k-1\right)\left(k-2\right)}{2}\sum_{l=0}^{k-2}z^{l}-\frac{k^{2}-k-2}{2}\sum_{l=0}^{k-3}z^{l}+\sum_{l=1}^{k-3}\sum_{m=0}^{l-1}z^{m}=0\,.$$

В последней двойной сумме поменяем порядок суммирования. Имеем

$$\frac{\left(k-1\right)\left(k-2\right)}{2}z^{k-2}+\sum_{l=0}^{k-3}z^{l}\left[\frac{k^{2}-3k+2}{2}-\frac{k^{2}-k-2}{2}\right]z^{l}+\sum_{m=0}^{k-4}z^{m}\sum_{l=m+1}^{k-3}1=0\,.$$

Преобразуем последнее равенство. Имеем

$$\frac{\left(k-1\right)\left(k-2\right)}{2}z^{k-2}+\sum_{l=0}^{k-3}\left(-k+2\right)z^{l}+\sum_{m=0}^{k-4}\left(k-m-3\right)z^{m}=0$$

или

$$\frac{\left(k-1\right)\left(k-2\right)}{2}z^{k-2}-\left(k-2\right)z^{k-3}+\sum_{l=0}^{k-4}\left(-k+2\right)z^{l}+\sum_{l=0}^{k-4}\left(k-l-3\right)z^{l}=0.$$

Получим

$$\frac{\left(k-1\right)\left(k-2\right)}{2}z^{k-2}-\left(k-2\right)z^{k-3}-\sum_{l=0}^{k-4}\left(l+1\right)z^{l}=0$$

или

$$\frac{\left(k-1\right)\left(k-2\right)}{2}\left(z^{k-2}-1\right)-\left(k-2\right)\left(z^{k-3}-1\right)-\sum_{l=1}^{k-4}\left(l+1\right)\left(z^{l}-1\right)=0.$$

Снова разделив на $z-1$, получим

$$\frac{\left(k-1\right)\left(k-2\right)}{2}\sum_{l=0}^{k-3}z^{l}-\left(k-2\right)\sum_{l=0}^{k-4}z^{l}-\sum_{l=1}^{k-4}\left(l+1\right)\sum_{m=0}^{l-1}z^{m}=0$$

или

$$\frac{(k-1)(k-2)}{2}z^{k-3}+\frac{k^2-5k+6}{2}\sum_{l=0}^{k-4}z^l-\sum_{m=0}^{k-5}z^m\sum_{l=m+1}^{k-4}(l+1)=0.$$

Учитывая, что $\sum_{l=m+1}^{k-4}(l+1)=\frac{m+2+k-3}{2}(k-m-4)=\frac{(k+m-1)(k-(m+4))}{2}=$

$$=\frac{k^2+(m-1)k-(m+4)k-(m+4)(m-1)}{2}=\frac{k^2-5k-(m+4)(m-1)}{2},$$

получим

$$\frac{(k-1)(k-2)}{2}z^{k-3}+\frac{(k-2)(k-3)}{2}z^{k-4}+\sum_{l=0}^{k-5}z^l\left[\frac{k^2-5k+6}{2}-\frac{k^2-5k-(l+4)(l-1)}{2}\right]=$$

$$=\frac{(k-1)(k-2)}{2}z^{k-3}+\frac{(k-2)(k-3)}{2}z^{k-4}+\sum_{l=0}^{k-5}\frac{(l+4)(l-1)+6}{2}z^l=0.$$

Окончательно

$$\frac{(k-1)(k-2)}{2}z^{k-3}+\frac{(k-2)(k-3)}{2}z^{k-4}+\sum_{l=0}^{k-5}\frac{l^2+3l+2}{2}z^l=0$$

или

$$\sum_{l=0}^{k-3}\frac{(l+1)(l+2)}{2}z^l=0.$$

Итак, имеем равенство

$$\Delta_k=4i\nu z^2(1-z)^3k(k-1)(k-2)P_{k-3}(z).$$

Предположим, что выполнены условия (2.2.3). Тогда коэффициенты A_{3k} и B_{jk} при $k\geq 3$ определены однозначно. Для $k=0,1,2$ соответствующие коэффициенты могут быть найдены для произвольных граничных функций, но не однозначно, после чего из (2.2.6) и (2.2.7) мы найдем Φ_j $(j=1,2)$. Следовательно, в этом случае решение неоднородной задачи (2.2.2), (2.0.4) существует, а решение соответствующей однородной задачи является многочленом порядка не более пяти. Впрочем, из однородных условий (2.0.4) следует, что ненулевое решение однородной задачи (2.2.2), (2.0.4) необходимо делится на $(1-z\bar{z})^3$ (см. [61], теорема 5.1, стр.74). Поэтому задача (2.2.2), (2.0.4) однозначно разрешима. И, наконец, учитывая, что $\Delta_k\to 16i\mu z^2\neq 0$ для $k\to\infty$, видим, что коэффициенты A_{jk} и B_{jk} имеют такую же скорость роста в бесконечности как d_{jk}, поэтому, функции Φ''_{jk}, Ψ''_{jk} удовлетворяют условию Гёльдера в замкнутом круге D. Это означает, что решение u задачи (2.2.2), (2.0.4) принадлежит заданному классу $C^{(2,\alpha)}(\bar{D})$. Первая часть теоремы доказана.

Далее, предположим, что для некоторых $z=\mu\nu$ условие (2.2.3) нарушается при некотором m, так что $\Delta_{m+3}=0$ ($m\geq 1$). Таким образом однородная задача (2.2.2), (2.0.4) имеет ненулевое решение, которое является многочленом порядка $m+5$. Например, если $z=\mu\nu=-\dfrac{1}{3}$, то $P_1(z)=0$, поэтому $\Delta_4=0$. В таком случае многочлен $(1-z\bar{z})^3$ является нетривиальным решением однородной задачи (2.2.2), (2.0.4), и одно условие необходимо для разрешимости неоднородной задачи. Пусть ζ будет корнем многочлена порядка n, поэтому $P_n(\zeta)=0$. Тогда в соответствии с теоремой Энестрёма-Какейа [64] ζ удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{3}=\min_{1\leq l\leq n}\left(\frac{l(l+1)}{(l+1)(l+2)}\right)\leq|\zeta|\leq\max_{1\leq l\leq n}\left(\frac{l(l+1)}{(l+1)(l+2)}\right)\leq\frac{n}{n+2}. \tag{2.2.11}$$

Предположим, что для некоторых $m>0$ $P_{n+m}(\zeta)=0$. тогда ζ будет корнем многочлена

$$Q_{n-1}(t)=t^{-n-1}\left(P_{n+m}(t)-P_n(t)\right)=\sum_{l=0}^{m-1}(l+n+2)(l+n+3)t^l,$$

и по той же теореме Энестрёма-Какейа удовлетворяет неравенству:

$$\frac{n+2}{n+4}=\min_{1\leq l\leq m-1}\left(\frac{l+n+1}{l+n+3}\right)\leq|\zeta|\leq\max_{1\leq l\leq m-1}\left(\frac{l+n+1}{l+n+3}\right)\leq\frac{n+m}{n+m+2}. \tag{2.2.12}$$

Но это невозможно, так как кольца (2.2.11) и (2.2.12) не пересекаются. Таким образом, для каждого ζ существует не более одного $n>0$, для которого $P_n(\zeta)=0$. следовательно, дефектные числа могут принимать значения только ноль или единица. Теорема доказана.

§2.3 Задача Дирихле, когда мнимая единица является простым корнем характеристического уравнения

В этом пункте будет рассмотрена задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения шестого порядка в предположении, что мнимая единица является простым корнем характеристического уравнения (2.0.2). Предположим сначала, что характеристическое уравнение имеет три различных корня: корень, равный i является простым, другой корень - двухкратный, и последний – трёхкратный. Уравнение (2.0.1) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}-\mu\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial z}-\nu\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^3 u=0 \tag{2.3.1}$$

$\nu,\mu-$ постоянные числа, такие, что $0<|\nu|<1$, $0<|\mu|<1$. Предполагается, что искомое решение u шесть раз непрерывно дифференцируемо в D, и вместе с производными до второго порядка удовлетворяет условию Гельдера вплоть до границы т.е. $u\in C^{(2,\alpha)}\left(\overline{D}\right)$. Для уравнения (2.3.1) рассматриваем задачу Дирихле в классической постановке. На границе $\Gamma=\partial D$ неизвестная функция u удовлетворяет условиям Дирихле (2.0.3).

Итак, рассмотрим задачу (2.3.1), (2.0.4).

Теорема 2.3.1. Пусть $\zeta=\mu\nu$. Тогда задача Дирихле (2.3.1),(2.0.4) однозначно разрешима, если

$$\begin{gathered}Q_n\left(\zeta\right)=\sum_{k=0}^{n-3}\left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(k+3\right)\left(k+4\right)\left(k+5\right)\zeta^k+\\+\sum_{k=0}^{n-4}\left(n-k-3\right)\left(n-k-2\right)\left(n-k-1\right)\left(n^2+11n+8nk+k^2-k\right)\zeta^{n-2+k}\neq 0,\ n=4,5...,\end{gathered} \tag{2.3.2}$$

Если условия (2.3.2) не выполняются при некотором n_0, то однородная задача (2.3.1), (2.0.4) имеет нетривиальное решение, которое является полиномом порядка n_0+2. При этом для разрешимости соответствующей неоднородной задачи необходимо одно линейно независимое условие на граничные функции f_j. Поэтому дефектные числа задачи (2.3.1), (2.0.4) равны числу параметров $n\geq 4$, для которых $Q_n\left(\zeta\right)=0$.

Доказательство теоремы 2.3.1.

В [55] было показано, что общее решение уравнения (2.3.1) представляется в виде

$$u\left(z,\overline{z}\right)=\Phi_1(z)+\sum_{k=2}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^{k-2}\Phi_k(z+\mu\,\overline{z})+\sum_{k=0}^{2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^{k}\Psi_{k+1}(\overline{z}+\nu z) \tag{2.3.3}$$

где Φ_j, Ψ_j искомые функции. Функция Φ_1 аналитична в D, а Φ_j $\left(j=2,3\right)$ и Ψ_k $(k=1,2,3)-$ аналитичны в областях $D_1\left(\mu\right)=\left\{z+\mu\,\overline{z}\,\middle|\,z\in D\right\}$ и $D_2\left(\nu\right)=\left\{\overline{z}+\nu z\,\middle|\,z\in D\right\}$ соответственно.

Подставим функцию (2.3.3) в граничные равенства (2.0.3). Используя операторное тождество (1.0.10) получим:

при $j=0$

$$\Phi_1''(z)+\sum_{k=2}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+2iI\right)^{k-2}\Phi_k''(z+\mu\overline{z})+\sum_{k=0}^{2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+2iI\right)^{k}\Psi_{k+1}''(\overline{z}+\nu z)\nu^2=F_0 \qquad (2.3.4)$$

при $j=1,2$

$$\sum_{k=2}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+(2-2j)iI\right)^{k-2}\Phi_k''(z+\mu\overline{z})\mu^j+\sum_{k=0}^{2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+(2-2j)iI\right)^{k}\Psi_{k+1}''(\overline{z}+\nu z)\nu^{2-j}=F_j \qquad (2.3.5)$$

Используем разложения функций Φ_j'' и Ψ_j'' на окружности Γ ([54]):

$$\Phi_1''(z)=\sum_{k=0}^{\infty}A_{1k}z^k\ ,\Phi_j''(z+\mu\overline{z})=\varphi_j(z)+\varphi_j(\mu\overline{z})=\sum_{k=0}^{\infty}A_{jk}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{jk}\mu^k z^{-k},\quad j=2,3$$

$$\Psi_j''(\overline{z}+\nu z)=\psi_j(\overline{z})+\psi_j(\nu z)=\sum_{k=0}^{\infty}B_{jk}z^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty}B_{jk}\nu^k z^k,\qquad j=1,2,3 \qquad (2.3.6)$$

Так как, подлежащие определению функции φ_j, ψ_j и Φ_1'' аналитичны в круге D, то они определяются своими коэффициентами Тейлора A_{jk} и B_{jk}. Используем также разложения граничных функции F_j (2.1.4) и для определения коэффициентов Тейлора A_{jk} и B_{jk}, подставим разложения (2.3.6) и (2.1.4) в граничные условия (2.0.4).

При $j=0$ получим

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}A_{1k}z^k+\sum_{l=2}^{3}\left(\sum_{k=0}^{\infty}A_{1k}\left(ik+2i\right)^{l-2}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{1k}\mu^k\left(-ik+2i\right)^{l-2}z^{-k}\right)+\\&+\sum_{l=1}^{3}\left(\sum_{k=0}^{\infty}B_{lk}\left(-ik+2i\right)^{l-1}z^{-k}\nu^2+\sum_{k=0}^{\infty}B_{lk}\left(ik+2i\right)^{l-1}\nu^{2+k}z^k\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_{k0}z^k\end{aligned}$$

при $j=1,2$ имеем

$$\begin{aligned}&\sum_{l=2}^{3}\left(\sum_{k=0}^{\infty}A_{lk}\left(ik+(2-2j)i\right)^{l-2}\mu^j z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{lk}\left(-ik+(2-2j)i\right)^{l-2}\mu^{j+k}z^{-k}\right)+\\&+\sum_{l=1}^{3}\left(\sum_{k=0}^{\infty}B_{lk}\left(-ik+(2-2j)i\right)^{l-1}z^{-k}\nu^{2-j}+\sum_{k=0}^{\infty}B_{lk}\left(ik+(2-2j)i\right)^{l-1}\nu^{2-j+k}z^k\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_{kj}z^k\end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях z и $\overline{z}$. При $k\geq 1$ получаем систему пяти уравнений относительно неизвестных A_{2k}, A_{3k}, B_{jk}, $j=1,2,3$:

$$
\begin{aligned}
&A_{2k}\mu^{k+2}+A_{3k}\mu^{k+2}\left(-ik-2i\right)+B_{1k}+B_{2k}\left(-ik-2i\right)+B_{3k}\left(-ik-2i\right)^2=d_{-k2}\\
&A_{2k}\mu^{k+1}+A_{3k}\mu^{k+1}\left(-ik\right)+\nu B_{1k}+B_{2k}\left(-ik\right)\nu+B_{3k}\nu\left(-ik\right)^2=d_{-k1}\\
&A_{2k}\mu^{k}+A_{3k}\mu^{k}\left(-ik+2i\right)+\nu^2 B_{1k}+B_{2k}\left(-ik+2i\right)\nu^2+B_{3k}\left(-ik+2i\right)^2\nu^2=d_{-k0}\\
&A_{2k}\mu^{2}+A_{3k}\mu^{2}\left(ik-2i\right)+\nu^k B_{1k}+B_{2k}\left(ik-2i\right)\nu^k+B_{3k}\left(ik-2i\right)^2\nu^k=d_{k2}\\
&A_{2k}\mu+A_{3k}\mu ik+\nu^{k+1}B_{1k}+B_{2k}ik\nu^{k+1}+B_{3k}\left(ik\right)^2\nu^{k+1}=d_{k1}
\end{aligned}
\tag{2.3.7}
$$

Рассмотрим детерминант этой системы

$$
\Omega_k=\begin{vmatrix}
\mu & ik\mu & \nu^{k+1} & ik\nu^{k+1} & \left(ik\right)^2\nu^{k+1}\\
\mu^2 & \mu^2\left(ik-2i\right) & \nu^k & \left(ik-2i\right)\nu^k & \left(ik-2i\right)^2\nu^k\\
\mu^k & \mu^k\left(-ik+2i\right) & \nu^2 & \left(-ik+2i\right)\nu^2 & \left(-ik+2i\right)^2\nu^2\\
\mu^{k+1} & \mu^{k+1}\left(-ik\right) & \nu & -ik\nu & \left(-ik\right)^2\nu\\
\mu^{k+2} & \mu^{k+2}\left(-ik-2i\right) & 1 & -ik-2i & \left(-ik-2i\right)^2
\end{vmatrix}=
$$

Предположим, что $\mu\nu=z$

$$
=\begin{vmatrix}
\mu & k\mu & \nu^{k+1} & k\nu^{k+1} & k^2\nu^{k+1}\\
\mu^2 & \left(k-2\right)\mu^2 & \nu^k & \left(k-2\right)\nu^k & \left(k-2\right)^2\nu^k\\
\mu^k & \left(-k+2\right)\mu^k & \nu^2 & \left(-k+2\right)\nu^2 & \left(k-2\right)^2\nu^2\\
\mu^{k+1} & -k\mu^{k+1} & \nu & -k\nu & k^2\nu\\
\mu^{k+2} & -(k+2)\mu^{k+2} & 1 & -(k+2) & \left(k+2\right)^2
\end{vmatrix}
=\begin{vmatrix}
1 & k & z^{k+1} & kz^{k+1} & k^2z^{k+1}\\
1 & k-2 & z^k & \left(k-2\right)z^k & \left(k-2\right)^2z^k\\
1 & -k+2 & z^2 & \left(-k+2\right)z^2 & \left(k-2\right)^2z^2\\
1 & -k & z & -kz & k^2z\\
1 & -(k+2) & 1 & -(k+2) & \left(k+2\right)^2
\end{vmatrix}=
$$

$$
=\begin{vmatrix}
1 & k & z^{k+1} & kz^{k+1} & k^2z^{k+1}\\
1 & k-2 & z^k & \left(k-2\right)z^k & \left(k-2\right)^2z^k\\
1 & -k+2 & z^2 & \left(-k+2\right)z^2 & \left(k-2\right)^2z^2\\
1 & -k & z & -kz & k^2z\\
1 & -(k+2) & 1 & -(k+2) & \left(k+2\right)^2
\end{vmatrix}
=\begin{vmatrix}
1 & 2k+2 & z^{k+1} & (2k+2)z^{k+1} & (-4k-4)z^{k+1}\\
1 & 2k & z^k & 2kz^k & -8kz^k\\
1 & 4 & z^2 & 4z^2 & -8kz^2\\
1 & 2 & z & 2z & (-4k-4)z\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{vmatrix}=
$$

$$
=\begin{vmatrix}
1 & 2\left(k+1\right) & z^{k+1} & 2\left(k+1\right)z^{k+1} & \left(4k^2+4k\right)z^{k+1}\\
1 & 2k & z^k & 2kz^k & \left(4k^2-4k\right)z^k\\
1 & 4 & z^2 & 4z^2 & 8z^2\\
1 & 2 & z & 2z & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{vmatrix}
=32z^3\begin{vmatrix}
k+1 & z^{k+1}-1 & (k+1)z^k & \dfrac{k(k+1)}{2}z^{k-1}\\
k & z^k-1 & kz^{k-1} & \dfrac{k(k-1)}{2}z^{k-2}\\
2 & z^2-1 & 2z & 1\\
1 & z-1 & 1 & 0
\end{vmatrix}=
$$

$$
=32z^3(z-1)\begin{vmatrix}
k+1 & \sum\limits_{j=0}^{k}z^j & (k+1)z^k & \dfrac{k(k+1)}{2}z^{k-1}\\
k & \sum\limits_{j=0}^{k-1}z^j & kz^{k-1} & \dfrac{k(k-1)}{2}z^{k-2}\\
2 & z+1 & 2z & 1\\
1 & 1 & 1 & 0
\end{vmatrix}
=-32z^3(z-1)\begin{vmatrix}
\sum\limits_{j=1}^{k}\left(z^j-1\right) & \left(k+1\right)\left(z^k-1\right) & \dfrac{k(k+1)}{2}z^{k-1}\\
\sum\limits_{j=1}^{k-1}\left(z^j-1\right) & k\left(z^k-1\right) & \dfrac{k(k-1)}{2}z^{k-2}\\
z-1 & 2(z-1) & 1
\end{vmatrix}=
$$

$$=-64z^3(z-1)^3\begin{vmatrix} \sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{l=0}^{j-1} z^l & \frac{k+1}{2}\sum\limits_{l=0}^{k-1} z^l & \frac{k(k+1)}{2}z^{k-1} \\ \sum\limits_{j=1}^{k-1}\sum\limits_{l=0}^{j-1} z^l & \frac{k}{2}\sum\limits_{l=0}^{k-2} z^l & \frac{k(k-1)}{2}z^{k-2} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \Rightarrow$$

Так, как $\left(\sum\limits_{j=l+1}^{k} 1 = k-l\right)$

$$\Rightarrow = -64z^3(z-1)^3\begin{vmatrix} \sum\limits_{l=0}^{k-1} z^l(k-l) & \frac{k+1}{2}\sum\limits_{l=0}^{k-1} z^l & \sum\limits_{l=0}^{k-1}(l+1)z^{k-1} \\ \sum\limits_{l=0}^{k-1} z^l(k-1-l) & \frac{k}{2}\sum\limits_{l=0}^{k-2} z^l & \sum\limits_{l=0}^{k-2}(l+1)z^{k-2} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=-32z^3(z-1)^3\begin{vmatrix} \sum\limits_{l=0}^{k-2} z^l(k-1-2l) & \frac{k+1}{2}\sum\limits_{l=0}^{k-1} z^l & \frac{k+1}{2}\sum\limits_{l=0}^{k-1}\left(z^{k-1}-z^l\right) \\ \sum\limits_{l=0}^{k-2} z^l(k-2-2l) & \frac{k}{2}\sum\limits_{l=0}^{k-2} z^l & \frac{k}{2}\sum\limits_{l=0}^{k-2}\left(z^{k-2}-z^l\right) \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$=32z^3(z-1)^3\begin{vmatrix} \sum\limits_{l=1}^{k-1}\left(z^l-1\right)(k-1-2l) & \frac{k+1}{2}\sum\limits_{l=0}^{k-2}\left(z^{k-1}-z^l\right) \\ \sum\limits_{l=1}^{k-2}\left(z^l-1\right)(k-2-2l) & \frac{k}{2}\sum\limits_{l=0}^{k-3}\left(z^{k-2}-z^l\right) \end{vmatrix} = K$$

Используя равенства $\sum\limits_{l=0}^{k-1}(k-1-2l)=\sum\limits_{l=0}^{k-2}(k-2-2l)=0$, последнее выражение представим в виде:

$$K=32z^3(z-1)^5\begin{vmatrix} \sum\limits_{l=1}^{k-1}(k-1-2l)\sum\limits_{i=0}^{l-1} z^i & \frac{k+1}{2}\sum\limits_{l=0}^{k-2} z^l\sum\limits_{i=0}^{k-2-l} z^i \\ \sum\limits_{l=1}^{k-2}(k-2-2l)\sum\limits_{i=0}^{l-1} z^i & \frac{k}{2}\sum\limits_{l=0}^{k-3} z^l\sum\limits_{i=0}^{k-3-l} z^i \end{vmatrix} = 16z^3(z-1)^5\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=0}^{k-2} z^i\sum\limits_{l=i+1}^{k-1}(k-1-2l) & (k+1)\sum\limits_{l=0}^{k-2}\sum\limits_{j=l}^{k-2} z^j \\ \sum\limits_{i=0}^{k-3} z^i\sum\limits_{l=i+1}^{k-2}(k-2-2l) & k\sum\limits_{l=0}^{k-3}\sum\limits_{j=l}^{k-3} z^j \end{vmatrix} =$$

$$=16z^3(z-1)^5\tilde{\Delta}_k(z)$$

Имеем $\sum\limits_{l=i+1}^{m}(m-2l)=\dfrac{(m-2m)+(m-2i-2)}{2}(m-i)=-(i+1)(m-i),$ поэтому

$$\tilde{\Delta}_k(z)=\begin{vmatrix} -\sum_{i=0}^{k-2} z^i(i+1)(k-1-i) & (k+1)\sum_{j=0}^{k-2}(j+1)z^j \\ -\sum_{i=0}^{k-3} z^i(i+1)(k-2-i) & k\sum_{j=0}^{k-3}(j+1)z^j \end{vmatrix}$$

Далее, так как

$$\sum_{j=0}^{N}(j+1)(N+1-j)=\left(N+1\right)\frac{1+N+1}{2}\left(N+1\right)-\frac{N\left(N+1\right)\left(N+2\right)}{3}=\frac{\left(N+1\right)\left(N+2\right)}{6}\left(3N+3-2N\right)=$$

$=\dfrac{\left(N+1\right)\left(N+2\right)\left(N+3\right)}{6}$, и $\left(N+3\right)\sum_{j=0}^{N}(j+1)=\left(N+3\right)\dfrac{\left(N+2\right)\left(N+1\right)}{2}$, получим, что $\tilde{\Delta}_k(1)=0.$

$$\tilde{\Delta}_k(z)=-\frac{1}{3}\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{k-2} z^i(i+1)(3k-3-3i-k-1) & (k+1)\sum_{i=0}^{k-2}(i+1)z^i \\ \sum_{i=0}^{k-3} z^i(i+1)(3k-6-3i-k) & k\sum_{i=0}^{k-3}(i+1)z^i \end{vmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{k-2}\left(z^i-1\right)(i+1)\left(2\left(k-2\right)-3i\right) & (k+1)\sum_{i=0}^{k-2}(i+1)z^i \\ \sum_{i=1}^{k-3}\left(z^i-1\right)(i+1)\left(2\left(k-3\right)-3i\right) & k\sum_{i=0}^{k-3}(i+1)z^i \end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{z-1}{3}\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{k-2}\left(\sum_{l=0}^{i-1}z^l\right)(i+1)\left(2\left(k-2\right)-3i\right) & (k+1)\sum_{i=0}^{k-2}(i+1)z^i \\ \sum_{i=1}^{k-3}\left(\sum_{l=0}^{i-1}z^l\right)(i+1)\left(2\left(k-3\right)-3i\right) & k\sum_{i=0}^{k-3}(i+1)z^i \end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{z-1}{3}\begin{vmatrix} \sum_{l=0}^{k-3}z^l\sum_{i=l+1}^{k-2}(i+1)\left(2\left(k-2\right)-3i\right) & (k+1)\sum_{i=0}^{k-2}(i+1)z^i \\ \sum_{l=0}^{k-4}z^l\sum_{i=l+1}^{k-3}(i+1)\left(2\left(k-3\right)-3i\right) & k\sum_{i=0}^{k-3}(i+1)z^i \end{vmatrix}\equiv\frac{z-1}{3}\Lambda_k(z)$$

Учитывая, что

$$\sum_{i=l+1}^{N}(i+1)(2N-3i)=2N\,\frac{N+1+l+1}{2}\left(N-l\right)-3\left(\frac{N\left(N+1\right)\left(N+2\right)}{3}-\frac{l\left(l+1\right)\left(l+2\right)}{3}\right)=$$

$$=N\left(N+3+l\right)\left(N-l\right)-N\left(N+1\right)\left(N+2\right)+l\left(l+1\right)\left(l+2\right)=N\left(N^2+3N-\left(N+3\right)l+\right.$$

$$\left.+Nl-l^2-N^2-3N-2\right)+l\left(l+1\right)\left(l+2\right)=-N\left(l+1\right)\left(l+2\right)+l\left(l+1\right)\left(l+2\right)=-\left(N-l\right)\left(l+1\right)\left(l+2\right)$$

получим

$$\Lambda_k(z)=\begin{vmatrix} \sum_{l=0}^{k-3}(k-2-l)(l+1)(l+2)z^l & (k+1)\sum_{l=0}^{k-2}(l+1)z^l \\ \sum_{l=0}^{k-4}(k-3-l)(l+1)(l+2)z^l & k\sum_{l=0}^{k-3}(l+1)z^l \end{vmatrix}=\sum_{l=0}^{k-3}(l+1)(l+2)z^l\begin{vmatrix} k-2-l & (k+1)\sum_{j=0}^{k-2}(j+1)z^j \\ k-3-l & k\sum_{j=0}^{k-3}(j+1)z^j \end{vmatrix}=$$

$$=\sum_{l=0}^{k-3}(l+1)(l+2)z^l\left[\sum_{j=0}^{k-3}(j+1)z^j\left(k(k-2-l)-(k+1)(k-3-l)\right)-(k-3-l)(k+1)(k-1)z^{k-2}\right]=$$

$$\sum_{l=0}^{k-3}(l+1)(l+2)(l+3)z^l\sum_{j=0}^{k-3}(j+1)z^j-\left(k^2-1\right)\sum_{l=0}^{k-3}(l+1)(l+2)(k-3-l)z^{k-2+l}\equiv E+F.$$

