ՀՀ Կրթության և Գիտության
Նախարարություն
Երևանի Պետական Համալսարան

Սարգսյան Դավիթ Սարգսի

Դիսկրետկոմբինատոր խնդիրներ վերջավոր դաշտերում

Ատենախոսություն

Ա.01.09 Մաթեմատիկական
կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական
տրամաբանություն
մասնագիտությամբ
Ֆիզիկամաթեմատիկական
գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի համար

Գիտական ղեկավար՝
ֆ.մ.գ.դ., պրոֆ.
Ա.Ա.Ալեքսանյան

Երևան -2019

Բովանդակություն

Ներածություն

Թեմայի արդիականություն: Ատենախոսությունում դիտարկվում է երեք հիմնական խնդիր.

1. **Բազմություններ Որոնք Միարժեքորեն Որոշվում են Իրենց Տարրերի Զույգերի Գումարների Հավաքածուներով**. Խնդիրը առաջին անգամ առաջարկվել է 1957 թվականին [1]: Կարելի՞ է արդյոք վերականգնել բազմությունը ունենալով նրա տարրերի զույգերի գումարները: Պարզվում է որ հանրահաշվորեն փակ դաշտերում որոնց բնութագրիչը 0 է, եթե բազմության տարրերի քանակը երկուսի աստիճան չէ, ապա բազմությունը կարելի է վերականգնել [2]: Խնդրի արդի վիճակը դիտարկվել և տարբեր ընդհանրացումներ որպես թվերի տեսության բաց խնդիրներ առաջարկվել է մի շարք հետազոտողների կողմից [3,4]: Խնդրի առաջարկվելուց հետո, դիտարկվել են խնդրի տարբեր ընդհանրացումներ և կատարվել են մեծ թվով հետազոտություններ [5]: Խնդիրը դրվել է վերջավոր դաշտերի դեպքում և այն բաց է մնացել, բացի ատենախոսությունում դիտարկված դեպքերից:

2. Գնահատականների Արդյունավետ Իրականացումը Ճանաչման Ալգորիթմներում. Ճանաչման խնդիրները լայնորեն կիրառվում են տարբեր ոլորտներում (կենսաբանություն, սոցիոլոգիա, էկոնոմիկա, և այլն) հաճախ հանդիպող խնդիրներ լուծելու համար: Ենթադրվում է որ դիտարկվող օբյեկտները պատկանում են ինչ-որ M բազմության: Տրված բազմությունը կարող է ներկայացվել վերջավոր թվով դասերի միավորման տեսքով. $M = \bigcup_{i=1}^{l} K_i$: Ճանաչման խնդրի էությունը հետևյալն է. տրված են վերջավոր թվով $S_1, S_2, \dots, S_m$ օբյեկտներ M-ում, որոնցից յուրաքանչյուրի համար հայտնի է նրանց պատկանելությունը դիտարկվող դասերին: Պահանջվում է կառուցել մի A ալգորիթմ, որը M-ի կամայական S օբյեկտի համար կպարզի նրա պատկանելիությունը տրված դասերին:

Սկզբնական շրջանում ճանաչման խնդիրները դիտարկվում էին որպես մաքուր կիրառական խնդիրներ, ինչպիսին է օրինակ տեքստի ավտոմատացված ընթերցման խնդիրը: Ճանաչման խնդիրների շատ ընդհանուր լինելը հետագայում հնարավորություն տվեց այս խնդիրների լուծմանը բերել կիրառական նշանակություն ունեցող շատ հարցեր:Այս խնդիրներին կարելի է բերել ցանկացած որոշում կայացնելու խնդիր,որում որոշումը պետք է կայացվի հիմնվելով նախորոք կուտակված փորձի վրա: Այս փաստը հնարավորություն է տալիս ճանաչման խնդիրների հետ կապել մի շարք բարդ նկարագիր ունեցող օբյեկտների դասակարգման խնդիրներ: Տեսությունը կիրառվում է բարդ ֆորմալիզացվող ոլորտներում և պրակտիկաներում, որոնցից են օրինակ բժշկությունը, աշխարհագրությունը, սոցիոլոգիան, քիմիան, և այլն: Այսինքն ճանաչման խնդիրները ներկայումս համարվում են շատ արդիական:

1970-ականների սկզբին, Ժուրավլյովի կողմից ճանաչման խնդիրների լուծման համար առաջարկվել է գնահատականների հաշվման ալգորիթմների (ԳՀԱ) մոդելը [18-23]: Մոդելի ընդհանրությունը տալիս է դասակարգման կանոնների նկարագրության լայն հնարավորություն: Շատ հայտնի հյուրիստիկ (Heuristic) ալգորիթմներ համարվում են ԳՀԱ-ի մասնավոր դեպք և ստացվում են նրանից որոշակի պարամետրերի ընտրությամբ:

Տրված օբյեկտի համար, մոդելում հաշվվում են գնահատականները որոնք նկարագրում են օբյեկտի «մոտիկությունը» ամեն մի դասին: Այս գնահատականներով կատարվում է դասակարգումը:

ԳՀԱ մոդելն ունի լայն կիրառություն: Սակայն գնահատականների հաշվման դասական բանաձևերը գրեթե անհնար է կիրառել: Շատ աշխատանքներ են նվիրված հենց այդ ԳՀԱ մոդելների ալգորիթմական օպտիմիզացմանը [24-28]: Այս հետազոտությունների մեծամասնությունը կապված է գնահատականների հաշվման բանաձևերի լավացման և նրանց արդյունավետ իրականացման հետ, սահմանելով մոդելում պարամետրերի ընտրությունը:

3. Գծայնացվող Ծածկույթներ Վերջավոր Դաշտերում և Նրա Հետ Կապված Համարժեքության Հարաբերության Խումբ-Տեսական Նկարագրության Հնարավորությունը. բուլյան ֆունկցիաների դիզյունկտիվ նորմալ ձևերը դիսկրետ մաթեմատիկայի և մաթեմատիկական կիբեռնետիկայի հիմնական հետազոտման առարկաներից է: Դիզյունկտիվ նորմալ ձևերը ունեն լայն կիրառություն գիտության և տեխնիկայի տարբեր ոլորտներում:

Ծեննոնը և Պովարովը ներմուծել են բուլյան ֆունկցիաների համարժեքության հարաբերություն [29, 30]. n փոփոխականից երկու բուլյան ֆունկցիաներ համարժեք են այն և միայն այն դեպքում երբ նրանք ստացվում են մեկը մյուսից n-չափանի միավոր խորանարդի գագաթների իզոմետրիկ ձևափոխություններով: Իզոմետրիկ ձևափոխությունները կազմում են խումբ (Ծեննոն-Պովարովի խումբ) ծնված փոփոխականների տեղադրություններով և որոշ փոփոխականների ժխտումով:

Հեշտ է ստուգել որ համարժեք բուլյան ֆունկցիաների համար դ.ն.ձ.-ով սինթեզի բարդությունները հավասար են: Ծեննոն-Պովարովի դասերի աղյուսակային ներկայացումը տրված ֆունկցիայի դ.ն.ձ.-ով սինթեզի խնդիրը բերում է աղյուսակում համարժեք ներկայացուցիչ գտնելուն:

Համարժեքության դասերի մեծ քանակի պատճառով Ծեննոն-Պովարովի դասերի աղյուսակային ներկայացումը կիրառելի չէ նույնիսկ $n = 5$ դեպքում: Այդ պատճառով դիտարկվել է բուլյան ֆունկցիաները նոր համարժեքության հարաբերություն որը ևս պահպանում է համարժեք ֆունկցիաների դ.ն.ձ.-ով սինթեզի բարդությունները [31]: Հետազոտության մոտիվացիան եղել է համարժեքության դասերի քանակի նվազեցումը:

Սակայն ցույց է տրվել որ այս դեպքում ևս Շեննոն-Պովարովի խումբը ամենամեծ խումբն է որը գործում է n-չափանի միավոր խորանարդի ինտերվալների վրա այնպես, որ համարժեք ֆունկցիաների դ.ն.ձ.-ով սինթեզի բարդությունները հավասար են:

Գծայնացվող դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի (գ.դ.ն.ձ.) տեսությունը կառուցվել է որպես սովորական դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի (դ.ն.ձ.) տեսության բնական ընդհանրացում Ա.Ալեքսանյանի կողմից [33-35]: Ի տարբերություն դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տեսության, այստեղ տրամաբանական ֆունկցիաները ներկայացվում են F_{2^n} վերջավոր դաշտի (որպես գծային տարածություն) գծային ենթատարածությունների հարակից դասերի ծածկույթներով: Այս ծածկույթները կոչվում են գծայնացվող ծածկույթներ: Գծայնացվող դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տեսությունը ունի շատ առավելություններ սովորական դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տեսության նկատմամբ: Տեսության կառուցումը հնարավորություն տվեց գրանցել բուլյան ֆունկցիաների մինիմիզացիայի խնդրի էական առաջընթաց, որը անհնար էր հին տեսության մեթոդներով: Ա.Ալեքսանյանի աշխատանքները դարձան տրամաբանական ֆունկցիաների հետազոտությունների մի նոր ուղղության սկիզբը:

Գ.դ.ն.ձ.-երի դասում հնարավորություն է ստեղծվում ավելի լայն հանրահաշվական մեթոդների կիրառումը: Շատ են օրինակները որոնք ցույց են տալիս գ.դ.ն.ձ.-ի իրականացման բացահայտ առավելությունը դ.ն.ձ.-ի նկատմամբ: Օրինակ, ամենաբարդ դ.ն.ձ. ունեցող զույգությունը հաշվող $x_1 + x_2 + \cdots + x_n (mod\ 2)$ ֆունկցիան իրականացվում է գ.դ.ն.ձ.-

ների դասում մեկ երկարություն ունեցող բանաձևով: Մեծ ակտուալություն ունեցող քառակուսային ֆունկցիաների համար գ.դ.ն.ձ.-ն ստացվում է բացահայտ տեսքով, ինչը անհասանելի է համարվում դ.ն.ձ.-ի դեպքում:

Պարզ դարձավ նաև որ գծայնացվող ծածկույթների գաղափարը հնարավոր է կիրառել վերջավոր դաշտերում բազմանդամների, ինչպես նաև վերջավոր դաշտերի ենթաբազմությունների համար: Բուլյան ֆունցիաների համար ստացված շատ արդյունքներ ընդհանրացվեցին վերջավոր դաշտերում սահմանված ֆունկցիաների համար [36-46]: Այս ամենը խոսում է գծայնացվող ծածկույթների տեսության կարևորության և ակտուալության մասին:

Աշխատանքի նպատակը: Ատենախոսության հիմնական նպատակն է.

- Դիտարկել բազմությունների տարրերի գումարների հավաքածուներով բազմությունները որոշելու խնդրի անալոգը F_3 դաշտի նկատմամբ գծային տարածություններում և կամայական կենտ բնութագրիչ ունեցող դաշտերում:
- Դիտարկել ԳՅԱ մոդելների արդյունավետ իրականացման խնդիրը կախված հենքային բազմությունների համակարգի ընտրությունից:
- Դիտարկել վերջավոր դաշտերում գծայնացվող ծածկույթների խնդրի հետ կապված համարժեքության հարաբերության խումբ-

տեսական նկարագրության հնարավորությունը:

Հետազոտման օբյեկտները: Աշխատանքի հետազոտման օբյեկտներն են.

- Բազմության տարրերի զույգերի գումարների հավաքածուները F_3 դաշտի նկատմամբ գծային տարածություններում և կամայական կենտ բնութագրիչ ունեցող դաշտերում:
- Հենքային բազմությունների համակարգերը ԳՀԱ մոդելներում:
- Վերջավոր դաշտերում ենթաբազմությունների գծայնացվող ծածկույթները և վերջավոր դաշտերում գործող աֆինական ձևափոխությունները:

Հետազոտման մեթոդները: Աշխատանքում օգտագործվել են դիսկրետ մաթեմատիկայի և հանրահաշվի մեթոդները:

Արդյունքի գիտական նորությունը: Աշխատանքի հիմնական արդյունքներն են.

- **Բազմություններ Որոնք Միարժեքորեն Որոշվում են Իրենց Տարրերի Զույգերի Գումարների Հավաքածուներով.**
    - F_3 դաշտի նկատմամբ n-չափանի գծային տարածության (F_3^n) համար տրված են N-ի բոլոր արժեքները որոնց համար F_3^n-ի կամայական N տարրանի ենթաբազմություն միարժեքորեն որոշվում է իր տարրերի զույգերի գումարներով՝ $N \equiv 0 mod 3$ կամ $N = 3^n - 1$:

- Կամայական p կենտ բնութագրիչ ունեցող դաշտի նկատմամբ տրված է բավարար պայման բազմության տարրերի N քանակի համար՝ $N \not\equiv 2^k \bmod p, 0 \le k \le N-1,$ այնպես որ կամայական N տարրանի բազմությունն միարժեքորեն որոշվում է իր տարրերի զույգերի գումարներով:

- **Գնահատականների Արդյունավետ Իրականացումը Ճանաչման Ալգորիթմներում**. դիտարկվում է ԳՅԱ մոդելների արդյունավետ իրականացումը կախված հենքային բազմությունների համակարգի ընտրությունից, որը մոդելի շատ կարևոր պարամետր է: Հիմնական ստացված արդյունքներն են.
  - Աշխատանքում տրված են ռանգի և Δ-ռանգի ճշգրիտ արժեքները այն հենքային բազմությունների համակարգերի համար որոնց Δ-ռանգը չի գերազանցում 2-ը:
  - Տրվել է հենքային բազմությունների համակարգերի ընտրման ընդհանուր մոտեցում և նկարագրվել դրա կապը ԳՅԱ մոդելների արդյունավետ իրականացման հետ:
- **Գծայնացվող Ծածկույթներ Վերջավոր Դաշտերում և Նրա Հետ Կապված Համարժեքության Հարաբերության Խումբ-Տեսական Նկարագրության Հնարավորությունը**.
  - Ցույց է տրվել, որ վերջավոր դաշտի կիսաաֆինական ձևափոխությունների

խումբը ամենամեծ խումբն է, որը գործում է վերջավոր դաշտի ենթատարածությունների հարակից դասերի վրա և բավարարում սահմանված հատկությանը կապված գծայնացվող ծածկույթների խնդրի հետ:

Աշխատանքի բոլոր արդյունքները նոր են և ստացվել են հեղինակի կողմից առաջին անգամ:

Կիրառական նշանակությունը: Աշխատանքի արդյունքներն ու մեթոդները կարելի է կիրառել թվերի տեսության և վերջավոր դաշտերում խնդիրների հետազոտման, ճանաչման խնդիրներում արդյունավետ ալգորիթմների կառուցման, վերջավոր դաշտերում ենթաբազմությունների «էֆեկտիվ» ներկայացում կառուցելու, ինչպես նաև դիսկրետ մաթեմատիկայի և մաթեմատիկական կիբեռնետիկայի այլ խնդիրների հետազոտման համար:

Ապրոբացիան: Աշխատանքի հիմնական արդյունքները հրատարակված են երեք հոդվածներում: Հոդվածները զեկուցվել են ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի Դիսկրետ մաթեմատիկայի և տեսական ինֆորմատիկայի ամբիոնի սեմինարում, ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի ընդհանուր սեմինարում, և ԻԻԱՊ ընդհանուր սեմինարում:

Աշխատանքի ծավալը և կառուցվածքը: Աշխատանքը բաղկացած է 80 էջից: Աշխատանքը բաղկացած է ներածությունից, երեք գլխից, մեկ հավելվածից, եզրակացությունից և գրականության ցանկից (47 անուն):

ԳԼՈՒԽ 1

Բազմություններ Որոնք Միարժեք Որոշվում Են Իրենց Տարրերի Զույգերի Հավաքածուներով

1.1. Խնդրի Դրվածքը և Պատմությունը

Խնդրի սկզբնական դրվածքը եղել է հետևյալը [1].

Խնդիր 1.1.1: *Տրված են* $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_{10}$ *թվերը, որոնք ինչ-որ անհայտ* $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_5$ *թվերի զույգերի գումարներն են, այսինքն* $\{s_1, s_2, \dots, s_{10}\} = \{x_i + x_j \mid 1 \leq i < j \leq 5\}$*:*

(a). Պահանջվում է գտնել x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 *թվերը արտահայտված* $s_1, s_2, \dots, s_{10}$*-ով:*

(b). Ցույց տալ, որ եթե $s_1 < s_2 < \cdots < s_6$ *չկրկնվող թվերը ինչ-որ չորս թվերի զույգերի գումարներն են, ապա գոյություն ունի չորս թվերի մեկ այլ բազմություն որոնց զույգերի գումարները նորից* $s_1 < s_2 < \cdots < s_6$ *թվերն են:*

Օրինակ. $\{x_1, x_2, \dots, x_5\} = \{1, 1, 2, 3, 5\}$-ի համար $\{s_1, s_2, \dots, s_{10}\} = \{2, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8\}$:

Խնդիրը ունի շատ պարզ լուծում: (a) Նախ պարզ է որ $s_1 = x_1 + x_2, s_2 = x_1 + x_3, s_9 = x_3 + x_5, s_{10} = x_4 + x_5$: Նաև $\sum_{i=1}^{10} s_i = 4\sum_{i=1}^{5} x_i$: Այսքանը բավական է որպեսզի մենք գրենք լուծումը՝

$$x_1 = s_1 + s_2 + s_{10} - \left(\sum_{i=1}^{10} s_i\right)\Big/4$$

$$x_2 = \left(\sum_{i=1}^{10} s_i\right)\Big/4 - s_2 - s_{10}$$

$$x_3 = \left(\sum_{i=1}^{10} s_i\right)\Big/4 - s_1 - s_{10}$$

$$x_4 = \left(\sum_{i=1}^{10} s_i\right)\Big/4 - s_1 - s_9$$

$$x_5 = s_1 + s_9 + s_{10} - \left(\sum_{i=1}^{10} s_i\right)\Big/4$$

(b) Եթե մի բազմությունը $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$-ն է, $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$, ապա մյուսը $\{S - x_1, S - x_2, S - x_3, S - x_4\}$-ն է, որտեղ $S = (\sum_{i=1}^{4} x_i)/2$: Եթե $S - x_4 = x_1$, ապա

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2} - x_4 = x_1$$

և $x_2 + x_3 = x_1 + x_4$, որը հակասություն է (s_i-երը տարբեր են): Քանի որ $S - x_4$-ը և x_1-ը իրենց համապատասխան բազմությունների ամենափոքր տարրերն են, հետևաբար $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ և $\{S - x_1, S - x_2, S - x_3, S - x_4\}$ բազմությունները ևս տարբեր են:

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ բազմության իրարից տարբեր տարրերի զույգերի գումարների հավաքածուն կնշանակենք $\sigma(X)$-ով. $\sigma(X) = \{x_i + x_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$:
Խնդրի առաջարկվելուց հետո, երբ այն անմիջապես լուծվեց, խնդիրը ընդհանրացվեց և վերաձևակերպվեց.

Խնդիր 1.1.2: *Դիցուք ունենք թվերի* $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ *բազմությունը (թվերը կարող են լինել կոմպլեքս կամ կարող են լինել հանրահաշվորեն փակ դաշտից որի բնութագրիչը 0 է, կտեսնենք որ դա էական չէ): Արդյո՞ք* $\sigma(X)$*-ը միարժեքորեն որոշում է* X*-ը: Այլ խոսքերով, կա՞ թվերի մեկ այլ* Y *բազմություն այնպիսին որ* $\sigma(X) = \sigma(Y)$*:*

Խնդիր 1.1.2-ի պատասխանը տալիս է [2]-ը: Մասնավորապես ապացուցվել է հետևյալը.

Թեորեմ 1.1.3: *Գոյություն ունեն իրարից տարբեր երկու* A *և* B *բազմություններ այնպիսին որ* $|A| = |B| = n$ *և* $\sigma(A) = \sigma(B)$*, այն և միայն այն դեպքում երբ* n*-ը երկուսի աստիճան է:*

Օրինակ. երբ $n = 2$ ամեն ինչ պարզ է՝ երկու տարրից կազմված բազմությունը հնարավոր չէ վերականգնել միայն ունենալով այդ տարրերի գումարը: Սա մենք կարող ենք օգտագործել որպես հենք որպեսզի կառուցենք հակաօրինակներ ավելի մեծ n-երի համար: Ենթադրենք ունենք երկու A և B n տարրից բաղկացած բազմություններ, այնպիսին որ $\sigma(A) = \sigma(B)$: Ֆիքսենք $d \neq 0$ և դիտարկենք $A \cup (d + B)$ և $(d + A) \cup B$ բազմությունները: Հեշտ է տեսնել որ $\sigma\big(A \cup (d + B)\big) = \sigma\big((d + A) \cup B\big)$: Ակնհայտորեն d-ն կարելի է ընտրել այնպես որ $A \cup (d + B) \neq (d + A) \cup B$:

Կարելի է ցույց տալ նաև որ այդ բազմությունները կլինեն տարբեր կամայական $d \neq 0$-ի համար [2]:
Նշված խնդիրը հանդիպում է [3,4]-ում: Խնդրի հետ կապված հետազոտությունները մանրամասնորեն ամփոփված են [5]-ում: 1.2-ում մենք կդիտարկենք և կլուծենք խնդիրը F_3 դաշտի նկատմամբ գծային տարածություններում: 1.3-ում կդիտարկենք խնդիրը կամայական կենտ բնութագրիչ ունեցող վերջավոր դաշտում: Վերջին դեպքում խնդիրը վերջնականորեն լուծված չէ: Մենք կտանք n-ի համար բավարար պայման որի դեպքում կամայական n տարրանի X բազմություն միարժեքորեն որոշվում է $\sigma(X)$-ով: Ցույց կտանք նաև որ այդ պայմանը անհրաժեշտ չէ:

1.2. Ենթաբազմություններ F_3 Դաշտի Նկատմամբ Գծային Տարածություններում Որոնք Միարժեքորեն Որոշվում են Իրենց Զույգերի Գումարների Հավաքածուներով

Նախ տանք որոշ նշանակումներ: F_3^n-ով կնշանակենք n-չափանի գծային տարածությունը F_3 դաշտի նկատմամբ: F_3^n-ի C հավաքածուի համար կգրենք $C = \left\{c_1^{[m_1]}, c_2^{[m_2]}, \dots, c_N^{[m_N]}\right\}$, որտեղ $c_i \in F_3^n, m_i > 0$: $s \in F_3^n$ տարրի պատիկությունը C-ում նշանակվում է $count_C(s)$-ով. $count_C(s) = \sum_{\substack{1 \le i \le N \\ s = c_i}} m_i$: Նշենք որ թույլատրվում է $c_i = c_j, i \neq j$: C հավաքածուի հզորությունը նշանակվում է $|C|$-ով. $|C| = m_1 + m_2 + \cdots + m_N$:

Օրինակ. $C = \{0^{[2]}, 1^{[2]}, 1^{[3]}\} \subseteq F_3^1 = F_3$ համար՝

$$count_C(0) = 2,\ count_C(1) = 5,\ count_C(2) = 0, |C| = 7:$$

F_3^n-ի A և B հավաքածուները համարվում են հավասար այն և միայն այն դեպքում եթե կամայական $s \in F_3^n$ տարրի համար տեղի ունի $count_A(s) = count_B(s)$: Հիմնական գործողությունները հավաքածուների համար հասկացվում են հետևյալ ձևով. կամայական $s \in F_3^n$-ի համար՝

$$count_{A\cup B}(s) = count_A(s) + count_B(s)$$

$$count_{A\cap B}(s) = min\{count_A(s), count_B(s)\}$$

$$count_{A\setminus B}(s) = max\{count_A(s) - count_B(s), 0\}$$

Օրինակ. $A = \{0^{[2]}, 1^{[3]}\}, B = \{0^{[1]}, 1^{[4]}, 2^{[2]}\} \subseteq F_3$ համար՝

$$A \cup B = \{0^{[3]}, 1^{[7]}, 2^{[2]}\}, A \cap B = \{0^{[1]}, 1^{[3]}\}, A\setminus B = \{0^{[1]}\}, B\setminus A = \{1^{[1]}, 2^{[2]}\}$$