В E выполним замену переменной $m=l+j$:

$$E=\sum_{l=0}^{k-3}(l+1)(l+2)(l+3)\sum_{m=l}^{k-3+l}(m-l+1)z^m=\sum_{m=0}^{k-3}z^m\sum_{l=0}^{m}(l+1)(l+2)(l+3)(m-l+1)+$$

$$\sum_{m=k-2}^{2k-6}z^m\sum_{l=m-k+3}^{k-3}(l+1)(l+2)(l+3)(m-l+1)\equiv E_1+E_2$$

Учитывая, что

$$\sum_{l=0}^{m}(l+1)(l+2)(l+3)\left(m+5-1(l+4)\right)=(m+5)\sum_{l=0}^{m}(l+1)(l+2)(l+3)-\sum_{l=0}^{m}(l+1)(l+2)(l+3)(l+4)=$$

$$=\frac{(m+5)(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{4}-\frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}{5}=$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}{20},$$

получим $E_1=\sum_{m=0}^{k-3}\frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}{20}z^m$

Далее

$$E_2=\sum_{j=0}^{k-4}z^{k-2+j}\sum_{l=j+1}^{k-3}(l+1)(l+2)(l+3)(k-1+j-l)\equiv\sum_{j=0}^{k-4}z^{k-2+j}W_j$$

$$W_j=\left(\sum_{l=0}^{k-3}-\sum_{l=0}^{j}\right)\left((k-1+j)(l+1)(l+2)(l+3)-l(l+1)(l+2)(l+3)\right)=(k-1+j)\frac{(k-2)(k-1)k(k+1)}{4}-$$

$$-\frac{(k-3)(k-2)(k-1)k(k+1)}{5}-(k-1+j)\frac{(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)}{4}+\frac{j(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)}{5}=$$

$$\frac{(k-2)(k-1)k(k+1)}{20}\left(5k-5+5j-4k+12\right)+\frac{(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)}{20}\left(4j-5k+5-5j\right)=$$

$$\frac{(k-2)(k-1)k(k+1)}{20}\left(k+7+5j\right)-\frac{(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)}{20}\left(5k-5+j\right)$$

Поэтому

$$E_2+F=\sum_{J=0}^{k-4}z^{k-2+j}\left(W_j-(k-1)(k+1)(j+1)(j+2)(k-3-j)\right)=$$

$$= \sum_{j=0}^{k-4} z^{k-2+j} \cdot \Big[\frac{(k-2)(k-1)k(k+1)}{20}\left(k+7+5j\right) - \frac{(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)}{20}\left(5k-5+j\right) -$$

$$-(k-1)(k+1)(j+1)(j+2)(k-3-j)\Big] = \sum_{j=0}^{k-4} z^{k-2+j}\, \frac{(k-3-j)(k-2-j)(k-1-j)(k^2+11k+8kj+j^2-j)}{20}$$

Итак, функция $\Lambda_k\left(z\right)$ примет вид:

$$\Lambda_k(z) = \sum_{j=0}^{k-3} \frac{(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)(j+5)}{20} z^j +$$
$$\sum_{j=0}^{k-4} \frac{(k-3-j)(k-2-j)(k-1-j)(k^2+11k+8kj+j^2-j)}{20} z^{k-2+j}$$

После преобразований получим

$$\Omega_k = \frac{16}{3}(\zeta-1)^6\zeta^3 Q_k\left(\zeta\right)$$

Предположим, что выполнены условия (2.3.2). В этом случае коэффициенты A_{2k}, A_{3k} и B_{jk} при $k \geq 3$ определены однозначно. Для $k = 0,1,2$ соответствующие коэффициенты могут быть найдены для произвольных граничных функций, но не однозначно, после чего из (2.3.4) определяем Φ_1''. Следовательно, в этом случае решение неоднородной задачи (2.3.1),(2.0.4) существует, а решение соответствующей однородной задачи является многочленом порядка не более четырёх. Однако из однородных условий (2.0.4) следует, что ненулевое решение однородной задачи (2.3.1),(2.0.4) необходимо делится на $(1-z\overline{z})^3$ т.е. является многочленом порядка не менее шести. Поэтому задача (2.3.1),(2.0.4) однозначно разрешима. И, наконец, учитывая, что $\Omega_k \to -4i\mu^2\nu^3\left(1-2i\right) \neq 0$ для $k \to \infty$, мы видим, что коэффициенты A_{jk} и B_{jk} имеют такую же скорость роста в бесконечности как d_{jk}, поэтому функции Φ''_{jk}, Ψ''_{jk} удовлетворяют условию Гёльдера в замкнутом круге D. Это означает, что решение u задачи (2.3.1), (2.0.4) принадлежит заданному классу $C^{(2,\alpha)}(\overline{D})$. Первая часть теоремы доказана.

Предположим, что $Q_n\left(\zeta\right)=0$. В этом случае однородная система (2.3.7) будет иметь нетривиальное решение, поэтому функция, построенная по этим коэффициентам, представляет собой нетривиальное решение задачи (2.3.1), (2.0.4). Например, если $Q_4\left(\zeta\right)=0$ то $\zeta = \frac{1}{3}\left(-3+\sqrt{6}\right)$. В этом случае $c\left(1-z\overline{z}\right)^3$ будет нетривиальным решением однородной задачи. При этом для того, чтобы неоднородная система (2.3.7) имела решение необходимо, чтобы правая часть удовлетворяла одному условию разрешимости:

$$\frac{6-\sqrt{6}}{\mu^2}\int_{-\pi}^{\pi} F_0(\theta)e^{-4i\theta}d\theta+\int_{-\pi}^{\pi} F_1(\theta)\left(\frac{-3\sqrt{6}}{\mu^5}e^{4i\theta}-\frac{3\sqrt{6}-6}{\mu}e^{-4i\theta}\right)d\theta+$$
$$+\int_{-\pi}^{\pi} F_2(\theta)\left(3e^{-4i\theta}+\frac{8\sqrt{6}-3}{\mu^4}e^{-4i\theta}\right)d\theta=0$$

Проиллюстрируем полученные результаты, использую пакет MATHEMATICA. На чертежах представлены нули многочлена Q_n при $n=6,10,17..$

$n=6$

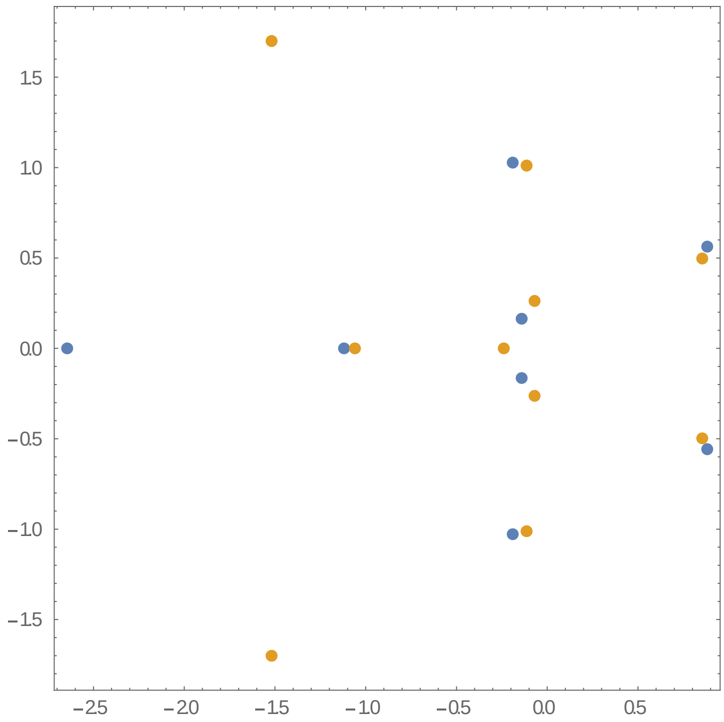


Рис. 3

$n=10$

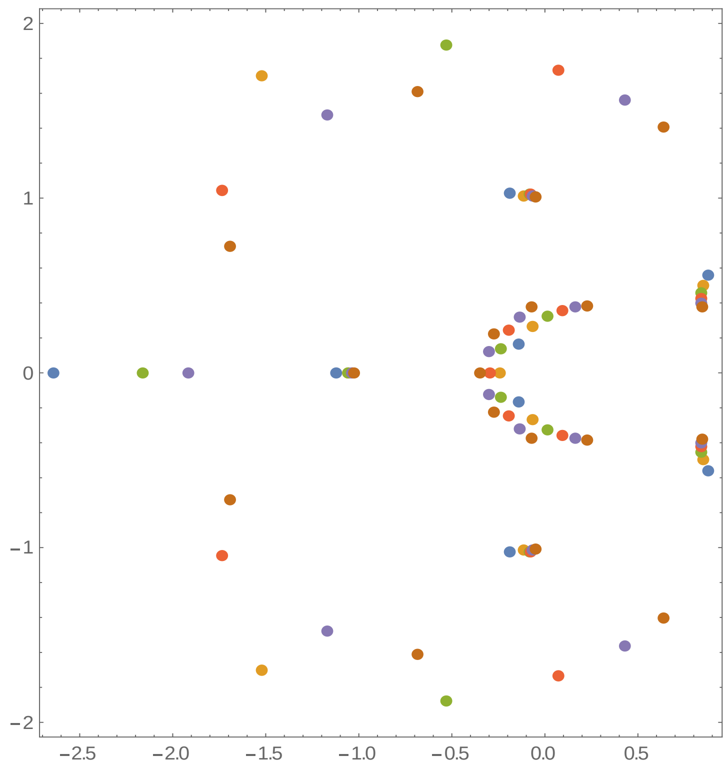


Рис. 4

$n=17$

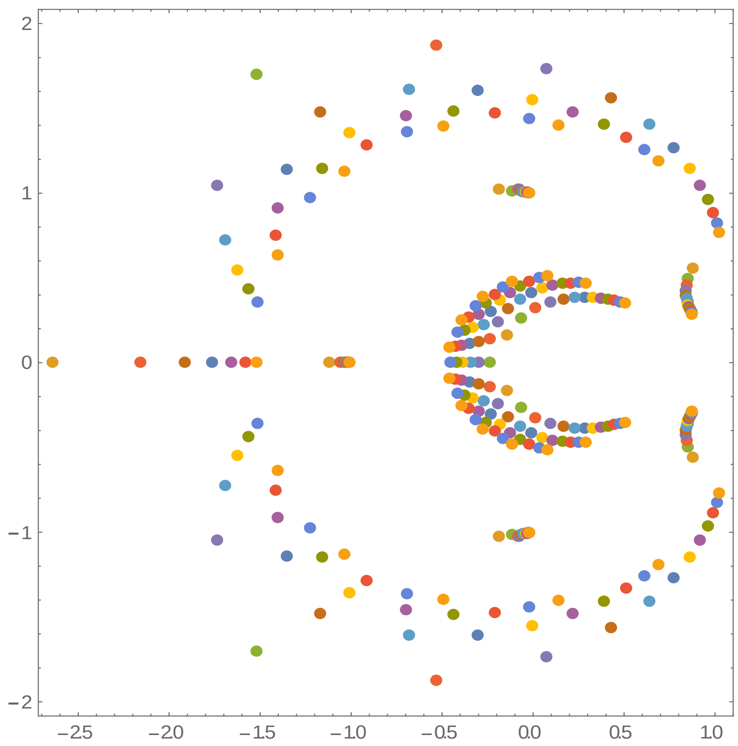


Рис. 5

Приведённые численные эксперименты показывают, что если для некоторого n, $Q_n(z)=0$, то для любого $m\neq n$ имеем $Q_m(z)\neq 0$, поэтому можно предположить, что дефектные числа могут быть равны только нулю или единице.

§2.4 Задача Дирихле, когда мнимая единица не является корнем характеристического уравнения

В области D рассмотрим уравнение (2.0.1) и корни $\lambda_j\ (j=1,\ldots 6)$ соответствующего характеристического уравнения (2.0.2) удовлетворяют условию:

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3\neq i,\ \Im\lambda_1>0;\ \lambda_j\neq\lambda_k,\ k\neq j,\ \Im\lambda_j<0,\ k,j=4,5,6. \tag{2.4.1}$$

Следует определить функцию u - решение уравнения (2.0.1), принадлежащее классу $C^6(D)\cap C^{(2,\alpha)}(\bar{D})$, и на границе Γ удовлетворяющее условиям Дирихле (2.0.3).

В этом пункте получены формулы определения дефектных чисел, отличные от формул из [56], [60], а также определяются линейно независимые решения однородной задачи (2.0.1), (2.0.3) и условия разрешимости неоднородной задачи.

Уравнение (2.0.1) при условиях (2.4.1) примет вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}}-\mu\frac{\partial}{\partial z}\right)^3\left(\frac{\partial}{\partial z}-\nu_1\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}-\nu_2\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}-\nu_3\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right)u=0. \tag{2.4.2}$$

μ,ν_1,ν_2,ν_3- постоянные числа, такие, что $\mu=\dfrac{i-\lambda_1}{i+\lambda_1}$, и $\nu_j=\dfrac{i+\lambda_{j+3}}{i-\lambda_{j+3}}$ $(j=1,\ 2,\ 3)$ удовлетворяют условиям

$$\mu\neq 0,\quad |\mu|<1,\quad |\nu_j|<1,\ \nu_k\neq\nu_j,\ k,j=1,2,3. \tag{2.4.3}$$

Граничные условия (2.0.3) заменим эквивалентными условиями (2.0.4). Здесь $F_k\in C^{(\alpha)}(\Gamma)$ функции, однозначно определяемые по граничным функциям $f_0,\ f_1,\ f_2$ (2.0.5). Получена следующая теорема.

Теорема 2.4.1. Пусть одним из корней характеристического уравнения (2.0.2) является число, комплексно сопряженное к мнимой единице, то есть $\nu_3=0$. Обозначим $\sigma=\mu\nu_2,\ \tau=\mu\nu_1$. Тогда при условии

$$S_l(\sigma,\tau)\equiv\sum_{p=1}^{l-2}\sum_{k=0}^{p-1}(p+1)(k+1)(p-k)\sum_{m=0}^{p-k-1}\tau^{m+k}\sigma^{p-m-1}\neq 0,\quad l=4,5,... \tag{2.4.4}$$

задача Дирихле (2.4.2), (2.0.4) однозначно разрешима. Если при некотором q условия (2.4.4) нарушается, т.е. $S_q(\sigma,\tau)=0$, то однородная задача (2.4.2), (2.0.4) имеет ненулевое решение, которое является многочленом порядка $q+2$, а чтобы неоднородная задача имела решение необходимо, чтобы граничные функции удовлетворяли одному условию ортогональности. Таким образом, дефектные числа задачи (2.0.1), (2.0.3) равны количеству номеров q при которых нарушается условие (2.4.4).

Теорема 2.4.2. Пусть корни характеристического уравнения (2.0.2) не равны $\pm i$ то есть $\nu_j\neq 0$. Обозначим $\sigma_j=\mu\nu_j$, $j=1,2,3$. Тогда при условии

$$T_l(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\equiv\det\sum_{p=0}^{l-1}\begin{pmatrix}\sigma_1^p & \sigma_2^p & \sigma_3^p\\ p\sigma_1^p & p\sigma_2^p & p\sigma_3^p\\ p^2\sigma_1^p & p^2\sigma_2^p & p^2\sigma_3^p\end{pmatrix}\neq 0,\quad l=4,5,... \tag{2.4.5}$$

задача (2.4.2), (2.0.4) однозначно разрешима. Если при некотором q условие (2.4.5) нарушается, т.е. $T_q(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=0$, то однородная задача (2.4.),(2.0.4) имеет ненулевое решение, которое является многочленом порядка $q+2$. А чтобы неоднородная задача имела решение, необходимо, чтобы граничные функции удовлетворяли одному условию ортогональности. Таким образом, дефектные числа задачи (2.0.1), (2.0.3) равны количеству номеров q, при которых нарушается условие (2.4.5).

Доказательство Теоремы 2.4.1.

Для доказательства сформулированных утверждений нам необходимо представление общего решения уравнения (2.4.2), позволяющее привести задачу (2.4.2), (2.0.4) к системе линейных уравнений. В [55] было показано, что общее решение уравнения (2.4.2) можно представить в виде

$$u=\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial^{j-1}}{\partial\theta^{j-1}}\Phi_j\left(z+\mu\overline{z}\right)+\Psi_j\left(\overline{z}+\nu_j z\right)\right), \tag{2.4.6}$$

где Φ_j и Ψ_j $\left(j=1,2,3\right)$ - аналитические функции в областях $D\left(\mu\right)=\left\{z+\mu\overline{z}\,\middle|\,z\in D\right\}$, $G\left(\nu_j\right)=\left\{\overline{z}+\nu_j z\,\middle|\,z\in D\right\}$ соответственно, которые необходимо определить.

Так как $\nu_3 = 0$, то $G(\nu_3) = D$. Подставим функцию (2.4.6) в граничные условия (2.0.4). Используя операторное тождество (1.0.10), при $k = 0,1,2$ получим:

$$\begin{aligned}
&\Phi_0''(z+\mu\bar{z})\mu^2 + \mu^2\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - 2iI\right)\Phi_1''(z+\mu\bar{z}) + \mu^2\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - 2iI\right)^2 \Phi_2''(z+\mu\bar{z}) + \\
&+\psi_1''(\bar{z}+\nu_1 z) + \psi_2''(\bar{z}+\nu_2 z) + \psi_3''(\bar{z}) = F_0 \\
&\Phi_0''(z+\mu\bar{z})\mu + \mu\frac{\partial}{\partial\varphi}\Phi_1''(z+\mu\bar{z}) + \mu\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi_2''(z+\mu\bar{z}) + \nu_1\psi_1''(\bar{z}+\nu_1 z) + \\
&+\nu_2\psi_2''(\bar{z}+\nu_2 z) = F_1 \\
&\Phi_0''(z+\mu\bar{z}) + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} + 2iI\right)\Phi_1''(z+\mu\bar{z}) + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} + 2iI\right)^2 \Phi_2''(z+\mu\bar{z}) + \nu_1^2\psi_1''(\bar{z}+\nu_1 z) + \\
&+\nu_2^2\psi_2''(\bar{z}+\nu_2 z) = F_2
\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

Пусть функция H, аналитическая в области $D(\mu)$ непрерывна вплоть до границы. Тогда на окружности Γ функцию $H(\mathrm{z}+\mu\,\bar{\mathrm{z}})$ можно представить в виде (см. [22])(лемма 1.0.1):

$$H(\mathrm{z}+\mu\,\bar{\mathrm{z}}) = h(z) + h(\mu\,\bar{\mathrm{z}}), \quad |z| = 1, \tag{2.4.8}$$

Используем формулы (1.0.7) и (1.0.8) для представления функций, входящих в уравнения (2.4.7) на границе Γ.

$$\Phi_m''(\mathrm{z}+\mu\,\bar{\mathrm{z}}) = \varphi_m(z) + \varphi_m(\mu\bar{z}) \sum_{k=0}^{\infty} A_{mk} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{mk}\mu^k \bar{z}^k; \quad \Psi_3'' \sum_{k=0}^{\infty} B_{3k}\bar{z}^k, \tag{2.4.9}$$

$$\Psi_j''(\bar{z}+\nu_j z) = \psi_j(\bar{z}) + \psi_j(\nu_j z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{jk}\bar{z}^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_{jk}\nu_j^k z^k, \ \ j = 1,2, \ m = 1,2,3. \tag{2.4.10}$$

Так как подлежащие определению функции φ_j и ψ_j аналитичны в круге D, то они определяются своими коэффициентами Тейлора A_{jk} и B_{jk}. Разложим функции F_k $(k = 0,1,2)$ на окружности Γ (2.1.4). Для определения коэффициентов Тейлора A_{jk} и B_{jk} подставим (2.4.9), (2.1.10) и (2.1.4) в граничные условия (2.0.4).

При $k = 1,2$ получим

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{l=0}^{\infty} A_{jl}(il + (2k-2)i)^{j-1} z^l \mu^{2-k} + \sum_{l=0}^{\infty} A_{jl}(-il + (2k-2)i)^{j-1} z^{-l}\mu^{l+2-k}\right) + \\
&+\sum_{j=1}^{2}\left(\sum_{l=0}^{\infty} B_{jl} z^{-l}\nu_j^k + \sum_{l=0}^{\infty} B_{jl} z^l \nu_j^{l+k} + \right) = \sum_{l=1}^{\infty} d_{lk} z^l + d_{0k} + \sum_{l=1}^{\infty} d_{-lk} z^{-l}.
\end{aligned}$$

(2.4.11)

При $k=0$ получим

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{l=0}^{\infty}A_{jl}(il-2i)^{j-1}z^{l}\mu^{2}+\sum_{l=0}^{\infty}A_{jl}(-il-2i)^{j-1}z^{-l}\mu^{l+2}\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\left(\sum_{l=0}^{\infty}B_{jl}z^{-l}+\sum_{l=0}^{\infty}B_{jl}z^{l}\nu_j^{l}\right)+\sum_{l=0}^{\infty}B_{3l}z^{-l}=\sum_{l=0}^{\infty}d_{l0}z^{l}+d_{00}+\sum_{l=0}^{\infty}d_{-l0}z^{-l}. \qquad (2.4.12)$$

Равенства (2.4.11) и (2.4.12) выполнены при произвольных значениях $z\in\Gamma$, поэтому коэффициенты при одинаковых степенях z в обеих частях этих равенств должны совпадать. При $l=0$ имеем:

$$\begin{aligned}&2\sum_{j=1}^{3}A_{j0}\left(-2i\right)^{j-1}\mu^{2}+2\left(B_{10}+B_{20}\right)+B_{30}=d_{00},\\&2\sum_{j=1}^{3}A_{j0}\left(\left(2k-2\right)i\right)^{j-1}\mu^{2-k}+2\left(B_{10}\nu_1^{k}+B_{20}\nu_2^{k}\right)=d_{0k},\ k=1,2.\end{aligned} \qquad (2.4.13)$$

Если $l\neq 0$, то приравняем коэффициенты при z^{l} и z^{-l} в правой и левой частях (2.4.11) и коэффициенты при в правой и левой частях (2.4.12). Получим систему пяти линейных уравнений для определения пяти неизвестных A_{jl} $(j=1,2,3)$ и B_{ml} $(m=1,2)$:

$$\sum_{j=1}^{3}A_{jl}\left(il+\left(2k-2\right)i\right)^{j-1}\mu^{2-k}+\sum_{j=1}^{2}B_{jl}\nu_j^{l+k}=d_{lk},\quad k=2,1,0,$$

$$\sum_{j=1}^{3}A_{jl}\left(-il+\left(2k-2\right)i\right)^{j-1}\mu^{l+2-k}+\sum_{j=1}^{2}B_{jl}\nu_j^{k}=d_{-lk},\quad k=2,1. \qquad (2.4.14)$$

Определитель основной матрицы этой системы имеет следующий вид

$$\Delta_l=\begin{vmatrix}1 & il+2i & \left(il+2i\right)^{2} & \nu_1^{l+2} & \nu_2^{l+2} & \nu_3^{l+2}\\ \mu & \mu il & \mu\left(il\right)^{2} & \nu_1^{l+1} & \nu_2^{l+1} & \nu_3^{l+1}\\ \mu^{2} & \mu^{2}\left(il-2i\right) & \mu^{2}\left(il-2i\right)^{2} & \nu_1^{l} & \nu_2^{l} & \nu_3^{l}\\ \mu^{l} & \mu^{l}\left(-il+2i\right) & \mu^{l}\left(-il+2i\right)^{2} & \nu_1^{2} & \nu_2^{2} & \nu_3^{2}\\ \mu^{l+1} & \mu^{l+1}\left(-il\right) & \mu^{l+1}\left(-il\right)^{2} & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3\\ \mu^{l+2} & \mu^{l+2}\left(-il-2i\right) & \mu^{l+2}\left(-il-2i\right)^{2} & 1 & 1 & 1\end{vmatrix} \qquad (2.4.15)$$

Из каждой строки (2.4.15) детерминанта вынесем различные степени μ так, чтобы все элементы первого столбца стали равны единице, а затем умножим последние два столбца на μ^{l+2}. В результате, используя обозначения теоремы 2.4.1, приводим детерминант (2.4.15) к следующей форме:

$$\Delta_l = -i\sigma\tau \begin{vmatrix} 1 & l+2 & (l+2)^2 & \sigma^{l+1} & \tau^{l+1} \\ 1 & l & l^2 & \sigma^l & \tau^l \\ 1 & l-2 & (l-2)^2 & \sigma^{l-1} & \tau^{l-1} \\ 1 & -l+2 & (-l+2)^2 & \sigma & \tau \\ 1 & -l & l^2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -i\sigma\tau \begin{vmatrix} 2(l+1) & 4l+4 & \sigma^{l+1}-1 & \tau^{l+1} \\ 2l & 0 & \sigma^l-1 & \tau^l \\ 2(l-1) & -4l+4 & \sigma^{l-1}-1 & \tau^{l-1} \\ 2 & -4l+4 & \sigma-1 & \tau-1 \end{vmatrix} =$$

$$= -8i\sigma\tau(\sigma-1)(\tau-1) \begin{vmatrix} l+1 & -l-1 & \sum_{m=0}^{l}\sigma^m & \sum_{m=0}^{l}\tau^m \\ l & 0 & \sum_{m=0}^{l-1}\sigma^m & \sum_{m=0}^{l-1}\tau^m \\ j-1 & l-1 & \sum_{m=0}^{l-2}\sigma^m & \sum_{m=0}^{l-2}\tau^m \\ 1 & l-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -8i\sigma\tau(\sigma-1)(\tau-1) \begin{vmatrix} -l(l+1) & \sum_{m=0}^{l}\left(\sigma^m-1\right) & \sum_{m=0}^{l}\left(\tau^m-1\right) \\ -(l-1)l & \sum_{m=0}^{l-1}\left(\sigma^m-1\right) & \sum_{m=0}^{l-1}\left(\tau^m-1\right) \\ -(l-2)(l-1) & \sum_{m=0}^{l-2}\left(\sigma^m-1\right) & \sum_{m=0}^{l-2}\left(\tau^m-1\right) \end{vmatrix} =$$

$$= 8i\sigma\tau(\sigma-1)^2(\tau-1)^2 \begin{vmatrix} l(l+1) & \sum_{m=1}^{l}\sum_{j=0}^{m-1}\sigma^j & \sum_{m=1}^{l}\sum_{j=0}^{m-1}\tau^j \\ (l-1)l & \sum_{m=1}^{l-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sigma^j & \sum_{m=1}^{l-1}\sum_{j=0}^{m-1}\tau^j \\ (l-2)(l-1) & \sum_{m=1}^{l-2}\sum_{j=0}^{m-1}\sigma^j & \sum_{m=1}^{l-2}\sum_{j=0}^{m-1}\tau^j \end{vmatrix} = 8i\sigma\tau(\sigma-1)^2(\tau-1)^2 R_l$$

Далее, используем соотношения

$$\sum_{m=1}^{l}\sum_{j=0}^{m-1}\sigma^j = \sum_{j=0}^{l-1}\sigma^j \sum_{m=j+1}^{l} 1 = \sum_{j=0}^{l-1}(l-j)\sigma^j,$$

$$\sum_{j=0}^{l-1}(l-j) = \frac{(l-0)+(l-(l-1))}{2} l = \frac{l(l+1)}{2},$$

$$
R_l=\begin{vmatrix} l(l+1) & \sum_{j=1}^{l-1}(l-j)\left(\sigma^m-1\right) & \sum_{j=1}^{l-1}(l-j)\left(\tau^m-1\right) \\ (l-1)l & \sum_{j=1}^{l-2}(l-1-j)\left(\sigma^m-1\right) & \sum_{j=1}^{l-2}(l-1-j)\left(\tau^m-1\right) \\ (l-2)(l-1) & \sum_{j=1}^{l-3}(l-2-j)\left(\sigma^m-1\right) & \sum_{m=0}^{l-2}(l-2-j)\left(\tau^m-1\right) \end{vmatrix}=
$$

$$
=(\sigma-1)(\tau-1)\begin{vmatrix} l(l+1) & \sum_{j=1}^{l-1}(l-j)\sum_{p=0}^{l-1}\sigma^p & \sum_{j=1}^{l-1}(l-j)\sum_{p=0}^{l-1}\tau^p \\ (l-1)l & \sum_{j=1}^{l-2}(l-1-j)\sum_{p=0}^{l-1}\sigma^p & \sum_{j=1}^{l-2}(l-1-j)\sum_{p=0}^{l-1}\tau^p \\ (l-2)(l-1) & \sum_{j=1}^{l-3}(l-2-j)\sum_{p=0}^{l-1}\sigma^p & \sum_{j=1}^{l-3}(l-2-j)\sum_{p=0}^{l-1}\tau^p \end{vmatrix}=
$$

Учитывая равенство

$$
\sum_{j=1}^{l-1}(l-j)\sum_{p=0}^{l-1}\sigma^p=\sum_{p=0}^{l-2}\sigma^p\sum_{j=p+1}^{l-1}(l-j)=\sum_{p=0}^{l-2}\sigma^p\frac{\left((l-p-1)+(l-l+1)\right)(l-p-1)}{2}=
$$

$$
=\sum_{p=0}^{l-2}\sigma^p(l-p-1)(l-p)\frac{1}{2},
$$

получим

$$
R_l=(\sigma-1)(\tau-1)\begin{vmatrix} l(l+1) & \sum_{p=0}^{l-2}(l-p-1)(l-p)\sigma^p & \sum_{p=0}^{l-2}(l-p-1)(l-p)\tau^p \\ (l-1)l & \sum_{p=0}^{l-3}(l-p-2)(l-p-1)\sigma^p & \sum_{p=0}^{l-3}(l-p-2)(l-p-1)\tau^p \\ (l-2)(l-1) & \sum_{p=0}^{l-4}(l-p-3)(l-p-2)\sigma^p & \sum_{p=0}^{l-4}(l-p-3)(l-p-2)\tau^p \end{vmatrix}=
$$

$$
=(\sigma-1)(\tau-1)\begin{vmatrix} l(l+1) & \sum_{p=0}^{l-2}(l-p-1)(l-p)\sigma^p & \sum_{p=0}^{l-2}(l-p-1)(l-p)\tau^p \\ (l-1)l & \sum_{p=0}^{l-2}(l-p-2)(l-p-1)\sigma^p & \sum_{p=0}^{l-2}(l-p-2)(l-p-1)\tau^p \\ (l-2)(l-1) & \sum_{p=0}^{l-2}(l-p-3)(l-p-2)\sigma^p & \sum_{p=0}^{l-2}(l-p-3)(l-p-2)\tau^p \end{vmatrix}\equiv(\sigma-1)(\tau-1)\Omega_l
$$

В детерминанте из первой строки вычитаем вторую и, затем из второй - третью. Имеем

$$\Omega_l = \begin{vmatrix} 2l & \sum_{p=0}^{l-2} 2(l-p-1)\sigma^p & \sum_{p=0}^{l-2} 2(l-p-1)\tau^p \\ 2(l-1) & \sum_{p=0}^{l-2} 2(l-p-2)\sigma^p & \sum_{p=0}^{l-2} 2(l-p-2)\tau^p \\ (l-2)(l-1) & \sum_{p=0}^{l-2} (l-p-3)(l-p-2)\sigma^p & \sum_{p=0}^{l-2} (l-p-3)(l-p-2)\tau^p \end{vmatrix} =$$

$$= 4\begin{vmatrix} 1 & \sum_{p=0}^{l-2} \sigma^p & \sum_{p=0}^{l-2} \tau^p \\ l-1 & \sum_{p=0}^{l-2} (l-p-2)\sigma^p & \sum_{p=0}^{l-2} (l-p-2)\tau^p \\ (l-2)(l-1) & \sum_{p=0}^{l-2} (l-p-3)(l-p-2)\sigma^p & \sum_{p=0}^{l-2} (l-p-3)(l-p-2)\tau^p \end{vmatrix} =$$

$$= 4\begin{vmatrix} 1 & \sum_{p=0}^{l-2} \sigma^p & \sum_{p=0}^{l-2} \tau^p \\ 0 & -\sum_{p=0}^{l-2} (p+1)\sigma^p & -\sum_{p=0}^{l-2} (p+1)\tau^p \\ 0 & \sum_{p=0}^{l-2} \left(-(2l-3)(p+1)+(p+1)^2\right)\sigma^p & \sum_{p=0}^{l-2} \left(-(2l-3)(p+1)+(p+1)^2\right)\tau^p \end{vmatrix} =$$

$$= -4\begin{vmatrix} \sum_{p=0}^{l-2} (p+1)\sigma^p & \sum_{p=0}^{l-2} (p+1)\tau^p \\ \sum_{p=0}^{l-2} (p+1)^2\sigma^p & \sum_{p=0}^{l-2} (p+1)^2\tau^p \end{vmatrix} = -4Q_l$$

Рассмотрим детерминант Q_l при $l = 4$ и 5.

1) $l = 4$

$$Q_4 = \begin{vmatrix} 1+2z_1+3z_1^2 & 1+2z_2+3z_2^2 \\ 1+4z_1+9z_1^2 & 1+4z_1+9z_1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+2z_1+3z_1^2 & 1+2z_2+3z_2^2 \\ -2-2z_1 & -2-2z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} z_1+3z_1^2 & z_2+3z_2^2 \\ 1+z_1 & 1+z_2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} z_1+3z_1^2 & z_2-z_1+3\left(z_2^2-z_1^2\right) \\ 1+z_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} = -2(z_2-z_1)\begin{vmatrix} z_1+3z_1^2 & 1+3z_2+3z_1 \\ 1+z_1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(z_2-z_1)\left(z_1+3z_1^2-\left(1+4z_1+3z_1^2+3z_2(1+z_1)\right)\right) = -2(z_2-z_1)\left(-1-3z_1-3z_2(1+z_1)\right)$$

Итак, $Q_4 = 0$ тогда и только тогда, когда $z_2 = -\frac{1+3z_1}{3+3z_1}$ (предполагаем, что $z_1 \neq z_2$, $0 < |z_k| < 1$, $k = 1, 2$).

2) $l = 5$

$$Q_5 = \begin{vmatrix} 1+2z_1+3z_1^2+4z_1^3 & 1+2z_2+3z_2^2+4z_2^3 \\ 1+4z_1+9z_1^2+16z_1^3 & 1+4z_1+9z_1^2+16z_2^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+2z_1+3z_1^2+4z_1^3 & 1+2z_2+3z_2^2+4z_2^3 \\ -3-4z_1-3z_1^2 & -3-4z_2-3z_2^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -2-2z_1+4z_1^3 & -2-2z_2+4z_2^3 \\ 3+4z_1+3z_1^2 & 3+4z_2+3z_2^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2-2z_1+4z_1^3 & -2(z_2-z_1)+4(z_2^3-z_1^3) \\ 3+4z_1+3z_1^2 & 4(z_2-z_1)+3(z_2^2-z_1^2) \end{vmatrix} =$$

$$= -(z_2-z_1)\begin{vmatrix} -2-2z_1+4z_1^3 & -2+4(z_2^2+z_1z_2+z_1^2) \\ 3+4z_1+3z_1^2 & 4+3(z_1+z_2) \end{vmatrix} =$$

$$= -(z_2-z_1)\Big(\left(-2-2z_1+4z_1^3\right)(4+3z_1)+3z_2\left(4z_1^3-2z_1-2\right)-\left(3+4z_1+3z_1^2\right)(-2+4z_1^2)-$$

$$-4z_1z_2\left(3+4z_1+3z_1^2\right)-4z_2^2\left(3+4z_1+3z_1^2\right)\Big)$$

Таким образом, $Q_5 = 0$ тогда и только тогда, когда $g(z_1, z_2)$ обращается в нуль

$$g(z_1,z_2) = \left(-8-6z_1-8z_1-6z_1^2+16z_1^3+12z_1^4+6+8z_1+6z_1^3-12z_1^2-16z_1^3-12z_1^4\right)+$$
$$+z_2\left(12z_1^3-6z_1-6-12z_1-16z_1^2\right)-4z_2^2\left(3+4z_1+3z_1^2\right)$$

$$g(z_1,z_2) = \left(-2-6z_1-12z_1^2\right)+z_2\left(-6-18z_1-16z_1^2\right)-4z_2^2\left(3+4z_1+3z_1^2\right)$$

Итак, $Q_5 = 0$ тогда и только тогда, когда

$$2\left(3+4z_1+3z_1^2\right)z_2^2+\left(3+9z_1+8z_1^2\right)z_2+\left(1+3z_1+6z_1^2\right)=0$$

Решим систему $Q_4 = Q_5 = 0$. Имеем, что $Q_4 = 0$ тогда и только тогда, когда подставляя $z_2 = -\frac{1+3z_1}{3+3z_1}$ уравнение $Q_5 = 0$, получим

$$\left(6+8z_1+6z_1^2\right)\left(\frac{1+3z_1}{3+3z_1}\right)^2-\frac{1+3z_1}{3+3z_1}\left(3+9z_1+8z_1^2\right)+\left(1+3z_1+6z_1^2\right)=0$$

или

$$\left(6+8z_1+6z_1^2\right)\left(1+6z_1+9z_1^2\right)-\left(3+12z_1+9z_1^2\right)\left(3+9z_1+8z_1^2\right)+\left(9+18z_1+9z_1^2\right)\left(1+3z_1+6z_1^2\right)=0.$$

Раскроем скобки получим

$$18z_1^4+33z_1^3+33z_1^2+13z_1+3=0$$

Последнее уравнение имеет четыре корня, модуль которых меньше единицы:

$$\varsigma_{1,2}=-0,666667\pm 0,745356i;\ \varsigma_{3,4}=-0,25\pm 0,322749i \tag{2.4.16}$$

Далее, если $z_1=a_i+ib_1$ то $\left|1+3z_1\right|=\sqrt{(1+3a_1)^2+(3b_1)^2}$, $\left|3+3z_1\right|=\sqrt{(3+3a_1)^2+(3b_1)^2}$, поэтому

$\left|3+3z_1\right|^2-\left|1+3z_1\right|^2=(3+3a_1)^2-(1+3a_1)^2=2(4+6a_1)>0$

При $a_1=-0,666667$ и $a_1=-0,25$, следовательно, при z_1 из (2.4.16) $\left|z_2\right|<1$.

Окончательно, если z_1 один из корней ς_j $j=1,2,3,4$ и $z_2=-\dfrac{1+3z_1}{3+3z_1}$, имеем $Q_4=Q_5=0$, то есть дефектные числа могут принимать значение 2.

После дальнейших преобразований получаем

$$\Delta_l=-32i\sigma\tau(\sigma-1)^3(\tau-1)^3\begin{vmatrix}\sum\limits_{p=0}^{l-2}(p+1)\sigma^p & \sum\limits_{p=0}^{l-2}(p+1)\tau^p\\ \sum\limits_{p=0}^{l-2}(p+1)^2\sigma^p & \sum\limits_{p=0}^{l-2}(p+1)^2\tau^p\end{vmatrix} \tag{2.4.17}$$

Учитывая, что при условиях теоремы 2.4.1 имеем $0<\left|\sigma\right|<1$, и $0<\left|\tau\right|<1$, получаем, что разрешимость системы (2.4.13) определяется следующим детерминантом:

$$\Theta_l=\begin{vmatrix}\sum\limits_{p=0}^{l-2}(p+1)\sigma^p & \sum\limits_{p=0}^{l-2}(p+1)\tau^p\\ \sum\limits_{p=0}^{l-2}(p+1)^2\sigma^p & \sum\limits_{p=0}^{l-2}(p+1)^2\tau^p\end{vmatrix}=\left(\sigma-\tau\right)S_l\left(\sigma,\tau\right). \tag{2.4.18}$$

Предположим, что условия (2.4.4) теоремы 2.4.1 выполнены. Тогда из системы (2.4.13) однозначно определяем коэффициенты $A_{jl}\,(j=1,2,3)$ и $B_{ml}\,(m=1,2,3)$ при $l=4,5,\dots$. При $l=3$ эти коэффициенты также определяются однозначно, потому что Δ_3 отличен от нуля, так как является обобщенным определителем Вандермонда с различными членами. Далее, из равенства (2.4.11)

$$\sum_{j=1}^{3} A_{jl}(-il-2i)^{j-1}\mu^{l+2} + \sum_{j=1}^{2} B_{jl} + B_{3l} = d_{-l0} \qquad (2.4.19)$$

определяем B_{3l}. Таким образом, получили, что при условиях (2.4.4) коэффициенты в разложениях (2.4.9) при $l \geq 3$ определяются однозначно. При $l = 0$ система (2.4.12) всегда разрешима, но не однозначно. При $l = 1$ в системе (2.4.13) совпадают левые части второго, четвертого, третьего, пятого уравнений; а при $l = 2$ совпадают левые части третьего и четвертого уравнений. Из (2.4.3) следует, что правые части указанных уравнений также равны. Итак, при условиях (2.4.4) неоднородная задача (2.4.2), (2.0.4) имеет решение.

Рассмотрим соответствующую однородную задачу. Так как при $l \geq 3$ система (2.4.13) имеет единственное решение (в данном случае нулевое), то решением однородной задачи (2.4.2), (2.0.4) может быть многочлен, порядок которого не больше четырех. Однако, ненулевой многочлен, удовлетворяющий однородным условиям (2.0.4), должен делиться на $(1-z\overline{z})^3$, то есть иметь степень не менее шести. Поэтому однородная задача (2.4.2), (2.0.4) не имеет ненулевых решений. Итак, при условиях (2.4.4) задача (2.4.2), (2.0.4) однозначно разрешима. Первая часть теоремы 2.4.1 доказана.

Предположим, что условие (2.4.4) нарушается при некотором q. В этом случае ранг основной матрицы системы (2.4.14) равен четырем и, следовательно, соответствующая однородная система имеет одно линейно независимое решение $A_{jq,}, B_{jq}$. Построенная по этим коэффициентам (формулы (2.4.9), (2.4.10), (2.1.4)) функция является ненулевым решением однородной задачи (2.4.2), (2.0.4). При этом, для того, чтобы соответствующая неоднородная система имела решение необходимо одно условие ортогональности на граничные функции f_k. Например, при $\sigma = 0.5, \tau = -\frac{5}{9}$, то есть, если $\Delta_4 = 0$, функция $(1-z\overline{z})^3-$ ненулевое решение однородной задачи (2.4.2), (2.0.4), а для разрешимости соответствующей неоднородной задачи необходимо чтобы соответствующая система (2.4.14) имела решение. При этом необходимо условие на правые части системы, так как левые части уравнений линейно зависимы. Чтобы показать, как получается это условие, рассмотрим случай $l = 2.$ Система (2.4.14) примет вид:

$$\left\{\begin{array}{l|l}
A_{41}+6\tilde{A}_{42}+36\tilde{A}_{43}+\sigma^5\tilde{B}_{41}+\tau^5\tilde{B}_{42}=d_{42} & x \\
A_{41}+4\tilde{A}_{42}+16\tilde{A}_{43}+\sigma^4\tilde{B}_{41}+\tau^4\tilde{B}_{42}=\dfrac{d_{41}}{\mu} & y \\
A_{41}+2\tilde{A}_{42}+4\tilde{A}_{43}+\sigma^3\tilde{B}_{41}+\tau^3\tilde{B}_{42}=\dfrac{d_{40}}{\mu^2} & z \\
A_{41}-2\tilde{A}_{42}+4\tilde{A}_{43}+\sigma\tilde{B}_{41}+\tau\tilde{B}_{42}=\dfrac{d_{-42}}{\mu^4} & u \\
A_{41}-4\tilde{A}_{42}+16\tilde{A}_{43}+\tilde{B}_{41}+\tilde{B}_{42}=\dfrac{d_{-41}}{\mu^5} & v
\end{array}\right. . \qquad (2.4.20)$$

Преобразуем расширенную матрицу системы (2.4.20):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 6 & 36 & \sigma^5 & \tau^5 & x \\
1 & 4 & 16 & \sigma^4 & \tau^4 & y \\
1 & 2 & 4 & \sigma^3 & \tau^3 & z \\
1 & -2 & 4 & \sigma & \tau & u \\
1 & -4 & 16 & 1 & 1 & v
\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c}
0 & 2 & 20 & \sigma^5-\sigma^4 & \tau^5-\tau^4 & x-y \\
0 & 2 & 12 & \sigma^4-\sigma^3 & \tau^4-\tau^3 & y-z \\
0 & 4 & 0 & \sigma^3-\sigma & \tau^3-\tau & z-u \\
0 & 2 & -12 & \sigma-1 & \tau-1 & u-v \\
1 & -4 & 16 & 1 & 1 & v
\end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c}
0 & 0 & 8 & \sigma^5-\sigma^4-\sigma^4+\sigma^3 & \tau^5-\tau^4-\tau^4+\tau^3 & x-y \\
0 & 0 & 24 & \sigma^4-\sigma^3-\sigma+1 & \tau^4-\tau^3-\tau+1 & y-z \\
0 & 0 & 0 & A & B & z-u \\
0 & 2 & -12 & \sigma-1 & \tau-1 & u-v \\
1 & -4 & 16 & 1 & 1 & v
\end{array}\right) \to$$

где

$$A=\sigma^3-\sigma-\left(\sigma^4-\sigma^3\right)-\left(\sigma-1\right)=\sigma^4+2\sigma^3-2\sigma+1$$
$$B=\tau^3-\tau-\left(\tau^4-\tau^3\right)-\left(\tau-1\right)=\tau^4+2\tau^3-2\tau+1$$

Далее, имеем

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -4 & 16 & 1 & 1 & v \\
0 & 2 & -12 & \sigma-1 & \tau-1 & u-v \\
0 & 0 & 8 & \sigma^5-2\sigma^4+\sigma^3 & \tau^5-2\tau^4+\tau^3 & x-2y+z \\
0 & 0 & 0 & A & B & 2z-2u+v-y \\
0 & 0 & 0 & K & \tilde{K} & -3x+7y-4z-u+v
\end{array}\right)$$

где

$$K=-3\sigma^5+7\sigma^4-4\sigma^3-\sigma+1$$
$$\tilde{K}=-3\tau^5+7\tau^4-4\tau^3-\tau+1 \quad .$$

Вычислим детерминант системы 2x2 для определения коэффициента.

$$\begin{vmatrix} A & B \\ K & \tilde{K} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sigma^4+2\sigma^3-2\sigma+1 & -\tau^4+2\tau^3-2\tau+1 \\ -3\sigma^5+7\sigma^4-4\sigma^3-\sigma+1 & -3\tau^5+7\tau^4-4\tau^3-\tau+1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -(\sigma-1)^3(\sigma+1) & -(\tau-1)^3(\tau+1) \\ -(\sigma-1)^3\left(3\sigma^2+2\sigma+1\right) & -(\tau-1)^3\left(3\tau^2+2\tau+1\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma+1 & \tau+1 \\ 3\sigma^2+\sigma & 3\tau^2+\tau \end{vmatrix} =$$

$$3\tau^2\sigma+\tau\sigma+3\tau^2+\tau-3\tau\sigma^2-\tau\sigma-3\sigma^2-\sigma=3\tau\sigma(\tau-\sigma)+3(\tau-\sigma)(\tau+\sigma)+\tau-\sigma=$$
$$=(\tau-\sigma)\left(3\tau\sigma+3(\tau+\sigma)+1\right)$$

При $\sigma=\frac{1}{2},\ \tau=-\frac{5}{9}$ имеем $\left(3\tau\sigma+3(\tau+\sigma)+1\right)=0$. Тогда для разрешимости системы

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\tilde{\tilde{B}}_{41}+\frac{4}{9}\tilde{\tilde{B}}_{42}=2z-2u+v-y \\ \frac{11}{4}\tilde{\tilde{B}}_{41}+\frac{66}{81}\tilde{\tilde{B}}_{42}=-3x+7y-4z-u+v \end{cases}$$

необходимо условие (так как левые части уравнений пропорциональны):

$$2z-2u+v-y=-\frac{18}{11}x+\frac{42}{11}y-\frac{24}{11}z-\frac{6}{11}u+\frac{6}{11}v$$

или $18x-53y+46z-16u+5v=0$. Учитывая, что $x=d_{42},\ y=\frac{d_{41}}{\mu},\ z=\frac{d_{40}}{\mu^2},\ u=\frac{d_{-42}}{\mu^4},\ v=\frac{d_{-41}}{\mu^5}$,

получим $18d_{42}-53\frac{d_{41}}{\mu}+46\frac{d_{40}}{\mu^2}-16\frac{d_{-42}}{\mu^4}+5\frac{d_{-41}}{\mu^5}=0$

или

$$18\int_{-\pi}^{\pi}F_2(\theta)e^{-4i\theta}d\theta-\frac{53}{\mu}\int_{-\pi}^{\pi}F_1(\theta)e^{-4i\theta}d\theta+\frac{46}{\mu^2}\int_{-\pi}^{\pi}F_0(\theta)e^{-4i\theta}d\theta-\frac{16}{\mu^4}\int_{-\pi}^{\pi}F_2(\theta)e^{-4i\theta}d\theta+$$
$$+\frac{5}{\mu^5}\int_{-\pi}^{\pi}F_1(\theta)e^{-4i\theta}d\theta=0.$$

Таким образом, условие

$$\frac{46}{\mu^2}\int_{-\pi}^{\pi}F_0(\theta)e^{-4i\theta}d\theta+\int_{-\pi}^{\pi}F_1(\theta)\left(\frac{5}{\mu^5}e^{4i\theta}-\frac{53}{\mu}e^{-4i\theta}\right)d\theta+\int_{-\pi}^{\pi}F_2(\theta)\left(18e^{-4i\theta}-\frac{16}{\mu^4}e^{4i\theta}\right)d\theta=0.$$

необходимо для разрешимости системы (2.4.19). Теорема 2.4.1 доказана.

Доказательство Теоремы 2.4.2. В [55] было показано, что общее решение уравнения (2.0.1) представляется в виде

$$u=\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial^{j-1}}{\partial\theta^{j-1}}\Phi_j\left(z+\mu\overline{z}\right)+\Psi_j\left(\overline{z}+\nu_j z\right)\right), \tag{2.4.21}$$

где Φ_j и Ψ_j $\left(j=1,2,3\right)$ - аналитические в областях $D\left(\mu\right)=\left\{z+\mu\overline{z}\middle| z\in D\right\}$, $G\left(\nu_j\right)=\left\{\overline{z}+\nu_j z\middle| z\in D\right\}$ соответственно функции, которые необходимо определить. Подставим функцию (2.4.21) в граничные равенства (2.0.3). Используя операторное тождество (1.0.10), при $k=0,1,2$ получим:

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+(2k-2)iI\right)^{j-1}\Phi_j''\left(z+\mu\overline{z}\right)\mu^{2-k}+\Psi_j''\left(\overline{z}+\nu_j z\right)\nu_j^k\right)=F_k(\theta). \tag{2.4.22}$$

Представим Φ_j'' и Ψ_j'' на окружности Γ, используя разложение:

$$\Phi_j''(z+\mu\overline{z})=\varphi_j\left(z\right)+\varphi_j\left(\mu\overline{z}\right)\sum_{k=0}^{\infty}A_{jk}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{jk}\mu^k z^{-k},$$

$$\Psi_j''\left(\overline{z}+\nu_j z\right)=\psi_j\left(\overline{z}\right)+\psi_j\left(\nu_j z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}B_{jk}z^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty}B_{jk}\nu_j^k z^k\ ,\ j=1,2,3. \tag{2.4.23}$$

Здесь аналитические в круге функции φ_j и ψ_j представлены в виде соответствующих рядов Тейлора. Используем также разложения граничных функции F_j (2.1.4) и для определения коэффициентов Тейлора A_{jk} и B_{jk}, подставим разложения (2.4.21) и (2.4.23) в граничные условия (2.0.4) получим:

При $k=0,1,2$ получим

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{3}\left(\left(A_{jl}\left(il+(2k-2)i\right)^{j-1}\mu^{2-k}+B_{jl}\nu_j^{l+k}\right)z^l+\left(A_{jl}\left(-il+(2k-2)i\right)^{j-1}\mu^{l+2-k}+B_{jl}\nu_j^k\right)z^{-l}\right)=$$
$$=\sum_{l=1}^{\infty}\left(d_{lk}z^l+d_{-lk}z^{-l}\right)+d_{0k}.$$

Пусть $l\geq 4$. Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях z^l и z^{-l}, получим систему

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{3}\left(A_{jl}\left(il+(2k-2)i\right)^{j-1}\mu^{2-k}+B_{jl}\nu_j^{l+k}\right)=d_{lk}\ ,\quad k=2,1,0,\\&\sum_{j=1}^{3}\left(A_{jl}\left(-il+(2k-2)i\right)^{j-1}\mu^{l+2-k}+B_{jl}\nu_j^k\right)=d_{-lk}\ ,\quad k=2,1,0.\end{aligned} \tag{2.4.24}$$

Определитель основной матрицы этой системы имеет следующий вид:

$$\Delta_l = \begin{vmatrix} 1 & il+2i & (il+2i)^2 & \nu_1^{l+2} & \nu_2^{l+2} & \nu_3^{l+2} \\ \mu & \mu il & \mu(il)^2 & \nu_1^{l+1} & \nu_2^{l+1} & \nu_3^{l+1} \\ \mu^2 & \mu^2(il-2i) & \mu^2(il-2i)^2 & \nu_1^{l} & \nu_2^{l} & \nu_3^{l} \\ \mu^l & \mu^l(-il+2i) & \mu^l(-il+2i)^2 & \nu_1^{2} & \nu_2^{2} & \nu_3^{2} \\ \mu^{l+1} & \mu^{l+1}(-il) & \mu^{l+1}(-il)^2 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ \mu^{l+2} & \mu^{l+2}(-il-2i) & \mu^{l+2}(-il-2i)^2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} . \qquad (2.4.25)$$