Մենք կգրենք $C \subseteq F_3^n$ և՛ հավաքածուների և՛ բազմությունների համար: Թե ինչ նկատի ունենք ամեն անգամ պարզ կլինի կոնտեքստից: Սահմանենք $set(C)$-ն որպես՝

$$set(C) = \{s \mid s \in F_3^n, count_C(s) > 0\}$$

Օրինակ. $A = \{0^{[2]}, 1^{[3]}\}, B = \{1^{[4]}, 2^{[2]}\} \subseteq F_3$ համար $set(A) = \{0, 1\}, set(B) = \{1, 2\}$:

Դիցուք A, B-ն բազմություններ են F_3^n-ում և $A \neq B$: Նրանց գումարը սահմանվում է հետևյալ ձևով՝

$$A + B = \{(a + b)^{[1]} \mid a \in A, b \in B\}$$

F_3^n-ի $A=\{a_1,a_2,\dots,a_N\}$ բազմության համար $A+A$-ով նշանակում ենք՝

$$A+A=\left\{(a_i+a_j)^{[1]} \mid 1\le i<j\le N\right\}$$

Սահմանումից հետևում է, որ $A+A$-ն A-ի էլեմենտների զույգերի գումարների հավաքածուն է՝ $\sigma(X)$-ը: Եթե $|A|=1$ ապա $A+A=\varnothing$: Նույն ձևով, F_3^n-ի $C=\left\{c_1^{[m_1]},c_2^{[m_2]},\dots,c_N^{[m_N]}\right\}$ հավաքածուի համար սահմանում ենք

$$C+C=\left\{(c_i+c_j)^{[m_i\cdot m_j]} \mid 1\le i< j\le N\right\}\cup\left\{2c_i^{\left[\binom{m_i}{2}\right]} \mid i=1,\dots,N\right\}$$

Քանի որ յուրաքանչյուր բազմություն կարելի է դիտարկել որպես մուլտիբազմություն, այս սահմանումը կոռեկտ է բազմությունների համար քիչ առաջ սահմանված համապատասխան գումարի նկատմամբ:

$c\in F_3^n$ էլեմենտի համար սահմանում ենք՝

$$c+C=\left\{(c+c_i)^{[m_i]} \mid 1\le i\le N\right\}$$

$c\in F_3^n$ էլեմենտի և $A\subseteq F_3^n$ բազմության համար $c+A$-ն կրկին սահմանվում է բնական ձևով՝

$$c+A=\{c\}+A=\left\{(c+a)^{[1]} \mid a\in A\right\}$$

Օրինակ. Դիցուք $A,B\subseteq F_3^2$ և $A=\{(0,0),(0,1),(0,2)\},B=\{(1,0),(1,1),(2,2)\}$: Այդ դեպքում՝

$$A+B=\left\{(1,1)^{[2]},(1,2)^{[2]},(2,0)^{[1]},(1,0)^{[2]},(2,1)^{[1]},(2,1)^{[1]},(2,2)^{[1]}\right\},$$

$$A+A=\left\{(0,0)^{[1]},(0,1)^{[1]},(0,2)^{[1]}\right\},B+B=\left\{(2,1)^{[1]},(0,2)^{[1]},(0,0)^{[1]}\right\}$$

Եթե $C=\left\{0^{[3]},1^{[3]}\right\}\subseteq F_3$, ապա $C+C=\left\{0^{[3]},1^{[9]},2^{[3]}\right\},1+C=\left\{1^{[3]},2^{[9]}\right\}$:

Բազմություններ կամ հավաքածուներ պարունակող արտահայտություններում, օրինակ $A+A\cup B+B$, $+$-ը ունի ավելի բարձր նախապատվություն քան ∪,∩:
Դիցուք A,B-ն ենթաբազմություններ են F_3^n-ում և $A\cap B=\emptyset$: Տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$(A\cup B)+(A\cup B)=A+A\cup A+B\cup B+B$$

F_3^n-ի C,D,E հավաքածուների համար, $C\cup D=C\cup E$ պայմանից հետևում է $D=E$:
Դիցուք $A=\{a_1,a_2,\dots,a_N\}$ բազմություն է F_3^n-ում: Ինչպես նշվեց նախորդ գլխում, ասում ենք որ A-ն միարժեք որոշվում է $A+A$-ով, եթե կամայական $B\subseteq F_3^n$-ի համար, այնպիսին որ $A+A=B+B$ (և ակնհայտորեն $|A|=|B|$), հետևում է $A=B$: Գտնենք N-ի արժեքները որոնց համար բոլոր $A\subseteq F_3^n$ N տարր պարունակող բազմությունները միարժեք որոշվում են $A+A$-ով:

Թեորեմ 1.2.1: *Տրված N-ի համար, $1\le N\le 3^n-1$, գոյություն ունեն իրարից տարբեր $A,B\subseteq F_3^n$ բազմություններ այնպիսին որ $|A|=|B|=N$ և $A+A=B+B$, այն և միայն այն դեպքում եթե $N\not\equiv 0 mod 3$ և $N\neq 3^n-1$:*

Ապացուցենք մի քանի պնդում և լեմմա որոնցից կհետևի թեորեմի պնդումը:

Պնդում 1.2.2: *Եթե $1\le N\le 3^n-1$ և $N\not\equiv 0 mod 3$, $N\neq 3^n-1$, ապա գոյություն ունեն իրարից տարբեր $A,B\subseteq F_3^n$ բազմություններ այնպիսին որ $|A|=|B|=N$ և $A+A=B+B$:*

Ապացույց: Կատարենք ինդուկցիա ըստ n-ի: Եթե $n=1$ ապա $N=1$ և $A=\{0\},B=\{1\}$-ի համար տեղի ունի $A+A=B+B=\emptyset$: Այժմ ենթադրենք $n>1$ և պնդումը ճիշտ է n-ից փոքր արժեքների համար: Քանի որ $N \not\equiv 0 mod 3$, մենք պետք է դիտարկենք հետևյալ դեպքերը.

<u>*Դեպք 1:*</u> $N < 3^{n-1} - 1$:

Համաձայն ինդուկցիայի ենթադրության, գոյություն ունեն իրարից տարբեր $A, B \subseteq F_3^{n-1}$ բազմություններ այնպիսին որ $|A| = |B| = N$ և $A + A = B + B$: Սահմանենք $C = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \mid (x_1, \dots, x_{n-1}) \in A\}$ և $D = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \mid (x_1, \dots, x_{n-1}) \in B\}$: Պարզ է որ $|C| = |D| = N$ և $C + C = D + D$:

<u>*Դեպք 2:*</u> $N = 3^{n-1} - 1$:

Դիցուք L-ը F_3^n-ի գծային ենթատարածությունն է կազմված բոլոր այն էլեմենտներից որոնց վերջին կոորդինատը 0 է: Դիցուք $a = (0, 0, \dots, 0, 0), b = (1, 0, \dots, 0, 0), c = (2, 0, \dots, 0, 0), M = L \setminus \{a, b, c\}, d = (2,2, \dots, 2,1), e = (1,2, \dots, 2,1)$: Դիտարկենք $A = \{c, d\} \cup M$ և $B = \{a, e\} \cup M$ բազմությունները: Այդ դեպքում $|A| = |B| = 3^{n-1} - 1 = N$: Եթե $m \in M$, ապա $b + m$ և $c + m$-ը երկուսն էլ պատկանում են M-ին: Ուստի, $c + M = M$ և $c + M = a + (c + M) = a + M$: Նույն ձևով, $b + M = M$-ից ունենք $d + M = (e + b) + M = e + (b + M) = e + M$: Այսպիսով, $c + d = a + e, c + M = a + M, d + M = e + M,$ և $A + A = B + B$:

Օրինակ. եթե $n = 3$

$$A = \{(2,2,1), (2,0,0), (0,1,0), (0,2,0), (1,1,0), (1,2,0), (2,1,0), (2,2,0)\}$$

$$B = \{(1,2,1), (0,0,0), (0,1,0), (0,2,0), (1,1,0), (1,2,0), (2,1,0), (2,2,0)\}$$

<u>*Դեպք 3:*</u> $3^{n-1} < N < 2 \cdot 3^{n-1} - 1$:

Նշանակենք $M = N - 3^{n-1}, 0 < M < 3^{n-1} - 1$: Դիցուք L-ը F_3^n-ի ենթաբազմությունն է կազմված բոլոր այն էլեմենտներից որոնց վերջին կոորդինատը 2 է: Դեպք 1-ից հետևում է որ գոյություն ունեն $C, D \subseteq F_3^n$ բազմություններ այնպիսին որ $C \neq D, |C| = |D| = M, C + C = D + D$

և յուրաքանչյուր $(x_1, \dots, x_n) \in C \cup D$ համար տեղի ունի $x_n = 0$: Թող $A = L \cup C, B = L \cup D$: Այդ դեպքում $A \neq B$ և $|A| = |B| = N$: $c = (c_1, \dots, c_n) \in C$-ից ունենք $c_n = 0$: Ուստի $c + L = L$ և $C + L = \{e^{[M]} \mid e \in L\}$: Նույն ձևով, $D + L = \{e^{[M]} \mid e \in L\}$ և ուստի $C + L = D + L$: Այսինքն ստանում ենք $A + A = B + B$:

<u>*Դեպք 4:*</u> $N = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$:

Դիցուք $M = 3^{n-1} - 1$: Դիցուք L-ը F_3^n-ի ենթաբազմությունն է կազմված բոլոր այն էլեմենտներից որոնց վերջին կոորդինատը 2 է: Համաձայն դեպք 2-ի գոյություն ունեն $A = \{d\} \cup A_1, B = \{e\} \cup B_1 \subseteq F_3^n$ բազմություններ այնպիսին որ $A \neq B, |A| = |B| = M, d = (d_1, \dots, d_{n-1}, 1), e = (e_1, \dots, e_{n-1}, 1)$, յուրաքանչյուր $(x_1, \dots, x_n) \in A_1 \cup B_1$ ունենք $x_n = 0$, և $A + A = B + B$: Թող $C = L \cup A, D = L \cup B$: Այդ դեպքում $C \neq D$ և $|C| = |D| = N$: Նկատենք նաև որ $d + L = e + L$: $a = (a_1, \dots, a_n) \in A_1$ համար տեղի ունի $a + L = L$ և $A_1 + L = \{e^{[M-1]} \mid e \in L\}$: Նույն ձևով $B_1 + L = \{e^{[M-1]} \mid e \in L\}$ և $A_1 + L = B_1 + L$: Այդ դեպքում $C + C = D + D$-ն միանգամից հետևում է $A + A = B + B, d + L = e + L,$ և $A_1 + L = B_1 + L$ հավասարություններից:

<u>*Դեպք 5:*</u> $2 \cdot 3^{n-1} < N < 3^{n-1} - 1$:

Դիցուք L-ը F_3^n-ի ենթաբազմությունն է կազմված բոլոր այն էլեմենտներից որոնց վերջին կոորդինատը 0 չէ: Դեպք 1-ից հետևում է որ գոյություն ունեն $C, D \subseteq F_3^n$ բազմություններ այնպիսին որ $C \neq D, |C| = |D| = N - 2 \cdot 3^{n-1}$, յուրաքանչյուր $(x_1, \dots, x_n) \in C \cup D$ տեղի ունի $x_n = 0$, և $C + C = D + D$: Նշանակենք $A = L \cup C, B = L \cup D$: Այդ դեպքում $A \neq B, |A| = |B| = N$ և $A + A = B + B$ ինչպես նախորդ երկու դեպքերում:

■

Լեմմա 1.2.3: *Եթե A, B-ն երկու տարբեր հավաքածուներ են F_3-ում այնպիսին որ $|A| = |B| = N$ և $A + A = B + B$, ապա $N \not\equiv 0 mod 3$:*

Ապացույց: Նշանակենք $n_i = count_A(i), m_i = count_B(i), i \in F_3$: Սիմետրիկությունից հետևում է որ բավական է դիտարկել հետևյալ դեպքերը.

<u>Դեպք 1:</u> $|set(A)| = |set(B)| = 1$:

Եթե $set(A) = set(B)$ ապա $A = B$, որը հակասություն է: Ուստի $set(A) \neq set(B)$: Առանց ընդհանրությունը խախտելու ենթադրենք $A = \{0^{[N]}\}, B = \{1^{[N]}\}$: Եթե $N = 1$, ապա դեպքը փակված է, հակառակ դեպքում $A + A \neq B + B$ որը հակասություն է:

<u>Դեպք 2:</u> $|set(A)| = 1, |set(B)| \geq 2$:

Ունենք $|set(A + A)| = 1$: Եթե $N = 2$ ամեն ինչ ավարտված է: Եթե $N \neq 2$ ունենք $|set(B + B)| \geq 2$: Ուստի, $A + A \neq B + B$, որը հակասություն է:

<u>Դեպք 3:</u> $|set(A)| = |set(B)| = 2$:

$|set(A)| = |set(B)| = 2$-ից ունենք $n_i = 0$ միայն մեկ $i \in \{0, 1, 2\}$ համար, և $m_j = 0$ միայն մեկ $j \in \{0,1,2\}$ համար: Ենթադրենք $i = j$: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել որ $i = j = 0$, այսինքն

$$A = \{1^{[n_1]}, 2^{[n_2]}\}, B = \{1^{[m_1]}, 2^{[m_2]}\}$$

$A + A = B + B$-ից ունենք $\binom{n_1}{2} = \binom{m_1}{2}$ և $\binom{n_2}{2} = \binom{m_2}{2}$ (հաշվելով 1-ի և 2-ի պատիկությունները $A + A$-ում և $B + B$-ում): Այժմ $n_1 = m_1, n_2 = m_2$, և $A = B$ որը հակասություն է: Ուստի $i \neq j$: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել որ $i = 2$ և $j = 0$.

$$A = \{0^{[n_0]}, 1^{[n_1]}\}, B = \{1^{[m_1]}, 2^{[m_2]}\}$$

Հաշվենք 2-ի պատիկությունները $A+A$-ում և $B+B$-ում. $\binom{n_1}{2}=\binom{m_1}{2}$: Այժմ $n_1=m_1=n$: $|A|=|B|=N$-ից ունենք $n_0=m_2=m$: Այսպիսով,

$$A=\left\{0^{[m]},1^{[n]}\right\}, B=\left\{1^{[n]},2^{[m]}\right\}$$

Հաշվենք 1-ի պատիկությունները $A+A$-ում և $B+B$-ում. $mn=\binom{m}{2}$: Այդ դեպքում
$mn=\frac{m(m-1)}{2}$ և $m=2n+1$: Այսինքն $N=3n+1\not\equiv 0mod3$:

<u>*Դեպք 4:*</u> $|set(A)|=3, |set(B)|=2$:

Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել որ $m_0=0$: Այսինքն $A=\left\{0^{[n_0]},1^{[n_1]},2^{[n_2]}\right\}$ և $B=\left\{1^{[m_1]},2^{[m_2]}\right\}$: Այդ դեպքում՝

$$n_0+n_1+n_2=m_1+m_2 \qquad (1)$$

Հավասարեցնելով 1-ի և 2-ի պատիկությունները $A+A$-ում և $B+B$-ում ստանում ենք

$$\binom{n_2}{2}+n_0n_1=\binom{m_2}{2} \qquad (2)$$

$$\binom{n_1}{2}+n_0n_2=\binom{m_1}{2} \qquad (3)$$

Ներքևում ցույց կտանք որ $n_0+n_1+n_2\not\equiv 0mod3$: (2)-ից և (3)-ից ունենք $m_2>n_2$ և $m_1>n_1$: Այսինքն՝

$$m_2=n_2+y$$

$$m_1=n_1+x,$$

որտեղ x,y-ը բնական թվեր են:
(1)-ից հետևում է $n_0=x+y$: Տեղադրենք n_0,m_2-ը (2)-ի մեջ.

$$\binom{n_2}{2} + (x+y)n_1 = \binom{n_2+y}{2}$$

Օգտագործելով $\binom{n_2+y}{2} = \binom{n_2}{2} + \binom{y}{2} + n_2 y$ ստանում ենք՝

$$\binom{n_2}{2} + n_1 x + n_1 y = \binom{n_2}{2} + \binom{y}{2} + n_2 y$$

$$n_1 x + n_1 y - n_2 y = \binom{y}{2}$$

$$n_2 = n_1 + \frac{x}{y} n_1 - \frac{1}{y}\binom{y}{2} \qquad (4)$$

Նույն ձևով տեղադրելով n_0, m_1-ի արժեքները (3)-ի մեջ կստանանք՝

$$n_2 x + n_2 y - n_1 x = \binom{x}{2}$$

Տեղադրենք (4)-ը վերջինիս մեջ՝

$$\left(n_1 + \frac{x}{y} n_1 - \frac{1}{y}\binom{y}{2}\right)x + \left(n_1 + \frac{x}{y} n_1 - \frac{1}{y}\binom{y}{2}\right)y - n_1 x$$

$$= n_1 x + \frac{x^2}{y} n_1 - \frac{x}{y}\binom{y}{2} + n_1 y + n_1 x - \binom{y}{2} - n_1 x$$

$$= n_1 x + n_1 y + \frac{x^2}{y} n_1 - \frac{x}{y}\binom{y}{2} - \binom{y}{2} = \binom{x}{2}$$

$$\binom{x}{2} + \binom{y}{2} + \frac{x}{y}\binom{y}{2} = n_1 x + n_1 y + \frac{x^2}{y} n_1$$

$$\frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2} + \frac{x}{y}\frac{y(y-1)}{2} = n_1\left(x + y + \frac{x^2}{y}\right)$$

$$x^2 - x + y^2 - y + xy - x = 2n_1\left(\frac{x^2 + xy + y^2}{y}\right)$$

$$2n_1 = \frac{x^2y - 2xy + y^3 - y^2 + xy^2}{x^2 + xy + y^2} = \frac{(y^3 + xy^2 + x^2y) - 2xy - y^2}{x^2 + xy + y^2}$$

$$2n_1 = y - \frac{2xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$$

Նույն ձևով կստանանք`

$$2n_2 = x - \frac{2yx + y^2}{x^2 + yx + y^2}$$

Քանի որ x-ը և y-ը բնական թվեր են, հետևում է որ`

$$y - 2n_1 = \frac{2yx + y^2}{x^2 + yx + y^2} > 0$$

Մյուս կողմից,

$$y - 2n_1 = \frac{2yx + y^2}{x^2 + yx + y^2} < \frac{2x^2 + 2yx + 2y^2}{x^2 + yx + y^2} = 2$$

Այսպիսով, $y - 2n_1 \in (0, 2)$: Քանի որ $y - 2n_1 \in Z$, ունենք $y = 2n_1 + 1$: Նույն ձևով, $x = 2n_2 + 1$: $n_0 = x + y$-ից ստանում ենք $n_0 + n_1 + n_2 = 3(n_1 + n_2) + 2 \not\equiv 0 mod 3$:

__Դեպք 5:__ $|set(A)| = |set(B)| = 3$:

Ունենք $n_i > 0$ և $m_i > 0, i = 0,1,2$: Ապացուցենք որ $C = A \setminus \{0^{[1]}, 1^{[1]}, 2^{[1]}\} = \{0^{[n_0-1]}, 1^{[n_1-1]}, 2^{[n_2-1]}\}$ և $D = B \setminus \{0^{[1]}, 1^{[1]}, 2^{[1]}\} = \{0^{[m_0-1]}, 1^{[m_1-1]}, 2^{[m_2-1]}\}$ համար տեղի ունի $C + C = D + D$: Հետևյալ հավասարություններից`

$$0 + C = \{0^{[n_0-1]}, 1^{[n_1-1]}, 2^{[n_2-1]}\}$$

$$1 + C = \{0^{[n_2-1]}, 1^{[n_0-1]}, 2^{[n_1-1]}\}$$

$$2 + C = \{0^{[n_1-1]}, 1^{[n_2-1]}, 2^{[n_0-1]}\}$$

Ստանում ենք

$$0+C\cup 1+C\cup 2+C=\left\{0^{[N-3]},1^{[N-3]},2^{[N-3]}\right\}$$

Այսինքն $0+C\cup 1+C\cup 2+C$ հավաքածուն կախված չէ C-ի տարրերից․այն կախված է C-ի հզորությունից։Քանի որ $A=C\cup\left\{0^{[1]},1^{[1]},2^{[1]}\right\}$,ունենք՝

$$A+A=C+C\cup 0+C\cup 1+C\cup 2+C\cup\left\{0^{[1]},1^{[1]},2^{[1]}\right\}+\left\{0^{[1]},1^{[1]},2^{[1]}\right\}$$

$$=C+C\cup\left\{0^{[N-3]},1^{[N-3]},2^{[N-3]}\right\}\cup\left\{0^{[1]},1^{[1]},2^{[1]}\right\}=C+C\cup\left\{0^{[N-2]},1^{[N-2]},2^{[N-2]}\right\}$$

Նույն ձևով, $B+B=D+D\cup\left\{0^{[N-2]},1^{[N-2]},2^{[N-2]}\right\}$: Այժմ $C+C=D+D$-ն հետևում է $A+A=B+B$-ից։
Այսպիսով մենք միշտ կարող ենք ենթադրել, առանց ընդհանրությունը խախտելու, որ կամ $|set(A)|<3$ կամ $|set(B)|<3$, հակառակ դեպքում կնշանակենք $k=\min\{n_0,n_1,n_2,m_0,m_1,m_2\}$ և կդիտարկենք $C=A\setminus\left\{0^{[k]},1^{[k]},2^{[k]}\right\}$, $D=B\setminus\left\{0^{[k]},1^{[k]},2^{[k]}\right\}$ հավաքածուները, որոնց համար $C+C=D+D, C\neq D$, կամ $|set(C)|<3$ կամ $|set(D)|<3$, և $|C|=|D|\equiv N mod 3$: Այսինքն, այս դեպքը բերվեց արդեն դիտարկված դեպքերին։ ■

Լեմմա 1.2.4: *Դիցուք A,B-ն իրարից տարբեր հավաքածուներ են F_3^n-ում, $n>1$, այնպիսին որ $|A|=|B|=N$ և $A+A=B+B$: Այդ դեպքում գոյություն ունեն իրարից տարբեր $A_L,B_L\subseteq F_3^{n-1}$ հավաքածուներ այնպես որ $|A_L|=|B_L|=N$ և* $A_L+A_L=B_L+B_L$:

Ապացույց: Ենթադրենք $A=\left\{a_1^{[m_1]},a_2^{[m_2]},\ldots,a_M^{[m_M]}\right\}$, $B=\{b_1^{[n_1]},b_2^{[n_2]},\ldots,b_N^{[n_N]}\}$: Դիցուք L-ը 1-չափանի գծային ենթատարածություն է F_3^n-ում։ F_3^n/L ֆակտոր տարածությունը իզոմորֆ է F_3^{n-1}-ին։ Հաշվի առնելով դա, կառուցենք F_3^{n-1}-ում երկու հավաքածուներ փոխարինելով A-ի և B-ի ամեն մի էլեմենտ L-ի իր հարակից դասով՝

$$A_L = \{(a_1 + L)^{[m_1]}, (a_2 + L)^{[m_2]}, \dots, (a_M + L)^{[m_M]}\}$$

$$B_L = \left\{(b_1 + L)^{[n_1]}, (b_2 + L)^{[n_2]}, \dots, (b_N + L)^{[n_N]}\right\}$$

$A + A = B + B$-ից հետևում է որ $A_L + A_L = B_L + B_L$: Ապացույցն ավարտելու համար ցույց տանք որ L-ը կարելի է ընտրել այնպես որ $A_L \neq B_L$:

Նշանակենք $C = A \cap B, D = A \backslash C, E = B \backslash C$: Այդ դեպքում $D \cap E = \emptyset$ և $|D| = |E|$: Իրոք, յուրաքանչյուր $s \in F_3^n$ համար՝

$$count_D(s) = \max\{count_A(s) - count_C(s), 0\}$$

$$count_E(s) = \max\{count_B(s) - count_C(s), 0\}$$

$C = A \cap B$-ից հետևում է որ $count_C(s) \leq count_A(s)$ և $count_C(s) \leq count_B(s)$: Այդ դեպքում՝

$$count_D(s) = count_A(s) - count_C(s)$$

$$count_E(s) = count_B(s) - count_C(s)$$

Այսինքն,

$$|D| = \sum_{s \in F_3^n} count_D(s) = \sum_{s \in F_3^n} count_A(s) - count_C(s)$$

$$= \sum_{s \in F_3^n} count_A(s) - \sum_{s \in F_3^n} count_C(s) = |A| - |C|$$

Նույնձևով, $|E| = |B| - |C|$, և $|D| = |E|$-ն հետևում է $|A| = |B|$-ից: Սիմետրիկությունից հետևում է որ բավական է դիտարկել հետևյալ դեպքերը.