Из каждой строки детерминанта (2.4.25) вынесем различные степени μ так, чтобы все элементы первого столбца были равны единице. Умножив последние три столбца на μ^{l+2}, получим:

$$\Delta_l = -i\begin{vmatrix} 1 & j+2 & (j+2)^2 & z_1^{j+2} & z_2^{j+2} & z_3^{j+2} \\ 1 & j & j^2 & z_1^{j+1} & z_2^{j+1} & z_3^{j+1} \\ 1 & j-2 & (j-2)^2 & z_1^{j} & z_2^{j} & z_3^{j} \\ 1 & -j+2 & (j-2)^2 & z_1^{2} & z_2^{2} & z_3^{2} \\ 1 & -j+2 & j^2 & z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & -j-2 & (j+2)^2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -i\begin{vmatrix} 1 & 2j+4 & 0 & z_1^{j+2}-1 & z_2^{j+2}-1 & z_3^{j+2}-1 \\ 1 & 2j+2 & -4j-4 & z_1^{j+1}-1 & z_2^{j+1}-1 & z_3^{j+1}-1 \\ 1 & 2j & -8j & z_1^{j}-1 & z_2^{j}-1 & z_3^{j}-1 \\ 1 & 4 & -8j & z_1^{2}-1 & z_2^{2}-1 & z_3^{2}-1 \\ 1 & 2 & -4j-4 & z_1-1 & z_2-1 & z_3-1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 8i\begin{vmatrix} j+2 & 0 & \sum_{l=0}^{j+1} z_1^l & \sum_{l=0}^{j+1} z_2^l & \sum_{l=0}^{j+1} z_3^l \\ j+1 & j+1 & \sum_{l=0}^{j} z_1^l & \sum_{l=0}^{j} z_2^l & \sum_{l=0}^{j} z_3^l \\ j & 2j & \sum_{l=0}^{j-1} z_1^l & \sum_{l=0}^{j-1} z_2^l & \sum_{l=0}^{j-1} z_3^l \\ 2 & 2j & z_1+1 & z_2+1 & z_3+1 \\ 1 & j+1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} (z_1-1)(z_2-1)(z_3-1) =$$

$$= 8i(z_1-1)(z_2-1)(z_3-1)\begin{vmatrix} j+2 & -(j+2)(j+1) & \sum_{l=0}^{j+1}(z_1^l-1) & \sum_{l=0}^{j+1}(z_2^l-1) & \sum_{l=0}^{j+1}(z_3^l-1) \\ j+1 & -j(j+1) & \sum_{l=1}^{j}(z_1^l-1) & \sum_{l=1}^{j}(z_2^l-1) & \sum_{l=1}^{j}(z_3^l-1) \\ j & -j(j-1) & \sum_{l=1}^{j-1}(z_1^l-1) & \sum_{l=1}^{j-1}(z_2^l-1) & \sum_{l=1}^{j-1}(z_3^l-1) \\ 2 & -2 & z_1-1 & z_2-1 & z_3-1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -8i(z_1-1)^2(z_2-1)^2(z_3-1)^2\begin{vmatrix} (j+2)(j+1) & \sum_{l=1}^{j+1}\sum_{m=0}^{l-1} z_1^m & \sum_{l=1}^{j+1}\sum_{m=0}^{l-1} z_2^m & \sum_{l=1}^{j+1}\sum_{m=0}^{l-1} z_3^m \\ j(j+1) & \sum_{l=1}^{j}\sum_{m=0}^{l-1} z_1^m & \sum_{l=1}^{j}\sum_{m=0}^{l-1} z_2^m & \sum_{l=1}^{j}\sum_{m=0}^{l-1} z_3^m \\ j(j-1) & \sum_{l=1}^{j-1}\sum_{m=0}^{l-1} z_1^m & \sum_{l=1}^{j-1}\sum_{m=0}^{l-1} z_2^m & \sum_{l=1}^{j-1}\sum_{m=0}^{l-1} z_3^m \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$
=-16i\left(z_1-1\right)^2\left(z_2-1\right)^2\left(z_3-1\right)^2\begin{vmatrix}
\sum\limits_{l=1}^{j+1} l & \sum\limits_{l=1}^{j+1}\sum\limits_{m=0}^{l-1} z_1^m & \sum\limits_{l=1}^{j+1}\sum\limits_{m=0}^{l-1} z_2^m & \sum\limits_{l=1}^{j+1}\sum\limits_{m=0}^{l-1} z_3^m \\
\sum\limits_{l=1}^{j} l & \sum\limits_{l=1}^{j}\sum\limits_{m=0}^{l-1} z_1^m & \sum\limits_{l=1}^{j}\sum\limits_{m=0}^{l-1} z_2^m & \sum\limits_{l=1}^{j}\sum\limits_{m=0}^{l-1} z_3^m \\
\sum\limits_{l=1}^{j-1} l & \sum\limits_{l=1}^{j-1}\sum\limits_{m=0}^{l-1} z_1^m & \sum\limits_{l=1}^{j-1}\sum\limits_{m=0}^{l-1} z_2^m & \sum\limits_{l=1}^{j-1}\sum\limits_{m=0}^{l-1} z_3^m \\
1 & 1 & 1 & 1
\end{vmatrix}=
$$

$$
=16i\left(z_1-1\right)^2\left(z_2-1\right)^2\left(z_3-1\right)^2\begin{vmatrix}
\sum\limits_{l=1}^{j+1}\sum\limits_{m=0}^{l-1}\left(z_1^m-1\right) & \sum\limits_{l=1}^{j+1}\sum\limits_{m=0}^{l-1}\left(z_2^m-1\right) & \sum\limits_{l=1}^{j+1}\sum\limits_{m=0}^{l-1}\left(z_3^m-1\right) \\
\sum\limits_{l=1}^{j}\sum\limits_{m=0}^{l-1}\left(z_1^m-1\right) & \sum\limits_{l=1}^{j}\sum\limits_{m=0}^{l-1}\left(z_2^m-1\right) & \sum\limits_{l=1}^{j}\sum\limits_{m=0}^{l-1}\left(z_2^m-1\right) \\
\sum\limits_{l=1}^{j-1}\sum\limits_{m=0}^{l-1}\left(z_1^m-1\right) & \sum\limits_{l=1}^{j-1}\sum\limits_{m=0}^{l-1}\left(z_2^m-1\right) & \sum\limits_{l=1}^{j-1}\sum\limits_{m=0}^{l-1}\left(z_3^m-1\right)
\end{vmatrix}=
$$

$$
=16i\left(z_1-1\right)^2\left(z_2-1\right)^2\left(z_3-1\right)^2\begin{vmatrix}
\sum\limits_{m=0}^{j}\left(j+1-m\right)\left(z_1^m-1\right) & \sum\limits_{m=0}^{j}\left(j+1-m\right)\left(z_2^m-1\right) & \sum\limits_{m=0}^{j}\left(j+1-m\right)\left(z_3^m-1\right) \\
\sum\limits_{m=0}^{j-1}\left(j-m\right)\left(z_1^m-1\right) & \sum\limits_{m=0}^{j-1}\left(j-m\right)\left(z_2^m-1\right) & \sum\limits_{m=0}^{j-1}\left(j-m\right)\left(z_3^m-1\right) \\
\sum\limits_{m=0}^{j-2}\left(j-1-m\right)\left(z_1^m-1\right) & \sum\limits_{m=0}^{j-2}\left(j-1-m\right)\left(z_2^m-1\right) & \sum\limits_{m=0}^{j-2}\left(j-1-m\right)\left(z_2^m-1\right)
\end{vmatrix}=
$$

$$
=16i\left(z_1-1\right)^3\left(z_2-1\right)^3\left(z_3-1\right)^3\begin{vmatrix}
\sum\limits_{m=1}^{j}\left(j+1-m\right)\sum\limits_{l=0}^{m-1} z_1^l & \sum\limits_{m=1}^{j}\left(j+1-m\right)\sum\limits_{l=0}^{m-1} z_2^l & \sum\limits_{m=1}^{j}\left(j+1-m\right)\sum\limits_{l=0}^{m-1} z_3^l \\
\sum\limits_{m=1}^{j-1}\left(j-m\right)\sum\limits_{l=0}^{m-1} z_1^l & \sum\limits_{m=1}^{j-1}\left(j-m\right)\sum\limits_{l=0}^{m-1} z_2^l & \sum\limits_{m=1}^{j-1}\left(j-m\right)\sum\limits_{l=0}^{m-1} z_3^l \\
\sum\limits_{m=1}^{j-2}\left(j-1-m\right)\sum\limits_{l=0}^{m-1} z_1^l & \sum\limits_{m=1}^{j-2}\left(j-1-m\right)\sum\limits_{l=0}^{m-1} z_2^l & \sum\limits_{m=1}^{j-2}\left(j-1-m\right)\sum\limits_{l=0}^{m-1} z_3^l
\end{vmatrix}=
$$

$$
=16i\left(z_1-1\right)^3\left(z_2-1\right)^3\left(z_3-1\right)^3\,\Omega_j\left(z_1z_2z_3\right).
$$

$$
\Omega_j=\begin{vmatrix}
\sum\limits_{l=0}^{j-1}\frac{\left(j-l+1\right)\left(j-l\right)}{2}z_1^l & \sum\limits_{l=0}^{j-1}\frac{\left(j-l+1\right)\left(j-l\right)}{2}z_2^l & \sum\limits_{l=0}^{j-1}\frac{\left(j-l+1\right)\left(j-l\right)}{2}z_3^l \\
\sum\limits_{l=0}^{j-2}\frac{\left(j-l-1\right)\left(j-l\right)}{2}z_1^l & \sum\limits_{l=0}^{j-2}\frac{\left(j-l-1\right)\left(j-l\right)}{2}z_2^l & \sum\limits_{l=0}^{j-2}\frac{\left(j-l-1\right)\left(j-l\right)}{2}z_3^l \\
\sum\limits_{l=0}^{j-3}\frac{\left(j-l-1\right)\left(j-l-2\right)}{2}z_1^l & \sum\limits_{l=0}^{j-3}\frac{\left(j-l-1\right)\left(j-l-2\right)}{2}z_2^l & \sum\limits_{l=0}^{j-3}\frac{\left(j-l-1\right)\left(j-l-2\right)}{2}z_3^l
\end{vmatrix}=
$$

$$
=\begin{vmatrix}
\sum\limits_{l=0}^{j-1}\left(j-l\right)z_1^l & \sum\limits_{l=0}^{j-1}\left(j-l\right)z_2^l & \sum\limits_{l=0}^{j-1}\left(j-l\right)z_3^l \\
\sum\limits_{l=0}^{j-2}\left(j-l-1\right)z_1^l & \sum\limits_{l=0}^{j-2}\left(j-l-1\right)z_2^l & \sum\limits_{l=0}^{j-2}\left(j-l-1\right)z_3^l \\
\sum\limits_{l=0}^{j-3}\frac{\left(j-l-1\right)\left(j-l-2\right)}{2}z_1^l & \sum\limits_{l=0}^{j-3}\frac{\left(j-l-1\right)\left(j-l-2\right)}{2}z_2^l & \sum\limits_{l=0}^{j-3}\frac{\left(j-l-1\right)\left(j-l-2\right)}{2}z_3^l
\end{vmatrix}=
$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \sum_{l=0}^{j-1} z_1^l & \sum_{l=0}^{j-1} z_2^l & \sum_{l=0}^{j-1} z_3^l \\ \sum_{l=0}^{j-1}(l+1)z_1^l & \sum_{l=0}^{j-1}(l+1)z_2^l & \sum_{l=0}^{j-1}(l+1)z_3^l \\ \sum_{l=0}^{j-1}(l+1)(l+2)z_1^l & \sum_{l=0}^{j-1}(l+1)(l+2)z_2^l & \sum_{l=0}^{j-1}(l+1)(l+2)z_3^l \end{vmatrix}$$

Выполняя преобразования по столбцам, получим:

$$\Delta_l = -8(\sigma_1 - 1)^3(\sigma_2 - 1)^3(\sigma_3 - 1)^3 T_l(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3). \tag{2.4.26}$$

Предположим, что условия (2.4.5) теоремы выполнены. Тогда из (2.4.26) $\Delta_l \neq 0$. В этом случае из системы (2.2.24) однозначно определяем коэффициенты $A_{jl}\,(j = 1,2,3)$ и $A_{ml}\,(m = 1,2,3)$ при $l = 4,5,\ldots$. При $l = 3$ эти коэффициенты также определяются однозначно, поскольку Δ_3 отлично от нуля, так как является обобщенным определителем Вандермонда с различными элементами. Таким образом, получаем, что при условиях (2.0.4) коэффициенты в разложениях (2.4.23) при $l \geq 3$ определяются однозначно. Для $l = 0,1,2$ соответствующие коэффициенты могут быть найдены для произвольных граничных функций, но неоднозначно. Следовательно, в этом случае решение неоднородной задачи (2.4.2),(2.0.4) существует, а решение соответствующей однородной задачи является многочленом порядка не более четырёх. Однако из однородных условий (2.0.3) следует, что ненулевое решение однородной задачи (2.4.2),(2.0.4) необходимо делится на $(1 - z\bar{z})^3$ т.е. является многочленом порядка не менее шести. Поэтому задача (2.4.2),(2.0.4) однозначно разрешима. Первая часть теоремы доказана.

Предположим, что условие (2.4.5) нарушается при некотором q. В этом случае ранг основной матрицы системы (2.4.25) равен четырем, и, следовательно, соответствующая однородная система имеет одно линейно независимое решение A_{jq}, B_{jq}. Для того чтобы соответствующая неоднородная система имела решение, необходимо одно условие ортогональности на граничные функции f_k. Например, если $\sigma_1 = \frac{1}{3}$, $\sigma_2 = \frac{1}{9}$, $\sigma_3 = \frac{1}{204}\left(47 - 3\sqrt{2905}\right)$, то $T_4(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$. В этом случае $(1 - z\bar{z})^3$ будет нетривиальным решением однородной задачи (2.4.2),(2.0.4), а для разрешимости соответствующей неоднородной задачи необходимо одно условие. При этом получившимся решения однородной задачи, соответствующие различным нулевым детерминантам, являются линейно независимыми, так же как и соответствующие условия разрешимости неоднородной задачи. Таким образом, дефектные числа задачи (2.4.2),(2.0.4) равны количеству номеров $q,$ при которых нарушается условие (2.4.5). Теоремы 2.4.2 доказана.

Некоторые численные результаты.

В заключение приведем некоторые численные результаты, иллюстрирующие доказанные теоремы.

Предположим, что условие (2.4.4) нарушается при $l=4$. Тогда, так как

$$S_4\left(\sigma,\tau\right)=2\Big(1+3\left(\sigma+\tau\right)+3\sigma\tau\Big)=0, \qquad (2.4.27)$$

имеем

$$\tau=-\frac{1+3\sigma}{3+3\sigma}.$$

При условии (2.4.27) однородная задача (2.4.2), (2.0.4) имеет нетривиальное решение: многочлен шестой степени $V_6=\left(1-z\overline{z}\right)^3$. Обратно, найдём условие, при котором многочлен шестой степени будет решением однородной задачи (2.4.2), (2.0.4). В силу однородных условий (2.0.3), по теореме 5.1 из [57], искомый многочлен необходимо имеет вид cV_6, где $c-$постоянная. Уравнение (2.4.2) при $\nu_3=0$ имеет вид:

$$(1+3(\sigma+\tau)+3\sigma\tau)\frac{\partial^6 u}{\partial z^3\partial\overline{z}^3}-(\nu_1+\nu_2+\tau+3\mu\nu_1\nu_2)\frac{\partial^6 u}{\partial z^2\partial\overline{z}^4}-\mu(3+3(\sigma+\tau)+\sigma\tau)\frac{\partial^6 u}{\partial z^4\partial\overline{z}^2}+$$

$$+\mu^2(3+\sigma+\tau)\frac{\partial^6 u}{\partial z^5\partial\overline{z}}+\nu_1\nu_2\frac{\partial^6 u}{\partial z\partial\overline{z}^5}-\mu^3\frac{\partial^6 u}{\partial z^6}=0, \qquad (2.4.28)$$

поэтому V_6 является решением уравнения (2.4.28) тогда и только тогда, когда условие (2.4.27) выполнено.

Далее, будем искать такой многочлен седьмой степени $V_7\equiv\left(1-z\overline{z}\right)^3\left(az+b\overline{z}\right),$ который является решением однородной задачи (2.4.2), (2.0.4). После подстановки многочлена V_7 в уравнение (2.4.28) получим $\left(Ea-Fb\right)z+\left(Eb-Ga\right)\overline{z}=0,$ где

$$E=1+3(\sigma+\tau)+3\sigma\tau,\ \ F=\nu_1+\nu_2+\tau+3\mu\nu_1\nu_2,\ \ \ G=\mu(3+3(\sigma+\tau)+\sigma\tau), \qquad (2.4.29)$$

коэффициенты уравнения (2.4.28). Таким образом, многочлен V_7 является решением уравнения (2.4.28) тогда и только тогда, когда коэффициенты многочлена V_7, a и b, являются решением линейной однородной системы уравнений:

$$Ea - Fb = 0, \quad -Ga + Eb = 0 \tag{2.4.30}$$

Эта система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, детерминант этой системы равен нулю, т.е.

$$E^2 - FG = \left(1 + 3(\sigma+\tau) + 3\sigma\tau\right)^2 - (\sigma+\tau+3\sigma\tau)\left(3 + 3(\sigma+\tau) + \sigma\tau\right) = \frac{1}{2} S_5(\sigma,\tau) = 0.$$

Итак, если $S_5(\sigma,\tau) = 0$, то однородная задача (2.4.2), (2.0.4) имеет нетривиальное решение $V_7 \equiv \left(1 - z\overline{z}\right)^3 W_1$, где W_1 – однородный многочлен первой степени. Этот процесс может быть продолжен, то есть, если при некотором $q \geq 4$ имеем $S_q(\sigma,\tau) = 0$, то ненулевым решением однородной задачи (2.4.2), (2.0.4) будет многочлен $V_{q+2} \equiv \left(1 - z\overline{z}\right)^3 W_{q-4}$, где W_{q-4} – однородный многочлен степени $q-4$.

Таким образом, доказанные теоремы позволяют вычислить дефектные числа задачи (2.4.2), (2.0.4). Для этого необходимо определить количество многочленов S_l (или T_l в теореме 2.4.1), которые при заданных σ,τ обращаются в нуль. Мы знаем, что это количество не может быть бесконечным, так как $\Delta_l \neq 0$ при достаточно больших l, однако интересно рассмотреть вопрос, насколько большим может быть это количество. Например, для уравнения вида (2.0.1) четвёртого порядка во всех рассмотренных случаях ([54]) дефектные числа принимают значения ноль (однозначная разрешимость) или единица. Покажем, что в нашем случае дефектные числа могут быть равны двум. Действительно, $S_4(\sigma,\tau) = 0$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (2.4.27). Подставляя τ из (2.4.27) в уравнение $S_5(\sigma,\tau) = 0$, получаем уравнение относительно σ:

$$18\sigma^4 + 33\sigma^3 + 33\sigma^2 + 13\sigma + 0,$$

имеющее корни $\sigma = -0.25 \pm 0.322749i$. Для этих значений σ, определяя τ из (2.4.27), получаем $S_4(\sigma,\tau) = S_5(\sigma,\tau) = 0$, то есть дефектные числа в этом случае не могут быть менее двух. Численные эксперименты, проведенные с помощью пакета программ MATHEMATICA показывают, что при заданных σ, τ S_l может обратиться в нуль не более чем для двух значений $l,$ т.е. дефектные числа задачи (2.4.2), (2.0.4) не могут быть больше двух.

ГЛАВА 3.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Пусть D единичный круг комплексной плоскости и $\Gamma = \partial D$, его граница. Рассмотрим дифференциальное уравнение шестого порядка:

$$\sum_{k=0}^{6} G_k \frac{\partial^6 U}{\partial x^k \partial y^{6-k}}(x, y) = 0 \qquad (x, y) \in D. \tag{3.0.1}$$

Здесь G_k - такие комплексные числа $G_0 \neq 0$, что соответствующее характеристическое уравнение

$$\sum_{k=0}^{6} G_k \lambda^{6-k} = 0 \tag{3.0.2}$$

не имеет действительных корней. В этой главе мы предполагаем, что числа корней с положительной и отрицательной мнимыми частями не совпадают, то есть уравнение (3.0.1) неправильно эллиптическое. Решение уравнения (3.0.1) из класса $C^6(D) \cap C^{(2,\alpha)}(\bar{D})$ на границе Γ удовлетворяет условиям Дирихле:

$$\left. \frac{\partial^j U}{\partial r^j} \right|_{\Gamma} = f_j(\theta), \quad j = 0,1,2; \quad e^{i\theta} \in \Gamma. \tag{3.0.3}$$

Класс функций, которому принадлежат f_j, определим позднее.

Хорошо известно [63], что задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения (3.0.1) с действительными коэффициентами (соответственно, когда числа корней уравнения (3.0.2) с положительными и отрицательными мнимыми частями равны) является фредгольмова, а дефектные числа задачи (3.0.1), (3.0.3) равны. Долгое время считалось, что задача Дирихле для уравнения (3.0.1) с комплексными коэффициентами имеет то же свойство. Но 1948 г. А. В. Бицадзе в своей знаменитой работе [9] показал, что это не так. Он доказал, что однородная задача Дирихле для бианалитического уравнения в единичном круге имеет бесконечное число линейно независимых решений, а для разрешимости соответствующей неоднородной задачи необходимо бесконечное число линейно независимых условий для граничной функции. После этого в работах А. В. Бицадзе и его учеников было показано, что для неправильно эллиптического уравнения все классические краевые задачи (Дирихле, Неймана, Робена и др.) не являются корректно поставленными. Следует упомянуть работы [65], [66] в которых было показано различие между сильно связанными и слабо связанными (терминология А. В. Бицадзе) системами дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для правильной постановки граничных условий. Двумерная теория эллиптического уравнения тесно связана с теорией аналитических функций. Получены условия корректности краевой задачи и формула индекса для областей с гладкой и кусочно-гладкой границей. С функционально аналитической точки зрения условия, обеспечивающие корректность соответствующей краевой задачи, были получены в [15,26]. Эти условия, «некоторые условия дополнительности рассматриваемому оператору» [63] или условие Шапиро-Лопатинского [15], необходимы для правильной постановки краевой задачи. В [67] было показано, что задача Дирихле для сильно связанных эллиптических систем не удовлетворяет условию Лопатинского.

Таким образом, задача Дирихле для неправильно эллиптического уравнения не является корректной краевой задачей. Поэтому исследование такой проблемы связано с трудностями. Например, в [56] было показано, что для разрешимости краевой задачи для полианалитического уравнения необходимы континуум линейно независимых условий. В [68] было показано, что для правильной постановки задачи Дирихле для неправильно эллиптического уравнения второго порядка в единичном круге необходимо модифицировать пространство граничных функций. В этой работе доказано, что если граничная функция имеет аналитическое продолжение внутри круга, а однородная задача имеет только нулевое решение, то соответствующая неоднородная задача однозначно разрешима. В той же работе было доказано, что однородная задача Дирихле имеет или нулевое решение или, при некоторых значениях корней характеристического уравнения, счетное число линейно независимых решений. Эти решения определяются в явном виде. Задача Дирихле для неправильно эллиптического уравнения четвертого порядка была исследована в [55,61,69]. Нетривиальная разрешимость однородной задачи Дирихле для дифференциальных уравнений четного порядка (может быть неэллиптических) рассматривалась в [57].

В первом пункте этой главы рассматриваются следующие неправильно эллиптические уравнения шестого порядка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}-\mu\frac{\partial}{\partial z}\right)^5\left(\frac{\partial}{\partial z}-\nu\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\right)U=0\ ,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}-\mu\frac{\partial}{\partial z}\right)^4\left(\frac{\partial}{\partial z}-\nu\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\right)^2U=0$$

В этих уравнениях мнимая единица не является корнем характеристического уравнения. Для этих уравнений доказано, что граничные функции $F_j\ (j=0,1,2)$ должны принадлежать классу $A^{(2,\alpha)}\left(|\mu|\right)$, чтобы задача была нормально разрешима. При этом в одном случае доказывается однозначная разрешимость задачи, а в другом случае получена новая формула для определения дефектных чисел.

В следующем §3.2 пункте рассматривается следующее неправильно эллиптическое уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial\overline{z}^2}\prod_{k=j}^{4}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}-\mu_j\frac{\partial}{\partial z}\right)u=0,\qquad j=1,2,3,4.$$

В этом случае i является двухкратным корнем характеристического уравнения и для этого случая тоже доказано, что если граничные функции принадлежат классу $F_j\in A^{(2,\alpha)}(|\mu|)$, то задача однозначно разрешима.

Дефектные числа могут принимать значения ноль или единица в зависимости от коэффициентов уравнения.

В §3.3 пункте рассматриваются случаи, когда мнимая единица является корнем характеристического уравнения кратности не менее трёх:

$$\prod_{p=1}^{6}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}-\mu_p\frac{\partial}{\partial z}\right)U=0$$

Получено, что если кратность мнимой единицы больше трёх, то однородная задача имеет бесконечное множество решении. При этом для разрешимости неоднородной задачи необходимо, чтобы граничные функции аналитически продолжались внутр круга и имела место зависимость граничных функций. Условия разрешимости получены в явном виде.

§3.1. Задача Дирихле, когда мнимая единица не является корнем характеристического уравнения

В этом пункте рассмотрим случай, когда характеристическое уравнение имеет два различных корня, не равных $\pm i$. Результаты этого пункта были получены А.О. Бабаяном, но мы их приводим для полнлоты изложения.

Сначала предположим, что $\lambda_j = \lambda_1$ для $j = 1,2,3,4,5$ и $\Im\lambda_1 > 0$, $\Im\lambda_6 < 0$. Тогда, переходя к комплексным переменным, уравнение (3.0.1) можно представить в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} - \mu \frac{\partial}{\partial z}\right)^5 \left(\frac{\partial}{\partial z} - \nu \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) U = 0 \tag{3.1.1}$$

$\mu, \nu -$ постоянные числа такие, что

$$\mu = \frac{i - \lambda_1}{i + \lambda_1}, \ \nu = \frac{i + \lambda_6}{i - \lambda_6}$$

из условий на корни λ_1, λ_6 следует, что эти числа удовлетворяют неравенствам $0 < |\mu| < 1, \quad 0 < |\nu| < 1.$ Граничные условия (3.0.3) заменим эквивалентными условиями

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \overline{z}^{2-k} \partial z^k}\right|_\Gamma = F_k(\theta) \quad k = 0,1,2, \quad z = e^{i\theta} \in \Gamma; \tag{3.1.2}$$

$$u(1,0) = f_0(1), \quad u_r(1,0) = f_1(1), \quad u_\theta(1,0) = f_0'(1)$$

где $\dfrac{\partial}{\partial \theta} -$ производная по аргументу комплексного числа ($z = re^{i\theta}$). Здесь $F_k \in C^{(\alpha)}(\Gamma)$ однозначно определяются граничными функциями f_k.

Теперь введем функциональный класс, необходимый для дальнейшего:

Определение 3.1.1. Пусть $\rho \in (0,1)$ заданное число. Обозначим $A^{(m,\alpha)}(\rho)$ класс функций, аналитических в кольце $\rho < |z| < 1$ и непрерывных по Гельдеру вплоть до границы с производными до $m-$го порядка включительно.

Сформулируем полученный результат.

Теорема 3.1.1. Рассмотрим краевую задачу Дирихле (3.1.1), (3.1.2). Если граничные функции F_j $(j=0,1,2)$ принадлежат классу $A^{(2,\alpha)}\left(|\mu|\right)$, то задача (3.1.1), (3.1.2) имеет решение, и это решение единственное.

Предположим, что $\lambda_j=\lambda_1$ для $j=1,2,3,4$ и $\lambda_5=\lambda_6$, $\Im\lambda_1>0,\ \Im\lambda_6<0.$ Тогда уравнение (3.0.1) приводится к виду:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}-\mu\frac{\partial}{\partial z}\right)^4\left(\frac{\partial}{\partial z}-\nu\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\right)^2 U=0 \tag{3.1.3}$$

Здесь μ и ν такие же, как в (3.1.1). Получена следующая теорема.

Теорема 3.1.2. Обозначим $\sigma=\mu\nu.$ Если граничные функции F_j $(j=0,1,2)$ принадлежат классу $A^{(2,\alpha)}\left(|\mu|\right)$ тогда задача (3.1.3), (3.1.2) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$\Omega_l\left(\sigma\right)=\sum_{j=0}^{l-2}\left(j+1\right)\left(j+2\right)\sigma^j S_{l,j}\neq 0\ \ l=4,5,... \tag{3.1.4}$$

Здесь $S_{l,j}$ – матрица

$$S_{l,j}=\begin{pmatrix}1 & l-j-2\\ l-j-1 & 0.5(l-j-1)(l-j-2)\end{pmatrix}. \tag{3.1.5}$$

Если при некотором q условие (3.1.4) нарушается, то однородная задача (3.1.3),(3.1.2) имеет линейно независимое решение, которое является многочленом порядка $q+2,$ и неоднородная задача имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется одно линейно независимое условие для граничных функций. Таким образом, дефектные числа задачи (3.0.1),(3.0.3) равны количеству номеров q при которых нарушается условие (3.1.4), то есть $\Omega_l(\sigma)=0.$

Доказательство теоремы 3.1.1.

Рассмотрим задачу (3.1.1), (3.1.2). Общее решение уравнения (3.1.4) можно представить в виде ([55]):

$$U\left(x,y\right)=\sum_{k=0}^{4}\frac{\partial^k}{\partial\theta^k}\Phi_k(z+\mu\,\overline{z})+\Psi(\overline{z}+\nu z),\quad z=x+iy=re^{i\theta}\in D. \tag{3.1.6}$$

где функции Φ_k и Ψ аналитичны в областях $D_1(\mu)=\{z+\mu\bar{z} | z\in D\}$ и $D_2(\nu)=\{\bar{z}+\nu z | z\in D\}$ соответственно. Подставим это решение в граничные условия (3.1.2):

$$\sum_{k=0}^{4}\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}^{2-j}\partial z^j}\frac{\partial^k}{\partial\theta^k}\Phi_k(z+\mu\,\bar{z})+\nu^j\Psi''(\bar{z}+\nu z)=F_j(\theta),\quad z=e^{i\theta}\in\Gamma,\quad j=0,1,2.$$

Используя (1.0.10), последнее уравнение может быть приведено к виду:

$$\sum_{k=0}^{4}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+i(2j-2)I\right)^k\mu^{2-j}\Phi_k''(z+\mu\,\bar{z})+\nu^j\Psi''(\bar{z}+\nu z)=F_j(\theta),\quad z=e^{i\theta}\in\Gamma,\quad j=0,1,2. \qquad (3.1.7)$$

Теперь мы должны использовать представления аналитических в $D_1(\mu)$ и $D_2(\nu)$ функций $\Phi(z+\mu\,\bar{z})$ и $\Psi(\bar{z}+\nu\, z)$ в окрестности границы аналитическими функциями в D. Если μ и ν - комплексные числа, такие что $|\mu|<1$ и $|\nu|<1$, тогда для $|z|=1$ имеем

$$\Phi(z+\mu\,\bar{z})=\omega(z)+\omega(\mu\,\bar{z}),\ \ \Psi(\bar{z}+\nu\, z)=\chi(z)+\chi(\nu\, z), \qquad (3.1.8)$$

где функции ω и χ аналитичны в единичном круге D. Применяя формулы (3.1.8) к граничным функциям $\Phi_k''(z+\mu\,\bar{z})$ и $\Psi_k''(\bar{z}+\nu\, z)$, получим

$$\Phi_k''(z+\mu\,\bar{z})=\varphi_k(z)+\varphi_k(\mu\bar{z})=\sum_{l=0}^{\infty}A_{kl}z^k+\sum_{l=0}^{\infty}A_{kl}\mu^k\bar{z}^k,\ \ z=e^{i\theta},$$

$$\Psi''(\bar{z}+\nu z)=\psi(\bar{z})+\psi(\nu z)=\sum_{l=0}^{\infty}B_l\bar{z}^k+\sum_{l=0}^{\infty}B_l\nu^k z^k,\ \ z=e^{i\theta}. \qquad (3.1.9)$$

Здесь аналитические в круге функции φ_3 и ψ_j представлены в виде соответствующих рядов Тейлора. Используем также разложения граничных функции F_j (2.1.4) и для определения коэффициентов Тейлора A_{jk} и B_{jk}, подставим разложения (3.1.9) и (2.1.4) в граничные условия (2.0.4) получим:

$$\sum_{k=0}^{4}\mu^{2-j}\sum_{l=0}^{\infty}\Big(A_{kl}\left(il+i(2j-2)\right)^k z^l+A_{kl}\mu^l\left(-il+i(2j-2)\right)^k\bar{z}^l\Big)+$$
$$+\nu^j\sum_{l=0}^{\infty}\left(B_l\bar{z}^l+B_l\nu^l z^l\right)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}d_{lj}z^l$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях z и $\bar{z}$ при $l\ge 1$ получаем систему из шести линейных уравнений для определения шести неизвестных коэффициентов A_{kl} и B_l:

$$\mu^{2-j}\sum_{k=0}^{4} i^k \left(l+2j-2\right)^k A_{kl} + \nu^{j+l} B_l = d_{lj},$$
$$\sum_{k=0}^{4} i^k \left(-l+2j-2\right)^k \mu^{l+2-j} A_{kl} + \nu^{j} B_l = -d_{lj}, \quad j = 2,1,0 \tag{3.1.10}$$

Коэффициенты A_{0l} и B_0 определяются из следующей системы

$$\mu^{2-j}\sum_{k=0}^{4} i^k \left(2j-2\right)^k A_{k0} + \nu^{j} B_0 = 0.5 d_{0j}, \quad j = 2,1,0 \tag{3.1.11}$$

Рассмотрим детерминант основной матрицы системы (3.1.10):

$$\Delta_l = \det\begin{pmatrix} 1 & i(l+2) & -(l+2)^2 & -i(l+2)^3 & (l+2)^4 & \nu^{l+2} \\ \mu & il\mu & -l^2\mu & -l^3\mu & l^4\mu & \nu^{l+1} \\ \mu^2 & i(l-2)\mu^2 & -(l-2)^2\mu^2 & -i(l-2)^3\mu^2 & (l-2)^4\mu^2 & \nu^l \\ \mu^l & -i(l-2)\mu^l & -(l-2)^2\mu^l & i(l-2)^3\mu^l & (l-2)^4\mu^l & \nu^2 \\ \mu^{l+1} & -il\mu^{l+1} & -l^2\mu^{l+1} & il^3\mu^{l+1} & l^4\mu^{l+1} & \nu \\ \mu^{l+2} & -i(l+2)\mu^{l+2} & -(l+2)^2\mu^{l+2} & i(l+2)^3\mu^{l+2} & (l+2)^4\mu^{l+2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Вынося из каждой строки соответствующие степени μ (такие, что в первом столбце определителя будут только единицы), из второго и четвертого столбцов i, из третьего и четвертого столбцов -1 и умножая последний столбец на μ^{l+2}, преобразуем этот определитель. Получим (обозначая $\sigma = \mu\nu$)

$$\Delta_l = -\mu^{2l+4}\begin{vmatrix} 1 & l+2 & \left(l+2\right)^2 & \left(l+2\right)^3 & \left(l+2\right)^4 & \sigma^{l+2} \\ 1 & l & l^2 & l^3 & l^4 & \sigma^{l+1} \\ 1 & l-2 & \left(l-2\right)^2 & \left(l-2\right)^3 & \left(l-2\right)^4 & \sigma l \\ 1 & -\left(l-2\right) & \left(l-2\right)^2 & -\left(l-2\right)^3 & \left(l-2\right)^4 & \sigma^2 \\ 1 & -l & l^2 & -l^3 & l^4 & \sigma \\ 1 & -\left(l+2\right) & \left(l+2\right)^3 & -\left(l+2\right)^3 & \left(l+2\right)^4 & 1 \end{vmatrix}. \tag{3.1.12}$$

Вычитая третью строку из четвертой, вторую строку из пятой, первую из шестой и вычисляя полученный определитель, мы представляем Δ_l как произведение двух определителей третьего порядка:

$$\Delta_l = -4\mu^{2l+4}\begin{vmatrix} 1 & (l+2)^2 & (l+2)^4 \\ 1 & l^2 & l^4 \\ 1 & (l-2)^2 & (l-2)^4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} l-2 & (l-2)^3 & \sigma^2-\sigma^l \\ l & l^3 & \sigma-\sigma^{l+1} \\ l+2 & (l+2)^3 & 1-\sigma^{l+2} \end{vmatrix}.$$

Наконец, мы получаем

$$\Delta_l = 2048(l-2)(l-1)l^2(l+1)(l+2)\mu^{2l+4}Q_l(\sigma), \tag{3.1.13}$$

где

$$Q_l(\sigma) = \left(\sigma^2 - \sigma^l\right)\frac{l+1}{l-2} - 2\left(\sigma - \sigma^{l+1}\right) + \left(1 - \sigma^{l+2}\right)\frac{l-1}{l+2}. \tag{3.1.14}$$

Формула (3.1.4) показывает, что $\Delta_l \neq 0$ и, следовательно, система (3.1.2) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда $Q_l(\sigma) \neq 0$. Рассмотрим эту функцию для $l \geq 3$ на окружности Γ. Имеем

$$Q_l(\sigma) = -2i\sigma^{\frac{l+2}{2}}\left(\frac{l+1}{l-2}\sin(l-2)\tau - 2\sin l\tau + \frac{l-1}{l+2}\sin(l+2)\tau\right),\ \sigma = e^{2i\tau}. \tag{3.1.15}$$

Таким образом, нули функции Q_l на Γ совпадают с нулями функции

$$\Lambda(\tau) = \frac{l+1}{l-2}\sin(l-2)\tau - 2\sin l\tau + \frac{l-1}{l+2}\sin(l+2)\tau,\ \tau \in [0,\pi].$$

Простой расчет показывает, что $\Lambda^{(m)}(0) = 0$ для $m = \overline{0,4}$, следовательно, ноль является корнем функции Λ кратности пять. Вычислим значения этой функции в точках $\tau_k = \dfrac{\pi k}{l}$ для $k = \overline{1,l-1}$. Имеем $\Lambda(\tau_k) = (-1)^{k+1}\dfrac{6l}{l^2-4}\sin\dfrac{2\pi k}{l}$. Если $l = 2p$ чётно, то функция Λ меняет знак в точках τ_k для $k = 1,\dots,p-1$ и для $k = p+1,\dots,l-1$, следовательно, имеет не менее $2(p-2) = l-4$ корней на интервале $(0,\pi)$. Учитывая, что $\Lambda(\tau_k) = 0$ и ноль является 5-кратным корнем Λ, получаем, что эта функция имеет $l+2$ корней на Γ. Таким же образом, если $l = 2p+1$ нечетно, мы видим, что $\Lambda(\tau_k)$ меняет знак для $k = \overline{1,p}$ и для $k = \overline{p+1,l-1}$, следовательно, функция Λ имеет $2p-2 = l-3$ корней на интервале $(0,\pi)$ и, следовательно, Λ имеет $l+2$ корней на Γ. Таким образом, из (3.1.15) мы имеем, что многочлен Q_l имеет $l+2$ корня на Γ, и, следовательно, для $l \geq 3$ мы получаем, что $Q_l(\sigma) \neq 0$ для всех $\sigma \in D$.

Рассмотрим однородную задачу (3.1.1), (3.1.2). Решение этой задачи строится с использованием коэффициентов A_{kl} и B_l, которые определяются из однородных систем (3.1.10), (3.1.11). Как было показано ранее $\Delta_l \neq 0$ для всех $l \geq 3$, следовательно, все коэффициенты A_{kl} и B_l равны нулю. Для $l = 1,2$ $\Delta_l = 0$, следовательно, A_{kl} и B_l могут отличаться от нуля в этом случае. Коэффициенты A_{0l} и B_0 определяются из системы (3.1.11) также неоднозначно. Таким образом, ненулевое решение однородной задачи (3.1.1), (3.1.2) может быть многочленом порядка не более четырех. Но произвольный ненулевой многочлен, удовлетворяющий однородным условиям (3.0.3) на Г, делится на $(1-z\overline{z})^3$ и, следовательно, имеет порядок не ниже шести. Таким образом, однородная задача (3.1.1), (3.1.2) имеет только тривиальное решение.

Перейдём к неоднородной задаче (3.1.1), (3.1.2). Рассмотрим неоднородную систему (3.1.10), (3.1.11). Учитывая, что $\Delta_l \neq 0$ для $l \geq 3$, мы видим, что в этом случае коэффициенты A_{kl} и B_l определяются однозначно. Система (3.1.11) разрешима для произвольной правой части, поэтому A_{0l} и B_0 могут быть найдены также (неоднозначно). В системе (3.1.10) для $l=1$ левые части третьего и пятого уравнений одинаковы, а для $l=2$ правые части третьего и четвертого уравнения совпадает. Правые части этих уравнений также совпадают, так как из соотношений (2.0.5) следуют равенства $d_{10}=d_{-11}$ и $d_{20}=d_{-22}$. Подводя итог, можно сказать, что все коэффициенты могут быть определены из систем (3.1.10) и (3.1.11), поэтому неоднородная задача (3.1.1), (3.1.2) имеет решение.

Теперь мы должны показать, что это решение принадлежит классу $C^{(2,\alpha)}\left(D\cup\Gamma\right)$ если граничные функции из класса $A^{(2,\alpha)}\left(|\mu_1|\right)$. Решая полученную систему (3.1.10), получаем следующие асимптотические оценки для решения:

$$B_l \approx E\mu^{-l-2} + \frac{3\mu^{-l-2}}{(1-\sigma)^2 l}\left(d_{-l2}\mu^2 - d_{-l0} + (1-\sigma)E\right), \quad A_{0l} \approx -\frac{3E_1 l}{\mu^{l+2}},$$

$$A_{1l} \approx iE_2 l\mu^{-l-2}, \quad A_{2l} \approx -\frac{2E_1}{l\mu^{l+2}}, \quad A_{3l} \approx -i\frac{E_2}{l^2\mu^{l+2}}, \quad A_{4l} \approx \frac{E_1}{l^3\mu^{l+2}}, \tag{3.1.16}$$

где E, E_1, E_2 определяются из равенств:

$$E = \frac{d_{-l0} - 2d_{-l1}\mu + d_{-l2}\mu^2}{(1-\sigma)^2}, \quad E_1 = \frac{d_{-l2}\mu^2 - d_{-l0}}{32} + \frac{(\sigma^2 - 3\sigma + 2)E}{64}$$

$$E_2 = \frac{d_{-l2}\mu^2 - d_{-l0}}{16} + \frac{(1-\sigma)E}{16}. \tag{3.1.17}$$

Теперь воспользуемся оценками, которые показывают связь между скоростью роста коэффициентов Фурье функции и скоростью гладкости соответствующих рядов. Если граничные функции F_j принадлежат классу $A^{(2,\alpha)}\left(|\mu|\right)$, то (3.1.16), (3.1.17) означают, что

$$A_{ml} \approx l^{-m-1}\gamma_l\mu^{-l-2}, \quad m=0,1,2,3,4; \; B_l \approx l^{-2}\gamma_l\mu^{-l-2},$$

где γ_l - коэффициенты Фурье функции непрерывной по Гёльдеру. Из этих соотношений следует (см. [69], стр. 210), что все компоненты решения принадлежат классу $C^{(2,\alpha)}\left(\bar{D}\right)$. Таким образом, неоднородная задача (3.1.1), (3.1.2) имеет решение в классе $C^{(2,\alpha)}\left(\bar{D}\right)$, и это решение единственно. Теорема 3.1.1 доказана.

Замечание 3.1.1. Следует отметить, что условия $F_j \in A^{(2,\alpha)}\left(|\mu|\right)$, достаточные для разрешимости неоднородной задачи (3.1.1), (3.1.2), в некотором отношении не очень далеки от необходимых. Предположим, что A_{mk} - коэффициенты Фурье функции, непрерывной по Гёльдеру. Применяя оценку Лоренца для коэффициентов Фурье функции непрерывной по Гёльдеру (см. [69], стр. 210), получим:

$$\left(\sum_{l=n}^{\infty}\left|A_{ml}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{C}{n^{\alpha+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}}, \quad \alpha > \frac{1}{p}-\frac{1}{2}, \quad 0 < p \le 2.$$

Рассмотрим граничную функцию $F_0 = \sum_{l=1}^{\infty} l^{-1-x} z^{-l}\mu^l$, где x - некоторое положительное число. Для этой функции (предполагая, что $F_1 = F_2 = 0$), вычисляя A_{0l} и применяя (3.1.16), (3.1.17), мы получаем, что $x > \alpha + 0.5$. Таким образом, для $\alpha > 0.5$ мы получаем, что функция должна принадлежать классу $A^{(2,\beta)}\left(|\mu|\right)$ для $\beta > 0$.

Замечание 3.1.2. Мы видим, что, что класс $A^{(2,\beta)}\left(\rho\right)$ естественный класс для задачи Дирихле для неправильного уравнения шестого порядка. Мы можем сравнить эти результаты с результатами, полученными А.В. Бицадзе в [14]. Получено, что для разрешимости неоднородной задачи Дирихле для бианалитического уравнения граничная функция должна быть аналитической в $\left\{z : 0 < |z| < 1\right\}$. В работе [6] было показано, что для неправильно эллиптического уравнения второго порядка соответствующий класс равен

$A^{(0,\alpha)}(\rho)\equiv A^{(\alpha)}(\rho)$. Для уравнения четвертого порядка был использован класс граничных функций $A^{(1,\alpha)}(\rho)$. Таким образом, можно предположить, что аналогичные результаты могут быть верны для неправильно эллиптического уравнения произвольного порядка.

Доказательство теоремы 3.1.2.

Рассмотрим задачу (3.1.3), (3.1.2). В этом случае рассуждения аналогичны доказательству теоремы 3.1.1, поэтому мы отметим основные этапы доказательства, опуская некоторые детали. Сначала представим общее решение уравнения (3.1.3) в виде ([55]):

$$U(x,y)=\sum_{k=0}^{3}\frac{\partial^k}{\partial\theta^k}\Phi_k(z+\mu\overline{z})+\sum_{k=0}^{1}\frac{\partial^k}{\partial\theta^k}\Psi_k(\overline{z}+\nu_k z),\ \ z=x+iy=re^{i\theta}\in D. \tag{3.1.18}$$

где Φ_k и Ψ_k - аналитические функции в областях $D(\mu)=\{z+\mu\overline{z}\,|\,z\in D\}$ и $D(\nu)=\{\overline{z}+\nu z\,|\,z\in D\}$ соответственно, которые необходимо определить. Подставим это решение в граничные условия (3.1.2), и меняя порядок действия операторов $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial\overline{z}}$ и оператора $\frac{\partial}{\partial\theta}$, мы получаем

$$\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+i(2j-2)I\right)^k\mu^{2-j}\Phi_k''(z+\mu\overline{z})+$$

$$+\sum_{k=0}^{1}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+i(2j-2)I\right)^k\nu^j\Psi_k''(\overline{z}+\nu z)=F_j(\theta),\ \ j=0,1,2. \tag{3.1.19}$$

Теперь представим аналитические в $D(\mu)$ и $D(\nu)$ функции $\Phi_k''(z+\mu\overline{z})$ и $\Psi_k''(\overline{z}+\nu z)$ на границе Γ в виде:

$$\Phi_k''(z+\mu\overline{z})=\varphi_k(z)+\varphi_k(\mu\overline{z})\sum_{l=0}^{\infty}A_{kl}z^k+\sum_{l=0}^{\infty}A_{kl}\mu^k z^{-k},\ \ z=e^{i\theta},$$

$$\Psi_k''(\overline{z}+\nu z)=\psi_k(\overline{z})+\psi_k(\nu z)=\sum_{l=0}^{\infty}B_{kl}z^{-k}+\sum_{l=0}^{\infty}B_{kl}\nu^k z^k\quad z=e^{i\theta}. \tag{3.1.20}$$

Подставляя эти разложения и разложения функций F_j в ряд Фурье в равенстве (3.1.18)

$$F_j(\theta)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}d_{lj}z^l,\quad z=e^{i\theta},\qquad j=0,1,2\quad ,$$

получим

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left(\left(\mu^2\sum_{l=0}^{\infty}\left(il-2i\right)^k A_{kl}+\nu^l\sum_{k=0}^{1}\left(il-2i\right)^k B_{kl}\right)z^l+\left(\mu^{l+2}\sum_{k=0}^{3}\left(-il-2i\right)^k A_{kl}+\sum_{k=0}^{1}\left(-il-2i\right)^k B_{kl}\right)z^{-l}\right)=$$
$$=\sum_{l=-\infty}^{\infty}d_{l0}z^l$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left(\left(\mu\sum_{l=0}^{\infty}\left(il-i\right)^k A_{kl}+\nu^{l+1}\sum_{k=0}^{1}\left(il-i\right)^k B_{kl}\right)z^l+\left(\mu^{l+1}\sum_{k=0}^{3}\left(-il-i\right)^k A_{kl}+\nu\sum_{k=0}^{1}\left(-il-i\right)^k B_{kl}\right)z^{-l}\right)=$$
$$=\sum_{l=-\infty}^{\infty}d_{l1}z^l$$

$$\begin{gathered}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\left(\sum_{l=0}^{\infty}\left(il+2i\right)^k A_{kl}+\nu^{l+2}\sum_{k=0}^{1}\left(il+2i\right)^k B_{kl}\right)z^l+\right.\\ \left.+\left(\mu^l\sum_{k=0}^{3}\left(-il+2i\right)^k A_{kl}+\nu^2\sum_{k=0}^{1}\left(-il+2i\right)^k B_{kl}\right)z^{-l}\right)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}d_{l2}z^l\end{gathered}\tag{3.1.21}$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях z и $\overline{z}$. Получим системы для определения неизвестных A_{kl} и B_{kl}. При $k\geq 1$ получаем систему шести уравнений относительно неизвестных A_{kl} и B_{kl}:

$$\begin{aligned}&\mu^2\sum_{k=0}^{3}i^k\left(l-2\right)^k A_{kl}+\nu^l\sum_{k=0}^{1}i^k\left(l-2\right)^k B_l=d_{l0}, && \mu^{l+2}\sum_{k=0}^{3}i^k\left(-l-2\right)^k A_{kl}+\sum_{k=0}^{1}i^k\left(-l-2\right)^k B_{kl}=d_{-l0},\\ &\mu\sum_{k=0}^{3}i^k l^k A_{kl}+\nu^{l+1}\sum_{k=0}^{1}i^k l^k B_l=d_{l1}, && \mu^{l+1}\sum_{k=0}^{3}i^k\left(-l\right)^k A_{kl}+\nu\sum_{k=0}^{1}i^k\left(-l\right)^k B_{kl}=d_{-l1},\\ &\sum_{k=0}^{3}i^k\left(l+2\right)^k A_{kl}+\nu^{l+2}\sum_{k=0}^{1}i^k\left(l+2\right)^k B_l=d_{l2}, && \mu^l\sum_{k=0}^{3}i^k\left(-l+2\right)^k A_{kl}+\nu^2\sum_{k=0}^{1}i^k\left(-l+2\right)^k B_{kl}=d_{-l2}.\end{aligned}\tag{3.1.22}$$

Коэффициенты A_{k0} и B_0 определяются из следующей системы

$$\begin{aligned}&\mu^2\sum_{k=0}^{3}i^k\left(-2\right)^k A_{k0}+\sum_{k=0}^{1}i^k\left(-2\right)^k B_0=0.5d_{00},\\ &\mu\sum_{k=0}^{3}i^k A_{k0}+\nu\sum_{k=0}^{1}i^k B_0=0.5d_{01},\\ &\sum_{k=0}^{3}i^k 2^k A_{k0}+\nu^2\sum_{k=0}^{1}i^k 2^k B_0=0.5d_{02}\end{aligned}\tag{3.1.23}$$

Рассмотрим детерминант основной матрицы системы (3.1.22):

$$\Delta_l = \det\begin{pmatrix} 1 & i(l+2) & -(l+2)^2 & -i(l+2)^3 & \nu^{l+2} & i(l+2)\nu^{l+2} \\ \mu & il\mu & -l^2\mu & -l^3\mu & \nu^{l+1} & il\nu^{l+1} \\ \mu^2 & i(l-2)\mu^2 & -(l-2)^2\mu^2 & -i(l-2)^3\mu^2 & \nu^l & i(l-2)\nu^l \\ \mu^l & -i(l-2)\mu^l & -(l-2)^2\mu^l & i(l-2)^3\mu^l & \nu^2 & -i(l-2)\nu^2 \\ \mu^{l+1} & -il\mu^{l+1} & -l^2\mu^{l+1} & il^3\mu^{l+1} & \nu & -il\nu \\ \mu^{l+2} & -i(l+2)\mu^{l+2} & -(l+2)^2\mu^{l+2} & i(l+2)^3\mu^{l+2} & 1 & -i(l+2) \end{pmatrix}.$$

Вынося из каждой строки соответствующие степени μ (так, чтобы в первом столбце определителя остались единицы), из второго, четвертого и шестого столбцов i, из третьего и четвертого столбцов -1 и умножив пятый и шестой столбцы на μ^{l+2}, преобразуем этот определитель. Получим (обозначая $\sigma = \mu\nu$).

$$\Delta_l = -\mu^{l+2}\begin{vmatrix} 1 & l+2 & (l+2)^2 & (l+2)^3 & \sigma^{l+2} & (l+2)\sigma^{l+2} \\ 1 & l & l^2 & l^3 & \sigma^{l+1} & l\sigma^{l+1} \\ 1 & l-2 & (l-2)^2 & (l-2)^3 & \sigma^l & (l-2)\sigma^l \\ 1 & -(l-2) & (l-2)^2 & -(l-2)^3 & \sigma^2 & -(l-2)\sigma^2 \\ 1 & -l & l^2 & -l^3 & \sigma & -l\sigma \\ 1 & -(l+2) & (l+2)^2 & -(l+2)^3 & 1 & -(l-2) \end{vmatrix}, \qquad (3.1.24)$$

Преобразуя Δ_l по столбцу, мы уменьшаем его до определителя третьего порядка:

$$\Delta_l = -256\mu^{l+2}\sigma(1-\sigma)^3\begin{vmatrix} l(l+1)(l+2) & \sum_l & S_l \\ (l-1)(l+1) & \sum_{l-1} & S_{l-1} \\ (l-2)(l-1)l & \sum_{l-2} & S_{l-2} \end{vmatrix},$$

где $\sum_m (m+1-k)(\sigma^k-1), \quad S_m = \sum_{k=1}^{m}(k+1)(\sigma^k-1)$.

После этого мы приведем определитель к форме:

$$\Delta_l = -256\mu^{l+2}\sigma(1-\sigma)^7\begin{vmatrix} \Theta_l & \Upsilon_l \\ \Theta_{l-1} & \Upsilon_{l-1} \end{vmatrix},$$

где $\Theta_l(\sigma) = \sum_{k=0}^{l-2}(1-k-1)(l-k)(k+1)\sigma^k, \quad \Upsilon_l(\sigma) = \sum_{k=0}^{l-2}(1-k-1)(k+1)(k+2)\sigma^k.$

Учитывая равенство $\Theta_l(1) = \Upsilon_l(1)$, получаем

$$\Delta_l = 128il\mu^{l+2}\sigma(1-\sigma)^8\,\Omega_l(\sigma), \qquad (3.1.25)$$

где Ω_l определено в (3.1.4). Формула (3.1.25) показывает, что $\Delta_l \neq 0$ и, следовательно, система (3.1.22) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда $\Omega_l(\sigma) \neq 0$.

Сначала предположим, что выполнены условия (3.1.4). Рассмотрим однородную задачу (3.1.3), (3.1.2). Решение этой задачи построено по коэффициентам A_{kl} и B_{kl}, которые определяются из однородных систем (3.1.22), (3.1.23). Затем из системы (3.1.22) получаем, что $A_{kl} = 0$ и $B_{kl} = 0$ для $l > 3$. Коэффициенты A_{k3} и B_{k3} также равны нулю, так как Δ_3 является обобщённым определителем Вандермонда с различними членами и, следовательно, не равен нулю. После этого, используя соображения, аналогичные приведённым в предыдущем разделе, заключаем, что однородная задача (3.1.3), (3.1.2) имеет только тривиальное решение. Рассматривая неоднородную задачу, аналогично разделу 2, доказываем, что задача (3.1.3), (3.1.2) имеет единственное решение, если граничные функции F_j принадлежат классу $A^{(2,\alpha)}\left(|\mu|\right)$.