Դեպք 1: $|set(D)| = |set(E)| = 1$:

Այսինքն, $A=\left\{d^{[k]}\right\}\cup C, B=\left\{e^{[k]}\right\}\cup C$, և $d\neq e$: Կարող ենք L-ը ընտրել այնպես որ d-ն և e-ն պատկանեն տարբեր հարակից դասերի ըստ L-ի: Այդ դեպքում A_L-ը և B_L-ը կլինեն տարբեր:

<u>Դեպք 2:</u> $|set(D)|=2, |set(E)|=1$:

Դիցուք $D=\left\{d_1^{[p]}, d_2^{[l]}\right\}$ և $E=\left\{e^{[k]}\right\}, k=p+l$: Դիտարկենք $L=\{0, d_1-d_2, -d_1+d_2\}$: Այդ դեպքում $d_1+L=d_2+L=H=\{d_1, d_2, -d_1-d_2\}$: Եթե $A_L\neq B_L$, ապա ամեն ինչ ավարտված է: Ենթադրենք $A_L=B_L$: Վերջինը նշանակում է $D_L\cup C_L=E_L\cup C_L$, որից հետևում է $D_L=E_L$ այնպես որ $e+L=d_1+L=H$: Քանի որ $D\cap E=\emptyset$, ունենք $e=-d_1-d_2$: Հիմա եթե $d_1\neq 0$ և $d_2\neq 0$, ապա $L_1=\{0, -d_1-d_2, d_1+d_2\}$-ի համար ունենք $d_1+L_1\neq e+L_1$ և $A_{L_1}\neq B_{L_1}$: Հակառակ դեպքում, եթե d_1, d_2-ից մեկը 0 է, ասենք $d_1=0$, ունենք $e=-d_2$: Վերցնելով $c\in F_3^n\backslash\{0, d_2, -d_2\}$, և $L_2=\{0, c, -c\}$, ստանում ենք $d_1+L_2\neq e+L_2$ և $A_{L_2}\neq B_{L_2}$:

<u>Դեպք 3:</u> $|set(D)|=|set(E)|=2$:

Դիցուք $D=\left\{d_1^{[m]}, d_2^{[n]}\right\}$ և $E=\left\{e_1^{[p]}, e_2^{[k]}\right\}, m+n=p+k$, և $L=\{0, d_1-d_2, d_1+d_2\}$: Այդ դեպքում $d_1+L=d_2+L=H=\{d_1, d_2, -d_1-d_2\}$: Եթե $A_L=B_L$, ապա $e_1+L=e_2+L=H$: Այդ դեպքում բոլոր d_1, d_2, e_1, e_2 տարրերը H-ից են, և քանի որ $D\cap E=\emptyset$, սա հակասում է $|H|=3$-ին: Ուստի, $A_L\neq B_L$:

<u>Դեպք 4:</u> $|set(D)|>2$:

Դիցուք $|set(D)|=P>2$ և $D=\left\{d_1^{[k_1]}, d_2^{[k_2]}, \dots, d_P^{[k_P]}\right\}, d_i\neq d_j, 1\leq i<j\leq P$: Դիցուք $L_1=\{0, d_1-d_2, -d_1+d_2\}$: Եթե $A_{L_1}\neq B_{L_1}$, ապա ամեն ինչ ավարտված է: Ենթադրենք $A_{L_1}=B_{L_1}$: $d_1+L_1=d_2+L=H=\{d_1, d_2, -d_1-d_2\}$-ից և $A_{L_1}=B_{L_1}$-ից հետևում է որ գոյություն ունի $e_1\in E$ այնպիսին որ $e_1+L_1=H$: $D\cap E=\emptyset$-ից ստանում ենք $e_1=-d_1-d_2$ և $-d_1-d_2\notin D$: Քանի որ $d_i+L_1\neq H, i>2$, և $e+L_1\neq H, e\in E, e\neq e_1$, ունենք

$count_E(e_1) = k_1 + k_2$: Նույնձև, եթե $L_2 = \{0, d_1 - d_3, -d_1 + d_3\}$-ի համար $A_{L_2} = B_{L_2}$, ապա $e_2 = -d_1 - d_3 \in E$ և $count_E(e_2) = k_1 + k_3$: Շարունակելով ստանում ենք $L_1 = \{0, d_1 - d_2, -d_1 + d_2\}$, $L_2 = \{0, d_1 - d_3, -d_1 + d_3\}, \dots, L_{P-1} = \{0, d_1 - d_P, -d_1 + d_P\}$, որոնց համար $count_E(e_1) = k_1 + k_2, count_E(e_2) = k_1 + k_3, \dots, count_E(e_{P-1}) = k_1 + k_P$: Այդ դեպքում՝

$$|E| \geq count_E(e_1) + count_E(e_2) + \cdots + count_E(e_{P-1})$$

$$= (k_1 + k_2) + (k_1 + k_3) + \cdots + (k_1 + k_P)$$

$$= (P-2) \cdot k_1 + k_1 + \cdots + k_P = (P-2) \cdot k_1 + |D|$$

Քանի որ $P > 2$, ունենք $|D| < |E|$, որը հակասություն է: Ուստի $A_{L_i} \neq B_{L_i}$ ինչ-որ մի i-ի համար, $1 \leq i \leq P-1$:

■

Լեմմա 1.2.5: *Եթե գոյություն ունեն $A, B \subseteq F_3^n$ իրարից տարբեր բազմություններ այնպիսին որ $|A| = |B| = N$ և $A + A = B + B$, ապա $N \not\equiv 0 mod 3$:*

Ապացույց: Ենթադրենք $A = \{a_1, \dots, a_N\}, B = \{b_1, \dots, b_N\}$: Քանի որ բազմությունները կարող են դիտարկվել նաև որպես հավաքածուներ, լեմմա **1.2.4**-ից հետևում է որ գոյություն ունեն իրարից տարբեր $A_L, B_L \subseteq F_3^{n-1}$ հավաքածուներ, այնպիսին որ $|A_L| = |B_L| = N$ և $A_L + A_L = B_L + B_L$: Եթե $n - 1 > 1$, կիրառելով լեմմա **1.2.4**-ը A_L-ի և B_L-ի վրա կստանանք իրարից տարբեր $A_{L_1}, B_{L_1} \subseteq F_3^{n-2}$ հավաքածուներ, այնպիսին որ $|A_{L_1}| = |B_{L_1}| = N$ և $A_{L_1} + A_{L_1} = B_{L_1} + B_{L_1}$: Կիրառենք լեմմա **1.2.4**-ը մինչև ստանանք իրարից տարբեր $C, D \subseteq F_3^1 = F_3$ հավաքածուներ այնպիսին որ $|C| = |D| = N$ և $C + C = D + D$: Այդ դեպքում $N \not\equiv 0 mod 3$-ն հետևում է լեմմա **1.2.3**-ից:

■

Լեմմա 1.2.6: *Եթե գոյություն ունեն* $A, B \subseteq F_3^n$ *իրարից տարբեր բազմություններ այնպիսին որ* $|A| = |B| = N$ *և* $A + A = B + B$*, ապա* $N \neq 3^n - 1$*:*

Ապացույց: Ենթադրենք $A = F_3^n \backslash \{e_1\}$ և $B = F_3^n \backslash \{e_2\}, e_1 \neq e_2$: Վերցնենք $C = F_3^n \backslash \{e_1, e_2\}$:Այդ դեպքում,

$$A + A = e_2 + C \cup C + C = B + B = e_1 + C \cup C + C$$

և,

$$e_1 + C = e_2 + C \qquad (5)$$

$e_1 + C$-ն C-ի տեղաշարժ է: Ուստի, $|e_1 + C| = |C| = |F_3^n| - 2$: $e_2 \notin C$-ից հետևում է որ $e_1 + e_2 \notin e_1 + C$:Եթե $-e_1 \in e_1 + C$, ապա $-e_1 - e_1 = -2e_1 = e_1 \in C$, որը հակասում է $e_1 \notin C$-ին:Այսպիսով,

$$e_1 + C = F_3^n \backslash \{e_1 + e_2, -e_1\}$$

Նույնձևով,

$$e_2 + C = F_3^n \backslash \{e_1 + e_2, -e_2\}$$

$e_1 \neq e_2$-ից հետևում է որ $e_1 + C \neq e_2 + C$, որը հակասում է (5)-ին: Լեմման ապացուցված է:

■

Լեմմա 1.2.5-ից և 1.2.6-ից հետևում է.

Պնդում 1.2.7: *Եթե գոյություն ունեն* $A, B \subseteq F_3^n$ *իրարից տարբեր բազմություններ այնպիսին որ* $|A| = |B| = N$ *և* $A + A = B + B$*, ապա* $N \not\equiv 0 mod 3$ *և* $N \neq 3^n - 1$*:*

Միավորելով պնդում 1.2.2-ը և 1.2.7-ը մենք ապացուցում ենք թեորեմ 1.2.1-ը:

1.3. Բավարար Պայման Որպեսզի Վերջավոր Դաշտերում Ենթաբազմությունները Միարժեք Որոշվեն Իրենց Զույգերի Գումարների Հավաքածուներով

Այս գլխում կենթադրենք որ p-ն կենտ պարզ թիվ է և F-ը p բնութագրիչ ունեցող վերջավոր դաշտ է: F_q-ն q էլեմենտ պարունակող վերջավոր դաշտ է: Դիցուք $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$-ը որևէ բազմություն է F-ում: Ինչպես **1.1** գլխում սահմանվեց, X-ի էլեմենտների զույգերի գումարների հավաքածուն նշանակում ենք $\sigma(X)$-ով:

Օրինակ. Դիցուք $X = \{1,2,3,4\} \subseteq F_5$: Այդ դեպքում $\sigma(X) = \{0,0,1,2,3,4\}$:

Կրկին դիտարկում ենք հետևյալ հարցը. $\sigma(X)$-ը որոշու՞մ է արդյոք միարժեքորեն X-ը: Այլ խոսքերով, կա՞ մեկ այլ $Y \subseteq F, Y \neq X,$ այնպիսին որ $\sigma(X) = \sigma(Y)$: Այս գլխում կտանք բավարար պայման n-ի համար, այնպես որ կամայական $X \subseteq F$ n տարր պարունակող բազմություն միարժեքորեն որոշվում է $\sigma(X)$-ով:

Սահմանում 1.3.1*:* *$1 \leq k \leq n$ համար, P_k^n-ով նշանակենք $\{1,2,\dots,n\}$-ի k էլեմենտ պարունակող ենթաբազմությունների բազմությունը: Էլեմենտար սիմետրիկ բազմանդամները սահմանվում են հետևյալ ձևով.*

$$e_k = \sum_{J \subset P_k^n} \prod_{i \in J} x_i$$

Ըստ սահմանման՝

$$e_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$e_2 = \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j$$

....

$$e_n = x_1 x_2 \dots x_n$$

Դիցուք $f_X(x)$-ը բազմանդամ է $F[x]$-ում որի լրիվ արմատների բազմությունը X-ն է:Այդ դեպքում՝

$$f_X(x) = x^n - e_1 x^{n-1} + e_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n e_n$$

p_k-ով նշանակենք $x_1, x_2, \dots, x_n$-ի k-րդ աստիճանային գումարը՝

$$p_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k, k \ge 0$$

Համաձայն Նյուտոնի նույնությունների [6]

$$k e_k = e_{k-1} p_1 - e_{k-2} p_2 + \dots + (-1)^{k-1} p_k, k = 1, \dots, n-1 \qquad (1)$$

$$0 = (-1)^{k-n-1} e_n p_{k-n} + (-1)^{k-n} e_{n-1} p_{k-n+1} + \dots + (-1)^{k-1} p_k, k \ge n \qquad (2)$$

Թեորեմ 1.3.2: *Եթե $n \not\equiv 2^k \bmod p, 0 \le k \le n-1$, ապա կամայական $X \subseteq F$ n տարր պարունակող բազմություն միարժեքորեն որոշվում է $\sigma(X)$-ով:*

Ապացույց: Դիցուք $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ և $\sigma(X) = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\binom{n}{2}}\}$: Հետևելով [2]-ին կառուցենք՝

$$s_k = \sum_{i=1}^{\binom{n}{2}} \sigma_i^k, k \ge 0$$

Այժմ կատարենք նույն գործողությունները ինչ [2]-ում.

$$s_k = \sum_{i=1}^{\binom{n}{2}} \sigma_i^k = \sum_{1\le i_1<i_2\le n} (x_{i_1}+x_{i_2})^k = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i_1,i_2=1\\ i_1\ne i_2}}^{n} \left(x_{i_1}+x_{i_2}\right)^k$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i_1,i_2=1}^{n} \left(x_{i_1}+x_{i_2}\right)^k - \sum_{i=1}^{n} (2x_i)^k\right)$$

Բացելով փակագծերը և միավորելով նման աստիճանները ստացվում է՝

$$s_k = \frac{1}{2}\left(\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} p_l p_{k-l} - 2^k p_k\right)$$

$$= (n-2^{k-1})p_k + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k-1} \binom{k}{l} p_l p_{k-l}, k \ge 1 \qquad (3)$$

Եթե $n<p$, օգտագործելով (3)-ը մենք ռեկուրսիվորեն կգտնենք $p_1,\dots,p_n$-ը: Այժմ թեորեմի պնդումը Նյուտոնի նույնությունների ուղիղ հետևանքն է: Այս դեպքում Նյուտոնի նույնությունները որոշում են $e_1,\dots,e_n$-ը և ուստի X-ը միարժեքորեն:

Դիցուք $n\ge p$: Ֆերմայի փոքր թեորեմից հետևում է որ $n \not\equiv 2^k\, mod\, p, k\ge 0$: Ուստի օգտագործելով (3)-ը մենք կարող ենք գտնել ամեն մի $p_k, k\ge 1$: e_k-ի գործակիցը (1)-ում 0-անում է երբ $k|p$ և մենք չենք կարողանում ռեկուրսիվորեն վերականգնել բոլոր e_k-երը: Գրենք Նյուտոնի նույնությունները $k=n,\dots,2n-1$ համար.

$$
\begin{cases}
0 = -e_n p_0 + e_{n-1} p_1 - \cdots + (-1)^{n-1} p_n \\
0 = e_n p_1 - e_{n-1} p_2 + \cdots + (-1)^n p_{n+1} \\
\vdots \\
0 = (-1)^{n-2} e_n p_{n-1} + (-1)^{n-1} e_{n-1} p_n + \cdots + (-1)^{2n-2} p_{2n-1}
\end{cases}
\tag{4}
$$

(4) համակարգը կազմված է n գծային հավասարումներից $e_n, \dots, e_1$-ի նկատմամբ, որը ունի հետևյալ գործակիցների մատրիցը.

$$
A = \begin{bmatrix}
-p_0 & p_1 & \cdots & (-1)^{n-2} p_{n-1} \\
p_1 & -p_2 & \cdots & (-1)^{n-2} p_n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(-1)^{n-2} p_{n-1} & (-1)^{n-1} p_n & \cdots & (-1)^{2n-3} p_{2n-2}
\end{bmatrix}
$$

Նշանակենք V-ով $-x_1, \dots, -x_n$-ի Վանդերմոնդի մատրիցան [7, [illegible] 2.9].

$$
V = \begin{bmatrix}
1 & -x_1 & \dots & (-1)^{n-1} x_1^{n-1} \\
1 & -x_2 & \cdots & (-1)^{n-1} x_2^{n-1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & -x_n & \dots & (-1)^{n-1} x_n^{n-1}
\end{bmatrix}
$$

և $\det(V) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$: Այդ դեպքում

$$
V^T = \begin{bmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 \\
-x_1 & -x_1 & \dots & -x_n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(-1)^{n-1} x_1^{n-1} & (-1)^{n-1} x_2^{n-1} & \dots & (-1)^{n-1} x_n^{n-1}
\end{bmatrix}
$$

Հաշվենք $V^T V$-ն՝

$$
V^T V = \begin{bmatrix}
p_0 & -p_1 & \cdots & (-1)^{n-1} p_{n-1} \\
-p_1 & p_2 & \cdots & (-1)^n p_n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(-1)^{n-1} p_{n-1} & (-1)^n p_n & \cdots & (-1)^{2n-2} p_{2n-2}
\end{bmatrix}
$$

Այժմ նկատենք որ $A = -(V^T V)$: Քանի որ $x_i \neq x_j, i \neq j$, ունենք $\det(A) = -\prod_{1 \le i < j \le n} \left(x_j - x_i\right)^2 \neq 0$: Ուստի (4)-ը ունի միայն մեկ լուծում և $e_1, \dots, e_n$-ը որոշվում են միարժեքորեն:

Այսպիսով X-ը ևս միարժեքորեն է որոշվում և ապացույցն ավարտված է: ■

Թեորեմ 1.3.2-ի պայմանը անհրաժեշտ չէ, այսինքն եթե կամայական $X \subseteq F\ \ n$ տարր պարունակեղ բազմություն միարժեքորեն որոշվում է $\sigma(X)$-ով, ապա անհրաժշտ չէ որ $n \not\equiv 2^k \, mod\, p, 0 \le k \le n-1$: Օրինակ, կամայական $X \subseteq F_3$ 2 էլեմենտ պարունակող բազմություն միարժեքորեն որոշվում է $\sigma(X)$-ով.

$$\sigma(\{0,1\}) = \{1\}$$

$$\sigma(\{0,2\}) = \{2\}$$

$$\sigma(\{1,2\}) = \{0\}$$

F_5-ի համար, բոլոր 4 էլեմենտ պարունակող բազմությունները ունեն տարբեր գումարների հավաքածուներ.

$$\sigma(\{1,2,3,4\}) = \{0,0,1,2,3,4\}$$

$$\sigma(\{0,2,3,4\}) = \{0,1,2,2,3,4\}$$

$$\sigma(\{0,1,3,4\}) = \{0,1,2,3,4,4\}$$

$$\sigma(\{0,1,2,4\}) = \{0,1,1,2,3,4\}$$

$$\sigma(\{0,1,2,3\}) = \{0,1,2,3,3,4\}$$

Նկատենք որ այս թեորեմից հետևում է լեմմա 1.2.5-ը: Նախորդ պարագրաֆում մենք նաև ցույց տվեցինք որ յուրաքանչյուր $X \subseteq F_{3^n}$ $3^n - 1$ էլեմենտ պարունակող բազմություն միարժեքորեն որոշվում է $\sigma(X)$-ով: Քանի որ $3^n - 1 \equiv 2 \, mod\, 3$, այստեղ մենք ևս ունենք հակաօրինակներ: Սրանք ոչ բոլոր հակաօրինակներն են: Օգտագործելով ծրագրավորման գործիքներ, օրինակ GAP [8], q-ի այլ արժեքների համար ևս կարող ենք գտնել հակաօրինակներ: Հետևյալ GAP ծրագիրը տպում է "$true$" եթե կամայական $X \subseteq F_q$ n տարրանի բազմության միարժեքորեն որոշվում է $\sigma(X)$-ով: Հակառակ դեպքում այն տպում է "$false$":

```
SumCollections := function(vals)
local sums;
sums := Combinations(vals, 2);
sums := AsSortedList(List(sums, Sum));
return sums;
end;
q := 11;; n := 8;;
FF := GF(q);; FF := List(FF);;
subsets := Combinations(FF, n);;
sums := AsSortedList(List(subsets, SumCollections));;
sums = Set(sums);
```

Օրինակ, բոլոր 8 էլեմենտից կազմված բազմությունները F_{11}-ում և բոլոր 24 էլեմենտ պարունակող բազմությունները F_{25}-ում միարժեքորեն որոշվում են իրենց գումարների հավաքածուներով: Ավելի մանրամասն օրինակներ բերված են Հավելված 1-ում:

ԳԼՈՒԽ 2

Գնահատականների Արդյունավետ Իրականացումը Ճանաչման Ալգորիթմներում

2.1. Ճանաչման Խնդիրը

Խնդիրը հետևյալն է [20]. տրված է օբյեկտների M բազմությունը, որի նկատմամբ կատարվում է դասակարգումը: M-ը ներկայացված է $M = \bigcup_{i=1}^{l} K_i$ տեսքով, որտեղ K_i ենթաբազմությունները կոչվում են դասեր:

Տրված է $K_1, K_2, \dots, K_l$ դասերի մասին I ինֆորմացիա, S օբյեկտի $I(S)$ նկարագիրը, որի մասին հայտնի չէ թե $K_1, K_2, \dots, K_l$ դասերից որին է այն պատկանում: Պահանջվում է ունենալով I ինֆորմացիան և $I(S)$ նկարագիրը, ամեն մի i-ի համար պարզել արդյոք $S \in K_j, j = 1,2, \dots, l$:

Վերը ձևակերպված խնդիրը հիմնականում անվանվում է պատկերների ճանաչման կամ դասակարգման խնդիր: Մենք այն կանվանենք ճանաչման խնդիր:

Սկզբում ճանաչման խնդիրները դիտարկվել են ինչպես մաքուր կիրառական խնդիրներ: Մեծ ուշադրություն է դարձվել օրինակ տեքստի ավտոմատացված ընթերցման խնդրին: Այդ դեպքում ամեն տառի համապատասխանեցվում է K դաս կազմված այդ տառի տարբեր պատկերներից: Պահանջվում էր նախապես տրված պատկերից (որը ենթադրվում էր որ ինչ-որ տառի պատկեր է) պարզել թե որ K դասին է այն պատկանում: Այլ խոսքերով, պահանջվում էր պարզել թե որ տառին է պատկերը համապատասխանում: Հետագայում սկսվեցին դիտարկվել նաև այլ, ավելի բարդ նկարագիր ունեցող օբյեկտների դասակարգման խնդիրներ: Ի հայտ եկան բժշկական ախտորոշման, տնտեսական և քաղաքական իրավիճակների, քիմիական կապերի հատկությունների գնահատման և այլ խնդիրներ:

Այս խնդիրներին մանրամասն անդրադառնալու անհրաժեշտություն չկա: Նրանցից ամեն մեկի համար կա մեծ գրականություն, և որն ամենակարևորն է, մաթեմատիկայի առումով այս խնդիրների միջև էական տարբերություն չկա: Միայն նշենք որ այս ճանաչման խնդիրները համարվում են շատ ընդհանուր խնդիրներ և նրանց են բերվում կիրառական նշանակություն ունեցող բազում հարցեր: Օրինակ, ճանաչման սխեմային կարող է բերվել ցանկացած որոշում կայացնելու խնդիր, որում որոշումը պետք է կայացվի հիմնվելով նախորոք կուտակված փորձի վրա:

Իրոք, ենթադրենք ունենք նախորոք հետազոտված $S_1, S_2, \dots, S_m$ իրավիճակներ և ինչ-որ ձևով տրված են նրանց $I(S_1), I(S_2), \dots, I(S_m)$ նկարագրությունները: Ամեն S_i իրավիճակի համար հայտնի է նաև իր $R(S_i)$ լուծումը: Դիցուք տրված է նաև բոլոր հնարավոր լուծումների $\{R\}$ բազմությունը, որի վրա սահմանված է «մոտ» լինելու գաղափար, այսինքն լուծումները կարող են բաժանվել $K_1, K_2, \dots, K_l$ դասերի, այնպես որ միևնույն դասին պատկանում են իրար «մոտ» լուծումները: Տարբեր դասերին պատկանող լուծումները միմյանց «մոտ» չեն:

Տրված է մի նոր իրավիճակի $I(S)$ նկարագրությունը: Պահանջվում է հիմնվելով նախապես հետազոտված իրավիճակների $I(S_1), I(S_2), \dots, I(S_m)$ նկարագրությունների և գտնված $R(S_1), R(S_2), \dots, R(S_m)$ լուծումների վրա, գտնել թե լուծումների որ դասի հետ պետք է այս իրավիճակը ասոցացվի:

Այսինքն, ճանաչման խնդիրը մասնավոր դեպքում համարվում է օպտիմալ լուծումների որոնման խնդրի դիսկրետ անալոգը: Ճանաչման խնդիրներին են բերվում ոչ միայն վերը նշված որոշում կայացնելու, այլ նաև կիրառական նշանակություն ունեցող այլ խնդիրներ: Դա առաջին պատճառն է որ այս դասակարգման խնդիրները ունեն կարևոր նշանակություն: Երկրորդ պատճառը, որը շատ կարևոր է մաթեմատիկոսների համար, այն է որ այս խնդիրների լուծումները հանգեցնում են մեծ թվով ինչպես ընդունված է ասել հյուրիստիկ (Heuristic) ալգորիթմների: Բանն այն է որ ճանաչման տեսության կիրառությունները մեծամասամբ կապված են բարդ ֆորմալիզացվող տեսությունների և պրակտիկաների հետ, որոնցից են օրինակ բժշկությունը, աշխարհագրությունը, սոցիոլոգիան, քիմիան, և այլն:

Այդ ոլորտներում դժվար է ֆորմալ տեսությունների ստեղծումը և ստանդարտ լուծումների կիրառումը: Լավագույն դեպքերում հնարավոր է լինում որոշ տրամաբանական սկզբունքների տալ մաթեմատիկական ձևակերպում, որից օգտվելով այնուհետև կառուցվում են հյուրիստիկ ալգորիթմներ: Դա է պատճառը որ ճանաչման խնդիրների հետազոտության սկզբնական շրջանում ի հայտ էին եկել բազում մեթոդներ որոնք կիրառվում էին առանց կիրառական խնդիրները լուծելու լուրջ հիմնավորման: Այդպիսի մեթոդները, ինչպես հիմնականում ընդունված է փորձարարական գիտությունների ոլորտներում, հիմնավորվում էին իրական խնդիրների վրա կատարված նրանց կիրառություններով: Չնայած մաթեմատիկական հիմնավորումների բացակայության, այդ մեթոդներից շատերը իրական փորձերում տալիս էին լավ արդյունք և շարունակում են կիրառվել:

Տեսության զարգացման ընթացքում սկսվեցին դիտարկվել ոչ միայն կոնկրետ ալգորիթմներ, այլ նաև ճանաչման խնդիրը լուծող ալգորիթմների մոդելներ: Մինչ այժմ կառուցվել և հետազոտվել են մոդելների մի շարք տիպեր: Առավել մեծ կիրառություն ունեցող մոդելներից են [9].

1. Մոդելներ որոնք կառուցվում են հիմնվելով բաժանման սկզբունքի վրա (R-մոդելներ) [10-15]:
2. Վիճակագրական մոդելներ [15, 16]:
3. Պոտենցիալների սկզբունքի վրա հիմնված մոդելներ [17]:
4. Ասույթների հաշվման վրա հիմնվող մոդելներ [26]:
5. Մոդելներ, որոնք հիմնվում են գնահատականների հաշվման վրա [18-23]:

Բաժանման սկզբունքի վրա հիմնված մոդելներում կառուցվում են հիպերհարթություններ (կամ ավելի բարդ հարթություններ) որոնք բաժանում են տարբեր դասերին պատկանող օբյեկտները: Այս տիպի ալգորիթմները միմյանցից տարբերվում են բաժանող հարթությունների տիպերով և նրանց կառուցման եղանակով:

Վիճակագրական ալգորիթմները դասակարգման որոշումը կայացնում են հիմնվելով մաթեմատիկական վիճակագրության տարբեր սկզբունքների վրա: Այս ալգորիթմները հիմնականում օգտագործվում են երբ հայտնի են (կամ պարզապես կարող են որոշվել) $K_1, K_2, \ldots, K_l$ դասերի հավանականությունների բնութագրիչները, օրինակ երբ հայտնի են համապատասխան բաշխման ֆունկցիաները: Քանի որ հիմնականում հնարավոր չի լինում սկզբնական ինֆորմացիայից կոռուցել այնպիսի բնութագրիչներ որոնք կունենան մեծ հուսալիություն, այս մոդելները նույնպես կարելի է համարել հյուրիստիկ սկզբունքների վրա հիմնված մոդելներ:

Դիտարկելով օբյեկտները որոնց պատկանելիությունը K_j դասին նախապես որոշվել է, տարբեր մեթոդներով կարելի է սահմանել այդ բազմության կշիռը և բազմության հեռավորությունը դիտարկվող S օբյեկտից: Պոտենցիալների մոդելում օբյեկտների նմանությունը որոշվում հեռավորության ֆունկցիայով, որի հիմքում ընկած է հայտնի ֆիզիկական սկզբունքը՝ ձգողության ուժը ուղիղ համեմատական է կշիռների արտադրյալին և հակառակ համեմատական է հեռավորությանը:

Ասույթների հաշվման վրա հիմնված մոդելներում, օբյեկտները նկարագրվում են տրամաբանական փոփոխականների, իսկ դասերը այդ փոփոխականների միջև տրամաբանական հարաբերությունների տեսքով: Օբյեկտի դասակարգումը բերվում է դասերը նկարագրող բուլյան պայմանների ստուգմանը:

Գնահատականների Հաշվման Ալգորիթմների (ԳՀԱ) Մոդելը ամենաշատ կիրառվող մոդելներից է: Այս մոդելին կանդրադառնանք 2.3-ում:

2.2. Խնդրի Դրվածքը

Դիցուք տրված է թույլատրելի օբյեկտների բազմությունը՝

$$M = \bigcup_{i=1}^{l} K_i \subseteq M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$$

Որտեղ M_i-ն d_i մետրիկայով մետրիկական տարածություն է, $i = 1,2,\dots,n$: K_i ենթաբազմությունները կոչվում են դասեր և $K_i \neq \emptyset$, $i = 1,2,\dots,l$: M-ի տրոհումը դասերի լիարժեքորեն տրված չէ: Տրված է միայն $K_1,\dots,K_l$ դասերի մասին ինչ-որ $I(K_1,\dots,K_l)$ ինֆորմացիա: Ընդունված է $I(K_1,\dots,K_l)$ ինֆորմացիան անվանել *սովորեցնող ինֆորմացիա:*

Յուրաքանչյուր թույլատրելի S օբյեկտի համար սահմանված է նրա *լրիվ ստանդարտ նկարագրությունը*՝ $I(S) = (a_1(S), a_2(S), \dots, a_n(S))$, որտեղ $a_i(S) \in M_i, i = 1,2,\dots,n$, և *իրական ինֆորմացիոն վեկտորը*՝ $\tilde{\alpha}(S) = (\alpha_1(S), \alpha_2(S), \dots, \alpha_l(S))$, որը նկարագրում է օբյեկտի «դասակարգումը», այսինքն օբյեկտի պատկանելիությունը դասերին՝ $P_i(S) = \alpha_i(S) \in \{0,1\}, i = 1,2,\dots,l$, որտեղ $P_i(S)$-ն պրեդիկատ է՝ «$S \in K_i$»:

ճանաչման խնդիրը կայանում է նրանում, որ պետք է կառուցել A ալգորիթմ, որը $I(K_1, \dots, K_l)$ սովորեցնող ինֆորմացիայից և S թույլատրելի օբյեկտի $I(S)$ նկարագրությունից ստանում է $\tilde{\alpha}(S)$ իրական ինֆորմացիոն վեկտորը:

Ինֆորմացիայի նախադեպերով ճանաչման խնդրում սովորեցնող ինֆորմացիան իրենից ներկայացնում է օբյեկտների ցանկ (*էտալոնային օբյեկտներ*), որոնց համար հայտնի է դասակարգումը:

Սահմանում 1.2.1: *Հետևյալ հավաքածուների զույգը կոչվում է իրական ստանդարտ ինֆորմացիա՝*

$$X_1 = \left(I(S_m), \dots, I(S_m)\right),\ X_2 = \left(\tilde{\alpha}(S_m), \dots, \tilde{\alpha}(S_m)\right)$$

և նշանակվում է $I_0(K_1, \dots, K_l)$-ով:

Ինֆորմացիայի նախադեպով ճանաչման խնդրի էությունը կայանում է նրանում որ պետք է կառուցել A ալգորիթմ այնպես որ՝

$$A\left(I_0(K_1, \dots, K_l), I(S)\right) = \tilde{\alpha}^A(S) \equiv \left(\tilde{\alpha}_1^A(S), \tilde{\alpha}_2^A(S), \dots, \tilde{\alpha}_l^A(S)\right),$$

որտեղ $\tilde{\alpha}^A(S) = \tilde{\alpha}(S)$:

Թույլատրվում է որ ալգորիթմը չպատասխանի օբյեկտի i-րդ դասին պատկանելիության հարցին: Այդ դեպքում գրվում է $\tilde{\alpha}_i^A(S) = \Delta$: Ճանաչման խնդիրներ լուծելիս դիտարկվում են նաև ալգորիթմներ որոնցում չի պարտադրվում որ $\tilde{\alpha}_i^A(S) \in \{\alpha_i(S), \Delta\}$ ցանկացած $i \in \{1, 2, \dots, l\}$:

2.3. Գնահատականների Հաշվման Ալգորիթմների Մոդելը

Գնահատականների Հաշվման Ալգորիթմների (ԳՀԱ) մոդելը առաջարկվել է Ժուռավլյովի կողմից [18-23]: Մոդելի հիմնական սկզբունքներն են.

1. Օբյեկտի դասակարգումը որոշվում է օբյեկտի դասերին պատկանելու գնահատականների հաշվմամբ: Այն դասը որի գնահատականը ավելի մեծ է, այդ դասին էլ պատկանում է օբյեկտը:

2. Դասերին պատկանելու գնահատականների հաշվման ժամանակ հաշվի են առնվում օբյեկտի մոտիկությունը / հեռավորությունը էտալոնային օբյեկտներին: Մոտիկությունը դա օբյեկտների նկարագրությունների «նմանությունն» է՝ ատրիբուտների արժեքների միջև փոքր հեռավորությունը:Այդ դեպքում,որքան մեծ է դասին պատկանելու գնահատականը, այնքան օբյեկտը մոտ է այդ դասի էտալոնային օբյեկտներին և հեռու է մյուս դասերի էտալոնային օբյեկտներից:

3. Դիտարկվող S օբյեկտի և էտալոնային S' օբյեկտի հեռավորությունը որոշվում է այդ օբյեկտների ատրիբուտների հեռավորությամբ, և ֆորմալացվում է *հեռավորության ֆունկցիայի* գաղափարով:

Մոդելի Սահմանումը. Օգտագործելով իրական ստանդարտ ինֆորմացիան և S թույլատրելի օբյեկտի նկարագիրը, կառուցվում է S օբյեկտի K_j դասին պատկանելու $\Gamma_j(S)$ գնահատականը:

Մոդելի յուրաքանչյուր A ալգորիթմ որոշվում է հենքային բազմությունների համակարգի, հեռավորության ֆունկցիայի, թույլատրելի օբյեկտների կշիռների, ատրիբուտների կշիռների, և որոշման կանոնի ընտրությամբ: A ալգորիթմի հենքային բազմությունների Ω_A համակարգը դա $\{1,2,\dots,n\}$ բազմության ենթաբազմությունների ոչ դատարկ բազմությունն է: Յուրաքանչյուր $\Omega \in \Omega_A$ էլեմենտ կարող է նկարագրվել իր բնութագրիչ վեկտորի օգնությամբ՝ $\omega_\Omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, որտեղ $\omega_\Omega^i = 1$ այն և միայն այնդեպքում երբ $i \in \Omega$: Նշանակենք $W_{\Omega_A} = \{\omega_\Omega \mid \Omega \in \Omega_A\}$:

Յուրաքանչյուր A ալգորիթմում ֆիքսվում են $q_1, q_2 \geq 0$ և $\varepsilon_i \geq 0, i = 1,2,\dots,n$ թվերը: Թույլատրելի $S = (s_1, s_2, \dots, s_n), S' = (s_1', s_2', \dots, s_n')$ օբյեկտների և Ω հենքային բազմության համար, նրանց $B(\Omega, S, S')$ հեռավորության ֆունկցիան սահմանվում է հետևյալ ձևով՝

$$B(\Omega, S, S') = \begin{cases} 1, & (\delta \cdot \omega_\Omega) \geq q_1, (\overline{\delta} \cdot \omega_\Omega) \leq q_2 \\ 0, & \text{□□□□□□□ □□□□□□□} \end{cases}$$

որտեղ $\delta = \delta(S, S') = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ այնպես որ

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & d_i(s_i, s_i') \leq \varepsilon_i \\ 0, & d_i(s_i, s_i') > \varepsilon_i \end{cases}$$

Դիցուք $\gamma(S)$-ը S թույլատրելի օբյեկտի կշիռն է: $i \in \{1,2,\dots,n\}$ ատրիբուտի կշիռը նշանակենք $\mu_i \geq 0$-ով: $\Omega = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ հենքային բազմության կշիռը սահմանվում է $\mu(\omega_\Omega) = \mu_{i_1} + \mu_{i_2} + \dots + \mu_{i_k}$: Այժմ, $\Gamma_i(S)$ գնահատականը սահմանվում է հետևյալ ձևով՝

$$\Gamma_i(S) = \frac{1}{F|K_i|} \sum_{S' \in K_i} \gamma(S') \sum_{\Omega \in \Omega_A} \mu(\omega_\Omega) B(\Omega, S, S') \qquad (1)$$

որտեղ F-ը նորմավորման գործակից է:

Ունենալով գնահատականները կատարվում օբյեկտի դասակարգումը:

2.4. Արդյունավետ Ալգորիթմների Կառուցման Մոտեցում Գնահատականների Հաշվման Ալգորիթմների Մոդելում

Դժվար չէ նկատել որ ԳՀԱ-ում A ալգորիթմի արդյունավետությունը ուղիղ կապված է $\Gamma_i(S)$ գնահատականների հաշվման արագության հետ: Գնահատականների հաշվման

$$\Gamma_i(S) = \frac{1}{F|K_i|} \sum_{S' \in K_i} \gamma(S') \sum_{\Omega \in \Omega_A} \mu(\omega_\Omega) B(\Omega, S, S') \qquad (1)$$

բանաձևը, սակայն, գործնականում արդյունավետ չէ, քանի որ ներքին գումարում գումարելիների քանակը կարող է լինել էքսպոնենցիալ: Այդ պատճառով գնահատականների արդյունավետ հաշվման համար առաջարկվել է մի ընդհանուր մոտեցում [24]: Նկատենք որ (1) բանաձևում բավական է կարողանալ արագ հաշվել հետևյալ արտահայտությունը՝

$$T \equiv \sum_{\Omega \in \Omega_A} \mu(\omega_\Omega) B(\Omega, S, S')$$

Օգտագործելով $\mu(\omega_\Omega) = \sum_{i \in \Omega} \mu_i$ ստացվում է՝

$$\sum_{\Omega\in\Omega_A}\left(B(\Omega,S,S')\sum_{i\in\Omega}\mu_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\,|\Omega\in\Omega_A \mid i\in\Omega, B(\Omega,S,S')=1|$$

Այդ պատճառով տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$T=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\,Q_i(S,S') \qquad (2)$$

որտեղ $Q_i(S,S')=|\Omega\in\Omega_A \mid i\in\Omega,\ B(\Omega,S,S')=1|$: Այժմ, գումարելիների քանակը (2)-ում n-ից մեծ չէ: Եթե $Q_i(S,S')$-ի իրարից տարբեր արժեքների քանակը փոքր է, ապա (2)-ի հաշվարկը գրեթե վերանում է: Ուստի սա գնահատականների հաշվման արդյունավետ մեթոդ է:

Այսինքն մեզ հետաքրքրում են այնպիսի հենքային բազմությունների համակարգեր, որոնց համար $Q_i(S,S')$-ի իրարից տարբեր արժեքների քանակը փոքր է:

$\|\alpha\|$-ով նշանակենք α երկուական վեկտորում 1-երի քանակը: α և β երկուական վեկտորների համար, $\alpha+\beta$-ով նշանակենք տրամաբանական XOR գործողությունը:

Ենթադրենք $\delta_i=1$ այն և միայն այն դեպքում երբ $i\in\Delta=\{j_1,j_2,\dots,j_m\}, j_1<j_2<\dots<j_m$: $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ վեկտորի համար նշանակենք $\alpha^1=\left(\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\dots,\alpha_{j_m}\right)$ և $\alpha^2=(\alpha_{k_1},\alpha_{k_2},\dots,\alpha_{k_{n-m}})$, որտեղ $\{k_1,k_2,\dots,k_{n-m}\}=\{1,2,\dots,n\}\setminus\Delta,\ k_1<k_2<\dots<k_{n-m}$: Այդ դեպքում

$$B(\Omega,S,S')\equiv B(\Omega,\delta,\Delta,q_1,q_2)=\begin{cases}1, & \|\delta^1+\omega_\Omega^1\|\le|\Delta|-q_1, \left\|\delta^2+\omega_\Omega^2\right\|\le q_2\\ 0, & \text{□□□□□□□□ □□□□□□□□}\end{cases}$$

Վերջինս սահմանում է $B(\Omega,\delta,\Delta,q_1,q_2)$-ը նույնիսկ երբ δ-ն և Δ-ն կապված չեն, այսինքն $B(\Omega,\delta,\Delta,q_1,q_2)$ սահմանված է $\forall\delta\in$

$E^n, \forall\Omega, \Delta \subseteq \{1,2,\dots,n\}$, $\forall q_1, q_2 \geq 0$ համար: Եթե հակառակը նշված չէ, կենթադրենք որ δ-ն և Δ-ն կապված չեն:

Սահմանենք՝

$$Q_i(\delta, \Delta, q_1, q_2) = |\Omega \in \Omega_A \mid i \in \Omega, B(\Omega, \delta, \Delta, q_1, q_2) = 1|,$$

$$\tilde{\imath}(\Omega_A) = \{\Omega \in \Omega_A \mid i \in \Omega\},$$

$$\bar{Q}_i(\delta, \Delta, q_1, q_2) = |\tilde{\imath}(\Omega_A)| - Q_i(\delta, \Delta, q_1, q_2):$$

Սահմանում 2.4.1. *Ասում են որ հենքային բազմությունների Ω_A համակարգը k ռանգի է, եթե $\forall\delta \in E^n, \forall\Delta \subseteq \{1,2,\dots,n\}, \forall q_1, q_2 \geq 0$ համար $|\{Q_i(\delta, \Delta, q_1, q_2)\}_{i=1}^n| \leq k$, և ինչ-որ մի $(\delta^0, \Delta^0, q_1^0, q_2^0)$ քառյակի համար $|\{Q_i(\delta^0, \Delta^0, q_1^0, q_2^0)\}_{i=1}^n| = k$:*

Սահմանում 2.4.2. *Ասում են որ հենքային բազմությունների Ω_A համակարգի Δ-ռանգը հավասար է k-ի, եթե $\forall\delta \in E^n, \Delta = \{i \mid \delta_i = 1\}, \forall q_1, q_2 \geq 0$ համար $|\{Q_i(\delta, \Delta, q_1, q_2)\}_{i=1}^n| \leq k$, և ինչ-որ $(\delta^0, \Delta^0, q_1^0, q_2^0)$, $\Delta^0 = \{i \mid \delta_i^0 = 1\}$ համար $|\{Q_i(\delta^0, \Delta^0, q_1^0, q_2^0)\}_{i=1}^n| = k$:*

Ω_A համակարգի ռանգը և Δ-ռանգը նշանակվում են համապատասխանաբար $R(\Omega_A)$-ով և $R_\Delta(\Omega_A)$-ով: Պարզ է որ $R_\Delta(\Omega_A) \leq R(\Omega_A)$:

Սահմանում 2.4.3. *Հենքային բազմությունների Ω_A համակարգը կոչվում է բացարձակ վերածելի (absolutely reducible) եթե $|\tilde{\imath}(\Omega_A)| \leq 1, \forall i \in \{1,2,\dots,n\}$ կամ $|\tilde{\imath}(\Omega_A)| \geq n-1, \forall i \in \{1,2,\dots,n\}$:*

Սահմանում 2.4.4. *Հենքային բազմությունների Ω_A համակարգը կոչվում է բացարձակ սիմետրիկ եթե կամայական $\Omega \in \Omega_A$ համար հետևում է $E_n^{\|\omega_\Omega\|} \subseteq W_{\Omega_A}$:*

Սահմանում 2.4.5. *Հենքային բազմությունների Ω_A համակարգը կոչվում է ներքին* **(internal)** *եթե* $\emptyset \notin \Omega_A$ *և* $\{1,2,\dots,n\} \notin \Omega_A$:

Ակնհայտորեն, Ω_A-ի ռանգը և Δ-ռանգը դիտարկելիս, առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել որ Ω_A-ն ներքին է: Հետևյալ թեորեմը ապացուցվել է [25]-ում.