Теперь предположим, что условия (3.1.4) не выполняются. Это означает, что для некоторого l имеем $\Delta_l = 0$. Используя (3.1.24), можно получить следующую асимптотическую формулу:

$$\Delta_l \approx 2i\mu^{l+2}\sigma\left(1-\sigma\right)^2 l(l+1)(l+2), \tag{3.1.26}$$

из которой видно, что условия (3.1.4) могут нарушаться только для конечного количества чисел l. Предположим, что для некоторого $p \geq 4$ $\Omega_p = 0$, следовательно, $\Delta_p = 0$. Тогда однородная система (3.1.22) при $l = p$ имеет одно линейно независимое решение A_{kp} и B_{kp} поскольку ранг главной матрицы этой системы равен пяти. Получив другие коэффициенты A_{kl} и B_{kl} для $l \neq p$, равные нулю, и подставив эти коэффициенты в формулы (3.1.20), определим линейно независимое решение однородной задачи (3.1.3), (3.1.2), которое является полиномом порядка $p+2$. Например, если $\Omega_4(\sigma) = 0$, то функция $\left(1-z\bar{z}\right)^3$ является нетривиальным решением однородной задачи (3.1.3), (3.1.2). Рассмотрим неоднородную задачу (3.1.3), (3.1.2). Учитывая, что $\Delta_p = 0$, мы видим, что нетривиальная линейная комбинация левых частей уравнений в системе (3.1.22) равна нулю, следовательно, такая же комбинация правых частей (коэффициентов Фурье d_{pj} и d_{-pj}) должна быть также равна нулю. Это линейно независимое условие на граничные функции F_j, необходимое для разрешимости неоднородной задачи (3.1.3), (3.1.2). Таким образом, мы получаем, что если условия (3.1.4) не выполняются для $l = p_s \ (s = 1,...M)$, то однородная задача (3.1.3), (3.1.2) имеет M линейно независимых решений (многочлены порядка $p_s + 2 \ (s = 1,...M)$) и для разрешимости неоднородной задачи (3.1.3), (3.1.2) необходимо M линейно независимых условий на граничные функции $F_j \ (j = 0,1,2)$. Если граничные функции F_j принадлежат классу $A^{(2,\alpha)}\left(|\mu|\right)$, то учитывая асимптотические оценки коэффициентов A_{kp} и B_{kp}, получаем, что эти условия достаточны для разрешимости неоднородной задачи (3.1.3), (3.1.2). Теорема 3.1.2 доказана.

Некоторые численные результаты.

Теперь проиллюстрируем полученные результаты, а именно теорему 3.1.2. Сначала представим уравнение (3.1.3) в виде:

$$\left(\nu^2 \frac{\partial^6}{\partial \overline{z}^6} - 2\nu E \frac{\partial^6}{\partial \overline{z}^5 \partial z} + F \frac{\partial^6}{\partial \overline{z}^4 \partial z^2} - 4\mu G \frac{\partial^6}{\partial \overline{z}^3 \partial z^3} + \mu^2 H \frac{\partial^6}{\partial \overline{z}^2 \partial z^4} - 2\mu^3 J \frac{\partial^6}{\partial \overline{z} \partial z^5} + \mu^4 \frac{\partial^6}{\partial z^6}\right) U = 0. \quad (3.1.27)$$

где $E = 1 + 2\sigma, \quad F = 1 + 8\sigma + 6\sigma^2, \quad G = 1 + 3\sigma + \sigma^2,$

$$H = 6 + 8\sigma + \sigma^2, \quad J = 2 + \sigma.$$

Рассмотрим однородную задачу (3.1.3), (3.1.2). Мы хотим определить полиномиальные решения этой задачи. Как упоминалось ранее, произвольное полиномиальное решение этой задачи должно делиться на $\left(1 - z\overline{z}\right)^3$. Предположим, что ненулевой многочлен шестого порядка является решением однородной задачи (3.1.3), (3.1.2). Тогда это решение имеет вид $P_6 = c\left(1 - z\overline{z}\right)^3$, где c - ненулевое постоянное. Подставляя эту функцию в уравнение (3.1.27), получим

$$-144\mu Gc \equiv -144\mu\left(1 + 3\sigma + \sigma^2\right)c = 12\mu\Omega_4\left(\sigma\right)c = 0.$$

Это равенство показывает, что ненулевой многочлен P_6 является решением однородной задачи (3.1.3), (3.1.2) тогда и только тогда, когда $\Omega_4\left(\sigma\right) = 0$ ($\Omega_4\left(\sigma\right)$ определено в (3.1.4)).

Таким же образом, если предположить, что ненулевой многочлен порядки семь является решением однородной задачи (3.1.3), (3.1.2), то этот многочлен имеет вид $P_7 = c\left(1 - z\bar{z}\right)^3\left(c + \gamma z + \beta\bar{z}\right)$, где c, β, γ постоянные, которые следует определить. Подставим эту функцию в (3.1.32) и получим три уравнения для определения трех неизвестных констант c, β, γ:

$$-144\mu G c = 0, \quad F\beta - 4\mu G\gamma = 0, \quad -4\mu G\beta + \mu^2 H\gamma = 0. \tag{3.1.28}$$

Решая эту систему, получаем, что если $G = 0$, то $c \neq 0$, $\beta = \gamma = 0$, то есть нетривиальное решение однородной задачи (3.1.3), (3.1.2), является полиномом шестого порядка. Если $G \neq 0$, то $c = 0$, и из двух последних уравнений системы (3.1.27) определим β, γ. Эти константы будут отличаться от нуля тогда и только тогда, когда выполнено равенство $FH - 16G^2 = 0$. Простой расчет показывает, что

$$FH - 16G^2 \equiv \left(1 + 8\sigma + 6\sigma^2\right)\left(6 + 8\sigma + \sigma^2\right) - 16\left(1 + 3\sigma + \sigma^2\right)^2 = 0.2\Omega_5\left(\sigma\right).$$

Таким образом, ненулевой полином порядка семь является решением однородной задачи (3.1.3), (3.1.2) тогда и только тогда, когда $\Omega_5\left(\sigma\right) = 0$. Мы можем продолжить тем же путем и получить, что P_j является нетривиальным решением однородной задачи (3.1.3), (3.1.2) тогда и только тогда, когда $\Omega_{j-2}\left(\sigma\right) = 0$.

Интересно вычислить значение дефектных чисел задачи (3.1.3), (3.1.2), то есть количество номеров p, для которых $\Omega_p\left(\sigma\right) = 0$. Получим, что если $\Omega_4\left(\sigma\right) = 0$, то $\Omega_5\left(\sigma\right) \neq 0$. Прямые вычисления показывают, что если $\Omega_p\left(\sigma\right) = 0$, то для $k \neq p$ $\Omega_k\left(\sigma\right) \neq 0$.

§3.2. Задача Дирихле, когда мнимая единица является двухкратным корнем характеристического уравнения

В этом пункте рассматривается случай, когда i - двухкратный корень характеристического уравнения. Условия разрешимости и решения однородной задачи определяются в явном виде.

В области D рассмотрим неправильно эллиптическое уравнение шестого порядка

$$\frac{\partial^2}{\partial \overline{z}^2}\prod_{k=j}^{4}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}-\mu_j\frac{\partial}{\partial z}\right)u=0. \tag{3.2.1}$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ – операторы комплексного дифференцирования; μ_j - постоянные числа такие, что $0<\left|\mu_j\right|<1,\quad j=1,2,3,4.$ Рассмотрены следующие три случая:

1) $\mu_1=\mu_2=\mu_3\neq\mu_4$,

2) $\mu_1=\mu_2\neq\mu_j\;\; j=3,4,\;\; \mu_3\neq\mu_4$,

3) $\mu_j\quad \overline{j=1,4}$ - простые корни.

Искомое решение u шесть раз непрерывно дифференцируемо в D и вместе с производными до второго порядка удовлетворяет условию Гельдера вплоть до границы, т.е. $u\in C^{(2,\alpha)}\left(\overline{D}\right)$. Для уравнения (3.2.1) рассматриваем задачу Дирихле. На границе $\Gamma=\partial D$ неизвестная функция u удовлетворяет условиям Дирихле (3.0.3), где заданные функции $f_j\in C^{(2-j,\alpha)}\left(\Gamma\right)$ принадлежат функциональному классу, который уточним позднее. В [64] было доказано, что условия (3.0.3) эквивалентны условиям (3.1.2). Если все $f_j\;(j=0,1,2)$ функции принадлежат классу $C^{(2-j,\alpha)}\left(\Gamma\right)$, то $F_k\in C^{(\alpha)}$. $F_k\in C^{(\alpha)}\left(\Gamma\right)$– заданные функции, однозначно определяемые по функциям $f_0,\ f_1,\ f_2$.

Как известно, задача (3.0.1), (3.0.3), как и любая классическая задача для неправильно эллиптического уравнения, не является корректной [22]. В [57] Н.Е. Товмасян для неправильно эллиптического уравнения 2-го порядка показал, как определить класс граничных функций, чтобы задача Дирихле стала нормально разрешимой. В рассматриваемом случае также необходимо определить функциональный класс граничных функций, обеспечивающий нормальную разрешимость задачи (3.0.1), (3.0.3). Случай двухкратных корней для уравнения типа (3.2.1) четвертого порядка был рассмотрен в [56]. Случай уравнения шестого порядка при других расположениях корней характеристического уравнения был рассмотрен в [70].

Определение 3.2.1. Пусть $0<r<1$ - заданное число. Класс $A^{(2,\alpha)}(r)$ состоит из функции аналитических в кольце $r<|z|<1$ и удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем α с производными до второго порядка включительно вплоть до границы $\left(f^{(j)} \in C^{\alpha}\left(r \le |z| \le 1\right) \quad j = 0,1,2\right)$.

Доказываются следующие теоремы. Первый случай.

Теорема 3.2.1. Предположим, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \ne \lambda_4$. Если граничные функции $F_j \in A^{(2,\alpha)}(|\mu_1|)$ и $\sigma = \mu_4 \mu_1^{-1}$, то при условии

$$S_{l-3}(\sigma) = \sum_{m=0}^{l-3} (m+1)(m+2)\sigma^m \ne 0, \quad l = 4,5,... \qquad (3.2.2)$$

задача (3.2.1), (3.0.3) однозначно разрешима. Если при некотором q условие (3.2.2) нарушается, то однородная задача (3.2.1),(3.0.3) имеет ненулевое решение, которое является многочленом порядка $q+2$. При этом, чтобы неоднородная задача имела решение, необходимо, чтобы граничные функции удовлетворяли одному условию ортогональности. Условие (3.2.2) может нарушиться только при одном значении *l*. Таким образом, дефектные числа задачи (3.0.1), (3.0.3) могут быть равны нулю или единице.

Второй случай. Предположим, что в (3.2.1) имеем $|\mu_4| \le |\mu_3| \le |\mu_2| \le |\mu_1| < 1,\ \mu_k \ne \mu_j$.

Теорема 3.2.2. Обозначим $\sigma = \mu_1^{-1}\mu_2,\ \tau = \mu_1^{-1}\mu_3,\ \rho = \mu_1^{-1}\mu_4$. Если граничные функции $F_j \in A^{(2,\alpha)}(|\mu_1|)$, тогда при условии

$$T_l(\sigma,\tau,\rho) \equiv \mu_1^{3l+s}\sigma^2\tau^2\rho^2 \begin{pmatrix} 1 & \sigma^l & \tau^l & \rho^l \\ 1 & \sigma^{l-1} & \tau^{l-1} & \rho^{l-1} \\ 1 & \sigma^{l-2} & \tau^{l-2} & \rho^{l-2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ne 0, \quad l = 4,5,... \qquad (3.2.3)$$

задача (3.2.1), (3.0.3) однозначно разрешима. Если при некотором p условие (3.2.3) нарушается, т.е. $T_l(\sigma,\tau,\rho) = 0$, то однородная задача (3.2.1), (3.0.3) имеет ненулевое решение, которое является многочленом порядка $p+2$. А чтобы неоднородная задача имела решение, необходимо, чтобы граничные функции удовлетворяли одному условию ортогональности. Таким образом, дефектные числа задачи (3.0.1), (3.0.3) равны количеству номеров *p*, при которых нарушается условие (3.2.3).

Теперь рассмотрим третий случай.

Теорема 3.2.3. Предположим, что $\mu_1 = \mu_2 \neq \mu_j,\ j = 3,4$ и $\mu_3 \neq \mu_4$. Обозначим $\sigma = \mu_1\mu_3^{-1},\ \tau = \mu_1\mu_4^{-1}$. Если граничные функции $F_j \in A^{(2,\alpha)}(|\mu|),\ \left(\mu = \min\left|\mu_j\right|,\ j = 3,4\right)$, тогда при условии

$$\Omega_l(\sigma,\tau) = \sum_{j=1}^{l-2}(l-j-1)\sum_{m=0}^{j-1}\sigma^m\tau^{j-1-m} \neq 0 \quad l = 4,5...... \tag{3.2.4}$$

задача (3.2.1), (3.0.3) однозначно разрешима. Если при некотором n условие (3.2.4) нарушается, то однородная задача (3.2.1), (3.0.3) имеет ненулевое решение, которое является многочленом порядка $n+2$. А чтобы неоднородная задача имела решение, необходимо, чтобы граничные функции удовлетворяли одному условию ортогональности. Таким образом, дефектные числа задачи (3.0.1), (3.0.3) равны количеству номеров n, при которых нарушается условие (3.2.4).

Доказательство теоремы 3.2.1.

Предположим, что корни характеристического уравнения (3.2.1) удовлетворяют условию

$$\lambda_1 \neq \lambda_k,\ k \neq 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 \neq i,\ \lambda_5 = \lambda_6 = i,\ \Im_j > 0.$$

В этом случае уравнение (3.2.1) сводится к виду:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}} - \mu_1\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}} - \mu_2\frac{\partial}{\partial z}\right)^3 U = 0. \tag{3.2.5}$$

Общее решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$U(x,y) = \Phi_0(z) + (1 - z\overline{z})\Phi_1(z) + C\overline{z} + \Psi_0(z + \mu_1\overline{z}) + \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^{k-1} + \Psi_k(z + \mu_2\overline{z}), \tag{3.2.6}$$

где Φ_k аналитичны в D. Функции Ψ_0 и Ψ_k $(k = 1,2,3)-$ аналитичны в областях $D(\mu_j) = \{z + \mu_j\overline{z} : z \in D\}$ $(j = 1,2)$ соответственно. Подставим функцию (3.2.6) в граничные равенства (3.0.3). Используя операторное тождество (1.0.10) получим:

$$\mu_1^2\Psi_0''(z + \mu_2\overline{z}) + \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - 2iI\right)^{k-1}\Psi_k''(z + \mu_2\overline{z}) = F_0(\theta),\ z = e^{i\theta},$$

$$-\left(z\Phi_1(z)\right)' + \mu_1\Psi_0''\left(z+\mu_1\overline{z}\right) + \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^{k-1}\Psi_k''\left(z+\mu_2\overline{z}\right) = F_1(\theta) \quad (3.2.7)$$

$$\Phi_0''(z) - \overline{z}\Phi_1'(z) + \Psi_0''\left(z+\mu_1\overline{z}\right) + \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+2iI\right)^{k-1}\Psi_k''\left(z+\mu_2\overline{z}\right) = F_2(\theta).$$

Применяя лемму 1.0.1 к функциям, получим

$$\Psi_0''\left(z+\mu_1\overline{z}\right) = \psi_0(z) + \psi_0\left(\mu_1\overline{z}\right) = \sum_{l=0}^{\infty}A_{0l}z^l + \sum_{l=0}^{\infty}A_{0l}\mu_1^l z^{-l} \qquad z = e^{i\theta},$$

$$\Psi_k''\left(z+\mu_2\overline{z}\right) = \psi_k(z) + \psi_k\left(\mu_2\overline{z}\right) = \sum_{l=0}^{\infty}A_{kl}z^l + \sum_{l=0}^{\infty}A_{kl}\mu_2^l z^{-l},\ k = 1,2,3. \quad (3.2.8)$$

Здесь мы представили функции ψ_k рядами Тейлора, которые сходятся в D. Эти разложения выполняются на Γ, следовательно, мы можем дифференцировать их по θ. Подставим эти разложения и разложения функций F_j в ряд Фурье в первое уравнение (3.2.7).

$$\mu_1^2\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_{0l}z^l + A_{0l}\mu_1^{l+2}z^{-l}\right) + \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{3}\left(A_{kl}(il-2i)^{k-1}\mu_2^2 z^l + A_{kl}(-il-2i)^{k-1}\mu_2^{l+2}z^{-l}\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}a_{l0}z^l. \quad (3.2.9)$$

Приравнивая части второго и третьего уравнений (3.2.7), аналитические в дополнении к D, получим:

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_{0l}\mu_1^{l+1} + \sum_{k=1}^{3}A_{kl}(-il)^{k-1}\mu_2^{l+1}\right)z^{-l} = \sum_{l=0}^{\infty}a_{-l0}z^{-l},$$

$$-\Phi_1'(0)z^{-l} + \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_{0l}\mu_1^l + \sum_{k=1}^{3}A_{kl}(-il+2i)^{k-1}\mu_2^l\right)z^{-l} = \sum_{l=0}^{\infty}a_{-l2}z^{-l}. \quad (3.2.10)$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях z и $\overline{z}$. Получим системы для определения неизвестных A_{kl}. При $k \ge 1$ получаем систему четырёх уравнений относительно неизвестных A_{kl}:

$$\mu_1^{l+2}A_{0l} + \sum_{k=1}^{3}A_{kl}(-il-2i)^{k-1}\mu_2^{l+2} = a_{-l0}, \qquad \mu_1^{l+1}A_{0l} + \sum_{k=1}^{3}A_{kl}(-il)^{k-1}\mu_2^{l+2} = a_{-l1},$$

$$\mu_1^l A_{0l} + \sum_{k=1}^{3}A_{kl}(2i-il)^{k-1}\mu_2^l = a_{-l2}, \qquad \mu_1^2 A_{0l} + \sum_{k=1}^{3}A_{kl}(il-2i)^{k-1}\mu_2^2 = a_{l0}. \quad (3.2.11)$$

Если $l = 0{,}1$, мы получаем аналогичные прямоугольные системы, которые всегда разрешимы. Мы не пишем эти системы, как так коэффициенты A_{kl} для $l \le 2$ не влияют на дефектные числа задачи (3.0.1), (3.0.3).

Рассмотрим детерминант основной матрицы системы (3.2.11):

$$\Delta_l = \det\begin{pmatrix} \mu_1^{l+2} & \mu_2^{l+2} & -i(l+2)\mu_2^{l+2} & -i(l+2)^2\mu_2^{l+2} \\ \mu_1^{l+1} & \mu_2^{l+1} & -il\mu_2^{l+1} & -l^2\mu_2^{l+1} \\ \mu_1^{l} & \mu_2^{l} & -i(l-2)\mu_2^{l} & -i(l-2)^2\mu_2^{l} \\ \mu_1^{2} & \mu_2^{2} & i(l-2)\mu_2^{2} & -i(l-2)^2\mu_2^{2} \end{pmatrix}.$$

Вынося из каждой строки соответствующие степени μ_2 так, чтобы в первом столбце определителя остались единицы, из третьего столбца $-i$ и четвертого столбца -1 получаем (обозначая $\mu_1\mu_2^{-1} = \sigma$):

$$\Delta_l = \mu_2^{3l+5} i \begin{vmatrix} \sigma^{l+2} & 1 & l+2 & (l+2)^2 \\ \sigma^{l+1} & 1 & l & l^2 \\ \sigma^{l} & 1 & l-2 & (l-2)^2 \\ \sigma^{2} & 1 & -(l-2) & (l-2)^2 \end{vmatrix} \equiv \mu_2^{3l+5} i\Omega_l. \tag{3.2.12}$$

Вычислив определитель Ω_l , получим:

$$\Omega_l = 8\sigma^2\left(\sigma-1\right)^3 S_{l-3} \tag{3.2.13}$$

Это равенство показывает, что определитель Δ_l для $l \ge 4$ ненулевой тогда и только тогда, когда выполнены условия (3.2.2). Сначала предположим, что условия (3.2.2) выполнены. Рассмотрим однородную задачу (3.2.5), (3.0.3). Решение этой задачи построено с использованием коэффициентов A_{kl} при $l \ge 2$, определенных из однородных систем (3.2.11). Таким образом, мы получаем, что $A_{kl} = 0$ при $l > 3$. Коэффициенты A_{k3} также равны нулю, поскольку Δ_3 является обобщенным определителем Вандермонда с различными членами и, следовательно, не равен нулю. Таким образом, ненулевое решение однородной задачи (3.2.5), (3.0.3) может быть полиномом порядка не более четырех. Но произвольный ненулевой многочлен, удовлетворяющий однородным условиям (3.0.3) на Γ , делится на $\left(1-z\bar{z}\right)^3$

(лемма 1.0.4), что означает, что однородная задача (3.2.5), (3.0.3) имеет только тривиальное решение. Теперь вернемся к неоднородной задаче (3.2.5), (3.0.3).

Рассмотрим неоднородную систему (3.2.11). Сначала, учитывая, что $\Delta_l \neq 0$ при $l \geq 2$, получаем, что в этом случае коэффициенты A_{kl} определяются однозначно. В системе (3.2.11) для $l = 2$ левые части третьего и четвертого уравнений одинаковы, а правые части также одинаковы, поскольку из соотношений (3.1.6) следует равенство $a_{20} = a_{-22}$, поэтому можно найти коэффициенты A_{k2} также (не однозначно). Учитывая равенство $a_{10} = a_{-11}$, можно показать, что коэффициенты A_{k1} и A_{k0} могут быть определены также не однозначно. После определения функций Ψ_k найдем функции Φ_k из уравнений (3.2.9). Подводя итог, можно сказать, что неоднородная задача (3.2.5), (3.0.3) имеет решение.

Теперь мы должны показать, что это решение принадлежит классу $C^{(2,\alpha)}\left(D \cup \Gamma\right)$ если граничные функции принадлежат классу $A^{(2,\alpha)}\left(|\mu_1|\right)$. Для этой цели мы решаем (3.2.11). Предполагаем, что $|\sigma| < 1$. Затем, обозначая $T = 0.25\left(a_{-l0} - 2a_{-l1}\mu_1 + a_{-l2}\mu_1^2\right)\mu_1^{-l-2}$, мы получаем следующие асимптотические оценки для решения:

$$A_{0l} \approx -\frac{l^2 T}{2\sigma^2},\ A_{1l} \approx -\frac{l^2 T}{8},\ \ A_{2l} \approx -i\frac{lT}{4},\ \ A_{3l} \approx -\frac{T}{8}, \tag{3.2.14}$$

Теперь воспользуемся оценками, которые показывают связь между скоростью роста коэффициентов Фурье функции и степенью гладкости соответствующих рядов (см. [69], стр. 210). Если граничные функции F_j принадлежат классу $A^{(2,\alpha)}\left(|\mu_1|\right)$, то имеем:

$$a_{-lm} \approx l^{-2}\gamma_l \mu^{l+2},\ m = 0,1,2$$

где γ_l - коэффициенты Фурье непрерывной функции Гёльдера. Из этих соотношений и (3.2.14) следует, что все компоненты решения принадлежат классу $C^{(2,\alpha)}\left(\bar{D}\right)$. Таким образом, неоднородная задача (3.2.5), (3.0.3) имеет решение в классе $C^{(2,\alpha)}\left(\bar{D}\right)$, и это решение единственно. Таким образом, для $|\sigma| < 1$ теорема 3.2.1 доказана. В случае $|\sigma| \geq 1$ мы получаем тот же результат, просто оценки (3.2.14) должны быть заменены на

$$A_{0l}\approx\frac{T_1}{\sigma^{l-4}}+\frac{E_1}{\sigma^{l-4}\left(l-1\right)},\ A_{1l}\approx-\frac{\left(\sigma-1\right)^2E_1\left(l-1\right)}{8},\ A_{2l}\approx\frac{a_{-l2}\mu_1^{-l}-T_1-a_{-l0}\mu_1^{-2}}{2l},\ A_{3l}\approx\frac{\left(\sigma-1\right)^2E_1}{8\left(l-1\right)},$$

где $\quad T_1=\dfrac{8\left(a_{-l0}-2a_{-l1}\mu_1+a_{-l2}\mu_1^2\right)}{(\sigma-1)^2\mu_1^{l+2}},\ E_1=\dfrac{2\left(a_{-l2}\mu_1-a_{-l1}\right)\mu_1^{-l-1}-2(\sigma-1)^2T_1}{(\sigma-1)^2}.$

Теперь предположим, что условия (3.2.2) не выполняются. Предположим, что для некоторого $p\geq4$ $S_{p-3}=0$ и, следовательно, $\Delta_p=0$. Тогда однородная система (3.2.11) при $l=p$ имеет одно линейно независимое решение A_{kp}, поскольку ранг главной матрицы эта система равна трем. Получив другие коэффициенты A_{kl} для $l\neq p$ и функции Φ_m, равные нулю, и подставив эти коэффициенты в формулы (3.2.6), определим линейно независимое решение однородной задачи (3.2.5), (3.0.3), которое является полиномом порядка $p+2$. Например, если $S_1(\sigma)=0$ или $1+3\sigma=0$, то функция $\left(1-z\overline{z}\right)^3$ является нетривиальным решением однородной задачи (3.2.5), (3.0.3). Для неоднородной задачи рассмотрим неоднородную систему (3.2.11). Если условие (3.2.2) не выполняется для некоторого l_0, то ранг главной матрицы соответствующей системы равен трем, поэтому для разрешимости этой системы необходимо, чтобы некоторая линейная комбинация правых частей уравнений была равна нулю, то есть для разрешимости этой системы необходимо одно линейно независимое условие для граничных функций F_k. Если граничные функции принадлежат классу $A^{(2,\alpha)}\left(|\mu_1|\right)$, то это условие также достаточно.

Для полноты доказательства теоремы 3.2.1 осталось доказать, что для фиксированного σ условие (3.2.2) может не выполняться только для одного значения l. Для этой цели рассмотрим полином S_k из (3.2.2). По теореме Энестрёма-Какейа [64] корни многочлена $Q_n(z)=\sum_{j=0}^{n}q_jz^j$ с положительными коэффициентами q_j принадлежат кольцу

$$\min_j\left(\frac{q_j}{q_{j+1}}\right)\leq|z|\leq\max_j\left(\frac{q_j}{q_{j+1}}\right). \qquad (3.2.15)$$

Если мы применим эту теорему к многочлену (3.2.2), мы обнаружим, что корни многочлена S_{l-3} принадлежат кольцу.

$$\frac{1}{3} \le |z| \le \frac{l-3}{l-1}. \qquad (3.2.16)$$

Предположим, что для некоторого δ имеем $S_{l-3}(\delta) = S_{l+m-3}(\delta) = 0$. Тогда число δ является корнем многочлена S_{l-3} и многочлена

$$V(z) = S_{l+m-3}(z) - S_{l-3}(z) = z^{l-2}\sum_{j=0}^{m-1}(j+l-1)(j+l)z^j \equiv z^{l-2}R(z).$$

Так как $\delta \ne 0$, то δ является корнем многочлена R . С другой стороны, используя неравенство (3.2.15), получаем, что корни многочлена R находятся в области:

$$\frac{l-1}{l} \le |z| \le \frac{l+m-3}{l+m-2}. \qquad (3.2.17)$$

Области (3.2.16) и (3.2.17) не пересекаются, следовательно, полиномы S_{l-3} и R значит S_{l-3} и S_{l+m-3} не могут иметь одинаковых корней. Это противоречие доказывает предложение. Теорема 3.2.1 доказана.

Замечание 3.2.1. Отметим, что из (3.2.16) имеем, что для $|\sigma| < \frac{1}{3}$ и для $|\sigma| > 1$ выполняется условие (3.2.2), то есть для $3|\mu_1| < |\mu_2|$ или $|\mu_1| > |\mu_2|$ задача (3.2.5), (3.0.3) однозначно разрешима.