Թեորեմ 2.4.6. *Տրված ներքին Ω_A հենքային բազմությունների համակարգի համար, $R_\Delta(\Omega_A) \le 2$ այն և միայն այն դեպքում երբ Ω_A-ն կամ բացարձակ վերածելի է կամ բացարձակ սիմետրիկ:*

Այս պահից կենթադրենք որ Ω_A-ն ներքին է: Եթե Ω_A-ն բացարձակ սիմետրիկ է ապա $R(\Omega_A) \le 4$ [24]. Այսպիսով, բացարձակ վերածելի և բացարձակ սիմետրիկ հենքային բազմությունների համակարգերի համար մենք միայն ունենք վերին գնահատականներ: Մյուս գլխում մենք այս հենքային բազմությունների համակարգերի համար կհաշվենք $R(\Omega_A)$-ի և $R_\Delta(\Omega_A)$-ի ճշգրիտ արժեքները:

2.5. Բացարձակ Վերածելի և Բացարձակ Սիմետրիկ Հենքային Բազմությունների Համակարգերի Ռանգերի Ճշգրիտ Արժեքները

Պնդում 2.5.1. *Եթե Ω_A բացարձակ սիմետրիկ է, ապա* $R_\Delta(\Omega_A) = 2$:

Ապացույց. Դիցուք $\delta = (0,1,1,\dots,1)$, $\Delta = \{2,3,\dots,n\}$, $q_1 = q_2 = 0$: Այդ դեպքում $\delta^1 = (1,1,\dots,1), \delta^2 = (0)$ և

$$B(\Omega,\delta,\Delta,q_1,q_2)=\begin{cases}1, & \|\delta^1+\omega_\Omega^1\|\le n-1, \left\|\delta^2+\omega_\Omega^2\right\|\le 0\\ 0, & \text{□□□□□□□□ □□□□□□□□}\end{cases}$$

Այժմ, պարզ է որ $Q_1(\delta,\Delta,q_1,q_2)=0, Q_i(\delta,\Delta,q_1,q_2)\neq 0, i\neq 1$ և $R_\Delta(\Omega_A)=2$: ■

Պնդում 2.5.2. *Եթե Ω_A-ն բացարձակ վերածելի է, ապա $R(\Omega_A)=$ RΔΩA=2:*

Ապացույց. Եթե $|\tilde{i}(\Omega_A)|\neq|\tilde{j}(\Omega_A)|$ ինչ-որ $i,j\in\{1,2,\dots,n\}, i\neq j$ համար, ապա վերցնելով $\forall\delta\in E^n, q_1=0, q_2=n$ ունենք $R_\Delta(\Omega_A)=2$: Հակառակ դեպքում կատարելով նույնը ինչ պնդում 2.5.1.-ում, կստանանք որ $R_\Delta(\Omega_A)=2$:

Դիցուք Ω_A^1-ի համար $|\tilde{i}(\Omega_A^1)|\le 1, \ \forall i\in\{1,2,\dots,n\}$, իսկ Ω_A^2-ի համար ունենք $|\tilde{i}(\Omega_A^2)|\ge n-1, \forall i\in\{1,2,\dots,n\}$: Պարզ է որ $R(\Omega_A^1)\le 2$ և $R_\Delta(\Omega_A^1)=2$-ից ստանում ենք որ $R(\Omega_A^1)=2$: Մյուս կողմից, նկատենք որ եթե Ω_A^2-ի համար $Q_i(\delta,\Delta,q_1,q_2)\neq Q_j(\delta,\Delta,q_1,q_2)$, որևէ $i,j\in\{1,2,\dots,n\}, i\neq j$, ապա $|\tilde{i}(\Omega_A^2)|\ge n-1, \ \forall i\in\{1,2,\dots,n\}$ պայմանից հետևում է որ $\left|Q_i(\delta,\Delta,q_1,q_2)-Q_j(\delta,\Delta,q_1,q_2)\right|=1$ և $Q_k(\delta,\Delta,q_1,q_2)\in\left\{Q_i(\delta,\Delta,q_1,q_2),Q_j(\delta,\Delta,q_1,q_2)\right\}, k\in\{1,2,\dots,n\}\setminus\{i,j\}$: Այսինքն $R(\Omega_A^2)=2$:

■

Բացարձակ սիմետրիկ հենքային բազմությունների համակարգերի ռանգերը հաշվելու համար մեզ անհրաժեշտ է մի քանի լեմմա: Որոշ տրիվիալ դեպքեր դիտարկելուց խուսափելու համար կենթադրենք որ $n>5$:

Լեմմա 2.5.3. $W_{\Omega_A}=E_n^2$ *համար ունենք* $R(\Omega_A)=4$:

Ապացույց. Դիցուք $\delta=(0,0,0,1,1,\dots,1), \Delta=\{2,3,\dots,n-1\}, q_1=1, q_2=1$: Այդ դեպքում $\delta^1=(0,0,1,\dots,1), \delta^2=(0,1)$ և

$$B(\Omega,\delta,\Delta,q_1,q_2)=\begin{cases}1, & \|\delta^1+\omega_\Omega^1\|\le n-3, \left\|\delta^2+\omega_\Omega^2\right\|\le 1\\ 0, & \text{□□□□□□□□ □□□□□□□□□}\end{cases}$$

Քանի որ $\delta^1 \in E^{n-2}, \|\delta^1+\omega_\Omega^1\| > n-3$-ը նշանակում է $\omega_\Omega^1 = \overline{\delta^1} = (1,1,0,\dots,0)$: Քանի որ

$\omega_\Omega \in E_n^2$, վերջինս նշանակում է $\omega_\Omega = (0,1,1,0,\dots,0)$: Այժմ

$$\left|\left\{\Omega \in \Omega_A \mid 1 \in \Omega, \left\|\delta^2+\omega_\Omega^2\right\| > 1\right\}\right| = \binom{n-2}{1} = n-2$$

և

$$\left|\left\{\Omega \in \Omega_A \mid 1 \in \Omega, \|\delta^1+\omega_\Omega^1\| > n-3, \left\|\delta^2+\omega_\Omega^2\right\| \le 1\right\}\right| = 0$$

Ուստի $\bar{Q}_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) = n-2$:

$\bar{Q}_2(\delta,\Delta,q_1,q_2)$-ի համար ունենք՝

$$\left|\left\{\Omega \in \Omega_A \mid 2 \in \Omega, \left\|\delta^2+\omega_\Omega^2\right\| > 1\right\}\right| = 1$$

և

$$\left|\left\{\Omega \in \Omega_A \mid 2 \in \Omega, \|\delta^1+\omega_\Omega^1\| > n-3, \left\|\delta^2+\omega_\Omega^2\right\| \le 1\right\}\right| = 1$$

Այդ պատճառով, $\bar{Q}_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) = 2$: Նույն ձևով ստանում ենք $\bar{Q}_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) = 1$ և $\bar{Q}_n(\delta,\Delta,q_1,q_2) = 0$: Հետևյալ անհավասարություններից՝

$$\bar{Q}_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) > \bar{Q}_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) > \bar{Q}_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) > \bar{Q}_n(\delta,\Delta,q_1,q_2)$$

Հետևում է՝

$$Q_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) < \ Q_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_n(\delta,\Delta,q_1,q_2)$$

և

$R(\Omega_A) = 4$: ■

Լեմմա 2.5.4. $W_{\Omega_A} = E_n^3$ *համար ունենք* $R(\Omega_A) = 4$:

Ապացույց. Դիցուք $\delta = (0,0,0,1,1,\dots,1), \Delta = \{2,3,\dots,n-1\}, q_1 = 1, q_2 = 1$: Նույն ձևով ինչ լեմմա 2.5.3-ում, կարող ենք ցույց տալ որ՝

$$\bar{Q}_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) = \binom{n-2}{2}, \bar{Q}_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) = n-2$$

$$\bar{Q}_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) = n-3, \bar{Q}_n(\delta,\Delta,q_1,q_2) = 1$$

Ուստի՝

$$Q_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_n(\delta,\Delta,q_1,q_2)$$

և $R(\Omega_A) = 4$: ■

Հետևանք 2.5.5. *Եթե* $W_{\Omega_A} = E_n^2$ *կամ* $W_{\Omega_A} = E_n^3$ *ապա* $\delta = (0,0,0,1,1,\dots,1), \Delta = \{2,3,\dots,n-1\}, q_1 = q_2 = 1$ *համար ունենք* $Q_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_n(\delta,\Delta,q_1,q_2)$:

Լեմմա 2.5.6. $W_{\Omega_A} = E_n^k, 3 < k < n-1$ *համար* $R(\Omega_A) = 4$:

Ապացույց. Դիցուք $\delta = (0,0,0,1,1,\dots,1), \Delta = \{2,3,\dots,n-1\}, q_1 = k-3, q_2 = 1$: Այդ դեպքում $\delta^1 = (0,0,1,\dots,1), \delta^2 = (0,1)$ և

$$B(\Omega,\delta,\Delta,q_1,q_2) = \begin{cases} 1, & \|\delta^1 + \omega_\Omega^1\| \le n-k+1, \|\delta^2 + \omega_\Omega^2\| \le 1 \\ 0, & \text{[illegible]} \end{cases}$$

$\binom{m}{l}$ զուգորդության արժեքը երբ $l < 0$, կհամարենք զրո:

Կրկին, դիտարկելով $|\{\Omega \in \Omega_A \mid i \in \Omega, \|\delta^2 + \omega_\Omega^2\| > 1\}|$ և $|\{\Omega \in \Omega_A \mid i \in \Omega, \|\delta^1 + \omega_\Omega^1\| > n-k+1, \|\delta^2 + \omega_\Omega^2\| \le 1\}| = 0$, $i = 1,2,4,n$, ստանում ենք՝

$$\bar{Q}_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) = \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-4}{k-4}, \bar{Q}_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) = \binom{n-3}{k-2} + \binom{n-4}{k-4},$$

$$\bar{Q}_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) = \binom{n-3}{k-2} + \binom{n-5}{k-5}, \bar{Q}_n(\delta,\Delta,q_1,q_2) = \binom{n-4}{k-4}$$

Ուստի,

$$Q_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_n(\delta,\Delta,q_1,q_2)$$

և $R(\Omega_A) = 4$: ■

Հետևանք 2.5.7. *Դիցուք* $W_{\Omega_A} = E_n^k, \delta = (0,0,0,1,1,\dots,1), \Delta = \{2,3,\dots,n-1\}, q_1 = k-3, q_2 = 1$: *Տեղի ունեն հետևյալ պնդումները.*

(i) *Եթե* $5 \le k < n-2$, *ապա*

$$Q_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) - Q_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) > 2, Q_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) - Q_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) > 2,$$

$$Q_n(\delta,\Delta,q_1,q_2) - Q_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) > 2.$$

(ii) *Եթե* $5 \le k = n-2$ *ապա*

$$Q_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_n(\delta,\Delta,q_1,q_2) - 1.$$

(iii) *Եթե* $4 = k < n-1$ *ապա*

$$Q_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_n(\delta,\Delta,q_1,q_2):$$

Ապացույց. Լեմմա 2.5.6.-ի ապացույցից ունենք՝

$$Q_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) - Q_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) = \binom{n-3}{k-1}$$

$$Q_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) - Q_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) = \binom{n-5}{k-4}$$

$$Q_n(\delta,\Delta,q_1,q_2) - Q_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) = \binom{n-5}{k-3} + \binom{n-4}{k-2}$$

Հետևանքի պնդումը այժմ ակնհայտ է:

■

Լեմմա 2.5.8. *Եթե* $W_{\Omega_A} = E_n^k, 4 < k < n-1$, *ապա* $\delta = (0,0,0,1,1,\dots,1)$, $\Delta = \{2,3,\dots,n-1\}, 1 \le q_1 < k-3, q_2 = 1$ *համար ունենք* $Q_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) \le Q_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) \le Q_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) \le Q_n(\delta,\Delta,q_1,q_2)$*:*

Ապացույց. Սահմանումից ունենք,

$$B(\Omega,\delta,\Delta,q_1,q_2)=\begin{cases}1, & \|\delta^1+\omega_\Omega^1\|\le n-2-q_1, \left\|\delta^2+\omega_\Omega^2\right\|\le 1\\ 0, & \text{□□□□□□□□ □□□□□□□□}\end{cases}$$

$1\le q_1<k-3$-ից հետևում է՝

$$\left|\left\{\Omega\in\Omega_A \mid i\in\Omega, \|\delta^1+\omega_\Omega^1\|>n-2-q_1, \left\|\delta^2+\omega_\Omega^2\right\|\le 1\right\}\right|$$

$$\le\left|\left\{\Omega\in\Omega_A \mid i\in\Omega, \|\delta^1+\omega_\Omega^1\|>n-k+2, \left\|\delta^2+\omega_\Omega^2\right\|\le 1\right\}\right|=0$$

յուրաքանչյուր $i=1,2,\dots,n$ համար:

Ուստի, մենք միայն դիտարկում ենք $\left|\left\{\Omega\in\Omega_A \mid i\in\Omega, \left\|\delta^2+\omega_\Omega^2\right\|>\right.\right.$ 1-ը i=1,2,4,n համար, և

$$\bar{Q}_1(\delta,\Delta,q_1,q_2)=\binom{n-2}{k-1}, \bar{Q}_2(\delta,\Delta,q_1,q_2)=\binom{n-3}{k-2},$$

$$\bar{Q}_4(\delta,\Delta,q_1,q_2)=\binom{n-3}{k-2}, \bar{Q}_n(\delta,\Delta,q_1,q_2)=0:$$

Այսպիսով,

$$Q_1(\delta,\Delta,q_1,q_2)\le Q_2(\delta,\Delta,q_1,q_2)\le Q_4(\delta,\Delta,q_1,q_2)\le Q_n(\delta,\Delta,q_1,q_2)$$

և ապացույցն ավարտված է:

■

Հետևյալ լեմմաները ապացուցվում են նույն ձևով.

Լեմմա 2.5.9. *Եթե* $W_{\Omega_A}=E_n^1$ *կամ* $W_{\Omega_A}=E_n^{n-1}$, *ապա* $\delta=(0,0,0,1,1,\dots,1), \mathit{\Delta}=\{2,3,\dots,n-1\}, q_1=q_2=1$ *համար ունենք* $Q_1(\delta,\mathit{\Delta},q_1,q_2)\le Q_2(\delta,\mathit{\Delta},q_1,q_2)\le Q_4(\delta,\mathit{\Delta},q_1,q_2)\le Q_n(\delta,\mathit{\Delta},q_1,q_2)$:

Լեմմա 2.5.10. *Դիցուք* $\delta=(0,0,0,1,1,\dots,1), \mathit{\Delta}=\{2,3,\dots,n-1\}, q_1=n-5, q_2=1, n>6$:

(i) *Եթե* $W_{\Omega_A}=E_n^1$ *ապա՝*

$$Q_1(\delta,\mathit{\Delta},q_1,q_2)\le Q_2(\delta,\mathit{\Delta},q_1,q_2)\le Q_4(\delta,\mathit{\Delta},q_1,q_2), |Q_n(\delta,\mathit{\Delta},q_1,q_2)-Q_4(\delta,\mathit{\Delta},q_1,q_2)|\le 1:$$

(ii) *Եթե* $W_{\Omega_A} = E_n^{n-1}$ *ապա`*

$$Q_1(\delta, \varDelta, q_1, q_2) = Q_2(\delta, \varDelta, q_1, q_2) = Q_4(\delta, \varDelta, q_1, q_2) = n-2, Q_n(\delta, \varDelta, q_1, q_2) = n-1:$$

Պնդում 2.5.11. *Եթե $\varOmega_A$-ն բացարձակ սիմետրիկ է, ապա*

$$R(\varOmega_A) = \begin{cases} 2, & \text{□□□} \ W_{\varOmega_A} = E_n^1 \ or \ W_{\varOmega_A} = E_n^{n-1} \\ 3, & \text{□□□} \ W_{\varOmega_A} = E_n^1 \cup E_n^{n-1} \\ 4, & \text{□□□□□□□□ □□□□□□□□} \end{cases}$$

Ապացույց. Նկատենք որ առաջին դեպքը հետևում է պնդում **2.5.2.**-ից, քանի որ այս հենքային բազմությունների համակարգերը բացարձակ վերածելի են:

Այժմ ֆիքսենք $(\delta, \Delta, q_1, q_2)$ և դիտարկենք երկրորդ դեպքը: Նկատենք որ եթե $W_{\Omega_A} = E_n^{n-1}$ համար $\{Q_i(\delta, \Delta, q_1, q_2)\}_{i=1}^n = \{a, b\}$, ապա $|a-b| = 1$: Քանի որ $W_{\Omega_A} = E_n^1$ համար $|\{Q_i(\delta, \Delta, q_1, q_2)\}_{i=1}^n| = 2$-ից հետևում է որ $\{Q_i(\delta, \Delta, q_1, q_2)\}_{i=1}^n = \{0,1\}$, ապա $W_{\Omega_A} = E_n^1 \cup E_n^{n-1}$ համար ունենք $|\{Q_i(\delta, \Delta, q_1, q_2)\}_{i=1}^n| < 4$: Կրկին վերցնելով $\delta = (0,0,0,1,1,\dots,1), \Delta = \{2,3,\dots,n-1\}, q_1 = q_2 = 1$ և ստանում ենք $R(\Omega_A) = 3$:

Երրորդ դեպքի համար նախ ենթադրենք որ $W_{\Omega_A} \cap (E_n^2 \cup E_n^3 \cup E_n^4) = \emptyset$: Դիցուք $\delta = (0,0,0,1,1,\dots,1)$, $\Delta = \{2,3,\dots,n-1\}$, $q_1 = \min\{|\Omega| \mid \Omega \in \Omega_A,\ |\Omega| \neq 1,\ |\Omega| \neq n-1\} - 3$, $q_2 = 1$: Եթե $W_{\Omega_A} \cap (E_n^1 \cup E_n^{n-1}) = \emptyset$ ապա

$$Q_1(\delta, \Delta, q_1, q_2) < Q_2(\delta, \Delta, q_1, q_2) < Q_4(\delta, \Delta, q_1, q_2) < Q_n(\delta, \Delta, q_1, q_2),$$

և ուրեմն $R(\Omega_A) = 4$-ը անմիջապես հետևում է հետևանք **2.5.7.**-ից և լեմմա **2.5.8.**-ից: Այժմ եթե $W_{\Omega_A} \cap (E_n^1 \cup E_n^{n-1}) \neq \emptyset$ ապա հետևանք **2.5.7.**-ից, լեմմա **2.5.8**-ից, և լեմմա **2.5.10.**-ից հետևում է որ մենք կրկին ունենք

$$Q_1(\delta, \Delta, q_1, q_2) < Q_2(\delta, \Delta, q_1, q_2) < Q_4(\delta, \Delta, q_1, q_2) < Q_n(\delta, \Delta, q_1, q_2),$$

և $R(\Omega_A) = 4$:

Վերջապես, եթե $W_{\Omega_A} \cap (E_n^2 \cup E_n^3 \cup E_n^4) \neq \emptyset$, վերցնում ենք $\delta = (0,0,0,1,1,\dots,1), \Delta = \{2,3,\dots,n-1\}, q_1 = q_2 = 1$ և $R(\Omega_A) = 4$-ը միանգամից հետևում է հետևանք **2.5.5.**-ից, հետևանք **2.5.7.**-ից, լեմմա **2.5.8.**-ից, և լեմմա **2.5.9.**-ից: ■

2.6. Արդյունավետ Ալգորիթմների Կառուցման Ընդհանուր Մոտեցում Գնահատականների Հաշվման Ալգորիթմների Մոդելում

Այս գլխում մենք կառաջարկենք ԳՀԱ-ում արդյունավետ ալգորիթմների կառուցման ընդհանուր մեթոդ: Դիցուք Ω_A-ն հենքային բազմությունների համակարգ է, $M \subseteq N \equiv \{1,2,\dots,n\}$, և G-ն S_M սիմետրիկ խմբի ենթախումբ է: $\sigma \in G$ և $\omega_\Omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in W_{\Omega_A}$ համար սահմանենք $\sigma\omega_\Omega = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ հետևյալ ձևով`

$$v_i = \begin{cases} \omega_i, & \text{□□□ } i \notin M \\ \omega_{\sigma^{-1}(i)}, & \text{□□□ } i \in M \end{cases}$$

Օրինակ. Դիցուք $n = 10$ և $M = \{1,2,3,4,5\}$: Այդ դեպքում, $\omega_\Omega = (1,0,1,1,0,0,0,1,1,1)$ համար ունենք`

Եթե $\sigma = (1\ 2\ 5)(3\ 4)$, ապա $\sigma^{-1} = (5\ 2\ 1)(4\ 3)$, $\sigma\omega_\Omega = (v_1, v_2, \dots, v_{10})$, որտեղ`

$$v_1 = \omega_{\sigma^{-1}(1)} = \omega_5 = 0, v_2 = \omega_{\sigma^{-1}(2)} = \omega_1 = 1,$$

$$v_3 = \omega_{\sigma^{-1}(3)} = \omega_4 = 1, v_4 = \omega_{\sigma^{-1}(4)} = \omega_3 = 1,$$

$$v_5 = \omega_{\sigma^{-1}(5)} = \omega_2 = 0, v_6 = \omega_6 = 0, v_7 = \omega_7 = 0,$$

$$v_8 = \omega_8 = 1, v_9 = \omega_9 = 1, v_{10} = \omega_{10} = 1$$

և $\sigma\omega_\Omega = (0,1,1,1,0,0,0,1,1,1)$:

Եթե $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, ապա $\sigma^{-1} = (1\ 5\ 4\ 3\ 2)$, $\sigma\omega_\Omega = (v_1, v_2, \dots, v_{10})$, որտեղ՝

$$v_1 = \omega_{\sigma^{-1}(1)} = \omega_5 = 0, v_2 = \omega_{\sigma^{-1}(2)} = \omega_1 = 1,$$

$$v_3 = \omega_{\sigma^{-1}(3)} = \omega_2 = 0, v_4 = \omega_{\sigma^{-1}(4)} = \omega_3 = 1,$$

$$v_5 = \omega_{\sigma^{-1}(5)} = \omega_4 = 1, v_6 = \omega_6 = 0, v_7 = \omega_7 = 0,$$

$$v_8 = \omega_8 = 1, v_9 = \omega_9 = 1, v_{10} = \omega_{10} = 1$$

և $\sigma\omega_\Omega = (0,1,0,1,1,0,0,1,1,1)$:

Սահմանում 2.6.1. *$G(\Omega_A) = \{\sigma \in S_N \mid \sigma\omega_\Omega \in W_{\Omega_A}\}$-ն կանվանենք Ω_A-ի ինվարիանտխումբ:*

$\sigma \in S_M$ համար սահմանենք $\bar{\sigma} \in S_N$ հետևյալ ձևով՝

$$\bar{\sigma}(i) = \begin{cases} i, & \square\square\square\ i \notin M \\ \sigma(i), & \square\square\square\ i \in M \end{cases}$$

$G \le S_M$-ի համար նշանակենք $\bar{G} = \{\bar{\sigma} \mid \sigma \in G\}$:

Սահմանում 2.6.2. *Դիցուք $G \le S_M$: Կասենք Ω_A-ն ինվարիանտ է M-ի վրա G-ի նկատմամբ, եթե $\bar{G} \le G(\Omega_A)$:*

Սահմանում 2.6.3. *Կասենք որ Ω_A-ի Δ-ռանգը M-ի վրա հավասար է k-ի և կգրենք $R_\Delta^M(\Omega_A) = k$, եթե $\forall\delta \in E^n, \Delta = \{i \mid \delta_i = 1\}, \forall q_1, q_2 \ge 0$ համար $|\{Q_i(\delta, \Delta, q_1, q_2) \mid i \in M\}| \le k$, և $|\{Q_i(\delta^0, \Delta^0, q_1^0, q_2^0) \mid i \in M\}| = k$ որևէ $(\delta^0, \Delta^0, q_1^0, q_2^0)$, $\Delta^0 = \{i \mid \delta_i^0 = 1\}$ համար:*

Թեորեմ 2.6.4. *Ենթադրենք $N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_k = N, N_i \cap N_j = \emptyset, i \ne j$, $\bar{G}_1 \times \bar{G}_2 \times \dots \times \bar{G}_k \le G(\Omega_A)$, այնպես որ Ω_A-ն ինվարիանտ է N_i-ի վրա G_i-ի նկատմամբ և $R_\Delta^{N_i}(\Omega_A) \le k_i$: Այդ դեպքում $R_\Delta(\Omega_A) \le \sum_{i=1}^{k} k_i$:* ■

$G_i = S_{N_i}$ դեպքը դիտարկվել է [24]-ում: Այսինքն սա [24]-ի բնական ընդհանրացումն է: Ապացուցվել է որ $G_i = S_{N_i}$ համար ունենք $R_\Delta^{N_i}(\Omega_A) \le 2$:

Դիտարկենք մեկ այլ օրինակ: Ենթադրենք $M = \{i_0, i_1, \dots, i_{m-1}\} \subseteq N, i_0 < i_1 < \dots < i_{m-1}$ և π_M-ն հետևյալ ցիկլիկ տեղադրությունն է՝ $\pi_M = (i_0 i_1 \dots i_{m-1})$, սահմանված M-ի վրա: Նշանակենք $C_M = <\pi_M> = \{\pi_M^t \mid t \in Z\}$ և $W_{\Omega_A}^M = \left\{\left(\omega_{i_0}, \omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_{m-1}}\right) \mid (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in W_{\Omega_A}\right\}$:

Սահմանում 2.6.5. *Կասենք հենքային բազմությունների Ω_A համակարգը ցիրկուլիանտ է M-ի վրա եթե $W_{\Omega_A}^M = \{\sigma\omega^0 \mid \sigma \in C_M\}$, որտեղ $\omega^0 = (1,1,\dots,1,0,0,\dots,0) \in E^m, \|\omega^0\| = k, 1 \le k \le m-1$: Այդ դեպքում k-ն կոչվում է M-ի կշիռ և նշանակվում $\psi(M)$-ով:*

Ակնհայտորեն, եթե Ω_A-ն ցիրկուլիանտ է M-ի վրա, ապա Ω_A-ն ինվարիանտ է M-ի վրա C_M-ի նկատմամբ: Դիցուք Ω_A-ն ցիրկուլիանտ է M-ի վրա և $\psi(M) = k$: $j \in \{0,1,\dots,m-1\}$ և $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ համար սահմանենք

$$l(M, \delta, j) = \left(\delta_{i_{(j-k+1)\,mod\,m}}, \delta_{i_{(j-k+2)\,mod\,m}}, \dots, \delta_{i_{(j+k-1)\,mod\,m}}\right) = (l_1, l_2, \dots, l_{2k-1}).$$

Օրինակ. Եթե $n = 10, M = \{i_0, i_1, \dots, i_9\} = \{1,2,\dots,10\}, k = 3$, ապա՝

$$l(M, \delta, 5) = (\delta_4, \delta_5, \delta_6, \delta_7, \delta_8) \text{ և } l(M, \delta, 9) = (\delta_8, \delta_9, \delta_{10}, \delta_1, \delta_2):$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}) \in E^{2k-1}$ համար նշանակենք $y_i = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}), 1 \le i \le k$ և դիտարկենք $W(x) = \{\|y_1\|, \|y_2\|, \dots, \|y_k\|\}$ մուլտիբազմությունը: Հետևյալ պնդումը հետևում է $B(\Omega, S, S')$-ի սահմանումից.