Доказательство теоремы 3.2.2. В [55] было показано, что общее решение уравнения (3.2.1) представляется в виде

$$u = \Phi_0(z) + (1 - z\bar{z})\Phi_1(z) + c\bar{z} + \sum_{k=1}^{4}\Psi_k(z + \mu_k\bar{z}), \qquad (3.2.18)$$

где Φ_i $(i = 0,1)$ и Ψ_j $(j = 1,2,3,4)$ - аналитические функции в областях $D(\mu) = \{z + \mu\bar{z} | z \in D\}$ соответственно, которые необходимо определить. Поставим функцию (3.2.20) в граничные равенства (3.2.3). Используя операторное тождество (1.0.10), при $k = 0,1,2$ получим:

$$\begin{aligned}
&\Phi_0''(z) - \bar{z}\Phi_1'(z) + \sum_{k=1}^{4}\Psi_k''(z + \mu_k\bar{z}) = F_0(z) \\
&-(z\Phi_1(z))' + \sum_{k=1}^{4}\Psi_k''(z + \mu_k\bar{z})\mu_k = F_1(z) \\
&\sum_{k=1}^{4}\Psi_k''(z + \mu_k\bar{z})\mu_k^2 = F_2(z)
\end{aligned} \qquad (3.2.19)$$

Представим Φ_i'' и Ψ_j'' на окружности Γ, используя разложение:

$$\Phi_j''(z+\mu\bar{z}) = \varphi_j(z) + \varphi_j(\mu\bar{z}) \sum_{k=0}^{\infty} A_{jk} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{jk}\mu^k z^{-k},$$

$$\Psi_j''(\bar{z}+\nu_j z) = \psi_j(\bar{z}) + \psi_j(\nu_j z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{jk} z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} B_{jk}\nu_j^k z^k, \quad j=1,2,3. \tag{3.2.20}$$

Так как подлежащие определению функции φ_j и ψ_j аналитичны в круге D, то они определяются своими коэффициентами Тейлора A_{jk} и B_{jk}. Разложим функции F_k $(k=0,1,2)$ на окружности Γ (2.1.4) и для определения коэффициентов Тейлора A_{jk} и B_{jk} подставим (3.2.20) и (2.1.4) в граничные условия (3.2.18).

При $k=0,1,2$ получим

$$\sum_{l=0}^{\infty} B_{0l} z^k - B_{10}\bar{z} + \sum_{l=0}^{\infty} B_{1l+1} z^l + \sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{4} (A_{kl}) z^l + \left(\sum_{k=1}^{4} A_{kl}\mu_k^l \right) z^{-l} \right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_{l0} z^l$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} (l+1) B_{1l} z^l + \sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{4} (A_{kl}\mu^k) z^l + \left(\sum_{k=1}^{4} A_{kl}\mu_k^{l+1} \right) z^{-l} \right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_{l1} z^l$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{4} (A_{kl}\mu_k^2) z^l + \left(\sum_{k=1}^{4} A_{kl}\mu_k^{l+2} \right) z^{-l} \right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_{l2} z^l$$

Пусть $l \geq 2$. Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях z^l и z^{-l}, получим систему

$$\sum_{k=1}^{4} A_{kl}\mu_k^{l+2} = d_{-l2}, \quad \sum_{k=1}^{4} A_{kl}\mu_k^{l+1} = d_{-l1}, \quad \sum_{k=1}^{4} A_{kl}\mu_k^{l} = d_{-l0}, \quad \sum_{k=1}^{4} A_{kl}\mu_k^{2} = d_{l2} \tag{3.2.21}$$

Определитель основной матрицы этой системы имеет следующий вид:

$$\Delta_l \equiv \begin{vmatrix} \mu_1^{l+2} & \mu_2^{l+2} & \mu_3^{l+2} & \mu_4^{l+2} \\ \mu_1^{l+1} & \mu_2^{l+1} & \mu_3^{l+1} & \mu_4^{l+1} \\ \mu_1^{l} & \mu_2^{l} & \mu_3^{l} & \mu_4^{l} \\ \mu_1^{2} & \mu_2^{2} & \mu_3^{2} & \mu_4^{2} \end{vmatrix} \tag{3.2.22}$$

Из каждой строки детерминанта (3.2.22) вынесем различные степени μ_1 так, чтобы все элементы первого столбца были равны единице. Умножив последние три столбца на μ_1^{l+2}, получим

$$\Delta_l = \mu^{3l+s}\sigma^2\tau^2\rho^2 T_l(\sigma,\tau,\rho) \equiv \begin{vmatrix} 1 & \sigma^l & \tau^l & \rho^l \\ 1 & \sigma^{l-1} & \tau^{l-1} & \rho^{l-1} \\ 1 & \sigma^{l-2} & \tau^{l-2} & \rho^{l-2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \tag{3.2.23}$$

Пусть $|\sigma| < |\tau| \le |\rho|$, тогда при $l \to \infty$ получим

$$\Delta_l = \mu_1^{3l+s}\sigma^2\tau^2\rho^2\tau^{l-2}\rho^{l-2} \begin{vmatrix} 1 & \tau^2 & \rho^2 \\ 1 & \tau & \rho \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \mu_1^{3l+s}\sigma^2\tau^2\rho^2\tau^{l-2}\rho^{l-2}(\tau-1)(\rho-1)(\rho-\tau) \ne 0$$

Таким образом, в этом случая условия (3.2.3) могут нарушаться только для конечного числа номеров p, то есть дефектные числа конечны.

Рассмотрим однородную задачу (3.2.1), (3.0.3). Решение этой задачи строится с использованием коэффициентов A_{kl} для $l \ge 2$, которые определяются из однородных систем (3.2.21). Поэтому получаем, что $A_{kl} = 0$ при $l > 3$. Коэффициенты A_{k3} также равны нулю, так как Δ_3 - обобщенный детерминант Вандермонда с различными членами и, следовательно, не равен нулю. Таким образом, ненулевое решение однородной задачи (3.2.1), (3.0.3) может быть многочленом порядка не более четырех. Но произвольный не нулевой многочлен, удовлетворяющий однородным условиям (3.0.3) на Г, делится на $(1-z\overline{z})^3$, что означает, что однородная задача (3.2.1), (3.0.3) имеет только тривиальное решение.

Перейдём к неоднородной задаче (3.2.1), (3.0.3). Рассмотрим неоднородную систему (3.2.21). Учитывая, что $\Delta_l \ne 0$ для $l \ge 3$, мы видим, что в этом случае коэффициенты A_{kl} определяются однозначно. В системе (3.2.21) для $l = 2$ левые части третьего и четвертого уравнений одинаковы, а правые части одинаковы, так как из соотношений (3.2.3) следует равенство $a_{20} = -a_{22}$, поэтому коэффициенты A_{k2} можно вычислить (не однозначно). Принимая во внимание равенство $a_{10} = -a_{11}$, можно показать, что коэффициенты B_{k0} и A_{k0} также могут быть определены не однозначно. После определения функций Ψ_k мы найдем функции Φ_k из уравнений (3.2.20). Подводя итоги, можно сказать, что неоднородная задача (3.2.1), (3.0.3) имеет решение.

Теперь мы должны показать, что это решение принадлежит классу $C^{(2,\alpha)}\left(D\cup\Gamma\right)$ если граничные функции из класса $A^{(2,\alpha)}\left(\left|\mu_1\right|\right)$. Решая полученную систему (3.2.21), получаем следующие асимптотические оценки для решения:

$$A_{1l}\approx d_{-l0}\left(\mu_1^{-l}-\mu_2^{-l}\right)-d_{-l1}\mu_2^{-l}-(\tau-1)\left(d_{-lk}\mu_3^{-l}-d_{-lk}\mu_4^{-l}\right)-$$
$$-(\rho-1)d_{-lk}\mu_4^{-l}-d_{-lk}\mu_3^{-l}-2d_{-lk}\mu_4^{-l},$$
$$A_{2l}\approx d_{-l1}\mu_2^{-l}-d_{-l0}\mu_2^{-l}-(\tau-1)\left(d_{-lk}\mu_3^{-l}-d_{-lk}\mu_4^{-l}\right)-(\rho-1)d_{-lk}\mu_4^{-l},$$

$$A_{3l}\approx d_{-lk}\mu_3^{-l}-d_{-lk}\mu_4^{-l},\quad k=0,1,2$$
$$A_{4l}\approx d_{-lk}\mu_4^{-l},\quad k=0,1,2$$

Эти оценки показывают, что если F_j принадлежат классу $A^{(2,\alpha)}\left(\left|\mu_4\right|\right)$, то функции Φ_j и Ψ_j принадлежат классу $C^{(2,\alpha)}\left(\overline{D}\right)$ и, следовательно, решение и также из этого класса. Теорема 3.2.2 доказана.

Доказательство теоремы 3.2.3

Сначала представим общее решение уравнения (3.2.1) в виде ([55]):

$$U\left(x,y\right)=\Phi_0\left(z\right)+\left(1-z\overline{z}\right)\Phi_1\left(z\right)+c\overline{z}+\Psi_0\left(z+\mu_1\overline{z}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\Psi_1\left(z+\mu_1\overline{z}\right)+\Psi_2\left(z+\mu_2\overline{z}\right)+$$
$$+\Psi_3\left(z+\mu_3\overline{z}\right)\qquad(3.2.24)$$

где Φ_k и Ψ_k - аналитические функции в областях D и $D(\mu)=\left\{z+\mu\overline{z}\,\middle|\,z\in D\right\}$ соответственно, которые необходимо определить. Подставим это решение в граничные условия (3.0.3), и меняя порядок действия операторов $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial\overline{z}}$ и оператора $\frac{\partial}{\partial\theta}$, мы получае

$$\Psi_0''\left(z+\mu_1\overline{z}\right)\mu_1^2+\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-2iI\right)\Psi_1''\left(z+\mu_1\overline{z}\right)\mu_1^2+\Psi_2''\left(z+\mu_2\overline{z}\right)\mu_2^2+\Psi_3''\left(z+\mu_3\overline{z}\right)\mu_3^2=F_0$$

$$-\left(z\Phi_1\left(z\right)\right)'+\mu_1\Psi_0''\left(z+\mu_1\overline{z}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\Psi_1''\left(z+\mu_1\overline{z}\right)\mu_1+\mu_2\Psi_2''\left(z+\mu_2\overline{z}\right)+\mu_2\Psi_3''\left(z+\mu_3\overline{z}\right)=F_1\qquad(3.2.25)$$

$$\Phi_0''(z)-\overline{z}\left(z\Phi_1\left(z\right)\right)''+\Psi_0''\left(z+\mu_1\overline{z}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+2iI\right)\Psi_1''\left(z+\mu_1\overline{z}\right)+\Psi_2''\left(z+\mu_2\overline{z}\right)+\Psi_3''\left(z+\mu_3\overline{z}\right)=F_2$$

Теперь представим аналитические в $D(\mu)$ функции $\Psi_l''\left(z+\mu\overline{z}\right)$ на границе Γ в виде:

$$\Psi_k''\left(z+\mu\bar{z}\right)=\psi_k\left(z\right)+\psi_k\left(\mu\bar{z}\right)=\sum_{l=0}^{\infty}A_{kl}z^l+\sum_{l=0}^{\infty}A_{kl}\mu^l z^{-l}\qquad z=e^{i\theta}, \tag{3.2.26}$$

Подстановляя эти разложения и разложения функций F_j в ряд Фурьес

$$F_j\left(\theta\right)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}d_{lj}z^l,\quad z=e^{i\theta},\qquad j=0,1,2$$

в равенство (3.2.25) получим

$$\begin{gathered}
\mu_1^2\sum_{l=0}^{\infty}A_{0l}z^l+\mu_1^2\sum_{l=0}^{\infty}A_{0l}\mu_1^l z^{-l}+\mu_1^2\sum_{l=0}^{\infty}A_{1l}\left(il-2i\right)z^l+\sum_{l=0}^{\infty}A_{1l}\left(-il-2i\right)\mu_1^{l+2}z^{-l}+\\
+\mu_2^2\sum_{l=0}^{\infty}A_{2l}z^l+\mu_2^2\sum_{l=0}^{\infty}A_{2l}\mu_2^l z^{-l}+\mu_3^2\sum_{l=0}^{\infty}A_{3l}z^l+\mu_3^2\sum_{l=0}^{\infty}A_{3l}\mu_3^l z^{-l}=\sum_{l=-\infty}^{\infty}d_{l0}z^l\\
-\left(z\Phi_1\left(z\right)\right)'+\mu_1\sum_{l=0}^{\infty}A_{0l}z^l+\sum_{l=0}^{\infty}A_{0l}\mu_1^{l+1}z^{-l}+\mu_1\sum_{l=0}^{\infty}A_{1l}ilz^l+\sum_{l=0}^{\infty}A_{1l}\left(-il\right)\mu_1^{l+1}z^{-l}+\\
+\mu_2\sum_{l=0}^{\infty}A_{2l}z^l+\sum_{l=0}^{\infty}A_{2l}\mu_2^{l+1}z^{-l}+\mu_3\sum_{l=0}^{\infty}A_{3l}z^l+\sum_{l=0}^{\infty}A_{3l}\mu_3^{l+1}z^{-l}=\sum_{l=-\infty}^{\infty}d_{l1}z^l\\
-\left(z\Phi_1\left(z\right)\right)'+\mu_1\sum_{l=0}^{\infty}A_{0l}z^l+\sum_{l=0}^{\infty}A_{0l}\mu_1^{l+1}z^{-l}+\mu_1\sum_{l=0}^{\infty}A_{1l}ilz^l+\sum_{l=0}^{\infty}A_{1l}\left(-il\right)\mu_1^{l+1}z^{-l}+\\
+\mu_2\sum_{l=0}^{\infty}A_{2l}z^l+\sum_{l=0}^{\infty}A_{2l}\mu_2^{l+1}z^{-l}+\mu_3\sum_{l=0}^{\infty}A_{3l}z^l+\sum_{l=0}^{\infty}A_{3l}\mu_3^{l+1}z^{-l}=\sum_{l=-\infty}^{\infty}d_{l2}z^l
\end{gathered} \tag{3.2.27}$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях z и $\bar{z}$. Получим системы для определения неизвестных A_{kl}. При $k\geq 1$ получаем систему четырёх уравнений относительно неизвестных A_{kl}:

$$\begin{cases}
\mu_1^2A_{0l}+\mu_1^2\left(il-2i\right)A_{1l}+\mu_2^2A_{2l}+\mu_3^2A_{3l}=d_{l0}\\
\mu_1^lA_{0l}+\mu_1^l\left(-il+2i\right)A_{1l}+\mu_2^lA_{2l}+\mu_3^lA_{3l}=d_{-l2}\\
\mu_1^{l+1}A_{0l}+\mu_1^{l+1}\left(-il\right)A_{1l}+\mu_2^{l+1}A_{2l}+\mu_3^{l+1}A_{3l}=d_{-l1}\\
\mu_1^{l+2}A_{0l}+\mu_1^{l+2}\left(-il-2i\right)A_{1l}+\mu_2^{l+2}A_{2l}+\mu_3^{l+2}A_{3l}=d_{-l0}
\end{cases} \tag{3.2.28}$$

Рассмотрим детерминант основной матрицы системы (3.2.28):

$$\Delta_l=\det\begin{pmatrix}
\mu_1^2 & i(l-2)\mu_1^2 & \mu_2^2 & \mu_3^2\\
\mu_1^l & -i(l-2)\mu_1^l & \mu_2^l & \mu_3^l\\
\mu_1^{l+1} & -il\mu_1^{l+1} & \mu_2^{l+1} & \mu_3^{l+1}\\
\mu_1^{l+2} & -i(l+2)\mu_1^{l+2} & \mu_2^{l+2} & \mu_3^{l+2}
\end{pmatrix}.$$

Выноса из каждой строки соответствующие степени μ_1 (так, чтобы в первом столбце определителя остались единицы), из второго столбца i, преобразуем этот определитель. Получим (обозначая $\frac{\mu_1}{\mu_2}=\sigma, \quad \frac{\mu_1}{\mu_3}=\tau$)

$$\Delta_l=\begin{vmatrix}\mu_1^2 & i(l-2)\mu_1^2 & \mu_2^2 & \mu_3^2\\ \mu_1^l & -i(l-2)\mu_1^l & \mu_2^l & \mu_3^l\\ \mu_1^{l+1} & -il\mu_1^{l+1} & \mu_2^{l+1} & \mu_3^{l+1}\\ \mu_1^{l+2} & -i(l+2)\mu_1^{l+2} & \mu_2^{l+2} & \mu_3^{l+2}\end{vmatrix}=i\mu_1^{3l+5}\mu_2^{l+2}\mu_3^{l+2}\begin{vmatrix}1 & (l-2) & \mu_2^{-l}\mu_1^{-2} & \mu_3^{-l}\mu_1^{-2}\\ 1 & -(l-2) & \mu_2^{-2}\mu_1^{-l} & \mu_3^{-2}\mu_1^{-l}\\ 1 & -l & \mu_2^{-1}\mu_1^{-l-1} & \mu_3^{-1}\mu_1^{-l-1}\\ 1 & -(l+2) & \mu_1^{-l-2} & \mu_1^{-l-2}\end{vmatrix}=$$

$$=i\mu_1^{l+1}\mu_2^{l+2}\mu_3^{l+2}\begin{vmatrix}1 & (l-2) & \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^l & \left(\frac{\mu_1}{\mu_3}\right)^l\\ 1 & -(l-2) & \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 & \left(\frac{\mu_1}{\mu_3}\right)^2\\ 1 & -l & \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right) & \left(\frac{\mu_1}{\mu_3}\right)\\ 1 & -(l+2) & 1 & 1\end{vmatrix}=i\mu_1^{l+1}\mu_2^{l+2}\mu_3^{l+2}\Omega_{l.}$$

обозначая $\frac{\mu_1}{\mu_2}=\sigma, \quad \frac{\mu_1}{\mu_3}=\tau$ получим

$$\Omega_l=\begin{vmatrix}1 & (l-2) & \sigma^l & \tau^l\\ 1 & -(l-2) & \sigma^2 & \tau^2\\ 1 & -l & \sigma & \tau\\ 1 & -(l+2) & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2l & \sigma^l-1 & \tau^l-1\\ 1 & 4 & \sigma^2-1 & \tau^2-1\\ 1 & 2 & \sigma-1 & \tau-1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=2(\sigma-1)(\tau-1)\begin{vmatrix}l & \sum_{k=0}^{l-1}\sigma^k & \sum_{k=0}^{l-1}\tau^k\\ 2 & \sigma+1 & \tau+1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-2(\sigma-1)(\tau-1)\begin{vmatrix}l & \sum_{k=1}^{l-1}\left(\sigma^k-1\right) & \sum_{k=1}^{l-1}\left(\tau^k-1\right)\\ 2 & \sigma-1 & \tau-1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=-2(\sigma-1)^2(\tau-1)^2\begin{vmatrix}\sum_{k=1}^{l-1}\sum_{j=0}^{k-1}\sigma^j & \sum_{k=1}^{l-1}\sum_{j=0}^{k-1}\tau^j\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2(\sigma-1)^2(\tau-1)^2\sum_{k=1}^{l-1}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\sigma^j-\tau^j\right)=$$

$$-2(\sigma-1)^2(\tau-1)^2\sum_{j=0}^{l-2}\left(\sigma^j-\tau^j\right)\sum_{k=j+1}^{l-1}1=-2(\sigma-1)^2(\tau-1)^2\sum_{j=1}^{l-2}\left(l-j-1\right)\left(\sigma^j-\tau^j\right)=$$

$$=-2(\sigma-1)^2(\tau-1)^2(\sigma-\tau)\sum_{j=1}^{l-2}(l-j-1)\sum_{m=0}^{j-1}\sigma^m\tau^{j-1-m}.$$

Получили условия (3.2.4) теоремы 3.2.3. Продолжение доказательства теоремы 3.2.3 аналогично предыдущим доказательствам.

§3.3. Задача Дирихле, когда мнимая единица является корнем характеристического уравнения кратности не менее трёх

Для точной формулировки полученных результатов, используя операторы комплексного дифференцирования, представим уравнение (3.0.1) в виде:

$$\prod_{p=1}^{6}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}-\mu_p\frac{\partial}{\partial z}\right)U=0 \qquad (3.3.1)$$

Здесь $\mu_p=\dfrac{i-\lambda_p}{i+\lambda_p}$ - комплексные числа, котороые могут совпадать. Из условий на корни имеем $\left|\mu_p\right|<1$. Мы будем использовать как граничные условия (3.0.3), так и эквивалентные граничные условия (3.1.2), где $F_k\in C^{(\alpha)}\left(\Gamma\right)$ однозначно определяются граничными функциями f_k .

Используя функциональный класс, определённый в 3.2.1, можем сформулировать полученные результаты:

Теорема 3.3.1. Рассмотрим краевую задачу Дирихле (3.3.1), (3.0.3) в случае, когда все корни характеристического уравнения (3.0.2) равны мнимой единице i . В этом случае общее решение однородной задачи можно представить в виде:

$$U_0(x,y)=(1-z\overline{z})^3\nu_3(x,y), \qquad (3.3.2)$$

где функция ν_3 - произвольная трианалитическая функция (то есть $\nu_{3\overline{zzz}}=0$). Неоднородная задача имеет решение тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия на граничные функции f_j $(j=0,1,2)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_j(\theta)e^{li\theta}d\theta = 0, \quad l = -6,-7,..., \quad j = 0,1,2,$$

$$20\int_{-\pi}^{\pi} f_0(\theta)e^{5i\theta}d\theta = 4\int_{-\pi}^{\pi} f_1(\theta)e^{5i\theta}d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} f_2(\theta)e^{5i\theta}d\theta, \tag{3.3.3}$$

$$5\int_{-\pi}^{\pi} f_1(\theta)e^{4i\theta}d\theta = -8\int_{-\pi}^{\pi} f_0(\theta)e^{4i\theta}d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} f_2(\theta)e^{4i\theta}d\theta,$$

Теорема 3.3.2. Если пять корней характеристического уравнения (3.0.2) равны мнимой единице i и $\lambda_6 \neq i$ и $\Im\lambda_6 > 0$, то общее решение однородной задачи (3.3.1), (3.0.3) можно представить в виде:

$$U_0(x,y) = (1 - z\bar{z})^3 \nu_2(x,y), \tag{3.3.4}$$

где функция ν_2 - произвольная бианалитическая функция (то есть $\nu_{2\bar{z}\bar{z}} = 0$). Неоднородная задача Дирихле (3.3.1), (3.0.3) имеет решение тогда и только тогда, когда граничные функции $F_j (j = 0,1,2)$ принадлежат классу $A^{(2,\alpha)}\left(|\mu_6|\right)$ (μ_6 определено в (3.3.1)) и выполняется равенство:

$$\mu_6^2 G_2^-(\theta) \equiv \mu_6 G_1^-(\theta) \equiv G_0^-(\theta) \tag{3.3.5}$$

Здесь $G_j^-(\theta) = \sum_{k=5}^{\infty} a_{-kj}\varsigma^{-k}$, если

$$F_j(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{kj}\varsigma^k, \ \varsigma = e^{i\theta} \in \Gamma.$$

Теорема 3.3.3. Предположим, что четыре корня характеристического уравнения (3.0.2) равны мнимой единице i и $\lambda_k \neq i$ и $\Im\lambda_k > 0 (k = 5,6)$, $\lambda_5 \neq \lambda_6$. В этом случае общее решение однородной задачи Дирихле (3.3.1), (3.0.3) можно представить в виде

$$U_0(x,y) = (1 - z\bar{z})^3 \Phi(z), \tag{3.3.6}$$

где Φ - произвольная аналитическая функция. Предполагая, что $|\mu_5| \leq |\mu_6|$, получаем, что неоднородная задача Дирихле (3.0.1), (3.0.3) имеет решение тогда и только тогда, когда граничные функции $F_j (j = 0,1,2)$ принадлежат классу $A^{(2,\alpha)}\left(|\mu_5|\right)$ и выполняется соотношение:

$$E_0^-(\theta) - (\mu_5 + \mu_6)E_1^-(\theta) \equiv -\mu_5\mu_6 E_2^-(\theta) \tag{3.3.7}$$

Здесь $E_j^-(\theta)=\sum\limits_{k=4}^{\infty}a_{-kj}\varsigma^{-k}$, если

$$F_j(\theta)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_{kj}\varsigma^k,\ \varsigma=e^{i\theta}\in\Gamma.$$

Теорема 3.3.4. Предположим, что три корня характеристического уравнения (3.0.2) равны мнимой единице i и $\lambda_j\neq i,\lambda_j\neq\lambda_k\ \Im\lambda_j>0\,(j=4,5,6,\,j\neq k)$. Если $|\mu_4|\le|\mu_5|\le|\mu_6|$ и граничные функции $F_j\in A^{(2,\alpha)}\left(|\mu_4|\right)$, то задача Дирихле (3.3.1), (3.3.2) однозначно разрешима.

Доказательство теоремы 3.3.1. Предположим, что все корни уравнения (3.0.2) равны i, то есть уравнение (3.0.1) приведено к виду:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\right)^6U=0.$$

Используя лемму 1.0.3, мы можем представить решение этого уравнения в виде:

$$U(x,y)=\sum_{k=0}^{5}\left(1-z\overline{z}\right)^k\Phi_k(z)+\sum_{k=0}^{4}\left(1-z\overline{z}\right)^k\overline{z}P_{4-k}(\overline{z}),\tag{3.3.8}$$

Подставляя эту функцию в граничные условия (3.0.3), получим:

$$\begin{aligned}&\varsigma\Phi_0'\left(\varsigma\right)+\overline{\varsigma}\left(\overline{\varsigma}P_4\left(\overline{\varsigma}\right)\right)'-2\Phi_1\left(\varsigma\right)-2\overline{\varsigma}P_3\left(\overline{\varsigma}\right)=f_1\left(\theta\right),\quad\varsigma=e^{i\theta},\\&\varsigma^2\Phi_0''\left(\varsigma\right)+\overline{\varsigma}^2\left(\overline{\varsigma}P_4\left(\overline{\varsigma}\right)\right)''-2\Phi_1\left(\varsigma\right)-2\overline{\varsigma}P_3\left(\overline{\varsigma}\right)-2\varsigma\Phi_1'\left(\varsigma\right)-2\overline{\varsigma}\left(\overline{\varsigma}P_3\left(\overline{\varsigma}\right)\right)'+\\&8\Phi_2\left(\varsigma\right)+8\overline{\varsigma}P_2\left(\overline{\varsigma}\right)=f_2\left(\theta\right),\ \varsigma=e^{i\theta}.\end{aligned}\tag{3.3.9}$$

Сначала рассмотрим однородную задачу (3.0.1), (3.0.3). Ессли в (3.3.9) мы имеем $f_j\equiv 0,$ то из первого уравнения (3.3.9) следует $\Phi_0\equiv P_4\equiv 0$. Тогда, используя эти равенства из второго уравнения (3.3.9), получим $\Phi_1\equiv P_3\equiv 0$ и после этого $\Phi_2\equiv P_2\equiv 0$. Таким образом, общее решение однородной задачи (3.0.1), (3.0.3) представляется в виде:

$$U(x,y)=\sum_{k=3}^{5}\left(1-z\overline{z}\right)^k\Phi_k(z)+\sum_{k=3}^{4}\left(1-z\overline{z}\right)^k\overline{z}P_{4-k}(\overline{z})\tag{3.3.10}$$

Здесь Φ_k - произвольные аналитические функции, а P_0,P_1 - произвольные полиномы порядков 0 и 1 соответственно. Следовательно, общее решение является функцией (3.3.2) и первая часть теоремы 3.3.1 доказана.