Պնդում 2.6.6. *Եթե* $W\big(l(M,\delta,j)\big) = W\big(l(M,\delta,k)\big)$ *որևէ* $j,k \in \{0,1,\dots,m-1\}$ *համար, ապա* $\Delta = \{i \mid \delta_i = 1\}$ *և* $q_1,q_2 \geq 0$ *համար ունենք* $Q_{i_j}(\delta,\Delta,q_1,q_2) = Q_{i_k}(\delta,\Delta,q_1,q_2)$*:*

Սահմանենք համարժեքության հարաբերություն $2k-1$ երկարության վեկտորների վրա. $x \sim y$ այն և միայն այն դեպքում երբ $W(x) = W(y)$: Համարժեքության դասերի քանակը նշանակենք c_k-ով:

Պնդում 2.6.7. *Եթե* Ω_A*-ն ցիրկուլհանտ է* M*-ի վրա, ապա* $R_\Delta^M(\Omega_A) \leq c_k$:

Այսպիսով, գտնելով համարժեքության դասերի քանակը մենք տալիս ենք $Q_i(\delta,\Delta,q_1,q_2)$-ի M-ի վրա իրարից տարբեր արժեքների համար վերին գնահատական:

Պնդում 2.6.8. $c_k = (k+3)2^{k-2}$:

Ապացույց. Ենթադրենք $H_1, H_2, \dots, H_{c_k}$-ն համարժեքության դասերն են. $W(x) = W(y)$ երբ $x, y \in H_j, j = 1,2,\dots,c_k$: Դիտարկենք $a_1 a_2 \dots a_k$ հաջորդականությունները որոնք բավարարում են հետևյալ պայմաններին.

$$\begin{cases} 0 \leq a_i \leq k, i = 1,2,\dots,k \\ a_i \leq a_{i+1} \leq a_i + 1, i = 1,2,\dots,k-1 \end{cases} \qquad (1)$$

Ցույց տանք որ (1)-ին բավարարող յուրաքանչյուր հաջորդականության համար գոյություն ունի H_j դաս, այնպիսին որ $a_i = \|(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1})\|, i = 1,2,\dots,k$ որևէ $x \in H_j$ համար:

Կատարենք ինդուկցիա ըստ k-ի: $k = 1$-ի համար պնդումը ճիշտ է: Այժմ ենթադրենք $k > 1$ և պնդումը ճիշտ է k-ից փոքր արժեքների համար: Պետք է դիտարկել հետևյալ երկու դեպքերը.

__Դեպք 1.__ $a_{k-1} < k$:

Ըստ ինդուկցիայի ենթադրության գոյություն ունի $x \in E^{2k-3}$ այնպիսին որ $a_i = \|(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-2})\|, i = 1,2,\dots,k-1$: Այդ դեպքում $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{k-2}, 0, x_{k-1}, \dots, x_{2k-3}, a_k - a_{k-1}) \equiv (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{2k-1})$ համար ունենք $a_i = \|(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}, \dots, \tilde{x}_{i+k-1})\|, i = 1,2,\dots,k$:

__Դեպք 2.__ $a_{k-1} = k$:

Այժմ ունենք $a_{k-1} = a_k = k$: Դիտարկենք $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{2k-1})$, որտեղ

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} 1 - (a_{i+1} - a_i), & \text{□□□ } 1 \le i \le k-2 \\ 1, & \text{□□□ } k-1 \le i \le 2k-1 \end{cases}$$

Նկատենք որ $a_i = \|(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}, \dots, \tilde{x}_{i+k-1})\|, i = 1,2,\dots,k$:

Այսպիսով, կա միարժեք համապատասխանեցում համարժեքության դասերի և (1)-ին բավարարող հաջորդականությունների միջև: Ուստի, ամեն ինչ բերվում է (1)-ին բավարարող հաջորդականությունների հաշվմանը:

Նշանակենք S_k-ով (1)-ին բավարարող բոլոր հաջորդականությունների բազմությունը: Դիտարկում ենք երկու նմանատիպ դեպք ինչպես քիչ առաջ դիտարկեցինք: Եթե $a_1, a_2, \dots, a_k \in S_k$, ապա $a_1, a_2, \dots, a_k, a_k$ և $a_1, a_2, \dots, a_k, a_k + 1$ հաջորդականությունները պատկանում են S_{k+1}-ին: Այսպիսով, S_{k+1}-ում մնում է այն հաջորդականությունների քանակը որոնք վերջանում են երկու $k+1$-ով, այսինքն հաջորդականությունների քանակը որոնք բավարարում են՝

$$\begin{cases} 0 \le a_i \le k+1, i = 1,2,\dots,k+1 \\ a_i \le a_{i+1} \le a_i + 1, i = 1,2,\dots,k-1 \\ a_k = a_{k+1} = k+1 \end{cases} \qquad (2)$$

Ամեն մի այսպիսի հաջորդականության համար գոյություն ունի $x=(x_1,x_2,\dots,x_{2k+1})\in E^{2k+1}$, որի համար $a_i = \|(x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+k})\|, 1\le i\le k+1$: $a_k=a_{k+1}=k+1$-ից հետևում է $x_i=1, i=k,k+1,\dots,2k+1$: Վերջինից հետևում է որ $a_i\le a_{i+1}\le a_i+1, i=1,2,\dots,k-1$ պայմանը տեղի ունի ամեն մի $x_i, i=1,2,\dots k-1$ համար: Նկատենք որ ամեն մի $(x_1,x_2,\dots,x_{k-1})$ համար մենք ստանում ենք տարբեր հաջորդականություն: Ուստի (2)-ին բավարարող հաջորդականությունների քանակը 2^{k-1} է: Միավորելով երկու դեպքերը ստանում ենք $c_{k+1}=2c_k+2^{k-1}$: Բացենք անդրադարձ առնչությունը.

$$c_{k+1}=2c_k+2^{k-1}=2(2C_{k-1}+2^{k-2})+2^{k-1}$$

$$=2^2C_{k-1}+2^{k-1}+2^{k-1}=2^2(2C_{k-2}+2^{k-3})+2\cdot 2^{k-1}$$

$$=\dots=2^kc_1+k2^{k-1}=2^{k+1}+k2^{k-1}=2^{k-1}(k+4)$$

և $c_k=(k+3)2^{k-2}$: Պնդումն ապացուցված է:

■

Հետևանք 2.6.9. *Դիցուք $N_1\cup N_2\cup\dots\cup N_k=N, N_i\cap N_j=\emptyset, i\neq j$, Ω_A-ն ցիրկուլյանտ է $N_i, n_i=|N_i|$ վրա, և $\psi(N_i)=k_i, i=1,2,\dots,k$. Այդ դեպքում $R_\Delta(\Omega_A)\le\sum_{i=1}^{k}\min(n_i,(k_i+3)2^{k_i-2})$:*

Հետևանք 2.6.9-ում տրված վերին գնահատականը օգտակար է միայն այն դեպքում երբ $\psi(N_i)$-երը շատ փոքր են $|N_i|$-երի համեմատ: Այս դեպքերում մենք նույնիսկ կարող ենք ունենալ հավասարություն, այսինքն հետևանք 2.6.9-ում վերին գնահատականը հասանելի է.

Պնդում 2.6.10. *Հետևանք 2.6.9-ի վերին գնահատականը ճշգրիտ է:*

Ապացույց. Դիցուք $n = 4t, t > 3, k = 2, N_1 = \left\{1,2,\dots,\frac{n}{2}\right\}, N_2 = \left\{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2,\dots,n\right.$, $\psi N_1=1, \psi N_2=2$. Վերցնենք $q_1=0, q_2=1, \delta=\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_n$, որտեղ՝

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{□□□ } 1 \le i \le \frac{n}{4} \text{ □□□ } i = \frac{n}{2}+1 \text{ □□□ } \frac{n}{2}+3 \le i \le \frac{n}{2}+\frac{n}{4}+1 \\ 0, & \text{□□□□□□□□□ □□□□□□□□□} \end{cases}$$

Օրինակ. եթե $n = 16$, ապա $\delta = (1,1,1,1,0,0,0,0,1,0,1,1,1,0,0,0)$.

Այդ դեպքում՝

$$Q_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) = \frac{n}{4}+2, Q_{\frac{n}{4}+1}(\delta,\Delta,q_1,q_2) = \frac{n}{4}-2,$$

$$Q_{\frac{n}{2}+1}(\delta,\Delta,q_1,q_2) = \frac{n}{2}, Q_{\frac{n}{2}+3}(\delta,\Delta,q_1,q_2) = \frac{n}{2}+\frac{n}{4},$$

$$Q_{\frac{n}{2}+4}(\delta,\Delta,q_1,q_2) = n, Q_{\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+2}(\delta,\Delta,q_1,q_2) = \frac{n}{4},$$

$$Q_{\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+3}(\delta,\Delta,q_1,q_2) = 0,$$

և $R_\Delta(\Omega_A) = (k_1+3)2^{k_1-2} + (k_2+3)2^{k_2-2} = 7$. ■

Թեորեմ 2.6.11. *Ենթադրենք* $N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_k = N, N_i \cap N_j = \emptyset, i \neq j$, Ω_A-*ն ինվարիանտ է* $S_{N_i}, i = 1,2,\dots,t$ *նկատմամբ, ցիրկուլյանտ է* $N_j, n_j = |N_j|$ *վրա և* $\psi(N_j) = k_j, j = t+1, t+2, \dots, k$: *Այդ դեպքում* $R_\Delta(\Omega_A) \le 2t + \sum_{j=t+1}^{k} min\,(n_j, (k_j+3)2^{k_j-2})$*:*

ԳԼՈՒԽ 3

Վերջավոր Դաշտերի Ենթաբազմությունների Կարճագույն Գծայնացվող Ծածկույթի Խնդրի Հետ Կապված Համարժեքության Հարաբերության Խումբ-Տեսական Նկարագրության Հնարավորության Մասին

3.1. Գծայնացվող Դիզյունկտիվ Նորմալ Ձևեր

Բուլյան ֆունկցիաների դիզյունկտիվ նորմալ ձևերը (դ.ն.ձ.) ունեն լայն կիրառություն գիտության և տեխնիկայի այնպիսի ոլորտներում ինչպիսիք են հաշվողական տեխնիկան, գործողությունների հետազոտումը, մաթեմատիկական մոդելավորումը բժշկության մեջ,կենսաբանությունը,և այլն:

Դ.Ն.ձ.-երի հետազոտությունը սկզբում սահմանափակվում էր միայն մաթեմատիկական տրամաբանության շրջանակներում: Այս հետազոտությունները նոր թափ ստացան քսաներորդ դարի երկրորդ կեսին երբ ի հայտ եկան էլեկտրոնային հաշվողական տեխնիկաները: Այդ գործում մեծ նշանակություն ունեցան Շեննոնի աշխատանքները: Դ.Ն.ձ.-ի տեսության զարգացման մեջ մեծ ավանդ ունեն նաև մաթեմատիկոսներ Ս.Վ.Յաբլոնսկին, Յ.Ի.Ժուրավլյովը, Վ.Վ.Գլագոլևը, Ա.Ա.Սապոժենկոն,և այլն:

Դիզյունկտիվ նորմալ ձևերը ունեն շատ յուրահատկություններ որոնք բնորոշ են միայն այս մոդելին:Դա է պատճառը որ դիզյունկտիվ նորմալ ձևերը օգտագործվել են միայն որոշ սպեցիֆիկ խնդիրներ լուծելու համար և չեն ստացել լայն կիրառություններ: Մոդելի յուրահատկությունների պատճառով այն չի գտել իր կիրառությունը շատ կիրառական խնդիրներում որտեղ իրոք դրա կարիքը կար: Դժվարությունը կայանում է դիզյունկտիվ նորմալ ձևերում հանրահաշվական մեթոդների աղքատ լինելու և շատ սպեցիֆիկ նկարագրություն ունենալու հետ:

Չնայած դրան, բուլյան ֆունկցիաների դիզյունկտիվ նորմալ ձևերով ներկայացման վրա են հիմնված դիսկրետ մաթեմատիկայի շատ էքստրեմալ, սխեմաների սինթեզի և դիագնոստիկայի, պատկերների ճանաչման և այլ խնդիրներ:

Դ.Ն.ձ.-երի տեսության մոդելի թերությունները անհրաժեշտ էին դարձնում մի նոր, ավելի ադեկվատ տեսության ստեղծումը, որը կընդհանրացներ դ.ն.ձ.-երի տեսությունը: Նոր մեթոդը պետք է ընդհանրացներ դ.ն.ձ.-ն այնպես որ այն թույլ կտար օգտագործել հանրահաշվական ավելի հարուստ մեթոդներ, կիրառել երկրաչափական մեթոդներ, և չսահմանափակվել միայն բուլյան հանրահաշվով:

Այդպիսի մի նոր տեսություն՝ գծայնացվող դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի (գ.դ.ն.ձ.) տեսությունը, առաջարկվեց Ա.Ալեքսանյանի կողմից [33-35]:

Դիցուք ունենք հետևյալ ոչ գծային բուլյան ֆունկցիաների համակարգը.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 \\ \dots \\ f_s(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 \end{cases} \qquad (1)$$

Պարզ է որ կամայական ոչ գծային բուլյան ֆունկցիաների համակարգ կարելի է գրել այս տեսքով:

Նկարագրենք այս համակարգի լուծման այսպես կոչված «ունիվերսալ սխեման»: Յուրաքանչյուր f_i ներկայացվում է որևէ (ցանկալի է կարճագույն) $D_i = K_{i_1} \vee \dots \vee K_{i_{k_i}}$ դ.ն.ձ.-ի տեսքով: Այնուհետև բացվում են $D_1 \cdot D_2 \cdot \dots \cdot D_s$ արտադրյալի փակագծերը և ստացվում է արդյունարար $D \equiv K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_m$ դ.ն.ձ.-ն, որը իրացնում է (1) համակարգի լուծումների բազմությունը: «Ունիվերսալ սխեման» կիրառելու դժվարությունը կայանում է $D_1 \cdot D_2 \cdot \dots \cdot D_s$ արտադրյալից D դ.ն.ձ.-ին անցնելուն, քանի որ այն ուղիղ կապված է $D_1, D_2, \dots, D_s$ դ.ն.ձ.-երի երկարություններից: D դ.ն.ձ.-ի ստացումը NP-լրիվ խնդիր է, և նույնիսկ բազմապատկելով կարճ դ.ն.ձ.-երը (D_i-երը) գործնականում հնարավոր է ստանալ անսահմանափակ երկարություն ունեցող դ.ն.ձ.:

«Ունիվերսալ սխեմայի» կիրառության մոտիվացիան կայանում է նրանում, որ ունենալով արդյունարար D դ.ն.ձ.-ն, շատ հեշտ է ստանալ համակարգի լուծումների բազմությունը: Դրա համար բավական է թվարկել բոլոր $(x_1, \dots, x_n)$ հավաքածուները, որոնց համար K_i էլեմենտար կոնյունկցիաները 1 են, $i = 1, \dots, m$: Վերջինս շատ պարզ խնդիր է: Բայց նկատենք որ $K \equiv x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \dots x_{i_k}^{\sigma_k} = 1$ հավասարումը, որտեղ K-ն էլեմենտար կոնյունկցիա է, $\sigma_j \in \{0,1\}, j = 1, \dots, k,$ կարելի է գրել F_2 դաշտի նկատմամբ գծային հավասարումների համակարգի տեսքով`

$$\begin{cases} x_{i_1} = \sigma_1 \\ x_{i_2} = \sigma_2 \\ \vdots \\ x_{i_k} = \sigma_k \end{cases}$$

կամ

$$\begin{cases} x_{i_1} + \sigma_1 + 1 = 1 \\ x_{i_2} + \sigma_2 + 1 = 1 \\ \vdots \\ x_{i_k} + \sigma_k + 1 = 1 \end{cases}$$

և $K = (x_{i_1} + \sigma_1 + 1)(x_{i_2} + \sigma_2 + 1) \dots (x_{i_k} + \sigma_k + 1)$:

F_2 դաշտի նկատմամբ գծային հավասարումների համակարգերը կարելի հեշտորեն լուծել, օրինակ կիրառելով Գաուսի մեթոդը: Հետևաբար, «ունիվերսալ սխեման» կաշխատի նաև այն դեպքում երբ D և D_i դ.ն.ձ.-երի դիզյունկտիվ տարրերը ոչ թե էլեմենտար կոնյունկցիաներ են այլ F_2 դաշտի նկատմամբ գծային ֆունկցիաների արտադրյալներ:

Հետևաբար, ոչ գծային բուլյան ֆունկցիաների համակարգերի լուծման համար ավելի ադեկվատ է օգտագործել բուլյան ֆունկցիաների $L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_m$ տեսքի ներկայացումներ, որտեղ L_i-երը F_2 դաշտի նկատմամբ գծային ֆունկցիաների արտադրյալ է: Ակնհայտորեն սա սովորական դ.ն.ձ.-ի ընդհանրացումն է, քանի որ սովորական դ.ն.ձ.-ն հանդիսանում է այս ներկայացման մասնավոր դեպք: Ֆունկցիաների այս տիպի ներկայացումները կոչվում են գծայնացվող դիզյունկտիվ նորմալ ձևեր (գ.դ.ն.ձ.):

Ինչպես նշվեց դ.ն.ձ.-երը հանդիսանում են գծային ֆունկցիաների արտադրյալների դիզյունկցիաների (գ.դ.ն.ձ.-երի) մասնավոր դեպք: Կարելի է ենթադրել որ որոշ խնդիրներ որոնք չունեն պրակտիկ լուծում դ.ն.ձ.- երի դասում, կունենան լուծում գ.դ.ն.ձ.-երի դասում: Համոզվենք որ գ.դ.ն.ձ.-ն դ.ն.ձ.-ի պարզ ընդհանրացում չէ:

Օրինակ, ամենաբարդ դ.ն.ձ. ունեցող զույգությունը հաշվող $x_1 + x_2 + \cdots + x_n (mod\ 2)$ ֆունկցիան իրականացվում է գ.դ.ն.ձ.-ների դասում մեկ երկարություն ունեցող բանաձևով:

n չափանի միավոր խորանարդի ցանկացած երկու գագաթ կազմում են ֆունկցիա որը իրականացվում է գծային ֆունկցիաների արտադրյալի տեսքով: Հետևաբար այստեղ գոյություն չունի լոկալության համարժեք գաղափար: Այսինքն գ.դ.ն.ձ. գտնելու համար լոկալության մոտեցումը այստեղ չի աշխատում: Բացի այդ, այստեղ չկա դ.ն.ձ.-ի միջուկին համարժեք գաղափար:

Դրանից բացի, ֆունկցիայի գ.դ.ն.ձ.-ի երկարությունը չի փոխվում n չափանի միավոր խորանարդի $y = xA + b$ տեսքի աֆինական ձևափոխությունների դեպքում, որտեղ A-ն F_2-ի նկատմամբ անվերածելի մատրից է, իսկ b-ն տեղաշարժի վեկտորն է: Այս խումբը հետազոտվել է սխեմաների սինթեզի ուսումնասիրությունների ընթացքում, սակայն այն չի պահպանում դ.ն.ձ.-ի հիմնական բնութագրերը: Դա է պատճառը որ աֆինական ձևափոխությունների միջոցով ֆունկցիաների դասակարգումը չունի կիրառություն դ.ն.ձ.-ի տեսությունում: Եթե այն օգտագործենք որպես հիմք գ.դ.ն.ձ.-երի դասակարգման համար, ապա աֆինական ձևափոխությունների խմբի դերը շատ կմեծանա և հնարավորություն կստեղծվի շատ հանրահաշվական մեթոդների կիրառումը:

Այս փաստերը խոսում են այն մասին որ գծայնացվող դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տեսությունը արժեքավոր է բուլյան ֆունկցիաների կարճագույն ներկայացում գտնելու խնդրի համար: Գ.դ.ն.ձ.-ի սահմանումը կարելի է ընդլայնել նաև կամայական վերջավոր դաշտի նկատմամբ [36-46]: Բոլոր նշված դիտարկումները տեղի կունենան նաև այդ դեպքում: Օրինակ, աֆինական ձևափոխությունների խումբը գործում է նաև այն դեպքում երբ դաշտը F_q-ն է: Սակայն այս դեպքում ինչպես կտեսնենք մյուս գլխում, աֆինական ձևափոխությունների խումբը կարելի է ընդլայնել մինչև կիսաաֆինական ձևափոխությունների խումբ:

Վերջավոր դաշտերի դեպքում ֆունկցիայի գծայնացվող դիզյունկտիվ նորմալ ձևերով ներկայացումը համարժեք է ֆունկցիայի մեկերի բազմության F_q^n-ի ենթատարածությունների հարակից դասերով ծածկույթի կառուցմանը:

Բուլյան ֆունկցիայի կարճագույն դ.ն.ձ.-ի կառուցման ալգորիթմական խնդիրները ուսումնասիրվել են Ս.Վ.Յաբլոնսկու և Յ.Ի.Ժուրավլյովի կողմից: Այդ աշխատանքներից թվում է որ այդ խնդրի լուծման համար առանց հատարկման մեթոդ գոյություն չունի:

Կարճագույն ներկայացման ժամանակ օգտագործվող հատարկման չափը կախված է դ.ն.ձ.-ի մետրիկական բնութագրերից:

Ծածկույթների մետրիկական գնահատականները տրված են [39]-ում:

F_q^n-ի գրեթե բոլոր N ենթաբազմությունների համար, N-ի մեջ ընկած k չափանի հարակից դասերի $l(n,k,N)$ քանակը բավարարում է`

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q\left(2^{-q^k}q^{n-k}-n2^{-q^{k/2}}q^{(n-k)/2}\right)\le l(n,k,N)\le\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q\left(2^{-q^k}q^{n-k}+n2^{-q^{k/2}}q^{(n-k)/2}\right),$$

որտեղ $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q$-ն կոչվում է Գաուսի գործակից` F_q^n-ում k-չափանի ենթատարածությունների քանակը:

Դ.ն.ձ.-երով իրականացման դեպքում համապատասխան գնահատականը k-չափանի ինտերվալների քանակի համար ստացվում է $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q$-ն փոխարինելով $\binom{n}{k}$-ով:

Հայտնի է որ համարյա բոլոր բազմությունների համար, այդ բազմության մեջ ընկած մաքսիմալ հարակից դասի չափը $\lceil log_q n+log_q log_q n\rceil+1$ է (դ.ն.ձ.-երի դեպքում համապատասխան գնահատականը $\lceil log_2 n\rceil$ է):

Համարյա բոլոր ֆունկցիաների կրճատված գ.դ.ն.ձ.-ի համարյա բոլոր դիզյունկտիվ անդամների չափը ընկած է $[log_2 n-4,\ log_2 n+3]$ ինտերվալում, այսինքն մաքսիմալի կարգի է: Սա էապես տարբերվում է դ.ն.ձ.-ի դեպքից, քանի որ կրճատված դ.ն.ձ.-ի համարյա բոլոր անդամների չափը մոտ է $log_2 log_2 n$-ին: Վերջինս կարգով մաքսիմալից տարբերվում է:

$N \subseteq F_q^n$-ի կրճատված $E(N)$ ծածկույթի համար տեղի ունի՝

$$n^{n(1-\beta_n)} \leq E(N) \leq n^{n(1+\alpha_n)}$$

որտեղ

$$\beta_n = \frac{\beta}{log_q n}, \alpha_n = \frac{\alpha}{log_q n},$$

և

$$2\left(2 - \frac{1}{q} log_2 q\right) < \alpha, \beta < 2\left(2 - \frac{1}{q} log_2 q\right) + \varepsilon,$$

որտեղ ε-ը կամայական փոքր դրական թիվ է:

$l(n) \equiv \max l(f)$ համար տեղի ունի՝

$$\alpha \cdot e^{-\frac{1}{3}} q^{\frac{(n+1)^2}{4}} \leq l(n) \leq \alpha \cdot e^{\frac{4}{3}} q^{\frac{(n+1)^2}{4}}$$

որտեղ

$$\alpha = \begin{cases} 1, & n \equiv 1 \, mod \, 2 \\ q^{-1/4}, & n \equiv 1 \, mod \, 2 \end{cases}$$

Այսինքն կրճատված գ.դ.ն.ձ.-ի երկարությունը էապես մեծ է կրճատված դ.ն.ձ.-ի երկարությունից:

Նշանակենք $S(N)$-ով համարյա բոլոր ֆունկցիաների կարճագույն ծածկույթների երկարությունը: Հայտնի է որ [40]՝

$$(1 - \varepsilon(n)) \frac{q^n}{2qn \;\, log_q n} \leq S(N) \leq (1 - \delta(n)) \frac{3q^3 q^n \, log_q n}{2n \, log_q e}$$

որտեղ $\lim_{n\to\infty} \delta(n) = \lim_{n\to\infty} \varepsilon(n) = 0$:

Գնահատականը լավացվել է Հ.Նուրիջանյանին կողմից [41]՝

$$S(N) \le \frac{q^3 e^2\,(ln\,2+1) q^n}{2q^{ln\,2}(ln\,2)\;n}$$

Այսինքն կարճագույն գ.դ.ն.ձ.-ի երկարությունը կարգով փոքր է կարճագույն դ.ն.ձ.-ի երկարությունից:

Մաքսիմալ փակուղային գ.դ.ն.ձ.-երի քանակի համար հայտնի է հետևյալ գնահատականը [41]՝

$$q^{\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-1\right)^2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil 2^{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-1}} \le t(n) \le q^{q^n\frac{(n+1)^2}{4}(1+\varepsilon(n))}$$

որտեղ $\lim_{n\to\infty}\varepsilon(n) = 0$:

Այս մետրիկական բնութագրերից հետևում են գ.դ.ն.ձ.-ի և դ.ն.ձ.-ի տարբերությունները և նմանությունները: Մասնավորապես, պարզ է որ փակուղայինների հատարկման վրա հիմնվելով կարճագույն գ.դ.ն.ձ. գտնելը կրճատված գ.դ.ն.ձ.-ի մեծ երկարության և փակուղային գ.դ.ն.ձ.-երի մեծ քանակի պատճառով կիրառելի չէ:

Այժմ դիտարկենք բուլյան ֆունկցիաների մի քանի կարևոր դաս: Սիմետրիկ ֆունկցիաների կրճատված և փակուղային դ.ն.ձ.-երի բարդության երկարության պատճառով, ֆունկցիայի դ.ն.ձ. ներկայացումը ստանում է իր մաքսիմալ արժեքը: Սիմետրիկ ֆունկցիաների դասում մաքսիմալ կարճագույն գ.դ.ն.ձ.-ի $T(n)$ երկարության համար հայտնի է՝

$$\frac{1}{n+2}\left(\frac{3}{2}\right)^n \le T(n) \le const\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Այսինքն սիմետրիկ ֆունկցիաները ունեն շատ ավելի պարզ իրականացում գ.դ.ն.ձ.-երի դասում քան համարյա բոլոր ֆունկցիաները: Սա գ.դ.ն.ձ.-ի ևս մեկ առավելություն է դ.ն.ձ.-ի նկատմամբ:

Թեստերի տեսության և պատկերների ճանաչման խնդիրներում մեծ կիրառություն ունեցող քիչ թվով զրոներ ունեցող ֆունկցիաների համար ևս հայտնի է նրանց գ.դ.ն.ձ. ներկայացումները:

k զրո ունեցեղ ֆունկցիաների ներկայացումը համարժեք է այսպես կոչված նելսոնյան հավասարումների ձախ մասերի արտադրյալին՝ $x_1^{\alpha_{i_1}} \vee \cdots \vee x_n^{\alpha_{i_n}} = 1, i = 1, \ldots, k$: Ֆունկցիայի դ.ն.ձ. կամ գ.դ.ն.ձ. ներկայացումների ստացումը առանց բազմապատկելու համակարգի ձախ մասերը ունի կարևոր նշանակություն, քանի որ գործնականում հաճախ պետք է լինում բազմապատկել հավասարումների ձախ մասերը: Դա թույլ կտա կրճատել հավասարումների քանակը, նրանց մի մասը փոխարինելով համարժեք հավասարումներով որոնց դիզյունկտիվ անդամների քանակը n-ին մոտ է:

k զրո ունեցող ֆունկցիաների համար, որոնց զրոների մատրիցի ռանգը r է, արժեքը զրոյական վեկտորի վրա զրո, կարճագույն գ.դ.ն.ձ-ի երկարությունը չի գերազանցում $n - r + \lceil 2^{r-1} - k/2 \rceil$-ը: Կարճագույն գ.դ.ն.ձ.-ի իրականացումը այս ֆունկցիաների համար բերվում է r փոփոխականից k զրո ունեցող ֆունկցիայի համապատասխան ներկայացմանը, որը երկուսից ոչ ավել մեկ կոորդինատ ունեցող վեկտորների վրա զրո է:

Ցույց է տրվել որ եթե $r \leq log_2 n - \rho(n)$ կամ $2^r - k = o(n)$, որտեղ $\rho(n)$-ը կամայական դանդաղ աճող ֆունկցիա է, գ.դ.ն.ձ.-ի երկարությունը ասիմպտոտիկորեն հավասար է n-ի:

Կարևոր դաս է նաև $k \leq n$ զրո ունեցող ֆունկցիաների դասը: Այս ֆունկցիաները ունեն $n-1$ երկարության գ.դ.ն.ծ: Հայտնի է որ բոլոր $k \leq 10$ զրոներով ֆունկցիաները ունեն $n+2$-ը չգերազանցող երկարության գ.դ.ն.ծ.: Այսինքն Նելսոնի համակարգերը միշտ կարելի է տաս անգամ կրճատել:

Համեմատելով այս գնահատականները դ.ն.ծ.-ի համար հայտնի գնահատականների հետ տեսնում ենք որ գ.դ.ն.ծ.-ով իրականացումը էապես լավն է: Երկու դեպքում էլ ունենք $n+m(k)$ տեսքի գնահատականներ, որտեղ դ.ն.ծ.-ին համապատասխան $m(k)$-ն մեծ է: Ունենք հետևյալ արժեքները`

K	2	3	4	5	6	7	8	9	10
դ.ն.ծ.-ի $m(k)$	0	1	4	14	31	66	133	271	537
գ.դ.ն.ծ.-ի $m(k)$	-1	-1	-1	-1	-1	0	1	2	2

Աղյուսակից տեսնում ենք որ դ.ն.ծ. ներկայացումը թույլ է տալիս կրճատել նելսոնյան հավասարումները ոչ ավել քան հինգ անգամ, իսկ գ.դ.ն.ծ ներկայացումը ոչ պակաս քան տաս անգամ: Տեսնում ենք նաև որ գ.դ.ն.ծ.-ի $m(k)$-ն շատ ավելի դանդաղ է աճում:

Ունենք նաև որ $r \leq log_2 n - \rho(n)$ կամ $2^r - k = o(n)$ պայմանը բավական է որ գ.դ.ն.ծ.-ի երկարությունը ասիմպտոտիկ հավասար լինի n-ի: Վերջինս ավելի թույլ պայման է քան դ.ն.ծ.-ի դեպքում:

Քիչ զրոներով ֆունկցիաների լավ գ.դ.ն.ծ. իրականացումը հավանաբար կապված է գ.դ.ն.ծ.-ի երկարության աֆինական ձևափոխությունների խմբի նկատմամաբ ինվարիանտ լինելու հետ: Դա հնարավորություն է տալիս միավորել շատ ֆունկցիաներ որոնք դ.ն.ձ. իրականացման դեպքում տարբերեն:

Այս փաստը լավ երևում է քառակուսային ֆունկցիաների (ժեգալկինի բազմանդամում երկու աստիճան ունեցող ֆունկցիաների) կարճագույն գ.դ.ն.ձ.-ի խնդիրը լուծելիս: Այս ֆունկցիաների գ.դ.ն.ձ.-ն ստացվում է բացահայտ տեսքով, որը համարվում է անհասանելի դ.ն.ձ.-ի դեպքում: Ֆունկցիաների այս դասը ունի մեծ կարևորություն, քանի որ քառակուսային բուլյան ֆունկցիաների համակարգերի լուծումը ակտուալ խնդիր է:

Քառակուսային ֆունկցիայի կարճագույն դ.ն.ձ.-ն կարող է ունենալ $\frac{(3^{\frac{n}{2}}-1)}{2}$ երկարություն: Գ.դ.ն.ձ.-ն, սակայն, նույնիսկ ամենավատ դեպքում ունի $(\frac{3}{2})^{\frac{n}{2}}$ անգամ փոքր երկարություն:

Դիտարկված օրինակները ցույց են տալիս գ.դ.ն.ձ-ի իրականացման բացահայտ առավելությունը դ.ն.ձ-ի նկատմամաբ:

3.2. Գծայնացվող Ծածկույթներ Վերջավոր Դաշտերում և Նրա Հետ Կապված Համարժեքության Հարաբերության Խումբ-Տեսական Նկարագրության Հնարավորությունը

Շեննոնը և Պովարովը ներմուծել են բուլյան ֆունկցիաների համարժեքության հարաբերություն կապված բուլյան ֆունկցիաների ֆունկցիոնալ տարրերի սխեմաներով սինթեզի հետ [29, 30]: Երկու n փոփոխականից բուլյան ֆունկցիաներ համարվում են համարժեք այն և միայն այն դեպքում եթե նրանք կարող են ձևափոխվել մեկը մյուսին n-չափանի միավոր խորանարդի (E^n) գագաթների իզոմետրիկ ձևափոխությունով: Իզոմետրիկ ձևափոխությունները կազմում են խումբ (Շեննոն-Պովարովի խումբ) ծնված փոփոխականների տեղադրություններով և որոշ փոփոխականների ժխտումով:

Հեշտ է ստուգել որ համարժեք բուլյան ֆունկցիաների համար դ.ն.ձ.-ով և ֆունկցիոնալ տարրերի սխեմաներով սինթեզների բարդությունները հավասար են: Շեննոն-Պովարովի դասերի աղյուսակային ներկայացումը տրված ֆունկցիայի դ.ն.ձ.-ով կամ ֆունկցիոնալ տարրերի սխեմաներով սինթեզի խնդիրը բերում է աղյուսակում համարժեք ներկայացուցիչ գտնելուն:

Համարժեքության դասերի մեծ քանակի պատճառով Շեննոն-Պովարովի դասերի աղյուսակային ներկայացումը լուծելի չէ նույնիսկ $n = 5$ դեպքում: [31]-ում դիտարկվել է նոր համարժեքության հարաբերություն, հույսով որ համարժեքության դասերի քանակը կնվազի:

Դիցուք f-ը n փոփոխականից բուլյան ֆունկցիա է և $N_f \subseteq E^n$-ը այն կետերի բազմությունն է որի վրա f-ը մեկ է: Կետերի $N \subseteq E^n$ բազմությունը որը համապատասխանում է ինչ-որ K կոնյունկցիայի, կոչվում է ինտերվալ: $N_1 \subseteq N_f$ ինտերվալը կոչվում է f-ի համար մաքսիմալ, եթե չկա մեկ այլ $N_2 \subseteq N_f$ ինտերվալ այնպիսին որ $N_1 \subset N_2$: f

ֆունկցիայի $K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_s$ դ.ն.ձ.-ն որը համապատասխանում է N_f-ի f-ի բոլոր մաքսիմալ ինտերվալներով ծածկույթին կոչվում է f ֆունկցիայի կրճատված դ.ն.ձ.: f-ի բոլոր մաքսիմալ ինտերվալների բազմությունը նշանակվում է D_f-ով: f և g ֆունկցիաները համարվում են համարժեք այն և միայն այն դեպքում եթե գոյություն ունի $h: D_f \longrightarrow D_g$ փոխմիարժեք արտապատկերում այնպիսին որ $N_1 \subseteq M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_s, N_1, M_i \in D_f, 1 \le i \le s$ պայմանը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում երբ $h(N_1) \subseteq h(M_1) \cup h(M_2) \cup \ldots \cup h(M_s), h(N_1), h(M_i) \in D_g, 1 \le i \le s$: N_f-ի ծածկույթը D_f-ի ենթաբազմությամբ կոչվում է փակուղային ծածկույթ եթե այն դադարում է ծածկույթ լինելուց երբ նրանից հեռացնում ենք իր կամայական ինտերվալ: Փակուղային ծածկույթին համապատասխանող դ.ն.ձ.-ն կոչվում է փակուղային դ.ն.ձ.: Ակնհայտորեն f և g համարժեք ֆունկցիաների համար, կամայական փակուղային դ.ն.ձ.-ի պատկերը f-ում փակուղային է g-ում և հակառակը, և նրանց կարճագույն դ.ն.ձ.-երի երկարությունները հավասար են: E^n-ի իզոմետրիկ ձևափոխությունների խումբը գործում է բնական ձևով E^n-ի բոլոր ինտերվալների բազմության վրա, և նույն ուղեծրին պատկանող ֆունկցիաները միմյանց համարժեք են: Ցույց է տրվել որ չկա ավելի մեծ խումբ որը օժտված է այս հատկությամբ [31], այսինքն յուրաքանչյուր փոխմիարժեք արտապատկերում բոլոր ինտերվալների բազմության վրա որը օժտված է այս հատկությամբ իրենից ներկայացնում է իզոմետրիկ ձևափոխություն:

Ինչպես արդեն նշվեց, հարակից դասերով ծածկույթներն իսկզբանե ներմուծվել են բուլյան ֆունկցիաների համար որպես բուլյան ֆունկցիաների դ.ն.ձ.-ի բնական ընդհանրացում [33]: Դիցուք F_q-ն q էլեմենտից բաղկացած դաշտ է [32], իսկ $F_q^n, n \geq 2$,-ը n-չափանի գծային տարածությունն F_q-ի նկատմամբ (ակնհայտորեն F_q^n-ը իզոմորֆ է F_{q^n}-ին): Եթե L-ը գծային տարածություն է F_q^n-ում, ապա $\alpha + L \equiv \{\alpha + x \mid x \in L\}, \alpha \in F_q^n$ բազմությունը կոչվում է L ենթատարածության հարակից դաս և $\dim(\alpha + L)$-ը համընկնում է $\dim(L)$-ի հետ: Համարժեք սահմանում է. $N \subseteq F_q^n$ ենթաբազմությունը հարակից դաս է եթե F_q^n-ի կամայական $x^1, x^2, \dots, x^m$ տարրերի համար, N-ին է պատկանում նաև նրանց կամայական աֆինական կոմբինացիան, այսինքն $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i \in F_q^n$, որտեղ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$-ը կամայական տարրեր են F_q-ից այնպիսին որ $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$: F_q^n-ի բոլոր հարակից դասերի բազմությունը նշանակվում է $C(F_q^n)$-ով ($F_q^n \notin C(F_q^n)$): k-չափանի հարակից դասը կոչվում է k-հարակից դաս: Հեշտ է ստուգել որ F_q^n-ի կամայական k-հարակից դաս կարելի է ներկայացնել F_q-ի նկատմամբ $n-k$ ռանգի գծային հավասարումների համակարգի լուծումների տեսքով, և հակառակը:

Սահմանում 3.2.1: *Հարակից դասերի M բազմությունը հանդիսանում է F_q^n-ի N ենթաբազմության համար հարակից դասերով ծածկույթ (գծայնացվող ծածկույթ), այն և միայն այն դեպքում երբ $N = \bigcup_{H \in M} H$: M-ի հարակից դասերի քանակը կոչվում է ծածկույթի երկարություն (բարդություն): Հարակից դասերով կարճագույն ծածկույթը դա մինիմալ հնարավոր երկարությունունեցող ծածկույթ է:*

$N \subseteq F_q^n$ ենթաբազմությունը կարող է տրվել տարբեր ձևերով. որպես էլեմենտների ցուցակ, որպես F_q^n-ի նկատմամբ բազմանդամի արմատների բազմություն, և այլն: Գտնել հարակից դասերով կարճագույն ծածկույթը նշանակում է գտնել մինիմալ թվով F_q-ի նկատմամբ գծային հավասարումների համակարգեր, այնպես որ N-ը համնկնի այդ համակարգերի լուծումների բազմությունների միավորման հետ: Այս խնդրի հետ կապված կատարվել են մեծ թվով աշխատանքներ [33-46]: Այս գլխում մենք կդիտարկենք [31]-ում դիտարկված խնդրի անալոգը ավելի ընդհանուր պայմանով:

Սահմանում 3.2.2: $H_1, H_2, \dots, H_s$ *հարակից դասերը կոչվում են բացառող եթե* $H_i \nsubseteq H_j, 1 \le i < j \le s$*:*

Սահմանում 3.2.3: $C(F_q^n)$*-ի* f *տեղադրությունը կոչվում է* C*-տեղադրություն եթե կամայական* $H, H_1, \dots, H_s$ *բացառող հարակից դասերի համար, այնպիսին որ* $H \subseteq H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_s$*, տեղի ունի՝*

$i)$ $f(H), f(H_1), \dots, f(H_s)$ *հարակից դասերը բացառող են*

$ii)$ $f^{-1}(H), f^{-1}(H_1), \dots, f^{-1}(H_s)$ *հարակից դասերը բացառող են*

$iii)$ $f(H) \subseteq f(H_1) \cup f(H_2) \cup \dots \cup f(H_s)$

$iv)$ $f^{-1}(H) \subseteq f^{-1}(H_1) \cup f^{-1}(H_2) \cup \dots \cup f^{-1}(H_s)$*:*

Դիցուք f-ը C-տեղադրություն է և $H_1, H_2, \dots, H_s$-ը բացառող հարակից դասեր են F_q^n-ում: Եթե $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le s$ ապա $H_{i_1} \cup H_{i_2} \cup \dots \cup H_{i_k} = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_s$ այն և միայն այն դեպքում եթե $f(H_{i_1}) \cup f(H_{i_2}) \cup \dots \cup f(H_{i_k}) = f(H_1) \cup f(H_2) \cup \dots \cup f(H_s)$:

Սահմանում 3.2.4: F_q^n*-ի* f *տեղադրությունը կոչվում է կիսաաֆինական եթե գոյություն ունի* F_q*-ի* σ *ավտոմորֆիզմ,* F_q^n*-ի* g *տեղադրություն և* $b \in F_q^n$ *վեկտոր,* *այնպիսին որ կամայական x, y վեկտորների համար F_q^n-ից, և կամայական λ-ի համար F_q-ից, տեղի ունի՝*

$i)\ g(x+y) = g(x) + g(y)$

$ii)\ g(\lambda x) = \sigma(\lambda) g(x)$

$i)\ f(x) = g(x) + b$:

Եթե $q = p^m$, p-ն պարզ է, ապա $\sigma^0, \sigma^1, \ldots, \sigma^{m-1}$-ը, որտեղ $\sigma^k: x \longrightarrow x^{p^k}$, F_q-ի ավտոմորֆիզմներ են [32, թեորեմ 2.21]: $q = p$ դեպքում միակ ավտոմորֆիզմը նույնությունն (identity) է:

Սահմանում 3.2.5: *Եթե նախորդ սահմանման մեջ σ ավտոմորֆիզմը նույնությունն է, ապա f-ը կոչվում է աֆինական:*

F_q^n-ի բոլոր կիսաաֆինական (աֆինական) տեղադրությունների խումբը կոչվում է n աստիճանի Ընդհանուր Կիսաաֆինական (Աֆֆինական) Խումբ (The General Semiaffine (Affine) Group) F_q-ի նկատմամբ, և նշանակվում է $\Gamma A(n, F_q)$ $\left(Aff(n, F_q)\right)$-ով: Եթե q-ն պարզ է ապա $\Gamma A(n, F_q) = Aff(n, F_q)$: Այս երկու խմբերը գործում են բնական ձևով $C(F_q^n)$-ի վրա և հարակից դասերի չափերը մնում է անփոփոխ այս գործողության նկատմամբ: Ակնհայտորեն յուրաքանչյուր կիսաաֆինական ձևափոխություն C-տեղադրություն է: Այս գլխում մեզ հետաքրքրում է թե կա արդյոք մեկ այլ խումբ որը գործում է $C(F_q^n)$-ի վրա և բավարարում է այդ հատկությանը: Հետևյալ թեորեմը պատասխանում է այդ հարցին.

Թեորեմ 3.2.6: *$C(F_q^n)$-ի f տեղադրությունը C-տեղադրություն է այն և միայն այն դեպքում եթե f-ը կիսաաֆինական է:*

Քանի որ թեորեմում պայմանի բավարարությունը ակնհայտ է, մեզ միայն մնում է ապացուցել անհրաժեշտությունը: Նախ ապացուցենք մի քանի լեմմաորոնցից էլ կհետևի թեորեմի պնդումը:

Լեմմա 3.2.7: *F_q^n-ի երկու հարակից դասերի հատումը կամ դատարկ է, կամ այդ հարակից դասերին համապատասխան գծային ենթատարածությունների հատման հարակից դաս է:*

Ապացույց: Դիցուք L_1-ը և L_2-ը F_q^n-ի գծային ենթատարածություններ են և $x, y \in F_q^n$: Ենթադրենք $(x + L_1) \cap (y + L_2)$-ը դատարկ չէ և $z \in (x + L_1) \cap (y + L_2)$: Այդ դեպքում $x + L_1 = z + L_1$ և $y + L_2 = z + L_2$: Հեշտ է տեսնել որ $z + (L_1 \cap L_2) \subseteq (z + L_1) \cap (z + L_2)$: Հիմա եթե $z + l_1 = z + l_2$ որևէ $l_1 \in L_1, l_2 \in L_2$ համար, ապա $l_1 = l_2 \in L_1 \cap L_2$ և $(z + L_1) \cap (z + L_2) \subseteq z + (L_1 \cap L_2)$: Այսինքն $(z + L_1) \cap (z + L_2) = z + (L_1 \cap L_2)$ որը ավարտում է ապացույցը:

■

$span(S)$-ով նշանակում ենք S բազմության գծային թաղանթը:

Լեմմա 3.2.8: *Դիցուք $H_1 \subseteq F_q^n$-ը k-հարակից դաս է, $1 \le k \le n - 1$: Այդ դեպքում՝*

$i)$ գոյություն ունի $H_2 \subseteq F_q^n$ 1-հարակից դաս, այնպիսին որ $dim(H_1 \cap H_2) = 0$:

$ii)$ գոյություն ունի $H_3 \subseteq F_q^n, H_3 \neq H_2$, 1-հարակից դաս, այնպիսին որ $H_3 \cap H_1 = H_3 \cap H_2 = H_1 \cap H_2$:

Ապացույց: $i)$ Դիցուք L_1-ը H_1-ի գծային ենթատարածությունն է և $H_1 = x + L_1$ որևէ $x \in F_q^n$ համար: Դիցուք $a_1, a_2, \dots, a_k$-ն L_1-ի բազիսն է: Այդ դեպքում $a_1, a_2, \dots, a_k, b$

վեկտորները, որտեղ $b \in F_q^n \backslash L_1$, գծորեն անկախ են: Նշանակենք $L_2 = span(\{b\})$: Ենթադրենք $c \in L_1 \cap L_2$, այսինքն՝

$$c = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k = \beta b$$

որևէ $\alpha_i, \beta \in F_q, 1 \le i \le k$ համար: Այդ դեպքում՝

$$0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k - \beta b$$

որից հետևում է $\alpha_i = \beta = 0, 1 \le i \le k$ և $c = 0$: Ուստի $L_1 \cap L_2 = \{0\}$: Վերցնելով $H_2 = x + L_2$ ստանում ենք $\dim(H_1 \cap H_2) = 0$:

ii) Դիցուք $c \in F_q^n \backslash (L_1 \cup L_2)$ և $H_3 = x + span(\{c\})$: Ակնհայտորեն երկրորդ պնդումը տեղի ունի:

∎

Լեմմա 3.2.9: *Դիցուք f-ը C-տեղադրություն է: Այդ դեպքում՝*

i) f-ը k-հարակից դասերը տանում է k-հարակից դասերի վրա, $0 \le k \le n-1$;

ii) եթե $H_1 = \{h_1, h_2, \dots, h_s\}$-ը k-հարակից դաս է, $0 \le k \le n-1$, այդ դեպքում այդպիսին է նաև $H_2 = \{f(h_1), f(h_2), \dots, f(h_s)\}$-ը և $f(H_1) = H_2$:

Ապացույց: *i*) Ենթադրենք հակառակը: Այսինքն գոյություն ունեն H_1, H_2 հարակից դասեր այնպիսին որ $f(H_1) = H_2$ և առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել որ $k_1 \equiv \dim(H_1) > \dim(H_2) \equiv k_2$: Լեմմա 3.2.8-ից հետևում է որ գոյություն ունի 1-հարակից դաս M_1 այնպիսին որ $\dim(H_1 \cap M_1) = 0$: Դիցուք L-ը M_1-ի համապատասխան գծային ենթատարածությունն է: Ենթադրենք $H_1 = \{h_1, h_2, \dots, h_s\}, s = q^{k_1}$, և $M_1 = h_1 + L$: Նշանակենք $M_i = h_i + L, 2 \le i \le s$: Լեմմա 3.2.7-ից հետևում է որ $\dim(H_i \cap M_i) = 0, 2 \le i \le s$: Այդ դեպքում $H_1, M_1, M_2, \dots, M_s$ հարակից դասերը բացառող են և $H_1 \subseteq M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_s$: Ուստի $H_2 \subseteq f(M_1) \cup f(M_2) \cup \dots \cup f(M_s)$: $H_2, f(M_1), f(M_2), \dots, f(M_s)$-ի բացառող լինելուց հետևում է $k_2 \neq 0$:

Եթե $H_2 \subseteq \big(f(M_1) \cup f(M_2) \cup \ldots \cup f(M_s)\big) \setminus f(M_i)$, որևէ $1 \le i \le s$ համար, ապա $H_1 \subseteq (M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_s) \setminus M_i$, որը հակասում է $M_i \cap M_j = \emptyset$ պայմանին: Այսպիսով, գոյություն ունեն $f_i \in f(M_i) \cap H_2, 1 \le i \le s$ և $f_i \notin f(M_j), i \neq j$: Այժմ $\{f_1, f_2, \ldots, f_s\} \subseteq H_2$ և $|H_2| \ge s$, որը հակասում է $\dim(H_1) > \dim(H_2)$-ին:

$ii)$ Նորից ենթադրենք հակառակը: Ենթադրենք, օրինակ, $x = f^{-1}(h) \notin H_1$ որևէ $h \in H_2$ համար: Եթե $f^{-1}(h) \notin M_i, 1 \le i \le s$, ապա $f^{-1}(h), H_1, M_1, M_2, \ldots, M_s$ բացառող են, $H_1 \subseteq f^{-1}(h) \cup M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_s$ բայց $h, H_2, f(M_1), f(M_2), \ldots, f(M_s)$ բացառող չեն և մենք ունենք հակասություն: Եթե $f^{-1}(h) \in M_i$ որևէ $1 \le i \le s$ համար, ապա լեմմա 3.2.8-ից հետևում է որ մենք կարող ենք M_i-ն փոխարինել $\widetilde{M}_i$ 1-հարակից դասով այնպես որ $H_1, \{M_1, M_2, \ldots, M_s\} \setminus M_i, \widetilde{M}_i$ բացառող են, $H_1 \subseteq \bigcup_{j \neq i} M_j \cup \widetilde{M}_i$, և $f^{-1}(h) \notin \bigcup_{j \neq i} M_j \cup \widetilde{M}_i$: Այժմ դեպքը բերվեց քիչ առաջ դիտարկված դեպքին:

■

Հայտնի է որ եթե F_q^n-ի f տեղադրությունը, որտեղ $q \neq 2$, արտապատկերում է 1-հարակից դասերը 1-հարակից դասերին, ապա f-ը կիսաաֆինական է [47]: $q = 2$ դեպքում, F_2^n-ում 1-հարակից դասը դա ուղղակի երկու էլեմենտների ենթաբազմություն է, ուստի F_2^n-ի կամայական տեղադրություն 1-հարակից դասերը տանում է 1-հարակից դասերին: Սակայն, եթե F_2^n-ի տեղադրությունը արտապատկերում է 2-հարակից դասերը 2-հարակից դասերին, ապա այն աֆինական է [47]: Այժմ թեորեմ 3.2.6-ում պայմանի անհրաժեշտությունը ակնհայտ է:

ՀԱՎԵԼՎԱԾ 1

Դիտարկենք թեորեմ 1.3.2-ի մի քանի օրինակ որոշ փոքր չափի վերջավոր դաշտերում։ Աղյուսակ 1-ի ձախ սյունը որոշում է F_q դաշտը, իսկ աջ սյունում նշված են n-ի այն արժեքները որոնց համար $n \not\equiv 2^k \, mod \, p, 0 \leq k \leq n-1$։ Ըստ թեորեմ 1.3.2-ի այս n-երի համար կամայական $X \subseteq F$ n տարր պարունակող բազմություն միարժեքորեն որոշվում է $\sigma(X)$-ով։

Աղյուսակ 1

$\boldsymbol{F_q}$	$\boldsymbol{n}$
$q = 5$	$n = 3$
$q = 7$	$n = 3, 5, 6$
$q = 9$	$n = 3, 6$
$q = 11$	$n = 3, 6, 7$
$q = 13$	$n = 3, 5, 7, 10$
$q = 17$	$n = 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14$

$q = 19$	$n = 3, 5, 6, 10, 11, 12$

Ինչպես նշվեց 1.3-ում, թեորեմ 1.3.2-ի պայանը անհրաժեշտ չէ, այսինքն եթե կամայական $X \subseteq F\ n$ տարր պարունակեղ բազմություն միարժեքորեն որոշվում է $\sigma(X)$-ով, ապա անհրաժշտ չէ որ $n \not\equiv 2^k \mod p, 0 \leq k \leq n-1$: Այսինքն այստեղ F_q-ի համար հակաօրինակներ պետք է փնտրել n-ի այն արժեքների համար որոնք բացակայում են աղյուսակ 1-ում: Օգտագործելով 1.3-ում բերված հետևյալ GAP ծրագիրը`

1. $SumCollections \coloneqq function(vals)$
2. $local\ sums;$
3. $sums \coloneqq Combinations(vals, 2);$
4. $sums \coloneqq AsSortedList\big(List(sums, Sum)\big);$
5. $return\ sums;$
6. $end;$
7. $q \coloneqq 11;; n \coloneqq 8;;$
8. $FF \coloneqq GF(q);; FF \coloneqq List(FF);;$
9. $subsets \coloneqq Combinations(FF, n);;$
10. $sums \coloneqq AsSortedList\big(List(subsets, SumCollections)\big);;$
11. $sums = Set(sums);$

կարելի է գտնել հակաօրինակներ որոնք ցույց կտան որ թեորեմ 1.3.2-ի պայմանը անհրաժեշտ չէ: Ծրագիրը տպում է "$true$" եթե կամայական $X \subseteq F_q$ n տարրանի բազմություն միարժեքորեն որոշվում է $\sigma(X)$-ով: Հակառակ դեպքում այն տպում է "$false$": Աղյուսակ 2-ի ձախ սյունում գրված են n-ի այն արժեքները որոնք չեն բավարարում թեորեմ 1.3.2-ի պայմանին: Օղակի մեջ առնված n-ի արժեքները հանդիսանում են հակաօրինակներ, այսինքն կամայական $X \subseteq F$ n տարր պարունակող բազմության միարժեքորեն որոշվում է $\sigma(X)$-ով:

Աղյուսակ 2

$\boldsymbol{F_q}$	$\boldsymbol{n}$
$q = 5$	$n = 2, 4$
$q = 7$	$n = 4$
$q = 9$	$n = 2, 4, 5, 7, 8$
$q = 11$	$n = 4, 5, 8, 9, 10$
$q = 13$	$n = 4, 6, 8, 9, 11, 12$
$q = 17$	$n = 4, 8, 9, 13, 15, 16$
$q = 19$	$n = 4, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 16, 17, 18$

Դիտարկենք F_{11}-ը: Ըստ աղյուսակ 2-ի $n = 4, 5$ համար գոյություն ունեն $X, Y \subseteq F_{11}$ իրարից տարբեր բազմություններ, այնպիսին որ $|X| = |Y| = n$ և $\sigma(X) = \sigma(Y)$:

Օրինակ. $X = \{4, 7, 8, 9\}$ և $Y = \{5, 6, 7, 10\}$ համար $\sigma(X) = \sigma(Y) = \{0, 1, 2, 4, 5, 6\}$:
$X = \{1, 3, 4, 5, 9\}$ և $Y = \{2, 6, 7, 8, 10\}$ համար $\sigma(X) = \sigma(Y) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$:

Մյուս կողմից ըստ աղյուսակ 2-ի F_{11}-ում կամայական $n = 10$-ի համար այդպիսի բազմություններ գոյություն չունեն: Աղյուսակ 3-ում գրված են F_{11}-ի բոլոր 10 տարրանի բազմությունները և նրանց զույգերի գումարները.

Աղյուսակ 3

X	$\sigma(X)$

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}	{0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10}
{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}	{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10}
{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}	{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10}
{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}	{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10}
{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10}	{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10}
{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10}	{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 10}
{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10}	{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10}
{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10}	{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10}
{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10}	{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4,

	4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10}
{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10}	{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10}
{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}	{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10}

Եզրակացություն

Աշխատանքում դիտարկվել է բազմությունների տարրերի գումարների հավաքածուներով բազմությունները որոշելու խնդրի անալոգը F_3 դաշտի նկատմամբ գծային տարածություններում և կամայական կենտ բնութագրիչ ունեցող վերջավոր դաշտերում: Ուսումնասիրվել է ճանաչման խնդիրներում ԳՅԱ մոդելների արդյունավետ իրականացման խնդիրը, կախված հենքային բազմությունների համակարգի ընտրությունից: Դիտարկվել է գծայնացվող ծածկույթների խնդրի հետ կապված համարժեքության հարաբերության խումբ-տեսական նկարագրության հնարավորությունը:

Աշխատանքի հիմնական արդյունքներն են՝

- Տրված են N-ի բոլոր արժեքները որոնց համար F_3^n գծային տարածության կամայական N տարրանի ենթաբազմություն միարժեքորեն որոշվում է իր տարրերի զույգերի գումարներով՝ $N \equiv 0 mod 3$ կամ $N = 3^n - 1$:
- Կամայական p կենտ բնութագրիչ ունեցող դաշտի նկատմամբ տրված է բավարար պայման բազմության տարրերի N քանակի համար՝ $N \not\equiv 2^k \, mod \, p, 0 \leq k \leq N-1$, այնպես որ կամայական N տարրանի բազմություն միարժեքորեն որոշվում է իր տարրերի զույգերի գումարներով:
- Տրված են ռանգի և Δ-ռանգի ճշգրիտ արժեքները ԳՅԱ մոդելներում բոլոր այն հենքային բազմությունների համակարգերի համար, որոնց Δ-ռանգը չի գերազանցում 2-ը:
- Տրվել է ԳՅԱ մոդելներում հենքային բազմությունների համակարգերի ընտրման ընդհանուր մոտեցում և նկարագրվել նրա կապը ԳՅԱ մոդելների արդյունավետ իրականացման հետ:
- Ցույց է տրվել, որ վերջավոր դաշտի կիսաաֆինական ձևափոխությունների խումբը ամենամեծ խումբն է, որը գործում է վերջավոր դաշտի ենթատարածությունների հարակից դասերի վրա և բավարարում սահմանված

հատկությանը կապված գծայնացվող ծածկույթների խնդրի հետ:

Գրականություն

1. L. Moser, Problem E 1248, Amer. Math. Monthly (1957), 507.
2. J. Selfridge and E.G. Straus, Pac. J. Math. 8 (1958), 847-856.
3. L´azl´o Lov´asz, Combinatorial Problems and Exercises, American Mathematical Soc. (1979).
4. Richard K. Guy, Unsolved Problems in Number Theory (1980).

5. D.Fomin, Is Multiset of n Integers Uniquely Determined by the Multiset of its s-sums? arXiv:1709.06046v3 [math.NT] 16 Nov 2017.
6. Cirnu, Mircea. (2010). Newton’s Identities and the Laplace Transform. American Mathematical Monthly. 117. 67-71. 10.4169/000298910X474998.
7. Sharpe, D. Rings and Factorization. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1987.
8. The GAP Group GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.9.1; 2018, (https://www.gap-system.org).
9. Журавлёв Ю.И. Экстремальные алгоритмы в математических моделях для задач распознавания и классификации // ДАН СССР. 1976. - Т.231. - № 3. - С.532-535.
10. Слуцкая Т.Д. Алгоритм вычисления информационных весов признаков // Дискретный анализ. Новосибирск, 1968. - Вып. 12. - С.75-90.
11. Gurevich I.B., Nefyodov A.V. Efficient implementation of 2D-AEC algorithms. // Proceedings of the 6th German-Russian workshop "Pattern recognition and image understanding". 2003. - pp.96-99.
12. Мазуров В. Д., О комитете системы выпуклых неравенств. Труды ICM-1966, М., МГУ, 1966.
13. Мазуров В. Д., Комитеты системы неравенств и задача распознавания. Кибернетика, № 3, 1971.
14. Сборник. Метод комитетов в распознавании образов. АН СССР, Уральский научный центр, Свердловск, 1974.
15. Ablow CM., Kaylor D. J., A commitee solution of the pattern recognition problem. IEEE Trans. IT-11, 3, 1965.
16. Вапник В.Н., Червоненкис А .Я. Теория распознавания образов. М.: Наука, 1974.-418 с.
17. Айзерман М.А., Браверман Э.М., Розоноэр Л.И. Метод потенциальных функций в теории обучения машин. М.: Наука, 1970. - 320 с.
18. Журавлёв Ю.И., Михалевич В.С. Алгоритмы распознавания, основанные на вычислении оценок для задач с пересекающимися классами // Труды ВЦ Польской АН. Варшава, 1974. - Вып. 145.
19. Ищук В.И. О поиске оптимальных весовых коэффициентов для одного класса алгоритмов вычисления оценок // Сборник работ по математической кибернетике. Изд. ВЦ АН СССР, 1976. - Вып.1. - С. 186-194.
20. Журавлёв, Ю. И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Проблемы кибернетики: Вып.33. - 1978. - С. 5-68.

21. Журавлев Ю. И., Туляганов Ш. Е., Измерение важности признака. Сб. «Вопросы кибернетики», вып. 38. Ташкент, ИК с ВЦ АН Уз. ССР, 1970, 29-42.
22. Журавлев Ю. И., Никифоров В.В., Алгоритмы распознавания, основанные на вычислении оценок. Кибернетика, № 3, 1971, 1-11.
23. Журавлев Ю. И., Камилов М. М., Туляганов Ш. Е., Алгоритмы вычисления оценок и их применение. «ФАН», Ташкент, 1974.
24. А. А. Алексаняном, Журавлев Ю. И., Об одном подходе к вопросу построения эффективных алгоритмов распознавания // Ж. вычисл. мат. и мат. физики. 1985. Т. 25, № 2. С. 283–291.
25. Дьяконов А.Г. О выборе системы опорных множеств для эффективной реализации алгоритмов вычисления оценок // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т.40. № 7 С.1104-1118.
26. Гуревич И.Б. О выборе ансамбля признаков распознающих систем по принципу распознавания // Автоматика. Киев. 1974. № 5. С.43-52.
27. Гуревич И.Б. Проблема распознавания изображений // Распознавание, классификация, прогноз. 1989. Вып. 2. С.280-329.
28. Дьяконов А.Г. Эффективные формулы вычисления оценок для алгоритмов распознавания с произвольными системами опорных множеств // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999 Т.39. № 11. С.1904-1918.
29. Shannon C. The synthesis of two-terminal switching circuits. BSTJ, 28v. № 1, 1949, 59-98.
30. Поваров Г. Н., Математическая теория синтеза контактных (1,k)-полюсников. ДАН СССР, 100 N5, 1995, 909-912.
31. Алексанян А. А. О границе применимости теоретико-группового описания отношений эквивалентности функций алгебры логики, сохраняющих множества тупиковых д.н.ф., “*Кибернетика*” N5, издательство *Наукова Думка* (*Киев*).
32. Lidl R., Niederreiter H. Finite Fields (2nd ed.). // Cambridge University Press, 1997.
33. Алексанян А., Дизъюнктивные нормальные формы над линейными функциями (Теория и приложения), Ереванский государственный университет 1990.
34. Алексанян А., Реализация булевых функций дизъюнкциями произведений линейных форм, Докл.АН СССР , т. 304, 4, 1989, стр.781-784.
35. Алексанян А., О реализации квадратичных булевых функций системами линейных уравнений, “Кибернетика”, 1, 1989, стр.9-14.

36. Алексанян А., Серобян Р., Покрытия, связянные с квадратичными над конечным полем уравнениями, Докл.АН Арм.ССР , т. 93, 1, 1992, стр.6-10.
37. Aleksanyan and M. Papikian, On Coset Coverings of Solutions of Homogeneous Cubic Equations over Finite Fields, The Electronic Journal of Combinatorics, 8 (2001), R22, pp. 1-9.
38. Alexanian A., Gabrielyan V., Coverings of Symmetric Subsets in Finite Fields with Cosets of Linear Subspaces, Algebra, Geometry & Their Applications, Seminar Proceedings, vol. 3-4, 2004, Yerevan State University, pp. 110-124.
39. Габриелян В., О метрических характеристиках, связанных с покрытиями подмножеств конечных полей смежными классами линейных подпространств, Институт проблем информатики и автоматизации, Препринт НАН РА 04-0602, Ереван, 2004.
40. Габриелян В., О сложности покрытия системой смежных классов одного уравнения над конечным полемметрических характеристиках, связанных с покрытиями подмножеств конечных полей смежными классами линейных подпространств", Институт проблем информатики и автоматизации, Препринт НАН РА 04-0603, Ереван, 2004.
41. H. Nurijanyan, On the Number of Irreducible Linearised Coverings for Subsets in Finite Fields 2010.
42. A.V. Minasyan, On Minimal Coset Covering of Solutions of a Boolean Equation, Proceedings of the Yerevan State University 2015, 1, p. 26-30.
43. A.V. Minasyan, Number of Orbits of Group Acting on the Sets of Solutions of Polynomial Equations, Proceedings of CSIT 2017.
44. A.A. Alexanian, A.V. Minasyan, An Upper Bound for the Complexity of Coset Covering of Subsets in a Finite Field, National Academy of Sciences of Armenia, Reports 2017, Volume 117, N4, p. 287-291.
45. A.V. Minasyan, On the Minimal Coset Coverings of the Set of Singula and of the Set of Nonsingular Matrices, Proceedings of the Yerevan State University 2018, 52(1), p. 8-11.
46. A.V. Minasyan, On two Representations of Cosets, Вестник РАУ 2018, 1, p. 27-31.
47. Clark W. E., Hou X., Mihailovs A. The affinity of a permutation of a finite vector space. // Finite Fields and Their Applications, 2007, v. 13, i. 1, p. 80-112.