Для неоднородной задачи (3.0.1), (3.0.3), используя уравнения (3.3.9) и учитывая, что Φ_j являются аналитическими функциями, получаем, что для разрешимости задачи необходимо, чтобы функции $e^{5i\theta} f_j\left(\theta\right)$ были аналитическими в D. Это означает, что если мы представим граничные функции рядами Фурье:

$$f_j\left(\theta\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{kj} e^{ki\theta}, \quad j = 0,1,2 \tag{3.3.11}$$

тогда для разрешимости неоднородной задачи (3.0.1), (3.0.3) необходимо $f_{kj} = 0,$ при $k \le -6$ и $j = 0,1,2$. Далее, если приравняем коэффициенты Фурье правой и левой частей уравнений (3.3.9), получим следующие условия, необходимые и достаточные для разрешимости неоднородной задачи (3.0.1), (3.0.3):

$$20 f_{-50} = 4 f_{-51} = f_{-52}, \;\; 5 f_{-41} - 8 f_{-40} = f_{-42}, \;\; f_{kj} = 0, \;\; k \le -6. \tag{3.3.12}$$

Теорема 3.3.1 доказана.

Теперь предположим, что один из корней характеристического уравнения отличается от $i,$ то есть уравнение (3.0.1) приводится к виду:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^5 \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} - \mu_6 \frac{\partial}{\partial z}\right) U(x,y) = 0. \tag{3.3.13}$$

Здесь $0 < \left|\mu_6\right| < 1.$

Доказательство теоремы 3.3.2. Общее решение уравнения (3.3.13) имеет следующий вид (см. леммы 1.0.1 и 1.0.3):

$$U(x,y) = \sum_{k=0}^{4} \left(1 - z\overline{z}\right)^k \Phi_k(z) + \sum_{k=0}^{3} \left(1 - z\overline{z}\right)^k \overline{z} P_{4-k}(\overline{z}) + \Psi\left(z + \mu_6 \overline{z}\right),$$

где Φ_k функции аналитичны в D, а Ψ аналитичны в $D\left(\mu_6\right) = \left\{z + \mu_6 \overline{z} : z \in D\right\}$. Мы будем использовать граничные условия (3.0.3), поэтому удобнее представить эту функцию в виде:

$$U(x,y) = U_0(x,y) + \sum_{k=0}^{2} \left(1 - z\overline{z}\right)^k \Phi_k(z) + \sum_{k=0}^{2} z^k \overline{z}^{k+1} Q_{3-k}(\overline{z}) + \Psi\left(z + \mu_6 \overline{z}\right) \tag{3.3.14}$$

где Φ_k - аналитические функции, а Q_j - полиномы порядка j. Функция U_0 представляется в виде:

$$U_0(x,y) = \left(1 - z\overline{z}\right)^3 \left(\Phi_3(z) + \left(1 - z\overline{z}\right)\Phi_4(z) + C\overline{z}\right) \equiv \left(1 - z\overline{z}\right)^3 \nu_2(x,y) \tag{3.3.15}$$

где ν_2 - произвольная бианалитическая функция. Подставим функцию (3.3.14) в граничные условия (3.0.3). Получим:

$$2\varsigma^2\Phi_2(\varsigma)+\sum_{k=0}^{2}\varsigma^k\left(\bar{\varsigma}^{k+1}Q_{3-k}\left(\bar{\varsigma}\right)\right)''+\mu^2\Psi''\left(\varsigma+\mu_6\bar{\varsigma}\right)=F_0(\theta), \tag{3.3.16}$$

$$-\left(\varsigma\Phi_1(\varsigma)\right)'+2\Phi_2(\varsigma)+\sum_{k=1}^{2}k\varsigma^{k-1}\left(\bar{\varsigma}^{k+1}Q_{3-k}\left(\bar{\varsigma}\right)\right)'+\mu\Psi''\left(\varsigma+\mu_6\bar{\varsigma}\right)=F_1(\theta), \tag{3.3.17}$$

$$\Phi_0''(\varsigma)-\bar{\varsigma}\Phi_1'(\varsigma)+2\bar{\varsigma}^{-2}\Phi_2(\varsigma)+2\bar{\varsigma}^{3}Q_1(\bar{\varsigma})+\Psi''\left(\varsigma+\mu_6\bar{\varsigma}\right)=F_2(\theta). \tag{3.3.18}$$

Здесь $\varsigma=e^{i\theta}\in\Gamma$. Теперь используем лемму 1 для функции Ψ'' и разложим функции F_j в ряд Фурье:

$$F_j(\theta)=0.5a_{0j}+\sum_{k=1}^{\infty}a_{kj}\varsigma^k+0.5a_{0j}+\sum_{k=1}^{\infty}a_{-kj}\varsigma^{-k}\equiv F_j^+(\theta)+F_j^-(\theta) \tag{3.3.19}$$

Подставляя эти разложения в граничные уравнения (3.3.16), (3.3.17), (3.3.18) и приравнивая функции, аналитические вне $\bar{D}$, получим:

$$\begin{aligned}&\left(\bar{\varsigma}Q_3\left(\bar{\varsigma}\right)\right)''+\varsigma\left(\bar{\varsigma}^2\left(Q_2\left(\bar{\varsigma}\right)-Q_2\left(0\right)\right)\right)''+\mu_6^2\psi\left(\mu_6\bar{\varsigma}\right)=F_0^-(\theta),\\&\left(\bar{\varsigma}^2Q_2\left(\bar{\varsigma}\right)\right)'+2\varsigma\left(\bar{\varsigma}^3Q_1\left(\bar{\varsigma}\right)\right)'+\mu_6\psi\left(\mu_6\bar{\varsigma}\right)=F_1^-(\theta),\\&2\bar{\varsigma}^3Q_1\left(\bar{\varsigma}\right)-\Phi_1'(0)\,\bar{\varsigma}+2\bar{\varsigma}^2\left(\Phi_2(0)+\Phi_2'(0)\,\varsigma\right)+\psi\left(\mu_6\,\bar{\varsigma}\right)=F_2^-(\theta).\end{aligned} \tag{3.3.20}$$

Сначала рассмотрим однородную задачу (3.0.1), (3.0.3). В этом случае, решая систему (3.3.20), мы видим, что функция ψ является полиномом порядка не более двух и $Q_1\equiv 0$. После этого, решая систему (3.3.16), (3.3.17), (3.3.18), получаем, что функция $U-U_0$ является полиномом порядка не более пяти. Используя однородные граничные условия (3.0.3) и лемму 1.0.4, получаем, что этот многочлен делится на $(1-z\bar{z})^3$, то есть имеет порядок не менее шести. Следовательно, $U-U_0\equiv 0$, и общим решением однородной задачи является функция (3.3.5). Первая часть теоремы 3.3.2 доказана.

Рассмотрим неоднородную задачу (3.0.1), (3.0.3). Обозначим

$$G_j^-(\varsigma)=\sum_{k=5}^{\infty}a_{-kj}\varsigma^{-k}\equiv F_j^-(\theta)-0.5a_{0j}-\sum_{k=1}^{4}a_{-kj}\varsigma^{-k}.$$

Тогда из системы (3.3.20) имеем

$$\mu_6^2G_2^-(\theta)\equiv\mu_6G_1^-(\theta)\equiv G_0^-(\theta).$$

Эти функции равны $\mu_6^2\psi\left(\mu_6\bar{\varsigma}\right)$, поэтому граничные функции F_j должны быть аналитическими в кольце $\left\{|\mu_6|<|z|<1\right\}$ Теорема 3.3.2 доказана.

Доказательство теоремы 3.3.3. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.3.2, поэтому мы приводим только схему доказательства, опуская детали. Общее решение уравнения представляется в виде:

$$U(x,y)=U_0(x,y)+\sum_{k=0}^{2}\left(1-z\bar{z}\right)^k\Phi_k(z)+\sum_{k=0}^{2}z^k\bar{z}^{k+1}Q_{2-k}(\bar{z})+\Psi_5\left(z+\mu_5\bar{z}\right)+\Psi_6\left(z+\mu_6\bar{z}\right) \qquad (3.3.21)$$

где Ψ_k - аналитические функции, Q_j - многочлены порядка j, а функция U_0 - функция (3.3.6). Подставляя эту функцию в граничное условие (3.0.3), получаем:

$$2\varsigma^2\Phi_2(\varsigma)+\sum_{k=0}^{2}\varsigma^k\left(\bar{\varsigma}^{k+1}Q_{2-k}(\bar{\varsigma})\right)''+\sum_{k=5}^{6}\mu_k^2\Psi_k''\left(\varsigma+\mu_k\bar{\varsigma}\right)=F_0(\theta), \qquad (3.3.22)$$

$$2\Phi_2(\varsigma)-\left(\varsigma\Phi_1(\varsigma)\right)'+\sum_{k=1}^{2}k\varsigma^{k-1}\left(\bar{\varsigma}^{k+1}Q_{2-k}(\bar{\varsigma})\right)'+\sum_{k=5}^{6}\mu_k\Psi_k''\left(\varsigma+\mu_k\bar{\varsigma}\right)=F_1(\theta), \qquad (3.3.23)$$

$$\Phi_0''(\varsigma)-\bar{\varsigma}\Phi_1'(\varsigma)+2\bar{\varsigma}^2\Phi_2(\varsigma)+2\bar{\varsigma}^3Q_0(\bar{\varsigma})+\sum_{k=5}^{6}\Psi_k''\left(\varsigma+\mu_k\bar{\varsigma}\right)=F_2(\theta). \qquad (3.3.24)$$

Здесь $\varsigma=e^{i\theta}\in\Gamma$. Используем лемму 1.0.1 для функции Ψ_k'':

$$\Psi_k''\left(\varsigma+\mu_k\bar{\varsigma}\right)=\psi_k(\varsigma)+\psi_k\left(\mu_k\bar{\varsigma}\right),\quad \varsigma\in\Gamma,\quad k=5,6 \qquad (3.3.25)$$

где ψ_k аналитичны в D, а разложение Фурье (3.3.19) для функций F_j. Подставляя эти разложения в граничные уравнения (3.3.22), (3.3.23), (3.3.24) и приравнивая функции, аналитические вне $\bar{D}$, получим:

$$\begin{gathered}\left(\bar{\varsigma}Q_2(\bar{\varsigma})\right)''+\sum_{k=5}^{6}\mu_k^2\psi_k\left(\mu_k\bar{\varsigma}\right)=F_0^-(\theta),\\ \left(\bar{\varsigma}^2Q_1(\bar{\varsigma})\right)'+2\varsigma\left(\bar{\varsigma}^3Q_0(\bar{\varsigma})\right)'+\sum_{k=5}^{6}\mu_k\psi_k\left(\mu_k\bar{\varsigma}\right)=F_1^-(\theta),\\ 2\bar{\varsigma}^3Q_0(\bar{\varsigma})-\Phi_1'(0)\bar{\varsigma}+2\bar{\varsigma}^2\left(\Phi_2(0)+\Phi_2'(0)\right)+\sum_{k=5}^{6}\psi_k\left(\mu_k\bar{\varsigma}\right)=F_2^-(\theta).\end{gathered} \qquad (3.3.26)$$

Из этого уравнения, как и в предыдущей теореме, мы выводим, что функция U_0 является общим решением однородной задачи (3.0.1), (3.0.3). Давайте рассмотрим неоднородную проблему. Используя обозначения теоремы, представим граничные функции в виде

$$F_j(\theta) = E_j^-(\theta) + \sum_{k=-4}^{\infty} a_{kj}\varsigma^k.$$

Тогда, приравнивая коэффициенты для степеней ς меньше -3, получим:

$$\sum_{k=5}^{6} \mu_k^{2-j} \hat{\psi}_k\left(\mu_k \bar{\varsigma}\right) = E_j^-(\theta), \quad j = 0,1,2$$

Здесь $\hat{\psi}_k\left(z\right) = \psi_k(z) - \psi_k(0) - \psi_k'(0)z - \frac{1}{2}\psi_k''(0)z^2 - \frac{1}{6}\psi_k^{(3)}(0)z^3$. Эта система показывает, что функции E_j и, следовательно, F_j принадлежат классу $A^{(2,\alpha)}\left(\left|\mu_5\right|\right)$ и выполняется равенство (3.3.7). Теорема 3.3.3 доказана.

Доказательство теоремы 3.3.4 аналогично предыдущим доказательствам.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена исследованию задачи Дирихле для эллиптических уравнений шестого порядка в единичном круге. Используя представление общего решения, задачу удаётся привести к исследованию бесконечного множества линейных алгебраических уравнений, что позволяет эффективно решить рассматриваемую краевую задачу. Дефектные числа задачи (количество линейно независимых решений однородной задачи и количество линейно независимых условий разрешимости неоднородной задачи) определяются в явном виде по коэффициентам уравнения. Получены следующие результаты:

1. Случай правильно эллиптического уравнения:

- если мнимая единица является трёхкратным корнем характеристического уравнения, задача однозначно разрешима.
- если мнимая единица является двухкратным корнем, один корень с положительной мнимой частью простой, а корень с отрицательной мнимой частью трёхкратный получаем, что дефектные числа могут быть равны или нулю или единице.
- характеристическое уравнение имеет два различных корня (мнимая единица – простой корень, корень отличный от мнимой единицы - двухкратный) с положительной мнимой частью и один трёхкратный корень, не равный -i с отрицательной мнимой частью. В этом случае получен аналогичный результат.
- Рассмотрены также случай, когда характеристическое уравнение имеет один трёхкратный корень отличный от мнимой единицы, с положительной мнимой частью, а остальные корни простые. В этом случае получена новая формула для определения дефектных чисел.

2. Случай неправильно эллиптического уравнения:

- определён класс граничных функций, в котором рассматриваемая задача нормально разрешима.
- если мнимая единица имеет кратность не менее четырёх, то для разрешимости задачи необходимо, чтобы граничные функции аналитически продолжались

внутрь круга, а также необходима функциональная зависимость граничных функций. Для каждого случая (когда кратность мнимой единицы - четыре, пять и шесть) условия разрешимости определяются в явном виде.

- если кратность мнимой единицы менее трёх, получены новые формулы для определения дефектных чисел.
- если кратность мнимой единицы равна трём, то задача однозначно разрешима.

Результаты, представленные в диссертации, были опубликованы в следующих работах:

Результаты §2.1 первой главы диссертации опубликованы в [71] , [72]. Результаты §2.2 первой главы диссертации опубликованы в [73], [74]. Результаты §2.3 первой главы диссертации опубликованы в [75], [76]. Результаты §2.4 первой главы диссертации опубликованы в [77], [78]. Результаты §3.1 второй главы диссертации опубликованы в [79]. Результаты §3.2 второй главы диссертации опубликованы в [80].

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] Нахушев А.М., Уравнения математической биологии// М. Высшая школа.-1995.- 302с.

[2] Markowich P.A., Applied Partial Differential Equations: A visual approach// Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 2007.

[3] Егоров Ю.В., Шубин М.А., Линейные дифференциальные уравнения с частными производными// Основы классической теории. Итоги науки и техники, ВИНИТИ, Серия Современные проблемы математики.- Москва.-1988.-30.

[4] Михайлов В.П., Дифференциальные уравнения в частных производных.- Москва: Наука, 1983.- 424с.

[5] Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики.- Москва: Наука, 1977.- 735с.

[6] Fredholm J., Sur une nouvelle methode pour la resolution du problem de Dirichlet. – Kong// Vetenskaps-Akademians Froh. Stockholm.-1900.- P.39-46.

[7] Miranda C., Equazioni alle derivate parziali di tipo elliptic// Berlin, Springer- Verlag.-1955.- P.256.

[8] Петровский И.Г., О системах дифференциальных уравнений, все решения которых аналитичны// ДАН СССР.- 1937.-17.-С. 339-342.

[9] Бицадзе А.В., О единственности задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными// Успехи матем. Наук.-1948.-3, вып. 6(28).- С. 211-212.

[10] Вишик М.И., О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений// Мат. сб.- 1951.- 29(71), №3.-С. 615-676.

[11] Айрапетян Г.М., Задача Дирихле в пространствах с весом в полуплоскости// Изв. НАН Армении. Матем.- 2001.-36, №6.-С. 37-45.

[12] Алиханян Р.А., Внешняя задача Дирихле с данными из L^1 для эллиптического уравнения второго порядка// Изв. АН Арм. ССР, сер. Матем.-1983.-18, №1.-С. 39-48.

[13] Соболев С.Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике.- Москва: Наука, 1988.-334с.

[14] Векуа И.Н., Новые методы решения эллиптических уравнений// М. ОГИЗ.-1948.- 297с.

[15] Лопатинский Я.Б., О методе приведения граничной задачи для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным уравнениям// Укр. матем. журнал.-1953.- 5, .-С. 123-151.

[16] Шапиро З.Я., Об общих краевых задачах эллиптического типа// Изв. АН СССР, сер. Матем.- 1953.-17, .-С. 539-562.

[17] Джураев А.Д., Метод сингулярных интегральных уравнений.- Москва: Наука, 1987.-415с.

[18] Янушаускас А., Методы потенциала в теории эллиптических уравнений: Вильнюс, Мокслас.-1990.-262с.

[19] Bergman S., Shiffer M., Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics// N.-Y., Akad. Press.-1953.-p.432.

[20] Duduchava R., The Green formula and layer potentials, Integral Equations and Operator Theory.- 2001.-41, №2, .-P.127-178.

[21] Duduchava R., Mitrea D., Mitrea M., Differential operators and boundary value problems on hypersurfaces// Math. Nachr.-2006.- 279, №9-10 .-P. 996-1023.

[22] Бицадзе А.В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка.- Москва: Наука, 1966.-203с.

[23] Бицадзе А.В., Некоторые классы уравнений в частных производных.- Москва: Наука, 1981.- 448с.

[24] Бицадзе А.В., Самарский А.А., О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач// ДАН СССР.- 1969.-185, №4 .-С. 739-740.

[25] Levi B., Sobre la solucion general de la ecuacion en derivadas parciales de dos variables de orden n, homogenea con coeficientes// Math. Notae.-1954.-14.- P.50-63.

[26] Вольперт А.И., Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости// Тр. Моск. мат. об-ва.-1961.-, №10.-С. 41-87.

[27] Вольперт А.И., Задачи Дирихле для эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости// Укр. мат. журн..-1951.-3, №4.-С. 449-469.

[28] Литвинчук Г.С., Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.- Москва: Наука, 1977.-448с.

[29] Мусхелишвили Н.И., Сингулярные интегральные уравнения.- Москва: Наука, 1968, 512с.

[30] Солдатов А.П., Краевые задачи теории функций в областях с кусочно-гладкой границей, Тбилиси// Изд. ТГУ, Ин-т прикл. мат. им. И. Н. Векуа.-1991.-1.-266с., .-1991.-2.- 274с.

[31] Солдатов А.П., Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций: М. Высшая школа, 1991.-266с.

[32] Солдатов А.П., Алгебра сингулярных операторов с концевым символом на кусочно-гладкой кривой 1, Операторы типа свертки на полуоси// Дифф. Ур.-2000.-36, №9.-С. 1209-1219.

[33] Солдатов А.П., Алгебра сингулярных операторов с концевым символом на кусочно-гладкой кривой 2, Основные построения// Дифф. Ур.- 2001.-37, №6.-С. 825-838. 3, Операторы типа свертки на полуоси// Дифф. Ур.- 2001.- 37, №10.-С. 1364-1376.

[34] Tovmasyan N.E., Boundary value problems for partial differential equations and applications in electrodynamics// World Scientific.-Singapore, Hong-Kong, London.-1994.-232 p.

[35] Айрапетян Г.М., Разрывная задача Римана-Привалова со смещением в классе L^1// Изв. АН Арм. ССР, сер. Матем..- 1990.-25, №1.-С. 3-20.

[36] Айрапетян Г.М., О задаче Дирихле в пространствах с весом// Изв. НАН Армении, Матем..- 2001.-36, №3.-С. 22-44.

[37] Боярский Б., О первой краевой задаче для систем уравнений эллиптического типа второго порядка на плоскости// Польской АН, Сер. мат., астр. и физ. наук, Бюлл.- 1959.-7, №9.-С. 565-570.

[38] Бурский В.П., Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений// Киев, Наукова Думка.-2002.-315с.

[39] Вольперт А.И., Задачи Дирихле для эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости// Укр. мат. журн.-1951.-3, №4.-С. 449-469.

[40] Меликсетян Э.П., Задача Дирихле для слабо связанных эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка в ограниченных областях// Изв. АН Арм. ССР, сер. Матем.- 1981.-16, №4.-С. 253-273.

[41] Солдатов А.П., Об индексе задачи Дирихле для эллиптических систем на плоскости// Дифф. Ур.-2006.-42, №8.-С. 1092-1105, -С. 1150-1151.

[42] Солдатов А.П., Задача Дирихле для эллиптических систем на плоскости// Известия НАН Армении, матем.- 2005.-40, №6.-С. 54-69.

[43] Халилов Ш.Б., О разрешимости задачи Дирихле для многомерных эллиптических систем// Дифф. ур.- 1990.-26, №9.-С. 1621-1626.

[44] Товмасян Н.Е., Об одном методе решения дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости// Мат. сб.- 1972.-89(131), №4.-С. 559-615.

[45] Товмасян Н.Е., Внешняя задача Дирихле для эллиптических уравнений// Известия НАН Армении, Математика.-2000.-35, №6.-С. 15-23.

[46] Товмасян Н.Е. Закарян В.С., Задача Дирихле для правильно эллиптических уравнений в многосвязных областях// Известия НАН Армении, Математика.-2002.-37, №6.-С. 5-40.

[47] Volpert A., Volpert V., Normal solvability of general linear elliptic problems// Abstract and Appl. Analysis.-2005.-7.-P. 733-756.

[48] Вольперт А.И., Общие представления решений эллиптической системы уравнений с постоянными коэффициентами// Мат. ин-т. Сб. научн. трудив, Львов.-1954.-, №4.-С.111-112.

[49] Бабаян А.О., Об однозначной разрешимости задачи Дирихле для правильно эллиптического уравнения четвертого порядка.// Известия НАН Армении, Математика.-1999.-34, №5.- P. 1-15.

[50] Буряченко Е.А., О единственности решения задачи Дирихле в круге для дифференциальных уравнений четвертого порядка в вырожденных случаях. Нелинейные граничные задачи// Сб. научных трудов.- Донецк.- 2000.-, вып.10.-С. 44-49

[51] Babayan A.O., On Unique Solvability of the Dirichlet Problem for one Class of Properly Elliptic Equations// Topics in Analysis and Its Applications. NATO Science Series, Series II, Kluwer Academic Publishers.-2004.-147.- P. 287-295.

[52] Бурский В.П., Буряченко Е. А., Некоторые вопросы нетривиальной разрешимости однородной задачи Дирихле для линейного уравнения четного порядка в круге// Мат. заметки.-2005.-77, № 4.-С. 498–514.

[53] Ирицян В.А., Задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения в единичном круге// Известия НАН Армении, Математика.- 2003.-38, №5.-С. 29-38.

[54] Tovmasyan N.E., Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields// World Scientific.-Singapore, 1998.-236p.

[55] Бабаян А.О.. Задача Дирихле для правильно эллиптических уравнений в единичном круге// Известия НАН Армении, Математика.-2003.-38, №6.-С. 39-48.

[56] Бабаян А.О. Задача Дирихле для уравнения в частных производных порядка четвертого в случае двухкратных корней характеристического уравнения// Mathematica Montisnigri.-2015.-3 2 . - С. 66-80.

[57] Товмасян Н.Е., Новые постановки и исследования первой, второй и третьей краевых задач для сильно связанных эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами// Известия НАН Арм. ССР, сер. Математика.-1968.-3, № 6.-С. 497-521.

[58] Бурский В.П. О нарушении единственности решения задачи Дирихле для эллиптических систем в круге// Мат. Заметки.-1990.-48, №3.-С. 32-36.

[59] Begehr H., Kumar A., Boundary value problems for the inhomogeneous polyanalytic equation// I, Analysis (Munich).-2005.-25, № 1, P. 55–71.

[60] Бабаян А.О.. О задаче Дирихле для неправильно эллиптического уравнения четвертого порядка. Тезисы докладов межд. конф. посвященной 100-летию со дня рождения И.Н.Векуа Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения.-Новосибирск.-2007.-С.76-77.

[61] Axler S., Bourdon P., Ramey W., Harmonic function theory.-New York: SpringerVerlag, 2001.-270p.

[62] Babayan A.O., On Unique Solvability of the Dirichlet Problem for one Class of Properly Elliptic Equations// Topics in Analysis and Its Applications. NATO Science Series, Series II, Kluwer Academic Publishers.-2004.-147, .-P. 287-295.

[63] Lions J.-L., Magenes E., Problemes aux Limites Non-Homogenes et applications.-Paris, Dunod.- 1968.-1, P.372.

[64]. Anderson N., Saff E.B., Varga R.S. On the Enestrëm-Kakeya theorem and its sharpness// Linear Algebra and Its Appl.-1979.-28, P.5-16.

[65] Товмасян Н.Е., Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка, не удовлетворяющих условию Лопатинского// Сиб. мат. журнал.-1966.-7, №4.-С. 920-938.

[66] Товмасян Н.Е., Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами// Дифф.ур.-1966.-2, №1.-С. 3-23; №2.-С. 163-171.

[67] Бабаян А.О., О задаче Дирихле для неправильно эллиптического уравнения четвертого порядка.// Неклассические уравнения математической физики, Новосибирск.-2007.-С. 56-68.

[68] Babayan A.H., Mohammadi M.H. On a Dirichlet Problem for One Properly Elliptic Equation in the Unit Disk// Reports of NAS of Armenia.-2017.-117, №3.-P.192-199. (Russian)

[69] Бари Н.К. Тригонометрические ряды.-Москва: Физматгиз, 1961.-С. 936.

[70] Babayan A.H., Babayan V.A., “Defect Numbers of the Dirichlet Problem for Higher Order Partial differential Equations in the Unit Disc”// Caspian Journal of Comp. and Math, Engineering, (CJCME).-2016.-, №1.-P. 4-19.

[71] Babayan A.H., Abelyan S.H., On an Efective Solution of the Dirichlet Problem for Sixth Order Partial Differential Equation// Seventh International Scientific Conference “Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis VII”, Differential Equations and Mathematical Physics, Abstracts.-Rostov-on-Don.-2017.-P. 70-71.

[72] Бабаян А.О., Абелян С.О., О задаче Дирихле для одного правильно эллиптического уравнения шестого порядка в единичном круге// Вестник (НПУА). Сборник научных статей.-2017, №1.-С.14-18.

[73] Babayan A.H., Abelyan S.H., On a Dirichlet Problem for One Sixth Order Elliptic Equation// Reports of Enlarged Sessions of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, Tbilisi.-2017.-31, .-P. 7-10.

[74] Бабаян А.О., Абелян С.О., О задаче дирихле для правильно эллиптического уравнения шестого порядка в единичном круге// Системный анализ, управление и обработка информации: тр. VII междунар. семинара, ДГТУ.-Ростов-на-Дону.-2016.-С. 114-115.

[75] Абелян С.О., Об эффективном решении задачи Дирихле в единичном круге// ДОКЛАДЫ

НАН Армении.-2018.-118, №1.-С.15-19.

[76] Babayan A.H., Abelyan S.H., On Defect Numbers of the Dirichlet Problem// Annual Session of ARMENIAN MATHEMATICAL UNION, Abstracts.-Yerevan, Armenia.-2017.-P. 13-14.

[77] Абелян С.О., Дефектные числа задачи Дирихле для одного уравнения в частных производных шестого порядка// Вестник (НПУА). Сборник научных статей.-2018, №1.-С.28-33.

[78] Babayan A.H., Abelyan S.H., Defect Numbers of the Dirichlet Problem for a Properly Elliptic Sixth Order Equation// Mathematical Notes.-2018-104, №3.-P. 339-347.

[79] Babayan A. and Abelyan S., On an Effective Solution of the Boundary Value Problem for One Improperly Elliptic Equation// Harmonic Analysis and Approximations, VII, Abstracts.-2018.-P. 22-23.

[80] Babayan A.H., Abelyan S.H., On a Dirichlet Problem for One Improperly Elliptic Equation// International conference Dedicated to the 100th anniversary of Mkhitar Djrbashyan, Abstracts.-Yerevan, Armenia.-2018.-P. 16-17.